

# Astérisque

GILLES LACHAUD

## **Le prolongement analytique d'un type de fonctions zeta généralisées**

*Astérisque*, tome 61 (1979), p. 109-119

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1979\\_\\_61\\_\\_109\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__61__109_0)

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE  
 D'UN TYPE DE FONCTIONS ZETA GÉNÉRALISÉES

par

Gilles LACHAUD

1. C.L. Siegel a démontré en 1925 le résultat suivant (cf. [M2]) : si  $F \in \mathbb{Z}[X, Y]$  est une forme binaire irréductible sur  $\mathbb{Q}$  de degré  $d \geq 3$ , la série

$$Z_0(s, F) = \sum |F(x, y)|^{-s}$$

où la sommation porte sur les  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $(x, y) \neq (0, 0)$ , converge pour  $\operatorname{Re} s > 2/d$ , et se prolonge en une fonction méromorphe dans le demi-plan  $\operatorname{Re} s > 1/(d-1)$ , avec un seul pôle au point  $s = 2/d$  de résidu

$$V_0 = \frac{2}{d} \int |F(1, x)|^{-2/d} dx.$$

Ce résultat a été repris et généralisé en 1934 par K. Mahler (cf. encore [M2]) : Soit  $M$  un ensemble fini de nombres premiers, posons

$$Q(x, y) = \prod_{p \in M} |F(x, y)|_p^{-1}$$

en notant  $|x|_p$  la valeur absolue  $p$ -adique d'un  $x \in \mathbb{Q}$ , et soit  $\mathbb{Z}^2(M)$  l'ensemble des vecteurs  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $(x, y, p) = 1$  pour tout  $p \in M$ . Alors la série

$$Z_M(s, F) = \sum \{Q(x, y) / |F(x, y)|\}^{-s}$$

où l'on somme sur les  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2(M)$ , a les mêmes propriétés que la série  $Z_0(s, F)$ , mis à part que cette fois-ci le résidu au point  $2/d$  est égal à

$$V_0 \prod_{p \in M} V_p,$$

où on a posé, pour  $p \in M$ ,

$$V_p = \int |F(x, y)|^{-2/d} dx dy$$

l'intégrale portant sur les  $(x, y) \in \mathbb{Z}_p^2$  tels que  $\max(|x|_p, |y|_p) = 1$ .

Mahler dit sans préciser que si  $F$  est anisotrope sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{Q}_p$  pour tout  $p \in M$ , alors la série  $Z_M(s, F)$  se prolonge analytiquement à tout le plan complexe, le seul pôle étant en  $s = 2/d$ , et que pour voir cela on peut utiliser "un vieux théorème de Mellin". Mais ce "vieux théorème de Mellin" avait déjà été repris par Mahler dans [M1], et ne permet pas de traiter le cas où il y a des places ultramétriques (Il fournit seulement le prolongement analytique de  $Z_0(s, F)$ ).

Nous allons démontrer ici un résultat de ce type.

2. On va supposer que  $F(X) = F(X_1, \dots, X_n)$  est un polynôme à  $n$  variables et à coefficients entiers, qui est quasi-homogène, ce qui veut dire qu'il existe des entiers  $k, k_1, \dots, k_n$  tels que l'identité formelle

$$(QH) \quad F(T^{k_1} X_1, \dots, T^{k_n} X_n) = T^k F(X)$$

soit satisfaite.

Dans cette hypothèse, il est naturel de supposer que le pgcd de  $k_1, \dots, k_n$  est égal à 1.

On peut faire la remarque suivante. Supposons que  $F$  soit anisotrope sur  $\mathbb{Q}$  (rappelez qu'un polynôme  $F \in K[X]$  est dit anisotrope sur le corps  $K$  si les relations  $x \in K^n$  et  $F(x) = 0$  impliquent  $x = 0$ ). Alors si  $F$  vérifie la relation (QH), les nombres  $k, k_1, \dots, k_n$  sont déterminés de façon unique par  $F$ . En effet, si on remplace toutes les variables par 0 sauf une, disons  $X_i$ , le polynôme  $F(0, \dots, X_i, \dots, 0)$  est non nul ; si  $d_i$  est le degré de ce polynôme, la relation (QH) montre que c'est en fait un monôme et implique l'identité  $d_i k_i = k$  ; on voit donc que  $k$  est le ppcm de  $d_1, \dots, d_n$ , d'où l'assertion. Introduisons les notations suivantes. Si  $M$  est un ensemble fini de nombres premiers, on pose, pour  $p \in M$  et pour  $x \in \mathbb{Q}_p^n$ ,

$$\|x\|_p = \text{Max} (|x_1|_p, \dots, |x_n|_p) ;$$

et on note  $\mathbb{Z}^n(M)$  l'ensemble des  $x \in \mathbb{Z}^n$  tels que  $\|x\|_p = 1$  pour tout  $p \in M$ , autrement dit tels que

$$(x_1, \dots, x_n, p) = 1 \quad \text{si } p \in M$$

Si  $F \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  est un polynôme à  $n$  variables, on posera, pour  $x \in \mathbb{Q}^n$ ,

$$F_M(x) = |F(x)|_0 \prod_{p \in M} |F(x)|_p$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème. Soit  $F \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  vérifiant la relation (QH) et soit  $M$  un ensemble fini de nombres premiers. Supposons  $F$  anisotrope sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{Q}_p$  lorsque  $p \in M$ . Alors la série

$$(1) \quad Z_M(s, F) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n(M)} F_M(x)^{-s}$$

converge pour  $\text{Res} > \kappa = (k_1 + \dots + k_n)/k$  et se prolonge en une fonction méromorphe dans le plan complexe, avec un unique pôle en  $s = \kappa$ , de résidu égal à

$$(2) \quad V_M = V_0 \prod_{p \in M} V_p ,$$

où

$$(3) \quad V_0 = \int e^{-F(x)} dx ,$$

et où

$$(4) \quad V_p = \int_{\|x\|_p=1} |F(x)|_p^{-k} dx .$$

Remarques. 1) Ce résultat est connu lorsque F est homogène et lorsqu'il n'y a pas de places ultramétriques (c'est-à-dire lorsque  $M = \emptyset$ ). En voici un bref historique sous ces hypothèses. Le cas des formes quadratiques est classique : ce sont des fonctions zêta d'Epstein. Lorsque F est homogène de degré supérieur à 2, ce résultat a été obtenu par Mellin puis généralisé par Mahler, (cf [M1]), en utilisant la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin. Ensuite Bochner (cf. [B]), dont l'article a été développé par Randol (cf. [R]), a démontré ce résultat en appliquant la formule de Poisson à la fonction  $F^{-s}$  convenablement régularisée. Bochner voit la fonction  $Z_o(s, F)$  comme la trace de la fonction Zêta de l'opérateur  $F(\partial/\partial x)$  (qui est elliptique puisque F est anisotrope sur  $\mathbb{R}$ ) sur l'espace compact  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  (Le cas étudié ici, lorsque  $M = \emptyset$ , est celui des opérateurs semi-elliptiques). Enfin, An (cf. [A]) a obtenu ce résultat en reprenant la méthode de Riemann : c'est celle que nous allons utiliser.

2) Supposons F homogène de degré d. Si F est anisotrope sur le corps  $\mathbb{F}_p$  pour tout  $p \in M$ , autrement dit si  $x \in \mathbb{Z}^n(M)$  implique  $|F(x)|_p = 1$ , alors la fonction  $Z_M(s, F)$  s'exprime simplement en fonction de  $Z_o(s, F)$  ; supposons pour simplifier que M soit réduit à un seul nombre premier p. On a alors

$$\begin{aligned} Z_o(s, F) &= \sum_{\mathbb{Z}^n} F(x)^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{x \in \mathbb{Z}^n(p)^k} F(p^k x)^{-s} \\ &= (1 - p^{-ds})^{-1} \sum_{x \in \mathbb{Z}^n(p)} F(x)^{-s} \\ &= (1 - p^{-ds})^{-1} Z_p(s, F) \end{aligned}$$

Mais une forme homogène peut être anisotrope sur  $\mathbb{Q}_p$  sans l'être sur  $\mathbb{F}_p$  ; considérons, par exemple, la forme

$$F(x, y) = x^2 + a y^2,$$

avec  $a = p^k u$  où  $(u, p) = 1$  lorsque  $p \neq 2$ . Si k est impair, ou bien si k est pair et si -u n'est pas un carré de  $\mathbb{F}_p$ , alors F est anisotrope sur  $\mathbb{Q}_p$ , mais  $|F(0, 1)|_p = p^{-k}$ .

3) Voici un exemple d'application du théorème. Soit q un nombre entier, notons  $\phi_q(X)$  le q-ième polynôme cyclotomique, de degré  $\phi(q)$ , et posons

$$\phi_q(X, Y) = X^{\phi(q)} \phi_q(Y/X).$$

Puisque  $\phi_q$  n'a aucune racine réelle, la forme  $\Phi_q$  est anisotrope sur  $\underline{R}$  ; et si  $p \not\equiv 1 \pmod{q}$  elle est aussi anisotrope sur  $\underline{Q}_p$ . Posons

$$F(X, Y) = \Phi_q(cX^d, Y^{d'})$$

où  $c, d, d'$  sont des entiers naturels ; si  $p \not\equiv 1 \pmod{q}$  pour tout  $p \in M$ , le couple  $(F, M)$  satisfait aux hypothèses du théorème.

4) A l'aide du théorème d'Ikehara (cf. [Lg], ch. XV), on déduit immédiatement du théorème le

Corollaire. Posons, pour  $t > 0$ ,

$$N(t) = \# \{x \in \underline{Z}^n(M) \mid F_M(x) \leq t\}.$$

On a alors

$$N(t) \sim \kappa^{-1} V_M t^K$$

lorsque  $t$  tend vers l'infini.

On peut préciser ce résultat : on renvoie à [L] pour plus de détails sur ce genre d'estimations.

2. Pour démontrer le théorème, on va introduire la série thêta :

$$(5) \quad \theta_M(t, F) = \sum_{x \in \underline{Z}^n(M)} \exp(-tF_M(x)) \quad (t > 0) ;$$

On passe de cette série à la fonction  $Z_M(s, F)$  par une transformation de Mellin :

$$(6) \quad Z_M(s, F) = \int_0^\infty t^{s-1} \theta_M(t, F) dt ,$$

tous problèmes de convergence mis à part.

Puisque par hypothèse le polynôme  $F$  est anisotrope sur  $\underline{Q}_p$ , il existe un nombre  $c_p > 0$  tel que

$$(7) \quad |F(x)|_p \geq c_p$$

lorsque  $x \in \underline{\mathbb{Q}}_p^n$  et  $\|x\|_p = 1$ . En notant  $c_M$  le produit des  $c_p$ , on a donc, lorsque  $x \in \underline{\mathbb{Z}}^n(M)$ ,

$$(8) \quad F_M(x) \geq c_M |F(x)|.$$

Posons par ailleurs, pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \underline{\mathbb{R}}^n$ ,

$$(9) \quad |x|_d = \sum |x_i|^{d_i},$$

où  $d_i = k/k_i$ , les nombres  $k, k_1, \dots, k_n$  étant ceux qui figurent dans la relation (QH). L'ensemble des  $x \in \underline{\mathbb{R}}^n$  tels que  $|x|_d = 1$  est compact. La fonction  $F$  ne change pas de signe sur  $\underline{\mathbb{R}}^n - \{0\}$  puisqu'elle est anisotrope sur  $\underline{\mathbb{R}}$ . On supposera, quitte à changer  $F$  en  $-F$ , que  $F(x) > 0$  si  $x \neq 0$ . Si on note  $c_o$  la borne inférieure de  $F$  sur le compact  $|x|_d = 1$ , qui est strictement positive puisque  $F$  est anisotrope sur  $\underline{\mathbb{R}}$ , la relation (QH) implique

$$(10) \quad F(x) \geq c_o |x|_d$$

Il s'ensuit que l'on a, avec  $c = c_o c_M$ ,

$$(11) \quad F_M(x) \geq c |x|_d \text{ si } x \in \underline{\mathbb{Z}}^n(M).$$

Ceci montre que la série  $\theta_M(t, F)$  converge pour  $t > 0$ , puisque la relation (11) implique

$$(12) \quad \theta_M(t, F) \leq \prod_{i=1}^n \sum_{\underline{\mathbb{Z}}} \exp(-ct|x|^{d_i})$$

En suivant la méthode habituelle, on va couper l'intégrale (6) en deux en posant

$$Z_M^+(s, F) = \int_1^\infty t^{s-1} \theta_M(t, F) dt,$$

$$Z_M^-(s, F) = \int_0^1 t^{s-1} \theta_M(t, F) dt;$$

la relation (12) montrant que

$$\theta_M(t, F) \ll t^{-N}$$

quel que soit  $N > 0$  lorsque  $t$  tend vers l'infini, on en déduit que la fonction  $Z_M^+$  est une fonction entière. Pour étudier la fonction  $Z_M^-$ , on va utiliser le résultat

suivant, en reprenant les notations du théorème :

Lemme 1. Lorsque t tend vers 0, on a, pour tout N > 0,

$$(13) \quad \theta_M(t, F) = t^{-\kappa} V_M + o(t^N)$$

Il s'ensuit que l'intégrale  $Z_M^-$  converge pour  $\text{Res} > \kappa$  (d'où la convergence de la série  $Z_M(s, F)$  dans le même domaine) et se prolonge au plan complexe avec un pôle en  $s = \kappa$  de résidu  $V_M$  ; Le théorème est donc complètement démontré une fois établi le lemme, ce qu'on va faire maintenant.

Pour cela, nous allons écrire la série  $\theta(t, F)$  dans le formalisme adélique (cf. [Lg] et [W] ).

Pour tout nombre premier p, on note  $\phi_p$  (resp.  $\psi_p$ ) la fonction caractéristique de l'ensemble  $\|x\|_p \leq 1$  de  $\mathbb{Q}_p^n$  (resp. de l'ensemble  $\|x\|_p = 1$ ). Soit  $\underline{A}$  l'anneau des adèles de  $\mathbb{Q}$  ; pour  $x = (x_p) \in \underline{A}^n$ , on pose

$$\psi_M(x) = \prod_{p \in M} \psi_p(x_p) \prod_{p \notin M} \phi_p(x_p)$$

de telle sorte que

$$\underline{Z}^n(M) = \{x \in \underline{Q}^n \mid \psi_M(x) = 1\}$$

La fonction  $F_M(x)$  s'étend naturellement à  $\underline{A}^n$  si on pose

$$F_M(x) = |F(x_o)|_o \prod |F(x_p)|_p,$$

et il vient

$$\theta_M(t, F) = \sum_{x \in \underline{Q}^n} \psi_M(x) e^{-tF_M(x)}$$

Pour obtenir le comportement asymptotique de  $\theta(t, F)$  lorsque t tend vers 0, on va appliquer la formule de Poisson à la fonction

$$E_t(x) = \psi_M(x) \exp(-tF_M(x)) \quad (x \in \underline{A}^n)$$

pour cela vérifions que la fonction  $E_t$  satisfait aux conditions qui permettent de lui appliquer cette formule. Pour une fonction f définie sur  $\underline{A}^n$ , on a la relation

$$\sum_{x \in \underline{Q}^n} f(x) = \sum_{\xi \in \underline{Q}^n} \widehat{f}(\xi)$$

dès que  $f$  satisfait les quatre hypothèses suivantes (cf. [Lg] ch. XIV § 6, et [W] ch. VII § 2) :

- a)  $f$  est intégrable ;
- b) la série  $\sum_{x \in \mathbb{Q}^n} f(x+y)$  converge uniformément si  $y$  est dans un compact de  $\underline{\mathbb{A}}^n$  ;
- c)  $\hat{f}$  est intégrable ;
- d) la série  $\sum_{\xi \in \mathbb{Q}^n} |\hat{f}(\xi)|$  converge.

Tout d'abord la fonction  $E_t$  est intégrable puisqu'elle est majorée, vu la relation (11), par la fonction décomposable

$$\psi_M(x_f) \cdot \exp(-ct|X_o|_d)$$

en notant  $x_f$  la projection d'un  $x \in \underline{\mathbb{A}}^n$  sur le produit des facteurs ultramétriques ; et cette dernière fonction, qui est dans l'espace des fonctions standard sur  $\underline{\mathbb{A}}^n$  (cf. [W], loc. cit., déf. 3) vérifie les conditions a) et b) ; il en va donc de même pour la fonction  $E_t$ .

Lemme 2. La fonction  $\hat{E}_t(\xi)$  est nulle si  $\xi_f$  est hors d'un compact ; on a

$$(14) \quad \hat{E}_t(0) = V_M t^{-K} ;$$

et pour tout  $N > 0$ ,

$$(15) \quad \hat{E}_t(\xi) \ll t^{N-K} |\xi_o|_d^{-N} .$$

Admettons le lemme 2, et soit  $C$  la fonction caractéristique du compact hors duquel  $\hat{E}_t$  est nulle. On a donc

$$\hat{E}_t(\xi) \ll C(\xi_f) |\xi_o|_d^{-N}$$

ce qui prouve que  $\hat{E}_t$  est intégrable et que la condition c) d'application de la formule de Poisson est satisfaite.

Vérifions la condition d) : puisque  $\hat{E}_t$  n'est non nulle que lorsque  $\xi_f$  est dans un compact, elle n'est non nulle pour  $\xi \in \underline{\mathbb{Q}}^n$  que lorsque  $\xi$  est dans un réseau  $\Gamma$  de  $\underline{\mathbb{Q}}^n$  ; si  $w$  est un entier tel que  $\Gamma \subset w\underline{\mathbb{Z}}^n$ , on a donc, vu la relation (15), et en sommant sur  $\xi \neq 0$ ,



$$(16) \quad \sum_{\xi \in \underline{\mathbb{Q}}^n} \widehat{E}_t(\xi) \ll t^{N-\kappa} \sum_{\xi \in \underline{\mathbb{Z}}^n} |w_{\xi_0}|_d^{-N},$$

on peut donc appliquer la formule de Poisson à  $E_t$  ; il vient

$$\begin{aligned} \theta_M(t, F) &= \sum_{x \in \underline{\mathbb{Q}}^n} E_t(x) = \sum_{\xi \in \underline{\mathbb{Q}}^n} \widehat{E}_t(\xi) = \widehat{E}_t(0) + \sum_{\xi \neq 0} \widehat{E}_t(\xi) \\ &= V_M t^{-\kappa} + R(t), \end{aligned}$$

où  $R(t)$  est l'expression de gauche de la formule (16) ; d'où la relation (13) du lemme 1.

Il ne reste donc plus qu'à démontrer le lemme 2. Remarquons tout d'abord que la Formule de Taylor, le fait que  $F$  soit anisotrope sur  $\underline{\mathbb{Q}}_p$ , et l'inégalité ultramétrique impliquent qu'il y a un nombre  $\varepsilon_p > 0$  tel que, lorsque  $x, y \in \underline{\mathbb{Q}}_p^n$ , on ait

$$|F(x+y)|_p = |F(x)|_p$$

dès que  $\|x\|_p = 1$  et  $\|y\|_p \leq \varepsilon_p$ . Il s'ensuit que la fonction  $E_t$  est constante sur les classes  $x+K$ , où  $K$  est le sous-groupe ouvert compact de  $\underline{\mathbb{A}}_p^n$  des points  $x = (x_p)$  vérifiant  $\|x_p\|_p \leq 1$  si  $p \notin M$  et  $\|x_p\|_p \leq \varepsilon_p$  si  $p \in M$ . Si  $\widehat{K}$  est le sous-espace dual de  $K$ , il s'ensuit (cf. la démonstration de la prop. 2 du § 2, ch. VII de [W]), que la fonction  $\widehat{E}_t(\xi)$  est nulle si  $\xi_p \notin \widehat{K}$ , ce qui établit la première assertion du lemme 2. Si les nombres  $k, k_1, \dots, k_n$  sont ceux pour lesquels on a la relation

$$(QH) \quad F(t^k x_1, \dots, t^{k_n} x_n) = t^k F(x),$$

posons  $d_i = k/k_i$  et soit  $D(t)$  l'application linéaire de  $\underline{\mathbb{R}}^n$  :

$$D(t) : (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (t^{-1/d_1} x_1, \dots, t^{-1/d_n} x_n);$$

La relation (QH) se réécrit

$$(17) \quad t F(D(t)x) = F(x),$$

et on a, pour toute fonction  $f \in \mathcal{F}(\underline{\mathbb{R}}^n)$ ,

$$(18) \quad \int_{\underline{\mathbb{R}}^n} f(x) dx = t^{-\kappa} \int_{\underline{\mathbb{R}}^n} f(D(t)y) dy$$

avec  $\kappa = (k_1 + \dots + k_n)/k$ , comme on l'a défini dans le théorème

Posons, pour  $\xi \in \mathbb{R}^n$  et  $T > 0$ ,

$$\widehat{E}_0(T, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp - (2i\pi \langle x, \xi \rangle + TF(x)) dx$$

en notant  $\langle, \rangle$  le produit scalaire dans l'espace à  $n$  dimensions. Les relations (17) et (18) impliquent que l'on a

$$(19) \quad \widehat{E}_0(T, \xi) = T^{-K} \widehat{E}_0(1, D(T)\xi) .$$

Si  $\xi = 0$ , on a

$$(20) \quad \widehat{E}_0(T, 0) = T^{-K} \int_{\mathbb{R}^n} \exp (-F(x)) dx ;$$

Si  $\xi \neq 0$ , la fonction  $\exp (-F(x))$  est dans  $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^n)$  ; on a donc, avec la notation (9),

$$(21) \quad \widehat{E}_0(1, \xi) \ll |\xi|_d^{-N}$$

pour tout  $N > 0$ , et puisque

$$|D(T)\xi|_d = T^{-1} |\xi|_d ,$$

il vient, vu (19) et (21), l'inégalité

$$(22) \quad \widehat{E}_0(T, \xi) \ll T^{-K} (T^N |\xi|_d^{-1}) .$$

Le calcul de  $\widehat{E}_t(\xi)$  se ramène à  $\widehat{E}_0(T, \xi)$ . En effet, posons

$$\mathbb{Q}_M^n = \prod_{p \in M} \mathbb{Q}_p^n , \quad dx_M = \prod_{p \in M} dx_p ;$$

et si  $x_M = (x_p) \in \mathbb{Q}_M$ , on écrit

$$\chi(x_M) = \prod_{p \in M} \chi_p(x_p) ,$$

où  $\chi_p$  est le caractère de Tate de  $\mathbb{Q}_p$  (cf. la démonstration du thm. 3, ch. IV, § 2 de [W] ou [Lg], ch. XIV, § 1). Posons enfin

$$U_M = \{x \in \mathbb{Q}_M^n \mid |x_p|_p = 1 \text{ pour } p \in M\}$$

Avec ces notations, et puisque les fonctions  $\phi_p$  sont leur propres transformées de

Fourier lorsque la transformation de Fourier est définie par le caractère de Tate, il vient

$$(23) \quad \widehat{E}_t(\xi) = \prod_{p \notin M} \phi_p(\xi) \widehat{E}_t(\xi_M, \xi_0),$$

avec

$$(24) \quad \widehat{E}_t(\xi_M, \xi_0) = \int_{U_M} \chi(\langle x_M, \xi_M \rangle) \widehat{E}_0(t F_M(x_M), \xi_0) dx_M.$$

Si  $\xi = 0$ , on a, vu la relation (20),

$$\begin{aligned} E_t(0,0) &= t^{-K} \int_{U_M} F_M(x_M)^{-K} dx_M \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-F(x_0)) dx_0 \\ &= t^{-K} V_0 \prod_{p \in M} \int_{\|x\|_p=1} |F(x_p)|_p^{-1} dx_p \\ &= t^{-K} V_M \end{aligned}$$

d'où s'ensuit la relation (14) ; si d'autre part on pose  $T = t F_M(x_M)^{-1}$ , la relation (7) implique que si  $x_M \in U_M$ , on a  $T \leq c_M^{-1} t$  et donc,

$$E_0(t F_M(x_M), \xi_0) = E_0(T, \xi_0) \ll t^{N-K} |\xi_0|_d^{-N}$$

comme on le déduit de (22) ; cette estimation, jointe à (23) et (24), prouve la relation (15) et le lemme 2 est démontré.

FONCTIONS ZÊTA GÉNÉRALISÉES

BIBLIOGRAPHIE

- [A] C. AN - On the analytic continuation of a certain Dirichlet series, J. of Number Theory, 6 (1974), p. 1-6.
- [B] S. BOCHNER - Zeta-functions and Green's functions for linear partial differential operators of elliptic type with constant coefficients, Ann. of Math., 57 (1953), p. 32-56.
- [L] G. LACHAUD - Variations sur un thème de Mahler, à paraître aux Inv. Math.
- [Lg] S. LANG - Algebraic number theory, Reading, Addison-Wesley, 1970.
- [M1] K. MAHLER - Über einen Satz von Mellin, Math. Ann., 100 (1928), p. 384-395.
- [M2] K. MAHLER - Zur Approximation Algebraischer Zahlen, III, Acta Math., 62 (1933), p. 91-166.
- [R] B. RANDOL - Generalized zeta-functions, Arkiv för Mat., 5 (1963), p. 101-111.
- [W] A. WEIL - Basic Number Theory, Heidelberg, Springer, 1974.

Gilles LACHAUD  
U.E.R. de Mathématiques  
Université Paris 7  
2, place Jussieu  
75221 PARIS CEDEX 05