Astérisque

MARIE-FRANCE VIGNÉRAS

L'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Selberg du groupe modulaire PSL $(2, \mathbb{Z})$

Astérisque, tome 61 (1979), p. 235-249

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__61__235_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 61 (1979) p. 235-249

L'EQUATION FONCTIONNELLE DE LA FONCTION ZÊTA DE SELBERG DU GROUPE MODULAIRE PSL(2,$\mathbb{Z}$)

par
Marie-France VIGNÉRAS

1 - Cette équation est contenue dans la formule des traces de Selberg [21] et l'obtenir nécessite seulement de l'habileté dans le maniement d'intégrales, en suivant les méthodes données par Hejhal [17] pour obtenir l'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Selberg des groupes cocompacts, sans éléments elliptiques. La fonction <u>double-gamma</u> définie et étudiée par Barnes [3] , [4] , [5] , [6] joue un rôle essentiel, analogue à celui de la fonction gamma dans l'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Riemann. Guidé par le modèle des fonctions L d'Artin, à chaque classe de conjugaison primitive de PSL(2,$\mathbb{Z}$), on associe un facteur :

$$Z_p(s) = \prod_{k\geq o} (1 - Np^{-s-k})$$

pour une classe hyperbolique primitive p, de norme Np,

$$Z_{e_2}(s) = [1 + tg(\frac{\pi s}{2} - \frac{\pi}{4})]^{1/2}$$

pour la classe elliptique primitive e_2 d'ordre 2

$$Z_{e_3}(s) = [1 + \sqrt{3}\ tg(\frac{\pi s}{3} - \frac{\pi}{6})]^{2/3}$$

pour la classe elliptique primitive e_3 d'ordre 3

$$Z_{par}(s) = \zeta(2s - 1)$$

où $\zeta(s)$ est la fonction zêta de Riemann, pour la classe parabolique primitive. On introduit ensuite un facteur à l'infini :

$$Z_\infty(s) = [\Gamma_2(s)^2\ \Gamma(s)^{-1}\ (2\pi)^s]^{1/6}$$

où $\Gamma_2(s)$ est la fonction double gamma de Barnes

$$\frac{1}{\Gamma_2(s+1)} = (2\pi)^{s/2}\, e^{-\frac{1}{2}s(s+1)-\frac{1}{2}\gamma s^2} \prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{s}{n}\right)^n e^{-s+\frac{s^2}{2n}}$$

et vérifiant l'équation $\frac{1}{\Gamma_2(s+1)} = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma_2(s)}$ et $\Gamma(1) = 1$.

On définit alors une fonction zêta de Selberg modifiée en posant :

$$Z^*(s) = \prod_{p\in P} Z_p(s)\, Z_{e_2}(s)\, Z_{e_3}(s)\, Z_{par}(s)\, Z_\infty(s) \quad , \quad \mathrm{Re}\, s > 1$$

où P est l'ensemble des classes hyperboliques de $PSL(2,\mathbb{Z})$; les facteurs elliptiques et paraboliques sont les facteurs exceptionnels. On a alors l'équation fonctionnelle :

(1) $$Z^*(s) = Z^*(1-s).$$

Remarques

Les facteurs sont des fonctions analytiques multiformes, les exposants 1/6, 1/2, 2/3 apparaissent dans la formule du genre pour $PSL(2,\mathbb{Z})$ et la fonction zêta de Selberg modifiée est bien définie.

Pour un sous-groupe Γ discret, à covolume fini de $PSL(2,\mathbb{R})$ et une représentation χ unitaire de dimension finie n de Γ, on a aussi une formule des traces. Quelle équation fonctionnelle en déduit-on ? Je ne sais donner qu'une réponse partielle : La valeur du facteur à l'infini s'obtient sans peine :

(2) $$Z_\infty(s,\chi) = [\Gamma_2(s)^2\, \Gamma(s)^{-1}\, (2\pi)^s]^{n\mu}$$

où μ est le volume de $\Gamma\backslash H$ pour la mesure $\frac{dx\, dy}{2\pi\, y^2}$ sur le demi-plan supérieur H. Les facteurs hyperboliques sont ceux définis par Selberg :

(3) $$Z_p(s,\chi) = \prod_{k\geq 0} \det\,(1-\chi(p)\, Np^{-k-s})$$

Pour des groupes Γ cocompacts sans éléments elliptiques, en posant $Z^*(s,\chi) = Z_\infty(s,\chi) \prod_{p\in P} Z_p(s,\chi)$, on a donc l'équation fonctionnelle $Z^*(s,\chi) = Z^*(1-s,\chi)$. Soit $\bar{\chi}$ la contragrédiente de χ, définie par $\bar{\chi}(\gamma) = \chi(\gamma^{-1})$; si p est une classe hyperbolique primitive, p^{-1} l'est aussi et $p \to p^{-1}$ définit une bijection de P, comme $Z_p(s,\chi) = Z_{p^{-1}}(s,\chi)$, on en déduit :

$$Z^*(s,\chi) = Z^*(s,\bar{\chi})$$

L'équation fonctionnelle s'écrit dont aussi :

$$(4) \qquad Z^*(s,\chi) = Z^*(1-s,\bar{\chi})$$

écriture préférable, puisqu'elle reste vraie si Γ contient des éléments elliptiques. Le groupe engendré par une classe elliptique primitive e_m d'ordre m, est un groupe cyclique d'ordre m, et la représentation χ restreinte à ce groupe est une somme de caractères (représentations de degré 1) χ_j, pour $1 \leq j \leq n$ définis par $\chi_j(e_m) = e^{-2i\pi x_j/n}$, où $0 \leq x_j \leq m-1$. Le facteur elliptique est égal à

$$(5) \qquad Z_{e_m}(s,\chi) = \prod_{j=1}^{n} Z_{e_m}(s+x_j)\, Z_{e_m}(x_j+\tfrac{1}{2})^{-1}$$

où $Z_{e_m}(s)$ est le facteur elliptique avec caractère trivial.

Enfin, pour les facteurs paraboliques apparaissant si Γ n'est pas cocompact, je n'ai aucun résultat, mis à part le cas où χ est trivial et $\Gamma = \Gamma_o(N)$ image dans $PSL(2,\mathbb{Z})$ de l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ telles que $c \equiv 0 \pmod N$, quand N est sans facteurs carrés, où utilisant la forme explicite de la formule des traces calculée par Hejhal [15] , [16], on obtient :

$$Z_{par}(s) = \left[(2\pi N)^{-s}\, \zeta(2s-1) \prod_{p|N} (1-p^{-2s})^{-1/2} \right]^{d(N)}$$

où d(N) est le nombre de diviseurs de N.

Pour des groupes de rang 1, où la formule des traces a été explicitement calculée par Gangolli [12], [13], le facteur à l'infini est un produit de fonctions gamma d'ordre inférieur où égal de l'ordre de la fonction zêta de Selberg, qui se calculent explicitement dans chaque cas.

2 - LA FONCTION DOUBLE GAMMA.

Cette fonction remarquable étudiée par Barnes vers 1900, ne figurant pas dans les tables de fonctions spéciales les plus connues, citée en exercice par Whittaker et Watson [24], a été utilisée récemment par Shintani [23], dans une formule limite de Kronecker pour les corps quadratiques réels. Son prolongement analytique p-adique apparait dans une formule de Cassou-Noguès [9] pour les fonctions L_p-adiques au point 0.

Avant Barnes, ces fonctions avaient été introduites sous une forme différente par Hölder [18], Alexeiewsky [2], Glaisher [14], Kinkelin [19]. L'exposé de Barnes [3] est remarquable, aussi je me contenterai d'indiquer brièvement leurs principales propriétés :

2.1 - Définition par leur produit de Weierstraß (trois formes) :

$$\Gamma_2(z+1)^{-1} = (2\pi)^{z/2}\, e^{-z/2 - \frac{\gamma+1}{2} z^2} \prod_{k=1}^{\infty} \left[(1+\frac{z}{k})^k\, e^{-z+z^2/2k}\right]$$

$$= (2\pi)^{z/2}\, e^{-z/2 - \frac{\gamma+1}{2} z^2} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(z+k)}\, e^{z\psi(k) + \frac{z^2}{2}\psi'(k)}\right]$$

$$= (2\pi)^{2/2} e^{(\gamma - \frac{1}{2})z - (\frac{\pi^2}{6} + 1 + \gamma) z^2/2}\, \Gamma(z).z \prod_{\substack{n\geq 0\\ m\geq 0\\ n+m\neq 0}} \left[(1+\frac{z}{n+m}) e^{-\frac{z}{n+m} + \frac{z^2}{2(n+m)^2}}\right]$$

chaque produit est convergent, γ est la constante d'Euler et $\psi(z) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z)$.

2.2 - Formule de Stirling : si x est réel et croit indéfiniment, et $a \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{Log}\Gamma_2(x+a+1)^{-1} = \frac{x+a}{2}\log 2\pi - \log A + \frac{1}{12} - \frac{3x^2}{4} - ax + (\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12} + \frac{a^2}{2} + ax)\log x + O(\frac{1}{x})$$

où A est une constante définie par Kinkelin [19],

$$\mathrm{Log}\, A = \lim_{n\to\infty} [\mathrm{Log}(1^1.2^2 \ldots n^n) - (\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{12})\,\mathrm{Log}\, n + \frac{n^2}{4}]$$

dont la valeur numérique est $A = 1{,}28\ 24\ 27\ 13\ \ldots$

2.3 - Théorème de Gauss

$$\prod_{r=0}^{n-1}\prod_{s=0}^{n-1} \Gamma_2(z + \frac{r+s}{n})^{-1} = K(2\pi)^{n(n-1)z/2}\; n^{-n^2z^2/2 + nz}\; \Gamma_2(nz)^{-1}$$

où

$$K = A^{1-n^2}\, e^{\frac{n^2-1}{12}}\, (2\pi)^{-(n-1)/2}\, n^{-5/12}$$

2.4 - Formule des compléments : On pose $\Phi(z) = \dfrac{\Gamma_2(1+z)^{-1}}{\Gamma_2(1-z)^{-1}}$,

$$\Phi(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad \Phi(z-1)$$

2.5 - Rélation de Kinkelin

$$\operatorname{Log} \Phi(z) = z \operatorname{Log} 2\pi - \int_o^z \pi z \operatorname{cotg} \pi z \, dz$$

2.6 - Valeur au point 1/2

$$\Gamma_2(1/2)^{-1} = A^{-3/2} \pi^{-1/4} e^{1/8} 2^{1/24}$$

2.7 - Formule intégrale : si $\operatorname{Re}(z+1) > 0$,

$$\operatorname{Log} \Gamma_2(z+1) = - \int_o^\infty \frac{e^{-t}}{t(1-e^{-t})^2} \left[1 - zt - \frac{z^2 t^2}{2} - e^{-zt}\right] dt$$

$$+ \frac{z^2}{2} (1+\gamma) - \frac{3}{2} \operatorname{Log} \frac{2\pi}{2}$$

Par analogie avec la fonction gamma, on peut donner pour la fonction double-gamma, et plus généralement pour des fonctions gamma d'ordre n , $n \geq 1$ une définition d'Artin justifiée par la proposition suivante :

2.8 - Proposition : Pour tout $n \geq 1$, il existe une unique fonction $G_n(z)$ méromorphe telle que :

(1) $G_n(z+1) = G_{n-1}(z) \, G_n(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$

(2) $G_n(1) = 1$

(3) pour $x \geq 1$, $G_n(x)$ est indéfiniment dérivable et $\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \operatorname{Log} G_n(x) \geq 0$

(4) $G_o(x) = x$

On reconnait la définition d'Artin de la fonction $\Gamma(x)$ pour $n = 1$. On définit ainsi des fonctions gamma d'ordre n en posant

$$\Gamma_n(z) = G_n(z)^{(-1)^{n-1}}$$

Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème de Dufresnoy et Pisot [7], [11] qui fournit simultanément l'existence, l'unicité et le développement en série de Weierstraß.

<u>Théorème 2.9</u> (Dufresnoy et Pisot) - <u>Soit</u> $\varphi(x)$ <u>une fonction</u> k <u>fois dérivable dont la dérivée</u> $\varphi^{(k)}(x)$ <u>d'ordre</u> k , $k \geq 0$, <u>est décroissante pour</u> $x \geq 0$ <u>et tend vers 0 quand</u> x <u>augmente indéfiniment</u>. <u>L'équation fonctionnelle</u> $f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$ <u>admet comme solution la fonction</u>

$$f(x) = f(0) + x(\varphi(0)-S(1)) + \sum_{h=1}^{k-1} \frac{P_h(x)}{h!} (\varphi^{(h)}(0) - S^{(h)}(1)) + S(x)$$

où

$$S(x) = \sum_{n\geq 0}\left[\varphi(n) + \frac{x}{1!}\varphi'(n)+\ldots+\frac{x^k}{k!}\varphi^{(k)}(n) - \varphi(n+x)\right]$$

<u>où</u> $P_h(x)$, $h \geq 1$ <u>est l'unique polynôme de degré</u> $h + 1$, <u>solution de</u> $f(x+1) - f(x) = x^h$, $x \geq 0$ <u>et</u> $P_h(0) = 0$. <u>Si</u> $f(0)$ <u>est donné, cette solution est la seule qui ait une dérivée</u> $k^{\text{ème}}$ <u>croissante, pour</u> $x \geq 0$.

Les polynômes figurant dans ce théorème, $P_h(x) = 1^h+\ldots+(x-1)^h$ ont été introduits par Bernoulli. Ce que l'on appelle polynômes de Bernoulli sont les dérivés de ceux là (ils vérifient l'équation $f(x+1) - f(x) = h\, x^{h-1}$).

On applique le théorème de Pisot-Dufresnoy en posant $\varphi_o(x) = \mathrm{Log}(x+1)$, de dérivée $\frac{1}{x+1}$ décroissante pour $x \geq 0$ et tendant vers 0 quand x croit indéfiniment. Soit alors $f_1(x)$ l'unique solution convexe de l'équation $f(x+1) - f(x) = \mathrm{Log}(x+1)$ telle que $f(0) = 0$. On pose $\Gamma(x+1) = e^{f_1(x)}$ et on obtient la fonction gamma. On remarque que

$$f_1(x) = - \gamma x + \sum_{n\geq 1} \frac{x}{n} - \mathrm{Log}(1 + \frac{x}{n})$$

et que : $\dfrac{d^2}{dx^2} f_1(x) = \sum_{n\geq 1} (n+x)^{-2}$

est décroissante pour $x \geq 0$ et tend vers 0 quand x croit indéfiniment. Par récurrence, on définit des fonctions $f_n(x)$ vérifiant :

(a) $f_n(x+1) - f_n(x) = f_{n-1}(x)$

(b) $f_n(0) = 0$

(c) $\dfrac{d^n}{dx^n} f_n(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$

(d) $$f_n(x) = -xE_n(1) + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{P_h(x)}{h!}\left[f_{n-1}^{(k)}(0) - E_n^{(k)}(1)\right] + E_n(x)$$

où

$$E_n(x) = \sum_{m\in\mathbb{N}^{n-1}\times\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{x}{L(m)}\right)^n - \frac{1}{n-1}\left(\frac{x}{L(m)}\right)^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x}{L(m)} + (-1)^n \mathrm{Log}\left(1+\frac{x}{L(m)}\right)\right]$$

où

$L(m) = m_1+\ldots+m_n$ si $m = (m_1,\ldots,m_n)$

(e) $\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f_n(x) = n! \displaystyle\sum_{m\in\mathbb{N}^{n-1}\times\mathbb{N}^*} (x + L(m))^{-n-1}$ est décroissante pour $x \geq 0$ et tend vers 0 quand x croit indéfiniment.

On pose $G_n(x+1) = e^{f_n(x)}$. La relation (d) donne le produit de Weïerstraß de $G_n(x)$. La fonction $\Gamma_n(x)^{-1}$ est une fonction <u>d'ordre</u> n, dont tous les <u>zéros</u> sont les entiers négatifs 0, -1, -2,... l'ordre de l'entier négatif -k est égal au nombre de solutions de l'équation $L(m) = k + 1$, $m \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N}^*$. Le nombre de solutions pour $m \in \mathbb{N}^n$ est le coefficient de X^{k+1} dans le développement en série de Taylor de $(1 - X)^{-n}$, c'est-à-dire $\binom{n+k}{k+1}$. Le nombre de solutions avec $m \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N}^*$ est égal à $\binom{n+k}{k+1} - \binom{n+k-1}{k+1} = \binom{n+k-1}{n-1}$. <u>L'ordre du zéro au point</u> -k <u>est donc égal à</u> $\left(\frac{n+k-1}{n-1}\right)$.

3 - <u>LA FORMULE DES TRACES DE SELBERG POUR</u> PSL(2,$\mathbb{Z}$)

Dasn le cas particulier de PSL(2,$\mathbb{Z}$), on peut écrire la formule des traces (sans représentation) sous la forme suivante :

$$\sum_{n=o}^{\infty} h(r_n) = \sum_{p\in P}\sum_{k\geq 1}\frac{\mathrm{Log}\ Np}{Np^{k/2}-Np^{-k/2}}\, g(k\ \mathrm{Log}\ Np)$$

$$+ \frac{1}{12}\int_{-\infty}^{\infty} r\, h(r)\tanh \pi r\, dr$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(e^{\pi r/3} + e^{-\pi r/3}\right)\frac{h(r)}{e^{\pi r}+e^{-\pi r}}\, dr$$

$$- g(0)\ \mathrm{Log}\ 2\pi + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta'}{\zeta}(-2ir)\, h(r)\, dr$$

en donnant comme définitions des différents termes :

a) les nombres complexes r_n sont définis à partir des valeurs propres du spectre discret de l'opérateur de Laplace-Beltrami opérant sur l'espace $L^2(PSL(2,\mathbb{Z})\backslash H)$ soit $0 = \lambda_o \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \ldots$ en posant :

$$\lambda_n = \frac{1}{4} + r_n^2 \quad ; \quad \mathrm{Arg}\,(r_n) = 0 \text{ ou } -\frac{\pi}{2}$$

En fait, $\mathrm{Arg}\,(r_n) = -\pi/2$ ne se produit jamais pour $PSL(2,\mathbb{Z})$, cela se démontre par un argument géométrique élégant donné par Roelcke [20]. C'est équivalent au fait que $\lambda_1 > \frac{1}{4}$, ce que Cartier a vérifié numériquement [8].

b) la formule est valable pour toutes les fonctions paires $h(r)$ holomorphes dans une bande $|\mathrm{Im} s| < \frac{1}{2} + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ et vérifiant dans cette bande la condition de croissance $h(r) = 0\,(1+|r|^2)^{-1-\varepsilon}$ on pose :

$$g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iru}\, h(r)\, dr$$

en particulier, on a

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(r)\, dr$$

c) on reconnait quatre types de contribution dans cette formule venant des quatres types de classes de conjugaison : hyperbolique, l'unité, et les types exceptionnels elliptiques et paraboliques. La forme sous laquelle ils figurent coïncide avec celle donnée par Selberg [21] p.74 et p.78, sauf celle de la contribution parabolique qui figure dans Selberg sous l'expression :

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{4\pi} \frac{\phi'}{\phi} \left(\frac{1}{2} + ir\right) - \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma'}{\Gamma} (1 + ir)\right\} h(r)\, dr - \mathrm{Log}\, 2.g(0) \\ &+ \frac{1}{4} \left(1 - \phi\left(\frac{1}{2}\right)\right) h(0) \end{aligned} \tag{2}$$

où

$$\phi(s) = \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{c>o} \frac{\varphi(c)}{c^{2s}}$$

On vérifie que l'on a

$$\phi(s) = \frac{\xi(2s - 1)}{\xi(2s} \quad , \text{ donc } \phi\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

où l'on a posé, selon l'habitude usuelle :

$$(3) \qquad \xi(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)\,\zeta(s)$$

L'équation fonctionnelle $\xi(1-s) = \xi(s)$ ou encore $\frac{\xi'}{\xi}(1-s) = -\frac{\xi'}{\xi}(s)$ permet de transformer la forme (2) en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{\pi}\frac{\xi'}{\xi}(-2ir) - \frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+ir)\right\} h(r)\,dr \quad - \operatorname{Log} 2.\ g(0)$$

On vérifie à l'aide de (3) et de la formule des compléments pour $\Gamma(s)$ que le terme entre accolades est égal à

$$-\frac{\operatorname{Log} 2\pi}{2\pi} - \frac{i}{2}\,\frac{e^{\pi r}+e^{-\pi r}}{e^{\pi r}-e^{-\pi r}} + \frac{1}{\pi}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(-2ir)$$

En intégrant sur toute la droite réelle, la partie impaire disparait et l'on obtient finalement la contribution parabolique sous la forme

$$-\,g(0)\operatorname{Log} 2\pi + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta'}{\zeta}(-2ir)$$

La démonstration de la formule des traces de Selberg pour $PSL(2,\mathbb{Z})$ est devenue suffisamment classique pour que nous ne la refaisions pas (Duflo-Labesse [10], Hejhal [17], Zagier [25]).

4 - PASSAGE DE LA FORMULE DES TRACES A L'EQUATION FONCTIONNELLE.

Ce passage est fort bien décrit par Hejhal [17] pour des sous-groupes cocompacts sans éléments elliptiques, de $PSL(2,\mathbb{R})$. C'est grâce à cette rédaction, que j'ai fait ce passage pour $PSL(2,\mathbb{Z})$.

On choisit pour fonction $h(r)$, $g(u)$ les fonctions

$$h(r) = \frac{1}{r^2+z^2} - \frac{1}{r^2+\beta^2} \quad \text{où } \frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re}\beta$$

$$g(u) = \frac{e^{-z|u|}}{2z} - \frac{e^{-\beta|u|}}{2\beta}$$

qui remplissent les conditions nécessaires ; le terme $-\frac{1}{r^2+\beta^2}$ est indispensable pour assurer la condition de croissance. La contribution hyperbolique est égale à ([17] p.66 et p.67 proposition 4.2) :

$$\frac{1}{2z} \sum_{p\in P} \frac{Z'_p}{Z_p}\left(\frac{1}{2} + z\right) - \frac{1}{2\beta} \frac{Z'_p}{Z_p}\left(\frac{1}{2} + \beta\right)$$

Afin de calculer les contributions elliptiques et paraboliques, on utilise les fait suivants, qui sont utilisés par Hejhal pour obtenir la contribution de la classe unité :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable, on a :

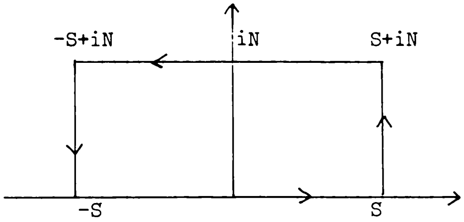
1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(r)\, dr = 0$ si f est impaire, et $\int_{-\infty}^{\infty} f(r)\, dr = \int_{-\infty}^{\infty} f(-r)\, dr$

2) si $f(r)$ se prolonge en une fonction méromorphe dans H, sans aucun pôle sur l'axe réel, telle que

A) $\lim\limits_{S\to\infty} \int_{\varepsilon S}^{\varepsilon S+iN} \frac{f(r)}{r^2+z^2}\, dr = 0$ pour $\varepsilon = \pm 1$

B) $\lim\limits_{N\to\infty} \int_{-\infty+iN}^{\infty+iN} \frac{f(r)}{r^2+z^2}\, dr = 0$.

en supposant naturellement que les intégrales écrites aient un sens ; en particulier S et N tendent vers l'infini de sorte que $f(r)/(r^2 + z^2)$ n'ait pas de pôle sur les chemins d'intégration. On choisit alors z, tel que $\mathrm{Re}\, z > 0$ et que iz ne soit pas un pôle pour $f(r)$. Le théorème de Cauchy appliqué au chemin décrit ci-dessous



suivi d'un passage aux limites nous donne :

(4) $$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(r)}{r^2+z^2}\, dr = \frac{\pi}{z} f(iz) + 2i\pi \sum_{x\in H} \frac{\mathrm{Res}(f_1 x)}{z^2 + x^2}$$

On suppose être arrivé par cette méthode sur une équation du type :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(r_n) = G(z) - G(\beta)$$

L'équation fonctionnelle est alors $G(z) = G(-z)$; dans cette équation la partie paire de $G(z)$ disparait, ceci permet dans (4) appliqué en vue de l'équation fonctionnelle de négliger la somme sur les résidus, ainsi que d'éléminer le terme en β. On laissera la vérification des conditions A) et B) non faite, c'est un exercice de routine pour les fonctions simples qui apparaissent dans le cas présent. On décompose $G(z)$ en quatres parties, correspondant à hyperbolique, unité, elliptique, parabolique, que l'on ne considère que modulo les fonctions paires. On obtient :

$$G_p(z) = \frac{1}{2z} \sum_{p\in P} \frac{Z'_p}{Z_p}\left(\frac{1}{2} + z\right)$$

$$G_\infty(z) = \frac{-\pi}{12} \operatorname{tg} \pi z$$

$$G_{ell}(z) = \frac{-\pi}{2z \cos \pi z}\left[\frac{1}{4} + \frac{2\cos(\pi z/3)}{3\sqrt{3}}\right]$$

$$G_{par}(z) = \frac{1}{z}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(2z)$$

On pose alors $H(s) = \exp \int_0^{s-\frac{1}{2}} 2z\, G(z)\, dz$, ce qui transforme l'équation fonctionnelle en $H(s) = H(1-s)$. Les différents termes hyperboliques, paraboliques, unité, elliptiques donnent respectivement :

$$H_p(s) = \prod_{p\in P} Z_p(s) \tag{5}$$

$$H_{par}(s) = \zeta(2s-1) = Z_{par}(s) \tag{6}$$

$$\frac{H_\infty(s)}{H_\infty(1-s)} = \exp \int_0^{s-\frac{1}{2}} -\frac{\pi}{3}\, z \operatorname{tg} \pi z\, dz = \frac{Z_\infty(s)}{Z_\infty(1-s)} \tag{7}$$

$$\frac{H_{ell}(s)}{H_{ell}(1-s)} = \exp \int_0^{s-\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2\cos \pi z}\, dz \times \exp \int_0^{s-\frac{1}{2}} \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\, \frac{\cos(\pi z/3)}{\cos \pi z}\, dz = \frac{Z_{e_2}(s)\, Z_{e_3}(s)}{Z_{e_2}(1-s)\, Z_{e_3}(1-s)} \tag{8}$$

Seuls (7) et (8) sont à démontrer. En l'admettant, on obtient alors l'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Selberg (1). La relation de Kinkelin 2.5 montre que

$$\int_0^z \pi v \operatorname{tg} \pi v\, dv = -z \operatorname{Log} 2\pi + \frac{1}{2}\operatorname{Log} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+z)}{\Gamma(\frac{1}{2}-z)} + \operatorname{Log} \frac{\Gamma_2(\frac{1}{2}-z)}{\Gamma_2(\frac{1}{2}+z)}$$

et l'on en déduit (7) sachant que :

$$Z_\infty(s) = [\Gamma_2(s)^2\ \Gamma(s)^{-1}\ (2\pi)^s]^{1/6}$$

Pour obtenir (8), on utilise la formule suivante (Abramowitz-Stegun [1] p.78) :

$$\int \frac{dz}{a+b\cos z} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ \mathrm{Log}\left[\frac{(b-a)\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{2} + \sqrt{b^2-a^2}}{(b-a)\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{2} - \sqrt{b^2-a^2}}\right] \quad \text{si } b^2 > a^2$$

d'où on déduit :

$$\int \frac{dz}{b^2\cos^2 z - a^2} = \frac{1}{2a\sqrt{b^2-a^2}}\ \mathrm{Log}\left[\frac{1 + \frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\,\mathrm{tg}\,z}{1 - \frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\,\mathrm{tg}\,z}\right]$$

On a alors :

$$\exp \int_0^{s-\frac{1}{2}} \frac{\pi\,dz}{2\cos\pi z} = \left[\frac{1 + \mathrm{tg}(\frac{\pi s}{2} - \frac{\pi}{4})}{1 - \mathrm{tg}(\frac{\pi s}{2} - \frac{\pi}{4})}\right]^{1/2} = \frac{Z_{e_2}(s)}{Z_{e_2}(-s)}$$

Enfin l'on a :

$$\exp \int_0^{s-\frac{1}{2}} \frac{4\pi\cos(\pi z/3)}{3\sqrt{3}\cos\pi z}\,dz = \exp \int_0^{\frac{\pi}{3}(s-\frac{1}{2})} \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\ \frac{dz}{4\cos^2\frac{\pi z}{3} - 3}$$

$$= \left[\frac{1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,(\frac{\pi s}{3} - \frac{\pi}{6})}{1 - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,(\frac{\pi s}{3} - \frac{\pi}{6})}\right]^{2/3} = \frac{Z_{e_3}(s)}{Z_{e_3}(-s)}$$

5 - LE CAS COMPACT.

Pour un sous-groupe discret Γ cocompact de $PSL(2,\mathbb{R})$ et une représentation χ de dimension finie , unitaire de Γ, la formule des traces (Selberg [21]) s'écrit, avec les mêmes notations que précédemment :

$$\sum_{n\geq o} h(r_n) = \sum_{p\in P}\ \sum_{k\geq 1} \frac{\mathrm{tr}(\chi(p^k))\ \mathrm{Log}\,Np}{Np^{k/2} - Np^{-k/2}}\ g\,(k\ \mathrm{Log}\,Np)$$

$$+ \frac{n\mu}{2}\int_{-\infty}^{\infty} r\tanh\pi r\ h(r)\,dr$$

$$+ \sum_{e_m} \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\mathrm{tr}\ \chi(e_m^k)}{\sin(k\pi/m)} \int_0^z \frac{e^{-2\pi kv/m}}{1+e^{-2\pi v}}\,dv$$

où μ est le volume de $\Gamma\backslash H$ pour la mesure $\dfrac{dx\,dy}{2\pi y^2}$ sur le demi plan supérieur H, et e_m, d'ordre m parcourt <u>toutes</u> les classes elliptiques primitives de Γ (m varie).

Les méthodes précédentes nous donnent sans difficulté une définition convenable pour $Z_\infty(s,\chi)$ et $Z_p(s,\chi)$, voir (2) et (3) dans l'introduction. Comme on l'a dit pour calculer $Z_{e_m}(s,\chi)$ on peut supposer que χ est un <u>caractère</u>

$$\chi(e_m) = e^{-2i\pi \frac{x}{m}} \qquad 0 \leq x \leq m-1\ ,\ x \in \mathbb{N}$$

L'introduction de χ revient dans (8) écrit pour e_m

$$\frac{Z_{e_m}(s)}{Z_{e_m}(1-s)} = \exp \frac{2\pi}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\chi^k(e_m)}{\sin \frac{k\pi}{m}} \int_0^{s-\frac{1}{2}} \frac{e^{-2i\pi\, kz/m}}{1+e^{-2i\pi z}}\, dz \tag{9}$$

à remplacer z par z + x sans caractère.

On peut donc choisir comme définition de $Z_{e_m}(s,\chi)$:

$$Z_{e_m}(s,\chi) = Z_{e_m}(s+x)\, Z_{e_m}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-1} \tag{10}$$

On a alors "l'équation fonctionnelle"

$$Z_{e_m}(s,\chi) = Z_{e_m}(1-s,\bar{\chi}) \tag{11}$$

puisque $\bar{\chi}(e_m) = e^{2i\pi x/m}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ABRAMOWITZ and I.A. STEGUN - Handbook of mathematical functions. Dover Publications (ninth printing, 1970).

[2] W.P. ALEXEIEWSKY - Ueber eine Classe von Functionen die der Gamma Function analog sind. Leipzig Berichte, vol. XLVI p.268-275 (1894).

[3] E.W. BARNES - The Theory of the G-function. Quaterly Journal of Mathematics vol 31, p.264.314, (1899).

[4] E.W. BARNES - Genesis of the Double-Gamma Function. Proccedings of the London Mathematical Society vol 31 p.358.381, (1900).

[5] E.W. BARNES - The Theory of the Double-Gamma Function. Philosophical Transactions of the Royal Society (A) vol.196 (1901) p.265-388.

[6] E.W. BARNES - On the Theory of the Multiple Gamma Function. Philosophical Transactions of the Royal Society (A) vol.19(1904) p.374-439.

[7] CAMPBELL - Les intégrales Eulériennes et leurs applications. Collections universitaires de mathématiques. Dunod (1966).

[8] P. CARTIER - Some numerical computations relating to automorphic functions. Computers in Number Theory, Academic Press, 1971.

[9] P. CASSOU-NOGUES - Analogues p-adiques des fonctions Γ-multiples. Journées arithmétiques de Marseille , 1978.

[10] M. DUFLO et J.P. LABESSE - Sur la formule des traces de Selberg. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure t.4 (1971) p.193-284.

[11] J. DUFRESNOY et Ch. PISOT - Sur la relation fonctionnelle $f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$. Bulletin de la société mathématique de Belgique, t.XV (1963) p.259-270.

[12] R. GANGOLLI - Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one. Illinois J. Math. vol.21 (1977) p.1-42.

[13] R. GANGOLLI - Zeta functions of Selberg's type for some non compact quotients of symmetric spaces of rank one. Preprint 1978.

[14] J. GLAISHER - On products and series involving prime numbers only, Quaterly Journal of Mathematics, vol.XXVI, p.1-74.

[15] D.A. HEJHAL - The Selberg trace formula for congruence subgroups. Bull. of the A.M.S. vol.81, n° 4 (1975), p.752-755.

[16] D.A. HEJHAL - The Selberg traceformula and the Riemann zeta function. Duke Math. J. vol.43 (1976) p.441-482.

[17] D.A. HEJHAL - The Selberg trace formula for PSL(2,ℝ). Lecture Notes Springer Verlag (1976).

[18] O. HÖLDER - Ueber eine transcendente Function. Göttingen Nächrichten (1886) p.514-522.

[19] KINKELIN - Ueber eine mit der Gamma function verwandte Transcendente und deren anwendung auf die Integral-rechnung. Crelle, LVII p.122-158.

[20] W. ROELCKE - Uber die Wellengleichungen bei grenzkeisgruppen erster Art. Abh. Heidelberg Akad. Wiss.4 (1956) p.159-267.

[21] A. SELBERG - Harmonic Analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. J. Indian Math. Soc. 20 (1956) p.47-87.

[22] G. SHIMURA - Arithmetic Theory of automorphic functions. Princeton University Press 1971.

[23] T. SHINTANI - On a Kronecker limit formula for real quadratic fields. J. Fac. Tokyo vol.24 (1977) p.167-199.

[24] E.T. WHITTAKER and G.N. WATSON - A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press 1965, p.264 exercices 48-49-50.

[25] D. ZAGIER - Eisenstein Series and the Selberg Trace Formula (A paraître).

Marie-France VIGNÉRAS
Ecole Normale Supérieure de Jeunes Filles
1, rue Maurice Arnoux
92120 MONTROUGE