MARC CHAPERON

Singularités en géométrie de contact

Astérisque, tome 59-60 (1978), p. 95-118
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__59-60__95_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 59-60 (1978) p. 95-118

SINGULARITÉS EN GÉOMÉTRIE DE CONTACT

Marc CHAPERON

La géométrie de contact est le cadre naturel de très nombreux problèmes en analyse, topologie et géométrie différentielles. Comme il ne s'agit néanmoins pas d'un sujet classique, j'ai cru bon d'en exposer les grandes lignes dans une (longue) première partie, rédigée de manière assez "concrète" mais presque sans démonstration. Au lieu de me borner à ce qui suffisait pour comprendre la seconde partie, j'ai mis l'accent sur l'existence d'autres structures de contact que les structures de "contact d'ordre 1 en codimension 1" considérées d'ordinaire♦. Tout ce que contient cette première partie est relativement bien connu, à l'exception peut-être de la <u>proposition</u> 3 et des remarques qui terminent 6-a.

La seconde partie de cet article est consacrée à la classification locale des intégrales singulières♦♦ des équations aux dérivées partielles du premier ordre, commencée par Oshima [6] et par Guillemin et Schaeffer [5]. Comme dans [5], on étudie un problème de champs de vecteurs dont la résolution entraîne celle du problème initial.

♦ Exposées dans l'excellent livre d'Arnold [1], qui peut servir de référence pour la première partie (en particulier pour la <u>proposition</u> 10).

♦♦ Pour éviter toute ambiguité, j'ai souvent utilisé le terme redondant de "sous-variétés régulières" pour désigner les sous-variétés d'une variété différentiable.

I - QUELQUES STRUCTURES DE CONTACT USUELLES

1. ESPACES DE JETS.

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; "C^k" veut dire "holomorphe" si $k \geq 1$ et $K = \mathbb{C}$.

Soient $f : (K^n, x) \to K^p$ et $g : (K^n, y) \to K^p$ deux germes C^k. f et g ont le même jet d'ordre k si $x = y$ et si de plus f et g ont le même développement de Taylor à l'ordre k en x. Le quotient du faisceau des germes d'applications C^k $K^n \to K^p$ par cette relation d'équivalence est noté $J^k(K^n, K^p)$, et s'identifie à $K^n \times K^p \times \prod_{j=1}^{k} L_s^j(K^n, K^p)$, où $L_s^j(K^n, K^p)$ désigne l'espace des applications j-linéaires symétriques $(K^n)^j \to K^p$. Si $\alpha : J^k(K^n, K^p) \to K^n$ et $\beta : J^k(K^n, K^p) \to K^p$ sont les projections naturelles, on définit $J^k(U,V) = \alpha^{-1}(U) \cap \beta^{-1}(V)$ lorsque U et V sont des ouverts de K^n et K^p respectivement. $J^k(U,V)$ est l'espace des jets d'ordre k d'applications de U dans V.

Etant données deux variétés K-différentiables N et P, on définit $J^k(N,P)$ comme précédemment, la notion de contact d'ordre k entre deux applications $N \to P$ étant intrinsèque. Si N et P sont respectivement modelées sur K^n et K^p, $J^k(N,P)$ est muni d'une structure de fibré différentiable de base $N \times P$, de fibre $\prod_{j=1}^{k} L_s^j(K^n, K^p)$, de la manière suivante : soient $\varphi^{-1}(U) \xrightarrow{\varphi} U$ et $\psi^{-1}(V) \xrightarrow{\psi} V$ des cartes de N et P respectivement et soit $J^k(N,P) \xrightarrow{\pi} N \times P$ la projection naturelle ; l'application qui associe à un germe $f : \varphi^{-1}(U) \to \psi^{-1}(V)$ le germe $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U \to V$ induit une bijection $\pi^{-1}(\varphi^{-1}(U) \times \psi^{-1}(V)) \to J^k(U,V)$ qui est une carte fibrée au-dessus de $\varphi \times \psi$; il est facile de vérifier que l'on obtient bien ainsi un atlas de fibré différentiable (qui n'est pas, pour $k \geq 2$, un fibré vectoriel).

Etant donné un fibré $E \xrightarrow{\pi} B$, on définit de même l'espace $J^k(\pi)$ des jets d'ordre k de sections de π : pour un fibré trivial, c'est ce qui vient d'être fait ; pour un fibré localement trivial quelconque, on vérifie par recollement que $J^k(\pi)$ est muni d'une structure de fibré de base E, de fibre

$\prod_{j=1}^{k} L_s^j(K^n,K^p)$ si B est modelé sur K^p et E sur K^{n+p}.

Un dernier type d'espace de jets est le suivant : soit E une variété de dimension $n+p$; on considère la relation d'équivalence "avoir un contact d'ordre k" entre germes de sous-variétés de codimension p de E. Le quotient, noté $J^k(E,p)$, est l'espace des jets d'ordre k de sous-variétés de codimension p de E. En faisant la remarque triviale que, pour tout germe de sous-variété V^n de K^{n+p}, il existe une décomposition $K^{n+p} = K^n \times K^p$ telle que V soit le graphe d'un germe d'application $K^n \to K^p$, on munit facilement $J^k(E,p)$ d'une structure de variété différentiable modelée sur $J^k(K^n,K^p)$. Plus précisément, $J^k(E,p)$ est un fibré de base E dont la fibre est elle-même un fibré de base $G_n(n+p)$ (grassmannienne des n-plans dans K^{n+p}), de fibre $\prod_{j=2}^{k} L_s^j(K^n,K^p)$.

Dans tous les cas, on a une suite de fibrations $J^k \to J^{k-1} \to \ldots \to J^o$.

2. STRUCTURE DE CONTACT D'UN ESPACE DE JETS.

Soient U un ouvert de K^n et $f : U \to K^p$ une application C^r. Pour $k \leq r$, on associe à f l'application $U \to J^k(K^n,K^p)$, notée j^kf et définie par $j^kf(x) = (x, f(x), Df(x), \ldots, D^kf(x))$. j^kf est évidemment un plongement de U dans $J^k(K^n,K^p)$ si $k < r$. Il est clair que $V = j^kf(U)$ n'est pas n'importe quelle sous-variété de dimension n de $J^k(K^n,K^p)$: elle est transverse aux fibres de la projection $J^k(U,K^p) \xrightarrow{\alpha} K^n$; de plus, $D(D^jf)(x) = D^{j+1}f(x)$. Exprimons cette dernière condition en termes de systèmes de Pfaff : si $(x, p_o, p_1, \ldots, p_k) \in K^n \times K^p = \prod_{j=1}^{k} L_s^j(K^n,K^p)$ désigne le point courant de $J^k(K^n,K^p)$, soit $\mathcal{C}$ le système de Pfaff engendré par les 1-formes notées vectoriellement $dp_j - \langle p_{j+1}, dx\rangle$ $(j = 0, \ldots k-1)$; le système de Pfaff induit sur V par $\mathcal{C}$ est nul (on dit que V est une variété intégrale de $\mathcal{C}$). On montre facilement la

Proposition 1 : Les deux conditions précédentes (transversalité de V aux fibres de α et nullité du système induit par $\mathcal{C}$ sur V) impliquent que V soit

<u>localement l'image d'un plongement</u> $x \mapsto j^k f(x)$. <u>De plus</u>, <u>pour</u> $k \geq 1$, V <u>est transverse aux fibres de</u> α <u>si et seulement si la restriction à</u> V <u>de la projection</u> $J^k(K^n,K^p) \to K^n \times K^p$ <u>est régulière</u>.

<u>Remarque</u> : Globalement, $\alpha_{|V}$ peut être un revêtement à plusieurs feuillets de son image, par exemple.

<u>Définition</u> : $\mathcal{C}$ est la <u>structure de contact</u> de $J^k(K^n,K^p)$.

Les espaces $J^k(N,P)$, $J^k(\pi)$ et $J^k(E,p)$ définis au 1. sont tous modelés localement sur $J^k(K^n,K^p)$, et $\mathcal{C}$ est manifestement conservée par les changements de cartes. On définit donc sur chacun de ces espaces un système de Pfaff -sa structure de contact.

Soit $N \xrightarrow{f} P$ (resp. $B \xrightarrow{s} E, W$) une application C^k (resp. une section C^k de π, une sous-variété C^k de E de codimension p). En tout point x de N (resp. de B, de W), f (resp. s, W) définit un <u>élément de contact</u> $j^k f(x)$ (resp. $j^k s(x)$, $j^k_x W$) dans $J^k(N,P)$ (resp. $J^k(\pi)$, $J^k(E,p)$), à savoir la classe d'équivalence de son germe en x pour la relation "avoir un contact d'ordre k". L'application $x \to j^k f(x)$ (resp. $j^k s(x)$, $j^k_x W$) est un plongement $N \to J^k(N,P)$ (resp. $B \to J^k(\pi)$, $W \to J^k(E,p)$) dont l'image est une variété intégrale V de la structure de contact de J^k, telle que la restriction à V de la projection $J^k \to J^o$ soit régulière. La <u>proposition</u> 1 fournit une "réciproque" locale de cette propriété.

3. <u>PROBLÈMES DIFFERENTIELS</u>.

Un système de m équations aux dérivées partielles d'ordre k, à p fonctions inconnues de n variables, s'écrit

(1) $$f_i(x,p_o,p_1,\dots,p_k) = 0 \quad (i = 1,\dots,m) \quad ,$$

avec les notations de 2. Il définit donc une sous-variété $S = \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(0)$ (éventuellement singulière) de $J^k(K^n,K^p)$. De même, un système d'inéquations aux dérivées partielles définit en général un ouvert (éventuellement à bord) de $J^k(K^n,K^p)$. Enfin, certains problèmes se posent dans un $J^k(N,P)$, un $J^k(\pi)$ ou un $J^k(E,p)$ -comme en géométrie différentielle, où il s'agit souvent d'étudier les sous-variétés d'une variété qui ont certaines propriétés. D'où la

Définition : On appelle problème différentiel tout sous-ensemble S de $J^k(K^n,K^p)$, $J^k(\pi)$ ou $J^k(E,p)$.

Une solution (régulière) de (1) est une application C^k $U \xrightarrow{\varphi} K^p$, où U est un ouvert de K^n, telle que $f_i(j^k\,\varphi(x)) = 0$ quels que soient $x \in U$ et $i \in \{1,\dots,m\}$. Il en résulte que $V = j^k\,\varphi(U)$ est contenue dans $S = \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(0)$. On en déduit la

Définition : Soit $S \subset J^k(N,P)$ (resp. $J^k(\pi)$, $J^k(E,p)$) un problème différentiel. On appelle solution (locale) de S une application $U \xrightarrow{\varphi} P$ (resp. une section locale $U \xrightarrow{s} E$ de π, une sous-variété W de E), où U est un ouvert de N (resp. B), telle que $j^k\,f(U)$ (resp. $j^k s(U)$, $\{j^k_x W \mid x \in W\}$) soit incluse dans S.

Les espaces de jets possèdent "beaucoup" de structure, puisqu'ils ont à la fois une structure de contact et une structure de fibré. Dans la recherche des solutions d'un problème différentiel, il peut être utile de tenir compte d'abord d'une seule de ces deux structures. Par exemple, dans certains de ses travaux (cf. l'exposé de Burlet [2]) Gromov commence par ne tenir compte que de la structure de fibré $J^k(\pi) \to B$. On peut aussi commencer par "oublier" la projection, ce qui donne la

<u>Définition</u> : On appelle <u>solution de Lie</u> d'un problème différentiel $S \subset J^k$ une variété intégrale de dimension maximale♦ de la structure de contact de J^k, qui est incluse dans S.

4. TRANSFORMATIONS DE CONTACT.

La plus grande partie de ce qui suit est exprimé dans les "cartes locales" $J^k(K^n,K^p)$, sans grande perte de généralité. $J^k = J^k(N,P), J^k(\pi)$ ou $J^k(E,p)$.

On appelle <u>transformation de contact</u> tout difféomorphisme local $h : J^k \circlearrowleft$ qui conserve la structure de contact de J^k. Un <u>champ de Lie</u> est une transformation de contact infinitésimale, c'est-à-dire un champ de vecteurs X sur un ouvert de J^k, tel que exp tX soit un pseudo-groupe à un paramètre de transformations de contact.

<u>Remarque</u> : Si $k = 0$, une transformation de contact est simplement un difféomorphisme local, et n'est donc pas en général, si l'on se place dans $J^o(\pi) = E$, un automorphisme du fibré π.

<u>Proposition 2</u> : <u>Toute transformation de contact (resp. infinitésimale) de J^k induit (au-dessus de son domaine de définition) une unique transformation de contact (resp. infinitésimale) de J^r pour $r \geq k$ qui soit un automorphisme (resp. infinitésimal) local du fibré $J^r \to J^k$ au-dessus de la transformation donnée.</u>

Il y a en général "assez peu" de transformations de contact :

<u>Proposition 3</u> : <u>Tout germe de transformation de contact (resp. infinitésimale) de $J^k(K^n,K^p)$ est induit, au sens de la proposition 2,</u>

♦ Voir plus loin la <u>proposition 8</u> et la remarque qui la suit.

- <u>par un germe de transformation de contact</u> (<u>resp. infinitésimale</u>) <u>de</u> $J^1(K^n,K)$ <u>si</u> $p=1$;
- <u>par un germe de transformation de contact</u> (<u>resp. infinitésimale</u>) <u>de</u> $J^o(K^n,K^p)$ <u>si</u> $p>1$.

Les seules transformations de contact non triviales sont donc celles des espaces de jets modelés sur $J^1(K^n,K)$ (la <u>proposition</u> 3 est évidemment vraie dans les divers J^k introduits).

La structure de contact de $J^1(K^n,K)$ est engendrée par une seule 1-forme, à savoir $dp_o - \langle p_1, dx\rangle$. Pour l'étudier commodément, il est utile de préciser l'idée que $J^1(K^n,K)$ est une carte locale de $J^1(K^{n+1},1)$.

$J^1(K^{n+1},1)$ est l'ensemble des hyperplans tangents à K^{n+1}, et s'identifie donc à $K^{n+1}\times P(K^{n+1})^* = PT^*K^{n+1}$, quotient de $T^*K^{n+1}\setminus(K^{n+1}\times\{0\})$ par l'action du groupe multiplicatif $K\setminus\{0\}$ dans les fibres $\{x\}\times((K^{n+1})^*\setminus\{0\})$. Soit π la projection $T^*K^{n+1}\setminus(K^{n+1}\times\{0\})\to PT^*K^{n+1}$. Notons $(x_o,\dots,x_n)$ les coordonnées dans K^{n+1},$(\xi^o,\dots,\xi^n)$ les coordonnées dans la base duale de $(K^{n+1})^*$. Dans PT^*K^{n+1}, l'ensemble des hyperplans de K^{n+1} transverses aux fibres de la projection $K^{n+1}\to K^n$ définie par $(x_o,\dots,x_n)\mapsto(x_1,\dots,x_n)$ est l'image par π de l'ensemble U_o des points de T^*K^{n+1} où $\xi^o\neq 0$. $\pi(U_o)$ est le domaine d'une carte α à valeurs sur $J^1(K^n,K)$, définie par

$$\alpha\circ\pi(x_o,\dots,x_n,\xi^o,\dots,\xi^n) = \left(x_1,\dots,x_n,x_o,-\frac{\xi^1}{\xi^o},\dots,-\frac{\xi^n}{\xi^o}\right)\ ,\ \text{i.e., avec les}$$

notations précédentes, par

$$p_o = x_o \quad \text{et} \quad p_1 = (p_1^1,\dots,p_1^n)\ ,\quad \text{où } p_1^i = -\frac{\xi^i}{\xi^o}\ .$$

<u>Remarque</u> : $\alpha\circ\pi$ "traduit" le passage de la représentation d'un germe d'hypersurface de K^{n+1} sous la forme $\Phi(x_o,\dots,x_n)=0$ à sa représentation comme graphe d'une fonction $x_o=\varphi(x_1,\dots,x_n)$.

T^*K^{n+1} étant muni de la structure symplectique définie par la 2-forme fermée $\sum_{i=0}^{n+1} d\xi^i \wedge dx_i = \Omega$, on rappelle qu'une transformation canonique de T^*K^{n+1} est un difféomorphisme local $H : T^*K^{n+1} \circlearrowleft$ tel que $H_*\Omega = \Omega$. Un champ hamiltonien est une transformation canonique infinitésimale, c'est-à-dire un champ de vecteurs X défini dans un ouvert de T^*K^{n+1} et tel que $L_X \Omega = d(i_X \Omega) = 0$. D'après le lemme de Poincaré, il existe localement une fonction F (unique à une constante près) telle que $i_X \Omega = dF$: on l'appelle hamiltonien de X.

Proposition 4 : Soit h une transformation de contact de $J^1(K^n,K)$ (resp. de $J^1(K^n,1) = PT^*K^{n+1}$). Il existe une unique transformation canonique H de T^*K^{n+1}, définie dans l'image réciproque du domaine de h par $\alpha \circ \pi$ (resp. par π), et telle que $\alpha \circ \pi \circ H = h \circ \alpha \circ \pi$ (resp. $\pi \circ H = h \circ \pi$). La propriété correspondante est vraie pour les champs de Lie.

5. HAMILTONIENS DE CONTACT, ÉQUATIONS AUX DÉRIVEES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE ET FONCTIONS GÉNÉRATRICES.

On pose, les notations étant celles du paragraphe précédent, $t = p_o$, $\tau = \xi^o$, $p_1^i = p^i$, $p = (p^1,\dots,p^n)$, et on appelle c le générateur $dt - \langle p,dx\rangle = dt - \sum_{i=1}^{n} p^i\, dx_i$ de la structure de contact de $J^1(K^n,K)$.

Proposition 5 : Soit X un champ de Lie sur $J^1(K^n,K)$. Si $\langle c,X\rangle = f$, $df + i_X dc$ est colinéaire à c. De plus, les relations $\langle c,X\rangle = f$ et $(df + i_X dc) \wedge c = 0$ caractérisent entièrement X connaissant f ; plus précisément,

$$X = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p^i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \left(f - \langle\frac{\partial f}{\partial p}, p\rangle\right)\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p^i\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial p^i} .$$

$f = \langle c, X\rangle$ s'appelle le *hamiltonien de contact* (par rapport à c) du champ de Lie X.

On note $X = \mathcal{V}_f$. $X \mapsto f$, étant un isomorphisme {champs de Lie} $\to$ {fonctions}, permet de munir l'ensemble des fonctions (par exemple C^∞) sur tout ouvert de $J^1(K^n, K)$ d'une structure d'algèbre de Lie, le *crochet de Lagrange* étant l'image du crochet de Lie par l'isomorphisme précédent. Plus précisément, si $X = \mathcal{V}_f$, le crochet de Lagrange $[f,g]$ est égal à $X.g - g\dfrac{\partial f}{\partial t}$.

Soit $X = \mathcal{V}_f$ un champ de Lie sur $J^1(K^n, K)$. $\langle df, X\rangle$ est égal à $\langle df + i_X dc, X\rangle$, donc multiple de $\langle c, X\rangle = f$. Il en résulte que X est tangent à $f^{-1}(0)$; d'autre part, $X|_{f^{-1}(0)}$ annule évidemment c. De ces deux propriétés et du fait que X est une transformation de contact infinitésimale résulte aussitôt la

Proposition 6 : *Soit* $V \overset{j}{\hookrightarrow} f^{-1}(0)$ *une sous-variété régulière, telle que* $j^*c = 0$, *et à laquelle* X *n'est nulle part tangent. Le germe le long de* V *de la réunion des lignes de champ de* X *qui coupent* V *est un germe de sous-variété intégrale régulière de* c, *contenu dans* V.

Cette proposition contient la théorie du problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles du 1er ordre :

Proposition 7 : *Soit* $E \overset{i}{\hookrightarrow} J^1(K^n, K)$ *une équation aux dérivées partielles du 1er ordre (problème différentiel défini par un plongement régulier de codimension 1). Si, localement,* $E = f^{-1}(0)$, *les lignes de champ de* $\mathcal{V}_f$ *sur* E *ne dépendent pas du choix de la fonction régulière* f. *On les appelle* caractéristiques *de* E. *Toute solution de Lie de* E *est réunion de caractéristiques* ; *si* $V \overset{j}{\hookrightarrow} E$ *est une sous-variété de dimension* n-1 *telle que* $j^* i^* c = 0$, *à laquelle le feuilletage caractéristique n'est nulle part tangent, la réunion des caractéristiques issues de* V *est localement une solution de* Lie *de* E (*c'est* ce qu'on appelle résoudre le problème de Cauchy défini par V).

Nous avons vu qu'un ouvert dense de T^*K^{n+1} se projetait (via $\alpha \circ \pi$) sur $J^1(K^n,K)$. Un autre lien existe entre jets d'ordre 1 et cotangents : $J^1(K^n,K)$ est envoyé sur T^*K^n par la projection $(x,t,p) \xrightarrow{q} (x,p)$. Les propositions suivantes sont faciles à établir :

Proposition 8 : Un germe en (x_o,t_o,p_o) de sous-variété régulière $V \overset{i}{\hookrightarrow} J^1(K^n,K)$ vérifiant $i^*c = 0$ a pour projection un germe de sous-variété régulière $V \overset{q\circ i}{\hookrightarrow} T^*K^n$, tel que $i^*q^*\Omega = 0$; réciproquement, étant donné un germe en (x_o,p_o) de sous-variété régulière $V \overset{j}{\hookrightarrow} T^*K^n$, vérifiant $j^*\Omega = 0$, il passe par tout point de $q^{-1}(x_o,p_o)$ un unique germe de sous-variété régulière $V \overset{i}{\hookrightarrow} J^1(K^n,K)$ tel que $q \circ i = j$ et $i^*c = 0$. En particulier, un germe de sous-variété régulière $V \overset{i}{\hookrightarrow} J^1(K^n,K)$ vérifiant $i^*c = 0$ est de dimension au plus n.

Remarque : Si $\mathcal{C}$ désigne la structure de contact de $J^k(K^n,K^m)$ pour $k \geq 1$, un germe de variété intégrale de $\mathcal{C}$ est génériquement de dimension au plus n (les fibres de la projection $J^k \to J^{k-1}$ sont des contre-exemples éventuels).

Proposition 9 : Soit h un germe en M de transformation canonique de T^*K^n. Un point quelconque N de $q^{-1}(M)$ étant fixé, chaque point P de $q^{-1}(h(M))$ détermine un unique germe $\tilde{h}$ de transformation de contact le long de $q^{-1}(M)$, tel que $\tilde{h}(N) = P$ et $q \circ \tilde{h} = h \circ q$.

Proposition 10 : Soit $V \overset{i}{\hookrightarrow} T^*K^n$ un germe de sous-variété régulière de dimension n, tel que $i^*\Omega = 0$ ("variété lagrangienne"). Il existe une partition $\{1,\ldots,n\} = I \amalg J$ et un germe de fonction régulière $\varphi((x_i)_{i\in I},(p^j)_{j\in J})$ à valeurs dans K, tel que V soit défini par

$$p^i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \quad \text{pour } i \in I \quad \text{et} \quad x_j = -\frac{\partial\varphi}{\partial p^j} \quad \text{pour } j \in J .$$

Corollaire 1 : Soit $V \overset{i}{\hookrightarrow} J^1(K^n,K)$ un germe de sous-variété régulière de dimension n, vérifiant $i^*c = 0$ ("variété de Legendre" dans la terminologie d'Arnold [1]). Il existe une partition $\{1,\ldots,n\} = I \amalg J$ et un germe de fonction régulière $\varphi((x_i)_{i\in I}, (p^j)_{j\in J})$ à valeurs dans K, tel que V soit défini par

$$p^i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \quad \text{pour} \quad i \in I \quad , \quad x_j = -\frac{\partial\varphi}{\partial p^j} \quad \text{pour} \quad j \in J$$

et

$$t = \varphi - \sum_{j\in J} p^j \frac{\partial\varphi}{\partial p^j} \quad .$$

On dit que φ est une fonction génératrice de V. Il est clair qu'inversement toute fonction φ définit de la sorte une variété lagrangienne ou de Legendre.

Corollaire 2 : Soit $h : T^*K^{n+1} \to T^*K^{n+1}$ un germe de transformation canonique ; si l'on note respectivement $(x_0,\ldots,x_n,\xi^0,\ldots,\xi^n)$ et $(y_0,\ldots,y_n,\eta^0,\ldots,\eta^n)$ les coordonnées à la source et au but, il existe deux partitions $I \amalg J = \{0,\ldots,n\} = I' \amalg J'$ et un germe de fonction $\varphi((x_i)_{i\in I},(\xi^j)_{j\in J},(y_i)_{i\in I'},(\eta^j)_{j\in J'})$ tel que le graphe de h soit défini par

$$\xi^i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \quad \text{pour} \quad i \in I \quad , \quad x_j = -\frac{\partial\varphi}{\partial \xi^j} \quad \text{pour} \quad j \in J \quad ,$$

$$\eta^i = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \quad \text{pour} \quad i \in I' \quad , \quad y_j = \frac{\partial\varphi}{\partial \eta^j} \quad \text{pour} \quad j \in J' \quad .$$

Inversement, les formules précédentes définissent le graphe d'un germe de transformation canonique dès qu'elles définissent le graphe d'un germe d'application.

Le corollaire 2 résulte de ce que le graphe de h est une variété lagrangienne de $T^*K^{n+1} \times T^*K^{n+1}$ muni de la 2-forme fermée $\sum_{i=0}^{n} (d\xi^i \wedge dx_i - d\eta^i \wedge dy_i)$. On dit que φ est une fonction génératrice de h.

Du corollaire 2 et de la proposition 4 on déduit le

Corollaire 3 : Soit $h : J^1(K^n,K) \to J^1(K^n,K)$ un germe de transformation de contact. Si h est "assez proche de l'identité" et que l'on note respectivement $(x_1,\dots,x_n,t,p^1,\dots,p^n) = (x,t,p)$ et $(X_1,\dots,X_n,T,P^1,\dots,P^n) = (X,T,P)$ les coordonnées à la source et au but, il existe un germe de fonction $\varphi(x,t,P)$ tel que le graphe de h soit défini par

$$T = \varphi - <\frac{\partial\varphi}{\partial P},P>, X = -\frac{\partial\varphi}{\partial P} \quad \text{et} \quad p = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} .$$

Inversement, les formules précédentes définissent le graphe d'un germe de transformation de contact dès qu'elles définissent le graphe d'une application.

On dit que φ est une fonction génératrice de h.

Appelons transformation de Legendre toute transformation de contact qui "échange certains des x_i avec les p^i correspondants", c'est-à-dire définie par

$$\begin{cases} P^i = p^i \quad \text{et} \quad X_i = x_i \quad \text{pour } i \in I \subset \{1,\dots,n\} \\ P^i = x_i \quad \text{et} \quad X_i = -p^i \quad \text{pour } i \in \{1,\dots,n\} \setminus I \\ T = t - \sum_{i \notin I} p^i x_i \quad . \end{cases}$$

On montre que tout germe de transformation de contact est conjugué par une transformation de Legendre à un germe du type décrit dans le corollaire 3.

Remarque : On voit donc qu'une transformation de contact n'est que rarement un automorphisme local du fibré $J^1(K^n,K) \to K^n \times K$.

6. SINGULARITÉS EN GÉOMÉTRIE DE CONTACT.

Il en existe deux sortes : - des singularités du type "singularités d'applications", donc relativement simples, bien qu'elles n'aient été étudiées en détail (par Arnold et son école) que dans le cas particulier de $J^1(K^n,K)$;

- des singularités du type "champs de vecteurs", donc plus compliquées que les précédentes ; néanmoins, nous verrons dans la deuxième partie de cet article que, dans $J^1(K^n,K)$, l'étude des singularités des champs de Lie est beaucoup plus facile que celle des singularités des champs hamiltoniens, par exemple.

a - Singularités du type "applications".

Ce sont celles qui sont liées à la projection $J^k \to J^o$. Plus précisément, il s'agit d'étudier la manière dont une variété intégrale de dimension maximale $V \overset{i}{\hookrightarrow} J^k$ de la structure de contact $\mathcal{C}$ de J^k (par exemple une solution de Lie d'un problème différentiel) peut être "mal placée" par rapport à la projection $J^k \to J^o$.

Pour les espaces modelés sur $J^1(K^n,K)$, la situation est maintenant bien connue. Plus exactement , Arnold et son école ont étudié en détail la classification locale des projections lagrangiennes : par projection lagrangienne, on entend la restriction à une variété lagrangienne de T^*K^n de la projection $T^*K^n \to K^n$; la classification en question se fait modulo la relation d'équivalence suivante : deux germes L et L' de variétés lagrangiennes de T^*K^n sont équivalents s'il existe un germe h de transformation canonique de T^*K^n qui est aussi un automorphisme du fibré $T^*K^n \to K^n$, tel que

$h(L) = L'$ (voir [1] pour des détails et des références).

En utilisant les <u>propositions</u> 8 et 9, on traduit immédiatement les résultats d'Arnold en termes de classification locale "des projections de Legendre" à transformation de contact préservant la projection $J^1(K^n,K) \to K^n$ près.

<u>Exemple</u> : Pour $n = 2$, les modèles locaux des singularités lagrangiennes stables sont le pli et la fronce, donnés respectivement en $(0,0) \in T^*K^n$ par les variétés lagrangiennes (notant (x,p) le point courant de $K^n \times (K^n)^*$) :

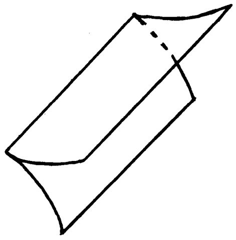
$$x_1 = p_1^2 \quad , \quad p_2 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = p_1^3 + 2x_2p_1 \quad , \quad p_2 = -p_1^2 \quad .$$

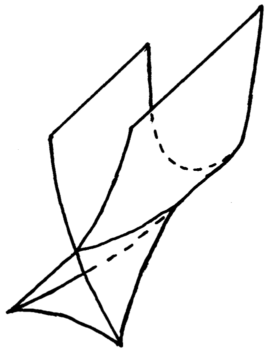
Les "singularités de Legendre" correspondantes ont pour modèles locaux en $(0,0,0) \in J^1(K^n,K)$

$$t = \frac{2p_1^3}{3} \quad , \quad x_1 = p_1^2 \quad , \quad p_2 = 0 \quad \text{et}$$

$$t = \frac{3}{4}\, p_1^4 + x_2p_1^2 \quad , \quad x_1 = p_1^3 + 2x_2p_1 \quad , \quad p_2 = -\, p_1^2 \quad .$$

Les projections dans $K^n \times K = J^0(K^n,K)$ de ces singularités présentent respectivement une arête de rebroussements de première espèce et une "queue d'aronde" :





<u>Remarque</u> : L'application de cette classification aux caustiques est bien connue : elle relève de l'étude des équations aux dérivées partielles du premier ordre (et des singularités de leurs solutions).

Il n'est peut être pas inutile de noter que, pour une assez large classe d'équations aux dérivées partielles <u>du second ordre</u> (à une fonction inconnue), les singularités des solutions sont des singularités de Legendre : il s'agit des équations aux dérivées partielles qui sont représentées localement par une équation différentielle extérieure (de degré n) dans $J^1(K^n,K)$. Entrent dans cette classe, entre autres,

- les équations quasilinéaires (linéaires par rapport aux dérivées partielles d'ordre 2), parce que, étant donnée une fonction $\varphi(x_1,\dots,x_n)$,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\, d x_1 \wedge \dots \wedge dx_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge d\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n \quad ;$$

- les équations de Monge-Ampère (réelles), qui s'écrivent

$$dp^1 \wedge \dots \wedge dp^n + f(x,t,p)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = 0 \quad .$$

Un exemple amusant est le suivant :

<u>Exemple</u> : <u>Pourquoi une feuille d'aluminium</u> (par exemple) <u>se froisse pratiquement dès qu'on l'utilise</u>.

Une feuille d'aluminium est en première approximation une surface développable dans l'espace euclidien ; elle est donc solution du système différentiel extérieur de $J^1(\mathbb{R}^3,1)$ qui s'écrit localement, dans $J^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$,

$$dp^1 \wedge dp^2 = 0 \quad ,$$

les coordonnées x_1, x_2, t correspondant à une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Les solutions de Lie de ce problème sont les sous-variétés de $J^1(\mathbb{R}^3,1) = PT^*\mathbb{R}^3$ définies localement en coordonnées homogènes ($x_3 = t$) par

$$\begin{cases} \xi^1(\lambda)x_1 + \xi^2(\lambda)x_2 + \xi^3(\lambda)x_3 + \alpha(\lambda) = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ \frac{\partial}{\partial\lambda}(\xi^1(\lambda)x_1 + \xi^2(\lambda)x_2 + \xi^3(\lambda)x_3 + \alpha(\lambda)) = 0 \quad , \end{cases}$$

ξ^1, ξ^2, ξ^3 ne pouvant être simultanément nuls. (En d'autres termes, "une surface développable est l'enveloppe d'une famille à un paramètre de plans"). Or, les projections dans $\mathbb{R}^3$ de ces "solutions de Lie" présentent de façon stable des singularités (arêtes de rebroussements et queues d'aronde) dont l'impossibilité physique est manifeste. Il en résulte que les propriétés plastiques de la feuille doivent intervenir, et qu'elle se froisse.

Remarque : Une question plus intéressante serait de savoir comment une telle feuille se froisse ; elle nécessiterait une analyse plus poussée -et un peu plus de physique, vraisemblablement.

Les singularités des "projections legendriennes" dans des espaces de jets plus généraux n'ont, semble-til, guère été étudiées. Dans le cas de la projection $J^2(K^2,K) \to J^o(K^2,K)$, on voit par exemple apparaître de façon stable des arêtes de rebroussements non plus en (θ^2,θ^3), mais en (θ^2,θ^5).

b - Singularités du type "champs de vecteurs".

Dans $J^1(K^n,K)$, ce sont les singularités des champs de Lie -ou des feuilletages caractéristiques d'équations du permier ordre. Plus précisément, nous allons étudier les intégrales singulières des équations définies par des sous-variétés régulières $E \overset{i}{\hookrightarrow} J^1(K^n,K)$: une sous-variété régulière $\Sigma \overset{j}{\hookrightarrow} E$ est appelée ainsi si la restriction à Σ de l'application $i^*c : E \to T^*E$ est identiquement nulle. En particulier, $j^*i^*c = 0$, donc Σ est de dimension au plus n. On montre facilement la

Proposition 11 : A - Soient $\mathcal{V}_f$ un champ de Lie, h une transformation de contact définie dans son domaine. Si $h_*\mathcal{V}_f = \mathcal{V}_g$, alors $g^{-1}(0) = h(f^{-1}(0))$.

B - Soient $E \xrightarrow{i} J^1(K^n,K)$ une sous-variété régulière de codimension 1, $\Sigma \xrightarrow{j} E$ une sous-variété (régulière). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Σ est une intégrale singulière de E ;

(ii) quels que soient le point M de Σ et la fonction régulière f qui définit localement E comme $f^{-1}(0)$, $\mathcal{V}_f$ s'annule sur Σ.

Exemple : Soit dans $J^1(K,K)$ l'équation de Clairaut $t = p^1x_1 + \varphi(p^1)$. Elle admet une intégrale singulière, définie par $x_1 = -\varphi'(p^1)$.

II - MODÈLES LOCAUX DE CHAMPS DE LIE SINGULIERS

Comme le titre de cette partie le suggère, les résultats y seront formulés en termes de champs de vecteurs ; il est facile, grâce à la proposition 11, de les traduire dans le langage des équations du premier ordre et de leurs intégrales singulières.

Un des problèmes que posent les espaces de jets est, on l'a vu, le maniement simultané de leur structure de contact et de leur structure de fibré. Dans les théorèmes qui suivent, on ignore totalement la structure de fibré, puisqu'on classifie des germes de champs de Lie à transformation de contact (générale) près. La philosophie de la chose est donc de remplacer une projection "simple" et champ de vecteurs "compliqué" par une projection compliquée et un champ de vecteurs simple.

Un exemple élémentaire du genre de résultats obtenus est la classique

Proposition 12 : *Soient $\mathcal{V}_f$ un champ de Lie C^∞ ou analytique sur $J^1(K^n,K)$ et A un point de $f^{-1}(0)$ où $\mathcal{V}_f$ n'est pas nul. Il existe une transformation de contact h définie dans un voisinage de A, de même différentiabilité que f, envoyant A sur (0,0,0) et telle que $h_*\mathcal{V}_f = \mathcal{V}_{p^n}$.*

1. CHAMPS DE LIE SINGULIERS.

Le théorème suivant est vrai dans les catégories C^∞ et analytique réelle (C^ω) si $K = \mathbb{R}$, dans la catégorie analytique complexe si $K = \mathbb{C}$ (il est aussi vrai en C^k, avec un k dépendant des hypothèses, mais on ne l'exposera pas ici).

Théorème 1 : *Soit $\mathcal{V}_f$ un champ de Lie nul sur une sous-variété Σ, de dimension n-k, de $J^1(K^n,K)$, et tel que f ait 0 pour valeur régulière ; soit A un point de Σ où les valeurs propres de la partie linéaire $D\mathcal{V}_f(A)$ de $\mathcal{V}_f$ vérifient les conditions suivantes* :

(i) 0 *est valeur propre d'ordre* n-k ;

(ii) *l'enveloppe convexe des autres valeurs propres ne contient pas l'origine* ;

(iii) *celles-ci sont "aussi distinctes que possible", c'est-à-dire au nombre de* 2k+1, *et ne vérifient aucune relation de "résonance paramétrique"* (*voir ci-dessous*, remarques, 1)).

Il existe alors une transformation de contact $h : J^1(K^n,K) \circlearrowleft$, *de même différentiabilité que $\mathcal{V}_f$, envoyant A sur (0,0,0), et telle que* $h_*\mathcal{V}_f = \mathcal{V}_{f_0}$, *où*

1/ Si $K = \mathbb{C}$,

$$f_o = \sum_{j=1}^{k} a_j(y)\, x_j p^j - a_o(y)t \quad , \tag{1}$$

en posant $y = (x_{k+1},\dots,x_n)$.

2/ Si $K = \mathbb{R}$,

$$f_o = \sum_{j=1}^{k_1} a_j(y)\, x_j p^j + \sum_{j=k_1+1}^{k-2m} \frac{a_o(y)}{2}\,(x_j^2 + b_j(y)(p^j)^2) + \tag{2}$$

$$+ \sum_{j=k-2m+1}^{k-m} 2\,\Re e(a_j(y) z_j r^j) - a_o(y)t \quad ,$$

où l'on a posé $y = (x_{k+1},\dots,x_n)$, $z_j = x_j + i x_{m+j}$ et $r^j = \frac{p^j - ip^{m+j}}{2}$, et où l'on suppose $b_j(0) > \frac{1}{4}$ et $a_j(0)$ imaginaire pour $j > k-2m$, réel sinon.

Remarques : 1/ Les valeurs propres de $D\mathcal{V}_f(A)$ sont $a_o(0), a_1(0),\dots,a_k(0)$, $a_o(0) - a_1(0),\dots,a_o(0) - a_k(0)$, et, dans le cas 2/, $a_o(0), a_1(0),\dots,a_{k-m}(0)$, $a_o(0) - a_1(0),\dots,a_o(0) - a_{k-m}(0)$ et leurs conjugués, où, pour $j \in \{k_1+1,\dots,k-2m\}$, on pose $a_j(y) = a_o(y)\,\frac{1 + i\sqrt{4b_j(y)-1}}{2}$. Appelant ces valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_{2k+1}$, les "résonances paramétriques" dont il est question dans l'énoncé sont les relations $\lambda_i = \sum_{j=1}^{2k+1} \alpha_j \lambda_j$, où les entiers naturels α_j ont une somme ≥ 2. Bien entendu, on ne peut éviter les "résonances paramétriques"

$$a_o = a_j + (a_o - a_j) \quad .$$

La seconde condition de (iii) signifie donc qu'on évite toutes les autres.

2/ L'hypothèse de non résonance formulée au (iii) n'est d'ailleurs pas essentielle, et ne figure ici que pour fournir un énoncé relativement lisible. Je renvoie à [3] pour un énoncé incluant les cas où il y a résonance (et relativement illisible !), et pour des références.

Idée de la démonstration (Les détails sont dans [3]) : On commence par se ramener au cas où Σ est la sous-variété de $J^1(K^n,K)$ définie par $((x_1,\dots,x_k),t,p) = (0,0,0)$ et A l'origine. La démonstration comporte alors deux parties : on montre tout d'abord que le théorème 1 est vrai, formellement, le long de Σ (c'est la partie la plus pénible), ce qui permet, en s'inspirant des méthodes de Sternberg [8] de le prouver ensuite. □

Toujours dans les catégories C^∞, C^ω et holomorphe, Oshima [6] et Guillemin-Schaeffer [5] ont prouvé le

Théorème 2 : Si dans le théorème 1 l'on prend $k = n$, l'hypothèse (ii) n'est plus nécessaire à la validité de sa conclusion. En revanche, l'hypothèse de non résonance contenue dans (iii) doit alors, dans les cas analytiques, être renforcée d'une hypothèse diophantienne assurant que l'on est "loin des résonances".

Ce théorème (qui peut être formulé en supprimant l'hypothèse de simplicité des valeurs propres contenue dans (iii)) est l'analogue en géométrie de contact du célèbre théorème de linéarisation des champs de vecteurs dû à Poincaré et Siegel dans les cas analytiques, à Sternberg dans le cas C^∞. Il convient de remarquer que les "champs de Lie" se comportent à cet égard beaucoup mieux que les champs hamiltoniens.

Pour $k < n$, si l'hypothèse (ii) est transgressée, le théorème 1 est en général faux formellement : même si en A aucune des relations de résonance paramétrique n'est vérifiée, tout voisinage de A contient en général des points de Σ où certaines le sont (essentiellement parce que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). A fortiori, il n'existe pas dans ce cas de version C^∞ ou analytique du théorème 1. En revanche, en adaptant un résultat de Takens ([9]), on obtient le

Théorème 3 : Si dans le théorème 1 l'on se contente d'un h C^k (dans le cas où $K = \mathbb{R}$), l'hypothèse (ii) n'est plus nécessaire à sa conclusion ($k \geq 1$ dépendant des valeurs propres de la partie linéaire en A de $\mathcal{V}_f$) ; on peut de même tolérer "presque toutes" les relations de résonance paramétrique.

Remarques : 1/ Il n'est certainement pas difficile de traduire de même en géométrie de contact le "théorème de Hartmann pour les difféomorphismes et les flots normalement hyperboliques" dû à Pugh et Shub [7].

2/ Les résultats sur les transformations de contact dont les théorèmes 1, 2 et 3 sont les analogues "infinitésimaux" sont vrais, et se montrent par des méthodes semblables.

3/ Avec un peu de travail supplémentaire, les théorèmes 1 et 2 permettent d'obtenir des formes normales d'opérateurs pseudodifférentiels (cf. [5], [6] et [3]).

2. ACTIONS DE LIE INFINITÉSIMALES DE K^m SUR $J^1(K^n,K)$.

On appelle action de Lie infinitésimale de K^m sur $J^1(K^n,K)$ tout homomorphisme d'espaces vectoriels $u \mapsto \mathcal{V}_{f_u}$ de K^m dans l'espace des champs de Lie définis dans un ouvert de $J^1(K^m,K)$, tel que $[\mathcal{V}_{f_u}, \mathcal{V}_{f_v}] = [f_u, f_v] = 0$ quels que soient u et v dans K^m.

Les théorèmes qui suivent sont vrais dans les catégories C^∞, C^ω et holomorphe.

Théorème 4 : Soit $u \mapsto \mathcal{V}_{g_u}$ une action de Lie infinitésimale de K^m sur $J^1(K^n,K)$, telle que $\mathcal{V}_{g_u}$ soit nul, quel que soit u, sur une sous-variété Σ de dimension n-k de $J^1(K^n,K)$. Soit A un point de Σ ; si, pour un $u_o \in K^m$, $\mathcal{V}_{g_{u_o}}$ vérifie en A les hypothèses du théorème 1, il existe une transformation de contact $h : J^1(K^n,K) \circlearrowleft$ envoyant A sur (0,0,0), définie dans un voisinage de A, de même différentiabilité que les g_u, et telle que $h_*\mathcal{V}_{g_u}$ soit pour tout $u \in K^m$ de la forme $\mathcal{V}_{f_o}$, où f_o (qui dépend de u) est défini par (1) si $K = \mathbb{C}$, par (2) si $K = \mathbb{R}$.

La démonstration est facile : on commence par appliquer le théorème 1 à $\mathcal{V}_{g_{u_o}}$, puis l'on montre que tout germe de champ de Lie $\mathcal{V}_f$ nul le long de $h(\Sigma)$ et commutant avec $h_*\mathcal{V}_{g_{u_o}}$ est de la forme annoncée : formellement (le long de $h(\Sigma)$), donc dans la catégorie analytique, cela se vérifie aisément. Par un petit argument d'approximations successives, on prouve que le "reste plat (le long de $h(\Sigma)$)" ne peut être que nul.

Remarque : Si $u \mapsto g_u$, telle que $\mathcal{V}_{g_u}$ soit nul pour tout u sur Σ, est "suffisamment générique", les hypothèses du théorème 4 sont vérifiées dès que $m > k$.

Théorème 5 : Soit $u \mapsto \mathcal{V}_{g_u}$ une action de Lie infinitésimale de K^2 sur $J^1(K^n, K)$, telle que $\mathcal{V}_{g_u}$ soit nul, quel que soit u, en $A \in J^1(K^n, K)$. Si, pour un $u_o \in K^m$, $\mathcal{V}_{g_{u_o}}$ vérifie en A les hypothèses du théorème 2, la conclusion du théorème 4 (avec $m = 2$) est valide à condition que l'action soit hyperbolique [4].

Formellement, donc dans les cas analytiques, le théorème 5 est trivial, y compris pour les actions de K^m avec $m \geq 2$. En revanche, le cas C^∞ est beaucoup plus délicat. La démonstration dont je dispose pour l'instant utilise les fonctions génératrices et suit (avec quelques simplifications de détail) la méthode employée par Dumortier et Roussarie dans [4].

Remarques : 1/ Les deux théorèmes précédents se traduisent en termes de systèmes involutifs d'équations du premier ordre. Pour ne pas surcharger encore cet exposé de préliminaires, je préfère laisser ces "traductions" de côté pour l'instant.

2/ Il existe probablement un analogue pour les actions de Lie du théorème 3.

3/ Last but not least, le lecteur pourra vérifier que les modèles locaux fournis par les théorèmes précédents (et par le théorème 1 de [3]) sont des champs de vecteurs dont les courbes intégrales s'obtiennent explicitement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Arnold : Méthodes mathématiques de la mécanique classique (éditions Mir, Moscou, 1976).

[2] Burlet : "Propos au sujet des applications différentiables", in Singularités d'applications différentiables (Plans-sur-Bex 1975), Springer Lectures Notes in Mathematics No 535.

[3] Chaperon : "Modèles microlocaux pour certains opérateurs pseudodifférentiels fuchsiens", in Séminaire Goulaouic-Schwartz 1977-78, publications du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique.

[4] Dumortier et Roussarie : "Differentiable linearization of (germs of) $\mathbb{R}^2$-actions and (germs of) holomorphic vector fields", (à paraître dans Topology).

[5] Guillemin et Schaeffer : "A class of Fuchsian pseudo-differential equations", Duke Math. J. vol. 44, 1 (1977) p. 157.

[6] Oshima : "Singularities in contact geometry", J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, t. 21 (1974) p. 43.

[7] Pugh et Shub : "Linearization of normally hyperbolic diffeomorphisms and flows", Inv. Math. 10 (1970) p. 187.

[8] Sternberg : voir l'exposé de F. Bruhat au Séminaire Bourbaki 1960-61 (édité par Benjamin).

[9] Takens : "Partially hyperbolic fixed points", Topology 10 (1971) p. 133.

Marc CHAPERON

Centre de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau

91128 PALAISEAU CEDEX