Astérisque

LAWRENCE BREEN

Rapport sur la théorie de Dieudonné

Astérisque, tome 63 (1979), p. 39-66

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__63__39_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 63 (1979) p. 39-66

RAPPORT SUR LA THÉORIE DE DIEUDONNÉ

par

Lawrence BREEN (Rennes[1])

-:-:-:-:-

1. Introduction.

C'est dans la série d'articles [17] - [19] que J. Dieudonné a élaboré la théorie qui porte son nom, avec pour but la classification des groupes de Lie formels sur un corps de base parfait de caractéristique positive. Cette théorie a été depuis réexaminée par de nombreux auteurs, et l'on entend de nos jours par théorie de Dieudonné, toute classification similaire des groupes formels, des groupes p-divisibles, ou même des groupes finis sur une base éventuellement plus générale.

Le but de cet exposé est double. D'une part, il est d'expliquer à des lecteurs peu familiers avec la théorie de Dieudonné quelles sont sa forme et sa signification dans le cas le plus classique. Aussi la passons nous assez longuement en revue, en adoptant la présentation due à P. Cartier [11] (voir également [34]), tout en la comparant à la théorie correspondante sur un corps de caractéristique nulle, plus familière. Par ailleurs, les théories de Dieudonné introduites à ce jour sont d'aspect assez varié, et une certaine confusion règne sur les liens qui les unissent. On s'efforce donc d'en passer un grand nombre en revue , et de donner quelques indications sur les relations entre elles. Aussi nous sommes-nous spécialement attachés à définir des flèches entre ces différentes théories, même lorsque l'on ne sait pas si celles-ci sont des isomorphismes. Les références concernant les diverses théories de Dieudonné envisagées seront indiquées au fur et à mesure. Signalons à ce propos que l'on trouvera dans [27] une bibliographie très fournie sur les groupes formels.

C'est un plaisir de remercier P. Berthelot et W. Messing pour les nombreuses conversations que nous avons eues ces dernières années sur différents aspects de la

----

1. Equipe de recherche associée au C.N.R.S. n° 451.

théorie de Dieudonné. Signalons cependant qu'on trouvera, à divers endroits de ce texte, des questions et des assertions de statut conjectural, qu'il a paru intéressant d'inclure pour la lumière qu'elles jettent sur le sujet. Naturellement, la responsabilité pour celles-ci, et plus généralement pour le texte tout entier, incombe uniquement à l'auteur.

Au départ, la théorie de Dieudonné se présente comme une variante en caractéristique positive de la théorie de Lie. Celle-ci associe à un groupe algébrique G connexe affine et lisse (sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle) son algèbre de Lie Lie(G) qui est un objet linéaire. Réciproquement, la donnée de l'algèbre de Lie de G détermine entièrement la loi de groupe locale (au sens analytique) au voisinage de l'origine du groupe G. Ainsi le foncteur Lie définit une équivalence entre ces deux catégories.

L'ambition de la théorie de Dieudonné classique est similaire : on va définir à partir de G un objet (semi-)linéaire D(G), le module de Dieudonné de G, et on se borne à reconstruire à partir de celui-ci une loi de groupe locale (au sens formel plutôt qu'analytique puisqu'on est en caractéristique p). Par ailleurs, on fait l'hypothèse que le groupe G est commutatif, pour la mauvaise raison qu'on ne sait pratiquement rien dire sans cette hypothèse (voir néanmoins [20] chapitre IV et [21] pour quelques résultats). Avant de donner la définition de D(G), on rappelle, de façon peut-être trop détaillée, ce à quoi se réduit la théorie de Lie sous cette hypothèse de commutativité. La situation est alors particulièrement simple: l'algèbre de Lie est triviale, elle est donc déterminée par sa dimension (qui est la dimension du groupe). Sur un corps, cet entier caractérise le groupe à isomorphisme près.

2. Théorie de Lie et calcul différentiel.

Soit k un anneau commutatif, et G un k-groupe affine. On appelle algèbre de Lie de G l'espace tangent à l'origine de G, muni d'une structure de k-algèbre de Lie qu'on peut négliger, comme on l'a dit, lorsque G est commutatif : précisément, on pose

$$\mathrm{Lie}\ G = \ker(G(D_1) \longrightarrow G(\mathrm{Spec}\ k))$$

avec $D_1 = \mathrm{Spec}(k[t]/t^2)$. Passons en revue quelques descriptions équivalentes des éléments de Lie G.

a) Un élément de l'algèbre de Lie correspond à un homomorphisme d'algèbres $\mathcal{X} : \mathcal{O}_G \longrightarrow k[t]/t^2$ où $\mathcal{O}_G$ est l'algèbre de G, qu'on peut mettre sous la forme suivante (pour tout $f \in \mathcal{O}_G$) :

$$\mathcal{X}(f) = \varepsilon(f) + X(f)\ t \qquad \mathrm{mod}\ t^2 \tag{2.1}$$

où $\varepsilon : \mathcal{O}_G \longrightarrow k$ est l'augmentation de $\mathcal{O}_G$ (correspondant à la section unité de G). Puisque $\mathfrak{X}$ est un homomorphisme d'algèbres, l'application k-linéaire X définie par (2.1) satisfait, pour tout $f,g \in \mathcal{O}_G$, à la relation

(2.2) $$X(fg) = X(f)\varepsilon(g) + \varepsilon(f)X(g)$$

et inversement, une telle application X détermine un élément $\mathfrak{X}$ de l'algèbre de Lie, grâce à la formule (2.1) . On appelle un tel X un vecteur tangent à G en l'origine.

b) A tout vecteur tangent X on associe une dérivation $\tilde{X}$ de $\mathcal{O}_G$ (on dira un champs de vecteurs sur G) en posant

(2.3) $$\tilde{X} : \mathcal{O}_G \xrightarrow{\mu^*} \mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_G \xrightarrow{1\otimes X} \mathcal{O}_G$$

où μ^* correspond à la loi de groupe sur G. Par construction $\tilde{X}$ est invariant par translation à gauche, c'est-à-dire que pour tout $g,h \in G(k)$

$$(dT_g)\tilde{X}(h) = \tilde{X}(gh)$$

où $T_g : G \longrightarrow G$ est le morphisme de translation à gauche par g, et où on désigne par Y(p) le vecteur tangent à G en un point p, (correspondant à une section $\eta : \mathcal{O}_G \longrightarrow k$) défini par

$$Y(p) : \mathcal{O}_G \xrightarrow{Y} \mathcal{O}_G \xrightarrow{\eta} k .$$

Remarque 2.1. Les considérations précédentes demeurent valable pour G un groupe formel défini sur un corps (ou plus généralement sur un anneau qu'on prendra pseudo-compact, voir [25] , [22]), pourvu qu'on prenne pour $X : \mathcal{O}_G \longrightarrow k$ une application k-linéaire continue. La structure de groupe n'intervient d'ailleurs pas dans la description a).

c) On appelle sous-groupe à un paramètre d'un groupe formel G un élément de $\mathrm{Hom}(\hat{G}_a,G)$ (dans la catégorie des groupes formels), où $\hat{G}_a$ désigne le groupe additif formel. Un choix de coordonnées de celui-ci détermine notamment un vecteur X tangent à $\hat{G}_a$ en l'élément neutre, d'où une application

(2.4) $$\partial : \mathrm{Hom}(\hat{G}_a,G) \longrightarrow \mathrm{Lie}\ G$$

qui associe à un sous-groupe à un paramètre γ le vecteur $(d\gamma)X$. On remarquera que ∂ est k-linéaire, la structure de k-vectoriel sur le terme de gauche provenant des homothéties $[a] : \hat{G}_a \longrightarrow \hat{G}_a$ associées aux éléments a de l'anneau k.

Lorsque k est une $\mathbb{Q}$-algèbre, la flèche ∂ est bijective (d'où une nouvelle description de l'algèbre de Lie) : en effet, on dispose alors d'une application exponentielle

$$(2.5) \qquad \begin{array}{ccc} \hat{G}_a \times \mathrm{Lie}\ G & \longrightarrow & G \\ (a\ ,\ X) & \longmapsto & \exp(aX) \end{array}$$

à laquelle correspond par adjonction une application inverse de (2.4). L'application (2.5) est k-bilinéaire, d'où un homomorphisme de foncteurs formels

$$(2.6) \qquad \hat{G}_a \underset{k}{\otimes} \mathrm{Lie}\ G \longrightarrow G\ .$$

La variante formelle de la théorie de Lie locale, à laquelle on fait allusion dans l'introduction, peut maintenant s'exprimer de manière succincte : c'est l'assertion que pour G un k-groupe de Lie formel, la flèche (2.6) est un isomorphisme de foncteurs formels.

d) Soit k un anneau commutatif artinien et $G = \mathrm{Spf}(A)$ un k-groupe formel commutatif, avec $\mathcal{O}_G = A$ un k-module topologiquement plat ; on peut identifier un vecteur tangent X au sens de a) à l'élément correspondant de la bigèbre (duale de $\mathcal{O}_G$) U_G des homomorphismes continus de A dans k, pour laquelle les flèches de structure sont définies par transposition à partir de celles de $\mathcal{O}_G$ (voir notamment [10], [20] I § 2.13 et sous des hypothèses plus générales sur k ou sur A, [22], [40], [52]). On pose $G^D = \mathrm{Spec}(U_G)$; c'est le dual (de Cartier) de G.
La condition (2.2) s'écrit maintenant

$$(2.7) \qquad \nu^* X = X \otimes 1 + 1 \otimes X$$

où ν^* désigne la comultiplication dans U_G (transposée de la loi d'anneau de $\mathcal{O}_G$), autrement dit X n'est autre qu'un élément de $\mathrm{Hom}(G^D, G_a)$. Cette description de l'algèbre de Lie est valable en toute caractéristique. Par ailleurs, lorsque k est une $\mathbb{Q}$-algèbre, l'accouplement (2.5) pour $G = G_m$ s'écrit

$$(2.8) \qquad \hat{G}_a \times G_a \longrightarrow G_m$$

et met $\hat{G}_a$ en dualité (de Cartier) avec G_a. La transposée (pour la dualité de Cartier) d'un élément $X \in \mathrm{Hom}(G^D, G_a)$ est le sous-groupe à un paramètre $\exp(X) \in \mathrm{Hom}(\hat{G}_a, G)$ (avec la notation (2.5)) ; son image par l'application ∂ (2.4) est le vecteur tangent X dont on était parti.

e) Aux descriptions précédentes de Lie G, il convient d'en ajouter une dernière, plus élaborée, et dont l'intérêt n'apparaîtra que par la suite. On appelle courbe sur un groupe de Lie formel G (défini sur une base de caractéristique quelconque) un morphisme pointé (dans la catégorie des schémas formels) $\gamma : \hat{D} \longrightarrow G$ de la droite formelle affine $D = \mathrm{Spf}\ k[[t]]$ sous jacente à $\hat{G}_a$ (pointée par l'élément neutre de $\hat{G}_a$) dans le schéma formel G (pointé de la même manière). Comme on l'a observé plus haut dans le cas particulier des sous-groupes à un paramètre, les scalaires $a \in k$, agissant par homothétie sur $\hat{D}$, définissent une structure de k-vectoriel sur le groupe CG des courbes sur G. Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 1$, on appelle décalé de rang n de γ la courbe

$$V_n\gamma : \hat{D} \longrightarrow \hat{D} \xrightarrow{\gamma} G$$

l'application de $\hat{D}$ dans elle-même étant le revêtement fini défini par $t \longmapsto t^n$. Enfin, lorsque G est commutatif, on dispose pour tout n d'un opérateur de Frobenius de rang n F_n, qui à une courbe γ associe sa trace par rapport au revêtement fini de rang n $\hat{D} \longrightarrow \hat{D}$ qu'on vient de mentionner (c'est malheureusement ce que l'on nomme le morphisme déduit de γ par décalage dans [15] IV § 3 n° 4.3). De manière précise, on note $\gamma^{(n)}$ l'application définie par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\hat{D}^n \arrow[r, "\gamma\times\ldots\times\gamma"] \arrow[d] & G^n \arrow[d, "+"] \\
\hat{D}^n/\Sigma_n \arrow[r, "\gamma^{(n)}"] & G
\end{tikzcd}$$

Le schéma formel quotient $\hat{D}^n/\Sigma_n$ est isomorphe à Spf $k[[u_1,\ldots,u_n]]$, u_i désignant le ième polynôme symétrique élémentaire en les coordonnées $t_1,\ldots,t_n$ de $\hat{D}^n$. On pose $F_n\gamma = (-1)^{n-1}\,\gamma^{(n)}\circ i_n$, où i_n est l'inclusion de $\hat{D}$ dans $\hat{D}^n/\Sigma_n$ définie par la coordonnée u_n. Les opérateurs d'homothétie, de Frobenius, et de décalage satisfont à diverses relations pour lesquelles on renvoie à [11].

Exemple 2.2. Notons $\underline{C}G$ le foncteur (sur les k-algèbres) des applications pointées de $\hat{D}$ dans G. Pour toute k-algèbre R, $\underline{C}\hat{\mathbb{G}}_m(R)$ s'identifie au groupe des éléments de $R[[t]]^*$ de la forme $1+a_1t+a_2t^2+\ldots$. On dispose d'une bijection (de foncteurs en ensembles)

$$E : D^\infty \longrightarrow \underline{C}\hat{\mathbb{G}}_m$$

définie par

$$E(a_1,a_2,\ldots) = \Pi(1-a_nt^n)^{-1} \ . \tag{2.9}$$

Par transport de structure, l'application E définit une structure de groupe sur D^∞, muni d'opérateurs F_n, V_n. C'est le groupe $\mathcal{W}$ des (gros) vecteurs de Witt.

Il y a deux manières de retrouver l'algèbre de Lie de G à partir de CG. L'une consiste à considérer la filtration C_iG induite sur CG par les voisinages infinitésimaux de la section de $\hat{D}$. On trouve que l'homomorphisme surjectif χ : CG $\longrightarrow$ LieG induit par immersion de D_1 dans $\hat{D}$ induit un isomorphisme

$$CG/C_2G \simeq \text{Lie } G \ . \tag{2.10}$$

L'autre méthode est valable si la base k est une $\mathbb{Q}$-algèbre. On définit un opérateur π : CG $\longrightarrow$ CG par la formule

$$\pi = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mu(n)}{n} V_n F_n \tag{2.11}$$

(avec μ la fonction de Möbius), formule qui a un sens puisque CG est complète et séparée pour la filtration $\{C_i G\}$ mentionnée et que la série $\pi\gamma \in CG$ converge.

On vérifie que π satisfait aux formules

$$F_m \pi = 0 \qquad m > 1 \tag{2.12}$$

$$\pi V_n = 0 \qquad n > 1 \tag{2.13}$$

(la preuve de (2.12) est formellement la même qu'en [9] proposition 3.1, mais on prendra garde qu'un autre π est considéré dans loc. cit. ; la démonstration de (2.13) est tout à fait similaire).

Définition 2.3.[2] *On dit qu'une courbe* γ *est* 1-*typique si* $F_n \gamma = 0$ *pour tout* $n > 1$.

Compte tenu de (2.12), (2.13), π est un projecteur et son image est le groupe $C^{\{1\}}G$ des courbes 1-typiques de G. Par passage au quotient, π induit compte tenu de (2.10) un isomorphisme

$$\tilde{\pi} : \text{Lie } G \longrightarrow C^{\{1\}}G \ .$$

Par ailleurs, il résulte de la définition explicite de la loi de groupe sur G_a que tout sous groupe à un paramètre est 1-typique ; $\tilde{\pi}$ fournit donc une description explicite de l'application exponentielle, inverse de l'isomorphisme ∂ (2.4). En particulier, pour $G = G_m$ ceci n'est autre que la formule classique

$$e^t = \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + (-1)^{n-1} t^n)^{\frac{\mu(n)}{n}} \ . \tag{2.14}$$

Remarque 2.4. On peut décrire toute courbe γ de G de manière tout à fait analogue à celle employée en (2.2), (2.7) pour les éléments de Lie G : une courbe correspond à un homomorphisme d'algèbres $\gamma^* : \mathcal{O}_G \longrightarrow k[[t]]$, qu'on écrit

$$\gamma^*(f) = \sum_{i \geqslant 0} Z_i(f) t^i \tag{2.15}$$

pour tout $f \in \mathcal{O}_G$, telle que

1) $Z_o = \varepsilon$

puisque γ est une application pointée, et

2) $\nu^* Z_i = \sum_j Z_j \otimes Z_{i-j}$ pour tout i ,

puisque γ^* est un homomorphisme d'algèbres.

Les applications Z_i s'identifient à des éléments de l'algèbre U_G et on peut leur faire correspondre, par le procédé indiqué en (2.3) pour $i = 1$, des opérateurs différentiels $\tilde{Z}_i$ d'ordre $\leqslant i$ (voir également [15] II § 4 n° 6.5)

---

2. Cette terminologie n'est pas couramment employée.

3. Théorie de Dieudonné-Cartier ([11], [34], [9] II § 1, [53]).

Sur un corps k de caractéristique >0, on ne peut reconstruire le groupe de Lie formel G à partir de son algèbre de Lie, mais la connaissance du groupe CG des courbes sur le groupe G détermine celui-ci. On a vu ci-dessus que CG est muni d'une structure k-linéaire, ainsi que d'opérateurs V_n, F_n pour $n \geqslant 1$. Il possède en fait une structure plus riche :

Lemme 3.1. *Il existe une et une seule application* $\mathbb{Z}$*-bilinéaire*

$$\underline{C\hat{G}}_m \times \underline{CG} \longrightarrow \underline{CG}$$
$$(\partial \ , \gamma) \longmapsto \partial * \gamma$$

qui satisfasse aux propriétés suivantes :

1) *Pour tout* $n \geqslant 1$ $\qquad V_n(\partial * F_n \gamma) = V_n \partial * \gamma$

2) *Pour tout* $a \in k$, $\qquad (1-at)^{-1} * \gamma = [a]\gamma$

(où [a] *désigne la structure* k*-linéaire mentionnée sur* CG*). On en déduit, compte tenu de l'isomorphisme* E *de l'exemple* 2.2*, une application*

$$\mathcal{W} \times \underline{CG} \longrightarrow \underline{CG} .$$

Esquissons la démonstration du lemme : tout élément $\partial \in \underline{CG}_m$ s'écrit de manière unique sous la forme $\partial(t) = \prod_n (1-a_n t^n)^{-1}$, il suffit donc de connaître $(1-a_n t^n)^{-1} * \gamma$. Or $(1-a_n t^n)^{-1} = V^n(1-a_n t)^{-1}$ ce qui, en vertu de 1) nous ramène au cas n=1, lui-même justiciable de 2). On vérifie que ceci définit sans ambiguïté l'application cherchée.

Soit $\underline{\hat{C}G}$ le complété formel de $\underline{CG}$ (restriction de $\underline{CG}$ aux k-algèbres finies) et $\mathcal{C}G \subset \underline{CG}$ le sous-foncteur des courbes pour lesquelles, avec la notation (2.15), $Z_i = 0$ pour presque tout i. La flèche du lemme 3.1 induit une application

$$\mathcal{C}\hat{G}_m \times CG \longrightarrow \mathcal{C}G \longrightarrow G \tag{3.1}$$

où la seconde flèche envoie une courbe sur sa valeur en t = 1. L'isomorphisme (2.9) identifie $\mathcal{C}\hat{G}_m$ au sous-groupe $\hat{\mathcal{W}}$ de $\mathcal{W}$ défini par $\hat{\mathcal{W}}(R) = (a_1, a_2, \ldots)$ où les a_i sont des éléments presque tous nuls de la k-algèbre finie R, d'où un accouplement

$$\hat{\mathcal{W}} \times CG \longrightarrow G \tag{3.2}$$

qui est la généralisation aux courbes de l'exponentielle (2.5).

Il résulte de la propriété 1) du lemme 3.1 que l'accouplement (3.2) satisfait à

(3.3) $$\langle V_n w, \gamma\rangle = \langle w, F_n \gamma\rangle$$

et l'on vérifie également la relation

(3.4) $$\langle F_n w, \gamma\rangle = \langle w, V_n \gamma\rangle \ .$$

L'application (3.2) induit par adjonction un morphisme

(3.5) $$CG \longrightarrow \mathrm{Hom}(\hat{\mathcal{W}}, G).$$

La démonstration du lemme 3.1 montre que c'est un isomorphisme, d'inverse l'application induite par l'inclusion $\hat{D} \longrightarrow \hat{\mathcal{W}}$ qui envoie $a \in R$ vers le vecteur de Witt $(a,0\ldots.)$. Soit $\hat{\mathcal{D}}_k$ l'anneau opposé à l'anneau des endomorphismes de $\hat{\mathcal{W}}$ (pour la description duquel on renvoie à [11] pp. 50 et 52). L'isomorphisme (3.5) définit (par transport de structure) une structure de $\hat{\mathcal{D}}_k$-module à gauche sur CG, d'où un homomorphisme de foncteurs formels[3] analogue à (2.6)

(3.6) $$\psi : \hat{\mathcal{W}} \underset{\hat{\mathcal{D}}_k}{\otimes} CG \longrightarrow G \ .$$

En fait, ψ est un isomorphisme en toute caractéristique, et la connaissance de CG (comme $\hat{\mathcal{D}}_k$-module) détermine bien celle de G. Ce résultat n'est pas très utile, à cause de la taille de l'anneau (non commutatif) $\hat{\mathcal{D}}_k$, et on a vu qu'en caractéristique nulle, le petit facteur Lie $G \simeq C^{\{1\}}G$ de CG (considéré comme k-module) suffisait à déterminer G. La théorie de Dieudonné pour les groupes de Lie formels (sous la forme que lui a donné Cartier), exprime le fait que, lorsque k est une $\mathbb{F}_p$-algèbre, on peut également travailler avec un assez petit facteur de CG.

De manière précise, on dira qu'une courbe γ est typique si elle satisfait aux conditions

$$F_n\gamma = 0 \quad \text{pour tout n premier à p.}$$

L'endomorphisme $\pi = \sum\limits_{(n,p)=1} \frac{\mu(n)}{n} V_n F_n$ de CG , analogue à (2.11), est un projecteur de CG sur l'ensemble CTG des courbes typiques sur G, qu'il identifie au quotient $CG/C^V G$ de CG par le sous-groupe $C^V G$ engendré par les images des V_n (pour tout n premier à p).

<u>Exemple</u> 3.2. Pour $G = \hat{G}_m$, on obtient par composition avec l'isomorphisme E_p obtenu à partir de E (2.9) par passage au quotient par les sous-groupes engendrés par les images des V_n (pour n premier à p), un isomorphisme

----

3. Lorsque la dimension du groupe formel est infini, il y a lieu de modifier légèrement la définition du produit tensoriel, voir [34] V 6.17 - 6.18.

$$(3.7) \qquad W_{p^\infty} \xrightarrow{E_p} C\hat{G}_m / C^V\hat{G}_m \xrightarrow{\pi} CT\hat{G}_m$$

(où $W = W_{p^\infty}$ désigne le groupe des vecteurs de Witt usuels). Ceci n'est autre que l'application bien connue $(a_0, a_1, \ldots) \longrightarrow \Pi E(a_i\ t^{p^{i-1}})$ ([47] V 16), où $E(t)$ est l'exponentielle de Artin-Hasse définie par

$$(3.8) \qquad E(t) = \exp(-\ t - \frac{t^p}{p} - \frac{t^{p^2}}{p^2} - \ldots)\ ,$$

comme on le vérifie en comparant la définition du projecteur π à la description suivante de $E(t)$, analogue à (2.14) :

$$(3.9) \qquad E(t) = \prod_{(n,p)=1} (1-t^n)^{\frac{\mu(n)}{n}}\ .$$

Compte tenu de la relation (3.3) et de l'identification déjà utilisée de W avec le quotient de $\mathcal{W}$ par le sous-groupe engendré par les images de V_n pout tout n premier à p, (3.2) induit une application

$$(3.10) \qquad \hat{W} \times CTG \longrightarrow G$$

où W est le foncteur formel des vecteurs de Witt usuels à coordonnées nilpotentes presque toutes nulles. On déduit de (3.10) un isomorphisme

$$(3.11) \qquad CTG \simeq \mathrm{Hom}(\hat{W}, G)\ .$$

Or, $\mathrm{Hom}(\hat{W},G)$ est de manière naturelle un module à gauche sur l'anneau opposé à $\mathrm{End}(\hat{W})$, et ce dernier s'identifie, par dualité de Cartier, à l'anneau $\hat{D}_k = \mathrm{End}(W)$ des endomorphismes de W, par un isomorphisme qui échange F et V compte tenu de (3.3) pour $G = G_m$. Par transport de structure, CTG est un $\hat{D}_k$-module à gauche et la théorie de Dieudonné-Cartier, sous sa forme la plus succincte, est l'assertion que (3.10) se factorise en un isomorphisme de foncteurs formels (G un groupe de Lie formel) :

$$(3.12) \qquad \psi^{(p)} : \hat{W} \otimes_{\hat{D}_k} CTG \xrightarrow{\sim} G$$

Rappelons pour fixer les idées que $\hat{D}_k$ est l'anneau $W(k)[F][[V]]$ quotienté par les relations

$$(3.13) \qquad FV = VF = p$$

$$(3.14) \qquad Fa = a^\sigma F \quad , \quad aV = Va^\sigma$$

pour $a \in W(k)$, $(\ )^\sigma$ désignant le relèvement à $W(k)$ du Frobenius sur k. L'action de F (resp. V) sur CTG s'obtient par projection sur CTG de l'opérateur F_p (resp. V_p).

Enfin, il reste à préciser quels sont les $\hat{D}_k$-modules qui correspondent à des groupes de Lie formels : ce sont les $\hat{D}_k$-modules M séparés et complets pour la topologie V-adique (pour laquelle les V^iM forment un système de voisinages de 0) sur lesquels

1) V est injective

2) M/VM est un k-module libre de rang fini (égal à la dimension G) (voir [11]).

Remarques 3.3.

a) Un procédé explicite (voir [41], [53], [44] appendice, [42] théorème 1) permet de construire des résolutions libres du $\hat{D}_k$-module CTG. L'isomorphisme (3.12) permet donc d'exprimer tout groupe formel G comme quotient de produits de groupes de vecteurs de Witt formels. C'est au moyen de la matrice à coefficients dans $\hat{D}_k$ associée à la résolution de CTG considérée que Dieudonné décrivait originellement le groupe formel G.

b) On vient de résumer la théorie de Dieudonné sous la forme que lui a donnée Cartier. Pour retrouver sa forme primitive , il suffit de remarquer que l'accouplement (3.10) pour $G = \hat{G}_m$ définit, compte tenu de l'exemple 3.2, une autodualité des groupes de vecteurs de Witt usuels

$$\hat{W} \times W \longrightarrow \hat{G}_m \quad . \tag{3.15}$$

On déduit de (3.11), par transposition du terme de droite (pour la dualité de Cartier), un isomorphisme

$$CTG \simeq \mathrm{Hom}(G^D,W) \tag{3.16}$$

qui généralise la description donnée au § 2 d) de l'algèbre de Lie de G. Une courbe typique correspond à une suite $(X_1,X_2,\ldots)$ d'éléments de la bigèbre U_G qui satisfont à des conditions similaires à (2.7) (faisant intervenir la loi de groupe de W) qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter. On peut également, comme en § 2 b) remplacer les éléments X_i de U_G par les opérateurs différentiels correspondants. C'est essentiellement le point de vue adopté par Dieudonné dans [16]. Par ailleurs, l'application inverse de celle donnée en (3.16) mérite d'être explicitée : c'est la flèche

$$\mathrm{Hom}(G^D,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G^D,CTG_m) \simeq CTG$$

où la première flèche est induite par (3.7). C'est de cette manière qu'on retrouve, à partir d'éléments $(X_1,X_2,\ldots)$ de U_G des éléments $(Z_1,Z_2,\ldots)$ de U_G définissant, comme on l'a dit dans la remarque 2.4, une courbe de G.

c) Une généralisation assez naturelle de la notion de courbe typique aux groupes finis connexes est la suivante : on appellera 1-courbe de G un élément du groupe de cohomologie relative à la section de $\hat{D}$:

$${}^{1}CG = \ker(H^1(\hat{D},G) \longrightarrow H^1(k,G))$$

(pour la topologie plate sur le site $Vk/\hat{D}$ des schémas formels sur $\hat{D}$, voir [25] VII_B 0.1, [36] p. 349). Pour tout $n \geqslant 1$, le revêtement de rang n de $\hat{D}$ par lui-même induit par fonctorialité un opérateur V_n sur ${}^1CG$. D'autre part, pour tout morphisme fini $f : T \longrightarrow S$, on définit dans [12] XVII, [13] la trace relativement à f d'un G-torseur sur T. On dispose donc également pour tout n d'opérateurs F_n sur ${}^1CG$. Par ailleurs (et ceci permet d'éviter cette construction explicite de F_n), on dispose d'un isomorphisme analogue à (3.5)

(3.17) $$ {}^1CG \simeq \mathrm{Ext}^1(\hat{\mathcal{W}}, G) $$

(le Ext^1 étant pris pour la topologie plate sur le site Vf/k) et donc, par transport de structure, d'une structure de $\hat{\mathcal{D}}_k$-module formel sur les 1-courbes. On dira qu'une 1-courbe est typique[4] si elle est annulée par les opérateurs F_n, pour tout n premier à p. On déduit de (3.17) des isomorphismes de $\hat{D}_k$-modules

(3.18) $$ {}^1CTG \simeq \mathrm{Ext}^1(\hat{W}, G) \simeq \mathrm{Ext}^1(G^D, W) \ . $$

Lorsque G est un groupe fini connexe, c'est, comme l'a observé F. Oort dans [45], ce D_k-module qui devrait remplacer le module des courbes typiques. Pour un tel G (ou plus généralement pour toute extension d'un tel G par un groupe formel lisse), c'est par la flèche

$$ \hat{W} \overset{L}{\underset{D_k}{\otimes}} t_{\lceil 1 \rfloor} \mathrm{Rhom}(\hat{W}, G) \longrightarrow G $$

dans la catégorie dérivée qu'il convient de remplacer (3.2) (le terme de droite étant concentré en degré 0). Il faudrait vérifier qu'une telle flèche est un quasi-isomorphisme.

d) On attire l'attention du lecteur sur le fait que la notion de courbe (resp. de courbe typique) garde un sens pour un foncteur F quelconque sur les k-algèbres finies, non nécessairement représentable par un groupe formel. On doit à S. Bloch [9] l'étude des groupes CTK_i des courbes typiques sur les foncteurs K_i de la K-théorie algébrique, non représentables dès que $i > 1$. Pour une autre description de ceux-ci, voir [31] ; pour la théorie de Dieudonné correspondante, voir [54].

4. Théorie contravariante.

Il existe un autre procédé de classification des groupes, distinct de la théorie de Dieudonné-Cartier mais équivalent à celle-ci dans certains cas comme on le verra plus loin. Alors que cette théorie s'obtenait, comme on l'a vu en (3.16), en envoyant un groupe affine unipotent G^D dans le groupe W, limite projective des groupes W_i de vecteurs de Witt de longueur i, il s'agit maintenant d'envoyer un

----

4. On ne confondra pas la notion de 1-courbe typique avec celle de courbe 1-typique introduite dans la définition 2.3.

groupe affine commutatif unipotent H défini sur un corps parfait k de caractéristique p dans une limite inductive $\underset{\rightarrow}{W}$ des W_i.

Au départ, ce procédé de classification repose sur l'observation que la catégorie $\mathcal{C}$ des schémas en groupes finis commutatifs sur un corps k de caractéristique p > 0 est une catégorie abélienne. On peut donc la réaliser comme catégorie de modules sur un anneau (non commutatif, voir [39]). Cette réalisation dans le cas de $\mathcal{C}$ est essentiellement le module de Dieudonné introduit par P. Gabriel dans [24] (voir [35] I § 4). On doit diverses variantes et généralisations de ce point de vue à T. Oda [43], I. Barsotti [3] et J-M. Fontaine [22]. La présentation adoptée ici est inspirée par le mémoire de Fontaine, auquel on espère que les paragraphes qui suivent pourront servir d'introduction. Parmi d'autres références utiles sur cette théorie contravariante, citons [35], [15], [14], [26]. Signalons enfin que, lorsque le corps de base k n'est plus parfait, on dispose d'une théorie parallèle élaborée par C. Schoeller [46] (voir également [49], [33]). Dans ce cas, l'anneau de Cohen $\mathcal{C}(k)$ (pour un choix de p-base de k donné) joue le rôle qui revient à W(k) dans le cas où k est parfait.

Abordons maintenant la description du module de Dieudonné contravariant : on considère le système inductif de schémas

$$\underset{\rightarrow}{W} : W_1 \longrightarrow W_2 \longrightarrow \dots$$

où le morphisme $T : W_i \longrightarrow W_{i+1}$ est défini par $T(X_1,\dots,X_i) = (0,X_1,\dots,X_i)$. Lorsque la base k est un corps parfait, ce que l'on supposera désormais, W(k) opère sur $\underset{\rightarrow}{W}$ par

$$\lambda * x = (F^{1-n}\lambda)\, x$$

pour $\lambda \in W(k)$, $x \in W_n$ (la multiplication dans le terme de droite étant induite par la loi d'anneau de W). Les opérateurs F et V sur W_n induisent des opérateurs correspondants sur $\underset{\rightarrow}{W}$ (que l'on identifie désormais à sa limite inductive).

Soit G un k-groupe commutatif unipotent. On pose

$$M(G) = \mathrm{Hom}(G,\underset{\rightarrow}{W}) = \varinjlim \mathrm{Hom}(G,W_n) \ . \tag{4.1}$$

Compte tenu de ce qui précède, M(G) est un module à gauche sur l'anneau D_k engendré sur W(k) par des éléments F et V satisfaisant aux relations (3.13)-(3.15). Le théorème de structure de Gabriel mentionné ci-dessus affirme plus précisément que le foncteur M est une anti-équivalence entre la catégorie des p-groupes affines unipotents et celle des D_k-modules à gauche sur lesquels V est localement nilpotent. En particulier, les p-groupes finis correspondent aux D_k-modules pour lesquels le W-module sous-jacent est de longueur finie (et V est nilpotent).

Cette classification a été étendue par Oda [43] à la catégorie de tous les p-groupes finis : sur un corps parfait, un tel groupe est produit d'une composante unipotente et d'une composante multiplicative. Or, celle-ci correspond, par dualité de Cartier, à un groupe étale, qu'il est facile d'étudier par un argument de descente galoisienne. Une façon d'exprimer ce résultat est de dire que le foncteur M (4.1) peut être prolongé à la catégorie de tous les p-groupes finis, par une définition appropriée dans le cas où le groupe est de type multiplicatif ([43] définition 3.12).

Une manière plus intrinsèque de procéder repose sur une construction de Barsotti [3], réexaminée récemment par Fontaine [22]. Elle consiste à étendre le foncteur M (4.1) à la catégorie de tous les p-groupes en remplaçant $\underset{\rightarrow}{W}$ par un objet plus gros, le groupe CW des covecteurs de Witt. Précisément, on définit un foncteur CW sur les k-algèbres R de la manière suivante : un élément de CW(R) est une suite infinie $(\ldots,a_{-1},a_o)$ d'éléments de R qui satisfont à la condition suivante[5] :

il existe un entier $r \geqslant 0$ *tel que l'idéal de* R *engendré par les* a_{-n} *pour* $n \geqslant r$ *soit nilpotent.*

La loi de groupe dans CW(R) est définie de la manière suivante : soient $\underline{a} = (\ldots,a_{-1},a_o)$ et $\underline{b} = (\ldots,b_{-1},b_o)$ deux éléments de CW(R) ; on note alors $S_m(X_o,\ldots,X_m\ ;\ Y_o,\ldots,Y_m)$ le (m+1)ième polynome universel définissant la loi de groupe dans le groupe W des vecteurs de Witt. Pour tout entier $n > 0$, la suite des $S_m(a_{-n-m},\ldots,a_{-n}\ ;\ b_{-n-m},\ldots,b_{-n})$ est stationnaire et l'on note S_{-n} sa limite. On pose, dans CW(R)

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{S} = (\ldots,S_{-1},S_o)\ . \tag{4.2}$$

On vérifie que c'est un élément de CW(R) et que (4.2) définit une loi de groupe dans CW(R).

Un élément de $\underset{\rightarrow}{W}$ équivaut à un covecteur à composantes presque toutes nulles : il suffit d'identifier l'élément $(X_o,\ldots,X_{n-1})$ de W_n au covecteur $(\ldots 0,0,X_o,\ldots,X_{n-1})$ de composantes presque toutes nulles. Par ailleurs, les opérations de W(k), (resp. F, resp. V) sur $\underset{\rightarrow}{W}$ se prolongent à CW, qui est donc un foncteur en D_k-modules à gauche. En particulier on a

$$F(\ldots,a_{-1},a_o) = (\ldots,a_{-1}^p,a_o^p)$$

$$V(\ldots,a_{-1},a_o) = (\ldots,a_{-2},a_{-1})\ .$$

Pour tout k-groupe affine G, on pose

$$M(G) = \mathrm{Hom}(G,CW)\ . \tag{4.3}$$

----

5. Cette condition, due à Fontaine, est plus restrictive que celle de Barsotti.

Le foncteur M est une anti-équivalence entre la catégorie des p-groupes finis et celle des D_k-modules qui sont de longueur finie comme W(k)-modules, et coïncide avec le foncteur défini par Oda (voir [22] III proposition 5.3, corollaire 3). Par ailleurs, on dispose d'une description explicite d'un foncteur quasi-inverse de M, déjà connue de Grothendieck ([26] II 6) dans le cas où G est unipotent, et qui est l'analogue de l'isomorphisme (3.12) défini en théorie de Cartier dans le cas d'un groupe formel. A un D_k-module $M = M(G)$, on fait correspondre le groupe G défini par

$$G(R) = \mathrm{Hom}_{D_k}(M(G), CW(R)) \tag{4.4}$$

pour toute k-algèbre finie R.

Les formules (4.3) et (4.4) qui décrivent la correspondance entre groupes et modules de Dieudonné ont été étendues par Fontaine du cas des p-groupes finis au cas où G est un groupe formel qui est limite inductive des sous groupes ${}_{p^n}G$, noyaux de la multiplication par p^n sur G (on dira alors que G est un p-groupe formel), ce qui englobe notamment le cas où G est un groupe formel connexe et le cas déja étudié où G est fini : on pose dans la catégorie des k-foncteurs formels

$$M(G) = \mathrm{Hom}(G, \widehat{CW}) \tag{4.5}$$

où l'on note $\widehat{CW}$ le complété formel de CW (restriction aux k-algèbres finies du foncteur CW). Le foncteur M est à nouveau une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des p-groupes formels et une certaine catégorie de D_k-modules, pour la description de laquelle on renvoie à [22] III théorème 1.

En plus du cas où G est fini, mentionné plus haut, deux cas particuliers méritent une mention particulière

1) G est un groupe p-divisible si et seulement si M(G) est libre comme W-module, de rang fini (égal à la hauteur de G).

2) La restriction du foncteur M à la catégorie des groupes formels lisses et connexes coïncide avec le foncteur M défini par passage à la limite à partir du cas des groupes finis dans [22] ch. III § 9, et c'est une anti-équivalence avec la catégorie des W(k)[[F]]-modules[6] de type fini M sur lesquels F est injective, et qui vérifient la relation

$$pM \subset FM .$$

Dans ce cas, la structure de W(k)[[F]]-module sur M se prolonge de manière unique en une structure de W(k)[[F]][V]-module, et le foncteur quasi-inverse à M( ) associe à un tel module M le groupe formel G dont les points à valeurs dans une k-

----

6. W(k)[[F]] désignant l'anneau des séries formelles non commutatives en F, qui satisfont à la relation (3.14).

algèbre finie R sont donnés par la formule

$$G(R) = \mathrm{Hom}_{W(k)[[F]][V]}(M, \widehat{CW}^c(R)) \tag{4.6}$$

où $\widehat{CW}^c$ désigne la composante connexe du foncteur formel $\widehat{CW}$. Dans le cas d'un p-groupe formel quelconque, on dispose encore d'une formule du type (4.4), à condition de considérer des homomorphismes continus pour une topologie appropriée sur M (voir [22] III théorème 1).

Exemple 4.1. $M(\hat{G}_m)$, qui est un W-module libre de rang 1 sur lequel $F = p$, possède une base naturelle : c'est l'homomorphisme

$$\varphi : \hat{G}_m \longrightarrow \widehat{CW}$$

défini par $\varphi(x) = (\ldots, y, y)$ où y est le "logarithme d'Artin-Hasse" de x, défini par la relation $F(y) = x$, avec F l'exponentielle de Artin-Hasse introduite en (3.8).

Remarques 4.2.

a) On a vu dans la remarque 3.3. a) que la théorie de Cartier consistait en la description d'un groupe formel comme conoyau de produits de $\hat{W}$. La théorie contravariante l'exprime, via (4.6), pour un choix de résolution projective de M, comme noyau d'une flèche entre des sommes de $\widehat{CW}^c$ dans le cas connexe (resp. entre sommes de $\widehat{CW}$ dans le cas général).

b) Le module de Dieudonné de G coïncide, par le lemme de Yoneda, avec le groupe des éléments x de l'anneau $\widehat{CW}(\mathcal{O}_G)$ qui satisfont à la relation

$$\mu^* x = x \otimes 1 + 1 \otimes x \tag{4.7}$$

pour $\mu^* : \widehat{CW}(\mathcal{O}_G) \longrightarrow \widehat{CW}(\mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_G)$ la flèche induite par la loi de groupe de G. Barsotti appelle un tel élément un covecteur canonique.

c) On connait bien la façon d'identifier un p-anneau strict A de corps résiduel parfait k avec l'anneau W(k) ([48] II théorème 5) : tout élément $a \in A$ s'écrit sous la forme

$$a = \sum_{n \geqslant 0} p^n [a_n^{p^{-n}}]$$

de manière unique, [b] désignant le représentant multiplicatif dans A d'un élément b de k ; à un tel $a \in A$ on fait correspondre l'élément $(a_0, a_1, \ldots) \in W(k)$. Plus généralement, tout élément $a \in K = \mathrm{Fract}(A)$ s'écrit sous la forme

$$q = \sum_{n > -\infty} p^n [a_n^{p^{-n}}]$$

et l'application qui lui associe le covecteur $(\ldots, a_{-1}, a_0)$ induit un isomorphisme A-linéaire

$$K/pA \xrightarrow{\sim} CW(k) \quad . \tag{4.8}$$

Explicitons l'application inverse : elle est définie par

$$w_A(\ldots,a_{-1},a_o) = \sum_{i\geqslant o} p^{-i}\, \hat{a}_{-i}^{p^i} \quad \text{mod } pA \tag{4.9}$$

où le terme $\hat{a}$ désigne un relèvement quelconque à A de l'élément $a \in k$. Une telle application w_A est encore définie pour des anneaux A sensiblement plus généraux (voir [22] II proposition 5.4) et notamment pour un anneau $R = W(k)[[T_1,\ldots T_n]]$. Dans ce cas la formule (4.9) définit une application injective

$$w_A : CW(R_k) \longrightarrow S/pR \quad , \tag{4.10}$$

avec $R_k = R/pR = k[[T_1,\ldots,T_n]]$ et $S = R \underset{W(k)}{\otimes} K$. L'image de l'application w_A est PR/pR où PR désigne l'ensemble des éléments $f \in S$ tels que $df \in \Omega^1_{R/k}$.

Par ailleurs, on peut également réindexer un covecteur en l'écrivant $(\ldots,a_{-2},a_{-1})$. Dans ce cas, la formule

$$w_A(\ldots,a_{-2},a_{-1}) = \sum_{i\geqslant 1} p^{-i}\, \hat{a}_{-i}^{p^i} \quad \text{mod } A \quad (\text{resp. mod } R) \tag{4.11}$$

analogue à (4.10) fournit une application

$$CW(k) \xrightarrow{\sim} K/A$$

$$(\text{resp.} \qquad CW(R_k) \longrightarrow S/R \quad),$$

qu'il convient alors de substituer à (4.9) (resp. 4.10).

d) On conserve les notations de la remarque précédente. L'application w_A permet de décrire très explicitement le module de Dieudonné d'un groupe formel $G = \mathrm{Spf}(R_k)$. On choisit un relèvement $\Gamma = \mathrm{Spf}(R)$ du groupe G au dessus de W et l'on note Γ_K la loi de groupe formelle sur Spec(K) obtenue à partir de Γ par passage à la fibre générique. Pour tout élément $f = f(\underline{\underline{T}})$ de l'anneau S des fonctions de Γ_K, on note de façon imagée par $f(\underline{\underline{T}}_1 + \underline{\underline{T}}_2)$ l'image de l'élément f de S dans $S \hat{\otimes} S = K[[T_1,\ldots,T_{2n}]]$ par la comultiplication qui définit la loi de groupe de Γ_K. A un covecteur canonique de G (au sens de la remarque 4.2 b) correspond par l'isomorphisme (4.10) un élément de S/pR qui satisfait à la condition (4.7) ; un tel élément s'identifie donc à une série $f(\underline{\underline{T}}) \in S$, considérée modulo p R, qui satisfait aux conditions

(A) $f(\underline{\underline{T}}_1+\underline{\underline{T}}_2) - f(\underline{\underline{T}}_1) - f(\underline{\underline{T}}_2) \in pW[[T_1,\ldots,T_n]]$

(B) $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{\underline{T}}} \in W[[T_1,\ldots,T_n]]$.

Un tel élément s'appelle un presque-logarithme (ou quasi-logarithme). L'ensemble L des (vrais) logarithmes de G s'identifie au sous-ensemble des éléments f qui satisfont à

$$(A') \quad f(\underline{\underline{T}}_1+\underline{\underline{T}}_2) - f(\underline{\underline{T}}_1) - f(\underline{\underline{T}}_2) = 0 .$$

A la différence de M(G), le sous D_k-module L dépend du choix du relèvement Γ de G à W.

Terminons en explicitant l'action de F et de V sur les éléments de M(G), décrits dans le langage des quasi-logarithmes : pour tout $f = \sum a_{\underline{\underline{i}}} T^{\underline{\underline{i}}} \in K[[T,\ldots,T_n]]$ qui satisfait à (A) et (B), on pose

$$(4.12) \qquad (Ff)(\underline{\underline{T}}) = \sum \sigma(a_{\underline{\underline{i}}})\, T^{p\underline{\underline{i}}}$$

$$(Vf)(T) = \sum \sigma^{-1}(a_{\underline{\underline{i}}})\, T^{\underline{\underline{i}}/p}$$

avec la convention que $\underline{\underline{i}}/p = 0$ si p ne divise pas chacune des composantes du multi-indice $\underline{\underline{i}}$ et σ le Frobenius absolu sur K.

e) La théorie contravariante a ceci de commun avec la théorie de Dieudonné-Cartier, qu'elle associe à un p-groupe formel un module M sur un anneau non-commutatif D_k. La principale lacune de la théorie consiste en ce que l'on ne sait pas classifier de tels modules. Cependant, si l'on localise le module M en inversant p, on obtient un module M_K sur l'anneau $D_k[\frac{1}{p}]$ qui s'identifie à l'anneau K[F] des polynômes non commutatifs sur K = Fract(W(k)) en une indéterminée F satisfaisant à la relation (3.14). La donnée d'un tel M_K, de K-dimension finie, qui possède un réseau M sur lequel F agit injectivement et tel que $pM \subset FM \subset M$, équivaut à celle d'un groupe p-divisible défini à isogénie près. Pour k algébriquement clos, ces objets ont été classifiés par Dieudonné [17] VII, Manin [35].

5. Dualité et comparaison des théories covariantes et contravariantes.

Lorsque G est un groupe fini, la formule suivante permet de comparer son module de Dieudonné à celui de son dual de Cartier :

$$(5.1) \qquad M(G^D) \simeq \mathrm{Hom}_W(M(G),K/W) .$$

Ceci est un isomorphisme de D_k-modules à gauche, où la structure de D_k-module sur le terme de droite est définie pour tout $u \in \mathrm{Hom}(M(G),K/W)$, par les formules suivantes, avec $a \in W(k)$, $x \in M(G)$:

$$(au)x = au(x)$$

$$(Fu)x = \sigma(u\,(Vx))$$

$$(Vu)x = \sigma^{-1}(u\,(Fx))$$

(voir [43] théorème 3.19, [14] III § 6, [22] III 5.3 corollaire 2). On peut poser la question de savoir si la formule (5.1) demeure valable lorsque G est un groupe formel connexe. En tout cas, si l'on suppose maintenant que G est un groupe p-divisible, on dispose d'une formule analogue à (5.1), à savoir l'isomorphisme

(5.2) $$M(G^t) \simeq \mathrm{Hom}_W(M(G),W).$$

Cette formule est due, au langage près, à Barsotti ([4] III théorème 4.3) et a été redémontrée par Oda [43] proposition 3.22. Elle peut s'obtenir sans difficulté par passage à la limite à partir de (5.1). Ici G^t désigne le groupe p-divisible dual, au sens de Serre, de G et on a un isomorphisme de foncteurs

(5.3) $$G^t \simeq G^D \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$$

qui compare dualité de Serre et de Cartier, et qu'on peut prendre pour définition de G^t. Ceci permet de réinterpréter le terme de gauche de (5.2) : on a en effet

(5.4) $$M(G^t) = \mathrm{Hom}(G^D \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, CW) \simeq \mathrm{Hom}(G^D, T_pCW)$$

où

(5.5) $$T_pCW = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, CW) = \varprojlim \ {}_{p^n}CW$$

désigne la module de Tate du foncteur CW. Le morphisme de Frobenius itéré sur CW induit par restriction une application σ^n-linéaire

$$F^n : {}_{p^n}CW \longrightarrow {}_{V^n}CW = W_n$$

d'où par passage à la limite projective une application

(5.6) $$\tilde{F} : T_pCW \longrightarrow W$$

induisant, compte tenu des identifications (5.4), (3.16), une application σ-linéaire

(5.7) $$\tilde{F}_* : M(G^t) \longrightarrow CTG$$

qui est un isomorphisme pour G un groupe de Lie formel p-divisible[7].

On déduit de (5.2), (5.7), sous cette hypothèse, un isomorphisme σ-linéaire de D_k-modules à gauche

(5.8) $$\mathrm{Hom}_W(M(G),W) \xrightarrow{\sim} CTG ,$$

ce qui implique que M(G) détermine CT(G) dans ce cas. En fait Fontaine a montré, sans hypothèse sur le groupe formel G, que CT(G) et M(G) se déterminent mutuellement. On déduit en effet de (4.4) par passage à la limite un isomorphisme

(5.9) $$CG \simeq \mathrm{Hom}^{cont}_{D_k}(M(G), CW(k[[t]]))$$

$$\simeq \mathrm{Hom}^{cont}_{D_k}(M^{(1)}(G), CW^{(1)}(k[[t]]))$$

----

7. Ce résultat, signalé allusivement dans la littérature ([1],[45]) mais non publié est dû à Messing. Il se démontre par passage à la limite à partir du cas des groupes finis.

où $M^{(1)}$ (resp. $CW^{(1)}$) désigne l'objet obtenu à partir de M (resp. CW) par extension des scalaires par le Frobenius sur W(k). Le terme $CW^{(1)}(k[[t]])$ peut être aisément décrit au moyen de la flèche w_R (pour $R = W[[t]]$) mentionnée en (4.10). Le sous-groupe des courbes typiques est décrit par un isomorphisme de D_k-modules à droite

(5.10) $$CTG \simeq \mathrm{Hom}_{D_k}^{cont}(M^{(1)}(G),\Theta)$$

obtenu à partir de (5.9) par examen de l'action de F sur CG. Pour la description du D_k-module à gauche Θ, on renvoie à [22] V 3.2 où il est noté Θ_k^{lc} .

Inversement, le module des courbes typiques détermine M(G) : on a en effet un isomorphisme de D_k-modules à gauche

$$M^{(1)}(G) \simeq \mathrm{Hom}_{D_k}^{cont}(CT(G),\Theta)$$

(où Θ est maintenant considéré comme D_k-module à gauche).

Question 5.1. Oda et Oort ont montré dans [44] (appendice, théorème 1 et corollaire 2) que pour tout D_k-module à gauche de W-type fini M, on dispose d'isomorphismes[8)]

(5.11) $$\mathrm{Hom}_W(M,W) \simeq \mathrm{Ext}^1_{D_k}(M,D_k)$$

(5.12) $$\mathrm{Ext}^1_W(M,W) \simeq \mathrm{Ext}^2_{D_k}(M,D_k).$$

On déduit de (5.8), (5.10), (5.11) pour G connexe p-divisible un isomorphisme σ-linéaire

$$\mathrm{Ext}^1_{D_k}(M(G),D_k) \simeq \mathrm{Hom}_{D_k}^{cont}(M^{(1)}(G),\Theta).$$

Peut-on l'obtenir directement, par exemple (à σ-linéarité près) comme cobord à partir de la suite exacte obtenue en partant de

$$0 \longrightarrow \hat{W}(k[[t]]) \longrightarrow B\hat{W}(k[[t]]) \longrightarrow C\hat{W}(k[[t]]) \longrightarrow 0,$$

et en passant aux composantes typiques en un sens approprié (pour la définition du groupe des bivecteurs BW, qu'on a soigneusement évitée dans ce texte, voir [4]) ? On peut poser une question similaire dans le cas des groupes finis. Il s'agit alors de comparer $\mathrm{Ext}^2_{D_k}(M(G),D_k)$ au groupe $\mathrm{Hom}_{D_k}(M(G),\Theta T_k)$, pour un D_k-module ΘT_k défini en [22] p. 155.

----

8. Berthelot et Illusie ont fait la remarque que ces isomorphismes se déduisent dans le cas où $k = \mathbb{F}_p$ (et où D_k est donc commutatif) du théorème de dualité de Grothendieck pour le morphisme $f : \mathrm{Spec}(D_k) \longrightarrow \mathrm{Spec}(W)$: on a alors un quasi-isomorphisme $\mathrm{Rhom}_W(M,W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rhom}_{D_k}(M,D_k)$ [1]. On n'a guère cherché de variante non commutative dont on pourrait déduire (5.11),(5.12).

6. Relèvements et théorie de Honda.

La classification des groupes formels sur un corps parfait k est étroitement liée à celle des relèvements d'un tel groupe sur $W(k)$ (ou plus généralement sur l'anneau des entiers d'une extension finie totalement ramifiée de $K = \mathrm{Frac}(W(k))$, de degré $e \leqslant p-1$) et au point de vue cristallin. On trouve une première trace de cette approche (dans laquelle à vrai dire la question des relèvements n'apparaît pas), dans [43], où Oda a démontré que pour toute variété abélienne A définie sur k, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(A,\Omega^1) & \longrightarrow & H^1_{DR}(A) & \longrightarrow & H^1(A,\mathcal{O}_A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| & & \\ 0 & \longrightarrow & M/FM^\sigma & \longrightarrow & M^\sigma/pM^\sigma & \longrightarrow & M^\sigma/VM & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{6.1}$$

où $M = M(A(p))$ désigne le module de Dieudonné (contravariant) du groupe p-divisible associé à A (resp. $M^\sigma = M^{(1)}(A(p))$), la suite exacte supérieure exhibant la filtration de Hodge sur la cohomologie de de Rham de A.

Cet énoncé est la réduction modulo p d'un énoncé renforcé, dû à Grothendieck ([26], voir également [50], [37], [38]), que l'on peut formuler de la manière suivante : on sait (voir [37] introduction et § 9, 13, 15) que M s'identifie au premier groupe de cohomologie cristalline $H^1_{cris}(A,\mathcal{O})$ de la variété abélienne A et que, pour tout choix d'un relèvement $\tilde{A}$ de A à $W(k)$, on dispose d'un isomorphisme $H^1_{cris}(A,\mathcal{O}) \simeq H^1_{DR}(\tilde{A})$ entre le groupe de cohomologie cristalline de A et le groupe de cohomologie de De Rham correspondant (voir [7] V théorème 2.3.2). Cet isomorphisme définit donc une filtration de Hodge sur M^σ, qui dépend du choix du relèvement $\tilde{A}$ de A :

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M^\sigma \longrightarrow M^\sigma/N \longrightarrow 0$$

dont la réduction modulo p coïncide avec la ligne inférieure de (6.1).

Ces considérations s'étendent au cas d'un groupe p-divisible G quelconque (non nécessairement de la forme $G = A(p)$) sur k. Messing a démontré dans [38] que la donnée d'un relèvement de G à $W(k)$ équivaut lorsque $p \neq 2$ à celle d'un relèvement de la filtration analogue à (6.1) en une filtration de $M^\sigma = M^{(1)}(G)$, soit encore, dans la formulation de Fontaine, à la donnée d'un sous-W-module L de $M = M(G)$ tel que l'application $\tilde{\rho} : L/pL \longrightarrow M/FM^\sigma$ induite par l'inclusion de L dans M soit un isomorphisme (voir [22] IV propositions 1.6 et 5.1 où le cas de relèvements à un anneau A ramifié sur $W(k)$ est également examiné).

Fontaine a généralisé en [22] IV théorèmes 1 et 2 cet énoncé au cas des p-groupes formels lisses et de dimension finie sur $W(k)$. Il convient de remplacer l'inclusion de L dans M par une application $W(k)$-linéaire $\rho : \mathcal{L} \longrightarrow M$ d'un $W(k)$-

module $\mathcal{L}$ libre de rang fini vers le module de Dieudonné M, telle que l'application

(6.2) $$\tilde{\rho} : \mathcal{L}/p\mathcal{L} \longrightarrow M/FM^{\sigma}$$

induite de ρ par passage au quotient soit un isomorphisme (pour G p-divisible, ρ est injective et l'on retrouve l'énoncé de Messing).

Indiquons brièvement comment ceci permet de retrouver la recette de Honda ([29], [30]) pour classer, à isomorphisme près, les lois de groupes formelles Γ sur W, en supposant, pour simplifier la notation, que Γ est de dimension 1 (pour plus de détails voir [22] V § 2). Dans ce cas $\mathcal{L}$ est un W-module libre de rang 1, de base ℓ . Puisque $\tilde{\rho}$ (6.2) est un isomorphisme, l'élément $\tilde{\ell} = \rho(\ell)$ engendre M comme $W[F]$-module, et les éléments $F^i\tilde{\ell}$, pour $1 \leq i \leq h$ (où $h = \dim M = ht(G)$) forment une base de M sur W(k). Puisque $\rho : \mathcal{L} \longrightarrow M$ passe au quotient en $\tilde{\rho}$, on a $\rho(p\mathcal{L}) \subset FM$ d'où une relation dans M

$$p\tilde{\ell} = \sum_{i=1}^{h-1} a_i F^i \tilde{\ell} .$$

Si l'on interprète les éléments de M comme des quasi-logarithmes (voir remarque 4.1. c), à un tel $\tilde{\ell}$ correspond une série formelle $\tilde{\ell}(X) \in R[[X]]$ satisfaisant à la condition (A) et à la relation suivante (où l'action de F sur $\tilde{\ell}$ a été explicitée en (4.12)) :

(6.3) $$(p - \sum a_i F^i)\tilde{\ell}(X) = pg(X) .$$

On peut choisir l'élément $g(X) \in W[[X]]$ de la forme $g(X) = X +$ termes de degré supérieur, et l'on vérifie que le choix d'un tel g détermine le logarithme $\tilde{\ell}$ et réciproquement. Mais la connaissance du logarithme $\tilde{\ell}$ détermine celle de la loi de groupe : on pose

$$X \underset{\Gamma}{+} Y = \ell^{-1}(\ell(X) + \ell(Y)),$$

et les conditions imposées à $\tilde{\ell}$ font automatiquement du terme de droite une loi de groupe définie sur W.

Remarque 6.1. La relation (6.3) peut se récrire

$$\tilde{\ell}(X) = g(X) + \sum_i \frac{a_i}{p} F^i \tilde{\ell}(X) .$$

C'est ce qu'Hazewinkel appelle l'équation fonctionnelle satisfaite par le logarithme ([27], [28]).

7. Remarques sur le point de vue cristallin.

L'interprétation cristalline du module de Dieudonné, qui apparaissait déjà en filigrane dans la discussion précédente sur le relèvement des groupes p-divisibles à W(k), est due à Grothendieck, dont le séminaire [26] demeure une bonne introduction à la question, et à Messing [38] et Mazur-Messing [37]. Elle a été réexaminée par Berthelot, Messing et moi-même dans l'article en préparation [6], dont l'exposé [5] dans ce volume constitue un résumé. Aussi préférons-nous ne pas reprendre ici la description du foncteur de Dieudonné cristallin (tout en adoptant la notation de [5]) et donner plutôt quelques compléments, notamment sur le lien entre la théorie cristalline et les objets précédemment introduits. La lecture de la fin de cette section présuppose celle de [5].

On se place dans le site des schémas de présentation finie sur le corps parfait k, munis de la topologie f.p.p.f. Pour tout k-groupe commutatif G, on déduit par passage à la limite à partir de la suite exacte

$$0 \longrightarrow {}_{p^n}G \longrightarrow G \xrightarrow{p^n} G$$

une suite exacte

(7.1) $$0 \longrightarrow T_pG \longrightarrow UG \longrightarrow G$$

où $UG = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}],G)$ est la limite du système projectif $\dots \xrightarrow{p} G \xrightarrow{p} G$. On a donc notamment pour G = CW une suite exacte[9)]

$$0 \longrightarrow T_pCW \longrightarrow UCW \longrightarrow CW .$$

On en déduit pour tout groupe H, limite inductive de k-groupes de présentation finie, un homomorphisme

(7.2) $$M(H) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(H,T_pCW) .$$

On suppose maintenant H p-divisible. Dans ce cas (7.2) est un isomorphisme. En effet, puisque H est de p-torsion, le produit tensoriel dérivé[10)] $H \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ est nul, d'où un isomorphisme

(7.3) $$H \overset{L}{\otimes} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \simeq H[1]$$

----

9. Signalons que le groupe UCW (lié au groupe des bivecteurs dont le rôle a été occulté dans cet exposé) intervient dans la théorie des représentations de Hodge-Tate de Fontaine ([22] V 1.8, [23]) et qu'il apparaît également dans Barsotti [4].

10. Le produit tensoriel dérivé est pris au sens des groupes abéliens dans un topos (voir [51] exposés VII et VIII).

dans la catégorie dérivée. Par ailleurs, on dispose également d'un quasi-isomorphisme $\underline{\mathrm{Rhom}}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, CW) \longrightarrow T_pCW$ qui prolonge (5.5), et il résulte par adjonction dans la catégorie dérivée un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1(H, T_pCW) \simeq \mathrm{Hom}(H, CW) = M(H) \tag{7.4}$$

qui est celui annoncé.

Par ailleurs, l'homomorphisme $\mathcal{F} : T_pCW \longrightarrow W$ introduit en (5.6) induit un homomorphisme

$$\mathcal{F}_1 : \mathrm{Ext}^1(H, T_pCW) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(H, W) .$$

Posons maintenant $G = H^t$. Le dual de Cartier de H est, en vertu de (5.3),

$$H^D = \underline{\mathrm{Hom}}(G^D \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mathbb{G}_m) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G) = T_pG$$

et on déduit donc de (3.18) un isomorphisme $\mathcal{F}_2 : \mathrm{Ext}^1(H, W) \longrightarrow {}^1\mathrm{CT}(T_pG)$. En définitive, compte tenu de (5.7), on dispose du diagramme commutatif suivant, qui résume la discussion précédente dans le cas où G est connexe :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(G^t, CW) \arrow[d, "\wr"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\
\mathrm{Hom}(G^D, T_pCW) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathcal{F}\ \wr"'] & \mathrm{Ext}^1(G^t, T_pCW) \arrow[d, "\mathcal{F}_1"] \\
\mathrm{Hom}(G^D, W) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Ext}^1(G^t, W) \arrow[d, "\wr\ \mathcal{F}_2"] \\
\mathrm{CTG} \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{CT}(T_pG)
\end{tikzcd} \tag{7.5}$$

les flèches β et α étant les homomorphismes-bord attachés respectivement à la suite exacte (7.1) et à sa duale (de Cartier).

Question 7.1 : Les applications $\mathcal{F}_1$, α, β sont-elles des isomorphismes ? (Il suffit évidemment de le démontrer pour l'une d'entre elles).

Introduisons maintenant, comme promis, le point de vue cristallin. Soit k un corps parfait ; on considère un élément affine du site CRIS(k/W(k)) : rappelons qu'il consiste en une immersion fermée $\mathrm{Spec}(A) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(B)$ (avec A une k-algèbre et B une W(k)-algèbre sur laquelle p est nilpotent) définie par un idéal I de B à puissances divisées compatibles à celles de pW(k). Les sections sur un tel ouvert du faisceau structural $\mathcal{O}_{k/W}$ sont définies par

$$\Gamma(\mathrm{Spec}(A) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{k/W}) = B.$$

Avec la notation de [5] 2.2, on définit un homomorphisme de faisceaux dans CRIS(k/W)

$$\chi_n : i_*({}_{p^n}CW) \longrightarrow \mathcal{O}_{k/W} / p^n\, \mathcal{O}_{k/W} \tag{7.6}$$

en associant à un élément $(\dots,a_{-2},a_{-1})$ de ${}_{p^n}CW(A)$ la classe modulo p^n de l'élément $\sum_{i=1}^{n+1} p^{n-i}\, \tilde{a}_{-i}^{p^i}$ de B, où $\tilde{a}_j$ désigne un relèvement à B de l'élément $a_j \in B/I = A$.

Pour tout k-schéma X et tout $i \geq 0$, l'application (7.6) induit en cohomologie un homomorphisme

$$\chi_n : H^i(X, {}_{p^n}CW) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{O}/p^n\mathcal{O})$$

où l'on pose dorénavant $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{k/W}$. En particulier, si l'on suppose que toutes les sections globales de X sont constantes, on a défini pour i = n = 1 une application

$$\chi_1 : {}_pH^1(X,CW) \simeq H^1(X, {}_pCW) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}/p\mathcal{O})$$

dont le but, lorsque l'on suppose en outre X propre et lisse sur k, s'identifie au premier groupe de cohomologie de De Rham de X. Celle-ci devrait coïncider avec l'homomorphisme $\varphi : {}_pH^1(X,CW) \longrightarrow H^1_{DR}(X)$ défini par Oda [43] théorème 5.10 (1).

Par passage à la limite sur n, les applications χ_n définies en (7.6) induisent un homomorphisme $\chi : T_pCW \longrightarrow \mathcal{O}_{k/W}$. On en déduit donc pour tout k-schéma X (resp. tout k groupe commutatif H) des applications

$$\chi_* : H^i(X,T_pCW) \longrightarrow H^i(X,\mathcal{O}_{k/W})$$

$$(\text{resp. } \chi_* : \mathrm{Ext}^i(H,T_pCW) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(H,\mathcal{O}_{k/W})).$$

Lorsque H est un groupe p-divisible, cette dernière flèche est un isomorphisme pour i = 1, puisqu'il en est de même par (7.4) et [5] théorème 4 des deux autres côtés du triangle commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^1(H,T_pCW) \arrow[rr, "\chi_*"] & & \mathrm{Ext}^1(H,\mathcal{O}_{k/W}) \\ & \mathrm{Hom}(H,CW) \arrow[ul, "\wr"] \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

Si l'on pose $H = G^t$, l'application χ_* permet donc la comparaison des termes du diagramme (7.5) avec le module de Dieudonné cristallin $\mathrm{Ext}^1(G^t,\mathcal{O})$ de G^t. Ceci permet par exemple de poser la question suivante dont la question 7.1 est un cas particulier :

Question 7.2 : Soit H un groupe p-divisible (non nécessairement connexe). L'application

$$\mathcal{F}_1 \circ \chi_*^{-1} : \mathrm{Ext}^1(H,\mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(H,W)$$

induit-elle un isomorphisme de la partie de pente < 1 de la source avec le but ?

Soit maintenant A une variété abélienne définie sur le corps parfait k et $j : A(p) \hookrightarrow A$ l'inclusion naturelle dans A du groupe p-divisible qui lui est associé. Celle-ci induit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1(A,T_pCW) & \xrightarrow{\chi_*} & \mathrm{Ext}^1(A,\mathcal{O}) \\ \Big\downarrow j^* & & \Big\downarrow j^* \\ \mathrm{Ext}^1(A(p),T_pCW) & \xrightarrow{\chi_*} & \mathrm{Ext}^1(A(p),\mathcal{O}) \end{array}$$

et l'on montre (en vérifiant qu'il en est de même des trois autres flèches du diagramme) que la flèche horizontale supérieure de celui-ci est un isomorphisme. L'isomorphisme composé

$$j^* \chi_* : \mathrm{Ext}^1(A,T_pCW) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A(p),\mathcal{O})$$

est essentiellement celui considéré par Oda [43] proposition 4.2. L'examen du cas d'une variété abélienne suggère la généralisation suivante :

Question 7.3 : Soient $i \geq 1$ et X un k-schéma propre et lisse. L'image de l'homomorphisme $\chi_* : H^i(X,T_pCW) \longrightarrow H^i(X,\mathcal{O}_{k/W})$ s'identifie-t-elle à la partie de pente ≤ 1 de $H^i(X,\mathcal{O}_{k/W})$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN M. et MAZUR B. : *Formal groups arising from algebraic varieties*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 10 (1977) 87-132.

[2] BARSOTTI I. : *Moduli canonici e gruppi analitici commutative*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13 (1959) 303-372.

[3] BARSOTTI I. : *Analytical methods for abelian varieties in positive characteristics*, Coll. Théorie des groupes algébriques, Centre Belge de Recherches Mathématiques, Bruxelles 1962.

[4] BARSOTTI I. : *Methodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 18 (1964), 1-25 ; 19 (1965), 277-330 et 481-512 ; 20 (1966) 101-137 et 331-365.

[5] BERTHELOT P. et MESSING W. : *Théorie de Dieudonné cristalline I*, ce volume.

[6] BERTHELOT P., BREEN L. et MESSING W. : *Théorie de Dieudonné cristalline II*, en préparation.

[7] BERTHELOT P. : *Cohomologie Cristalline des Schémas de caractéristique* $p > 0$, Lecture notes in Mathematics 407, Springer, Berlin 1974.

[8] BERTHELOT P. : *Généralités sur les* λ-*anneaux*, exposé V de *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch* (SGA 6) Lecture notes in Mathematics 225, Springer, Berlin 1971.

[9] BLOCH S. : *Algebraic* K-*theory and crystalline cohomology*, Publ. Math I.H.E.S. 47 (1978).

[10] CARTIER P. : *Groupes algébriques et groupes formels*, Coll. Théorie des groupes algébriques, Centre Belge de Recherches Mathématiques, Bruxelles 1962.

[11] CARTIER P. : *Groupes formels associés aux anneaux de Witt généralisés*, C.R.A.S. Paris, 265 (1967), 50-52 ; *Modules associés à un groupe formel commutatif. Courbes typiques*, idem, 129-132.

[12] DELIGNE P. : *La formule de dualité globale*, exposé XVIII de *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (SGA 4), Lecture notes in Mathematics 305, Springer, Berlin 1973.

[13] DELIGNE P. : Lettre à M. Raynaud, 9/11/70.

[14] DEMAZURE M. : *Lectures on* p-*divisible groups*, Lecture Notes in Mathematics 302, Springer, New-York 1972.

[15] DEMAZURE M. et GABRIEL P. : *Groupes algébriques*, Tome 1, North Holland Publ. Co., Amsterdam 1970.

[16] DIEUDONNÉ J. : *Le calcul différentiel dans les corps de caractéristique* $p > 0$, Congrès International des Mathématiciens, Amsterdam 1954.

[17] DIEUDONNÉ J. : *Lie groups and Lie hyperalgebras over a field characteristic* $p > 0$, I, Comm. Math. Helv. 28 (1954), 87-118 ; II, Am J. Math. 77 (1955) 218-244 ; III Math. Z., 63 (1955), 53-75 ; IV Am J. Math. 77 (1955), 429-452 ; V Bull. Soc. Math. France, 84 (1956), 207-239 ; VI Amer J. Math. 79 (1957) 331-388 ; VII Math. Ann. 134 (1957), 114-133 ; VIII, Am. J. Math. 80 (1958) 740-772.

[18] DIEUDONNÉ J. : *Witt groups and hyperexponential groups*, Mathematika 2 (1955) 21-31.

[19] DIEUDONNÉ J. : *On the Artin-Hasse exponential series*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 210-214.

[20] DIEUDONNÉ J. : *Introduction to the theory of formal groups*, M. Dekker, New-York, 1973.

[21] DITTERS E. : *Curves and formal (co)-groups*, Invent. Math. 17, (1972), 1-20.

[22] FONTAINE J-M. : *Groupes* p-*divisibles sur les corps locaux*, Astérisque 47-48 (1977).

[23] FONTAINE J-M. : *Modules Galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate*, ce volume.

[24] GABRIEL P. : *Sur les catégories localement noethériennes et leurs applications aux algèbres étudiées par Dieudonné*, Séminaire J-P. Serre 1960.

[25] GABRIEL P. : *Etude infinitésimale des schémas en groupes*, exposé VII_B de SGA 3 *(Schémas en groupes)* Lecture notes en mathematics 151, Springer, Berlin 1970.

[26] GROTHENDIECK A. : *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*, Université de Montréal, Montréal, 1974.

[27] HAZEWINKEL M. : *Formal groups and applications*, Academic Press 1978.

[28] HAZEWINKEL M. : *On formal groups. The functional equation lemma and some of its applications*, ce volume.

[29] HONDA T. : *Formal groups and zeta-functions*. Osaka Math. J. 5 (1968) 199-213.

[30] HONDA T. : *On the theory of commutative formal groups*, J. Math. Soc. Japan 22 (1970) 213-246.

[31] ILLUSIE L. : *Complexe de De Rham-Witt*, ce volume.

[32] ILLUSIE L. : *Report on crystalline cohomology*, Algebraic Geometry, Proceedings Symp. Pure Math. XXIX.

[33] KRAFT H. : *Kommutative algebraische Gruppen und Ringe*, Lecture notes in mathematics 455, Springer, Berlin 1975.

[34] LAZARD M. : *Commutative formal groups*, Lecture notes in mathematics 443, Springer, Berlin 1975.

[35] MANIN Yu. : *The theory of commutative formal groups overs fields of finite characteristics*, Russian Math. Surveys 18 (1963) 1-83.

[36] MAZUR B. : *Local flat duality*, Amer. J. Math. 92 (1970) 343-361.

[37] MAZUR B. et MESSING W. : *Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology*, Lecture notes in mathematics 370, Springer, Berlin 1974.

[38] MESSING W. : *The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Mathematics 264, Springer, Berlin 1972.

[39] MITCHELL B. : *Theory of categories*, Academic Press, New-York 1965.

[40] MORRIS R. et PAREIGIS B. : *Formal groups and Hopf algebras over discrete rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 197 (1974) 113-129.

[41] MUMFORD D. : *Biextensions of formal groups*, Algebraic geometry, Tata Institute of fundamental research (Studies in Mathematics 4), Oxford University Press, London 1969.

[42] NORMAN P. : *An algorithm for computing local moduli of abelian varieties*, Ann. of Math. 101 (1975) 499-509.

[43] ODA T. : *The first de Rham cohomology group and Dieudonné modules*, Ann. Ecole Norm. Sup. 2 (1959), 63-135.

[44] ODA T. et OORT F. : *Supersingular abelian varieties*, à paraître.

[45] OORT F. : *Dieudonné modules of finite local group schemes*, Indag. Math. 36 (1974) 284-292.

[46] SCHOELLER C. : *Groupes affines, commutatifs, unipotents sur un corps non parfait*, Bull. Soc. Math. France 100 (1972), 241-300.

[47] SERRE J.-P.: *Groupes algébriques et corps de classes*, Actualités scientifiques et industrielles 1264, Hermann, Paris 1959.

[48] SERRE J.-P.: *Corps locaux*, Actualités scientifiques et industrielles 1296, 2ème édition, Hermann, Paris 1968.

[49] TAKEUCHI M. : *On the structure of commutative affine group schemes over a non perfect field*, Manuscripta Math. 16 (1975), 101-136.

[50] CARTIER P. : *Relèvements des groupes formels commutatifs*, Sém. Bourbaki 359, Lecture notes in Mathematics 179, Springer, Berlin 1971.

[51] GROTHENDIECK A. : *Groupes de monodromie en géométrie algébrique* (SGA 7) Lecture notes in mathematics 288, Springer, Berlin 1972.

[52] ROTMAN J. : *Cartier duality and formal groups over* $\mathbb{Z}$, L'ens. Math. 24 (1978) 293-303.

[53] RAYNAUD M. : p-*torsion du schéma de Picard*, ce volume.

[54] STIENSTRA J. : *The formal completion of the second Chow group, a* K-*theoretic approach*, ce volume.

Lawrence BREEN
Université de Rennes I
U.E.R. Mathématiques et Informatique
Avenue du Général Leclerc
Campus de Beaulieu

35042 - RENNES-CEDEX