

Astérisque

NICOLAAS H. KUIPER

La topologie des singularités hyperboliques des actions de \mathbb{R}^2

Astérisque, tome 59-60 (1978), p. 131-150

http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__59-60__131_0

© Société mathématique de France, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

La topologie des singularités hyperboliques des actions de \mathbb{R}^2

Nicolaas H. KUIPER

I. Introduction

Une action C^∞ du groupe \mathbb{R}^r dans une variété C^∞ $M = M^n$ de dimension n est une application C^∞

$$\varphi : M \times \mathbb{R}^r \rightarrow M, (x, t_1, \dots, t_r) \rightarrow \varphi(x, t_1, \dots, t_r), \quad (1)$$

telle que pour tout $x \in M$, $T = (t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{R}^r$, $T' = (t'_1, \dots, t'_r) \in \mathbb{R}^r$,

$$\varphi(x, 0) = x, \quad \varphi(x, T+T') = \varphi(\varphi(x, T), T'). \quad (1)$$

Le morphisme $x \rightarrow \varphi(x, T)$ possède un inverse, et c'est donc un isomorphisme pour tout $T \in \mathbb{R}^r$.

La différentiation de (1) nous donne l'équation différentielle

$$dx = \sum_{j=1}^r F_j(x) dt_j \quad \left. \vphantom{dx} \right\} (2)$$

où F_1, \dots, F_r sont r champs de vecteurs commutants,

et (voir (1))

$$F_j(x) = \frac{\partial}{\partial t_j} \varphi(x, 0, \dots, 0) \quad (3)$$

Une action C^∞ infinitésimale φ de \mathbb{R}^r dans M est un espace linéaire $\{\alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_r F_r : (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r\}$ de champs de vecteurs commutants. Elle est donnée par une équation différentielle (2). Quoique les intégrales $\varphi(x, T)$ de (2) n'existent pas nécessairement pour tout $T \in \mathbb{R}^r$, nous dirons encore qu'une telle équation différentielle est une action C^∞ de \mathbb{R}^r . On a

$$\varphi : V \rightarrow M, M \times 0 \subset V \subset M \times \mathbb{R}^r, \varphi(x, 0) = 0. \quad (4)$$

où V est un voisinage ouvert de $M \times 0$.

Le point x est appelé non-singulier si les vecteurs $F_1(x), \dots, F_r(x)$ sont linéairement indépendants. Les intégrales de (2), appelés feuilles, constituent un r-feuilletage \mathfrak{F} avec singularités. La restriction de \mathfrak{F} à un voisinage convenable d'un point non singulier est trivial, c'est-à-dire difféomorphe au modèle de la

projection

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-r} \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{n-r} . \quad (5)$$

L'action φ et le feuilletage \mathfrak{F} sont non-dégénérés si l'ensemble \mathfrak{g} des points singuliers est nulle part dense dans M .

Si x est un point singulier d'une action φ , le triple (φ, M, x) (resp. (\mathfrak{F}, M, x)) est appelé une singularité. Deux singularités (\mathfrak{F}, M, x) et (\mathfrak{F}', M', x') sont homéomorphes, s'il existe des voisinages U de x dans M et U' de x' dans M' , et un homéomorphisme

$$h : (U, x) \rightarrow (U', x')$$

qui applique chaque feuille de (la restriction) $\mathfrak{F}|U$ sur une feuille de $\mathfrak{F}'|U'$. Les singularités (φ, M, x) et (φ', M', x') sont homéomorphes si les singularités $(\mathfrak{F}(\varphi), M, x)$ et $(\mathfrak{F}(\varphi'), M', x')$ le sont. La singularité (\mathfrak{F}, M, x) est (structurellement) stable dans un espace de feuilletages avec singularités Ψ , s'il existe pour chaque voisinage U de x dans M , un voisinage V de \mathfrak{F} dans Ψ , tel que (\mathfrak{F}', M, x') est homéomorphe à (\mathfrak{F}, M, x) pour tout $\mathfrak{F}' \in V$ et pour un choix convenable de $x' \in U$.

Un seul champ de vecteurs : cas $r = 1$. Soit (F, M, x) une singularité d'un champ de vecteurs F . Alors au point x on a $F = 0$ et le 1-jet $J^1(F)$ est donné en coordonnées locales par σx où σ est une matrice $n \times n$, et $x \in \mathbb{R}^n$. Notons $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_p, \bar{\lambda}_p \in \mathbb{C}$ les valeurs propres complexes et $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q} \in \mathbb{R}$ les valeurs propres réelles de σ . Ici $q = n - 2p$.

Définition. La singularité (F, M, x) est hyperbolique si

$$\frac{1}{2} (\lambda_j + \bar{\lambda}_j) \neq 0 ; \quad j = 1, \dots, p+q ; \quad q = n - 2p \quad (6)$$

("parties réelles" des valeurs propres) et si σ est diagonalisable sur \mathbb{C} : Elle est presque hyperbolique, si ces mêmes conditions (6) sont vérifiées pour $j = 1, \dots, p+q$, à l'exception d'au plus une valeur de

$$j \in \{1, \dots, p+q\} \quad (7)$$

et si σ est diagonalisable. Cette dernière définition est utilisée ci-dessous. On connaît le

Théorème 1. La singularité de feuilletage d'une singularité hyperbolique d'un champ de vecteurs F dans une variété M est homéomorphe à \mathfrak{F}_1^n , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, 1-feuilletage du champ de vecteurs gradients de la fonction

$$-x_1^2 - x_2^2 \cdots -x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_n^2 \quad (8)$$

dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n = E^n$. L'indice i est le seul invariant topologique.

Le changement d'orientation des feuilles $t \rightarrow -t$, $t \in \mathbb{R}$, échange les indices i et $n-i$. On sait aussi que les singularités hyperboliques sont stables et que l'ensemble des champs de vecteurs à singularités hyperboliques est ouvert et dense dans l'espace topologique de Whitney des champs C^∞ de vecteurs sur une variété M^n . Ces champs sont donc "génériques".

Deux champs commutants : le cas $r = 2$. Dans le présent article nous étudions les singularités des C^∞ -actions φ de \mathbb{R}^2 dans M^n . L'équation différentielle (2) devient

$$dx = F_1(x)dt_1 + F_2(x)dt_2 \quad (9)$$

Définitions : La singularité (φ, M, x) est punctuelle si $F_1(x) = F_2(x) = 0$, et réductible autrement : $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont linéairement dépendants, mais pas tous les deux nuls. La singularité punctuelle (φ, M, x) de (9) est hyperbolique, si la singularité de champ de vecteurs $(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2, M, x)$ est presque hyperbolique pour tout $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$. La singularité réductible (φ, M, x) de (9) est hyperbolique, si la singularité du champ de vecteurs $(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2, M, x)$, où $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ et $\alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) = 0$, est presque hyperbolique.

Soit $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n$ la projection dans le premier facteur. Le 2-feuilletage de \mathbb{R}^{n+1} dont les feuilles sont les π -images inverses des feuilles de \mathcal{F}_1^n de \mathbb{R}^n est noté $\mathcal{F}_1^{n+1} \times \mathbb{R}$. La droite $\pi^{-1}(0)$ est l'ensemble singulier. (Voir théorème 1 et (8)). Nous verrons au § 2 le

Théorème 2. La singularité de feuilletage d'une singularité réductible hyperbolique de (9) est homéomorphe à la singularité

$$(\mathcal{F}_1^{n-1} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n, 0) \quad 0 \leq i \leq \frac{1}{2}(n-1)$$

L'indice i est le seul invariant topologique.

Les singularités réductibles hyperboliques sont (structurellement) stables.

Remarque : Une action $C^\infty \varphi$ de \mathbb{R}^2 dans M^r est dite hyperbolique si toutes ses singularités sont hyperboliques réductibles ou punctuelles. Il est évident que l'ensemble Ω des actions hyperboliques est ouvert dans l'espace Ψ (topologie C^∞ de Whitney) des actions C^∞ non dégénérées de \mathbb{R}^2 dans M^n . Il est "peu probable" que Ω soit dense dans Ψ .

Pour aborder les singularités ponctuelles nous commençons au §3 par l'étude des actions linéaires φ_L de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^n :

$$dx = \sigma_1 x dt_1 + \sigma_2 x dt_2, \quad \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1 \quad (10)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, σ_1, σ_2 des matrices $n \times n$.

Nous définissons pour chaque singularité hyperbolique $(\varphi_L, \mathbb{R}^n, 0)$ une figure caractéristique $\mathfrak{F}(\varphi_L) \subset \mathbb{R}^2$, qui consiste en p vecteurs v_1, \dots, v_p et $q = n-2p$ demi-droites $\mathbb{R}^+_{w_{p+1}}, \dots, \mathbb{R}^+_{w_{p+q}}$. Voir les fig.1 et 3 ci-dessous. Les droites $\mathbb{R}v_1, \dots, \mathbb{R}w_{p+q}$ sont distinctes en raison de l'hyperbolicité. En même temps nous obtenons une forme normale pour chaque action linéaire hyperbolique φ_L , par un changement continu de coordonnées qui préserve l'action de \mathbb{R}^2 . Nous démontrons le

Théorème 3 (Suffisance de \mathfrak{F}). La configuration caractéristique $\mathfrak{F}(\varphi_L)$ d'une action linéaire hyperbolique φ_L de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^n , contient toute l'information topologique de l'action φ_L et du feuilletage $\mathfrak{F}(\varphi_L)$: Si $\mathfrak{F}(\varphi_L)$ et $\mathfrak{F}(\varphi'_L)$ sont égaux modulo $GL(2, \mathbb{R})$, alors les actions φ_L et φ'_L sont C^0 -conjuguées et $(\mathfrak{F}(\varphi_L), \mathbb{R}^n, 0)$ et $(\mathfrak{F}(\varphi'_L), \mathbb{R}^n, 0)$, sont donc homéomorphes.

Notons $\mathfrak{M}(W)$ l'enveloppe convexe de $W \subset \mathbb{R}^2$.

Au §4 nous rappelons brièvement le

Théorème 4 (GUCKENHEIMER, CAMACHO [1]). Si φ_L est hyperbolique et si

$$0 \notin \mathfrak{M}(\mathfrak{F}(\varphi_L)),$$

alors la singularité $(\varphi_L, \mathbb{R}^n, 0)$ est stable, même pour des perturbations non linéaires.

CAMACHO [1] a démontré que toutes les singularités ponctuelles hyperboliques des actions de \mathbb{R}^2 pour $n \leq 4$ sont stables. Au §5, un invariant Δ , qui contredit la stabilité, est introduit (Théorème 5) pour $n = 5$. Au §6 nous démontrons plus généralement ($n \geq 5$) le

Théorème 6 ("Nécessité de \mathfrak{F} "). Soient φ_L et φ'_L deux actions linéaires hyperboliques de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^n . Notons

$$\mathfrak{F}(\varphi_L) = (v_1, \dots, v_p, \mathbb{R}^+_{w_{p+1}}, \dots, \mathbb{R}^+_{w_{p+q}})$$

Faisons de plus l'une des hypothèses suivantes :

soit $A : 0 \in \mathfrak{H}(v_1, \dots, v_p)$

soit $B : 0 \in \mathfrak{H}(v_1, \dots, v_p, w_j)$ pour $j = p+1, \dots$ et, $p+q$.

Alors les singularités $(\varphi_L, \mathbb{R}^n, 0)$ et $(\varphi'_L, \mathbb{R}^n, 0)$ sont homéomorphes si et seulement s'il existe $g \in GL(2, \mathbb{R})$ tel que

$$\mathfrak{F}(\varphi'_L) = g\mathfrak{F}(\varphi_L) \subset \mathbb{R}^2$$

Les types topologiques forment donc un espace modulaire de $2p-4+q$ dimensions.
L'invariant topologique $\Delta(\varphi_L)$ est $(\mathfrak{F}(\varphi'_L) \bmod GL(2, \mathbb{R}))$ dans ce cas.

Nous rappelons que les intégrales des champs de vecteurs holomorphes linéaires sur \mathbb{C}^m avec singularité en 0 , forment essentiellement le cas $q = 0$, $n = 2m$. Leur topologie est étudiée dans CAMACHO - KUIPER-PALIS [3] et LADIS [6].

Nous terminons ce paragraphe 6 avec la définition générale de l'invariant topologique $\Delta \varphi_L = \Delta \mathfrak{F}(\varphi_L)$ (Théorème 7). Les théorèmes 4, 5 et 6 sont des cas particulier de la

Conjecture. Deux singularités hyperboliques φ'_L et φ_L d'actions linéaires de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^n sont homéomorphes, si et seulement si

$$\Delta \mathfrak{F}(\varphi'_L) = \Delta \mathfrak{F}(\varphi_L) .$$

Dans le dernier paragraphe nous discutons brièvement les singularités hyperboliques ponctuelles non linéaires $(\varphi, \mathbb{R}^n, 0)$ "avec 1-jet" l'action linéaire $(\varphi_L, \mathbb{R}^4, 0)$. L'invariant Δ survit (Théorème 8). Nous rappelons les résultats de DUMORTIER et ROUSSARIE [4] et de CAMACHO-KUIPER-PALIS [3], qui permettent de conjecturer que $(\varphi, \mathbb{R}^n, 0)$ et $(\varphi_L, \mathbb{R}^n, 0)$ sont toujours homéomorphes.

2. Les singularités réductibles hyperboliques.

Supposons que la singularité réductible $(\varphi, \mathbb{R}^n, 0)$ soit donnée localement par

$$dx = F_1(x)dt_1 + F_2(x)dt_2 , \quad (2.1)$$

et $F_1(0) = 0$, $F_2(0) \neq 0$. On peut encore supposer après un changement C^∞ de coordonnées convenables (Intégration de $dx = F_2(x)dt_2$), que

$$F_2(x) = e_n = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

est constant. Chaque feuille contient donc avec un point $x \in \mathbb{R}^n$ un ouvert de la droite verticale $x + \mathbb{R}e_n$. Le feuilletage ne change pas si on remplace $F_1(x)$ par sa composante horizontale, c'est-à-dire parallèle à l'hyperplan $x_n = 0$.

En posant

$$x = (x_1, \dots, x_n) = (u, v), \quad u = (x_1, \dots, x_{n-1}), \quad v = x_n,$$

on trouve pour φ une expression de la forme

$$\left. \begin{aligned} du &= F(u)dt_1 \\ dv &= dt_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

et le champ de vecteurs F de \mathbb{R}^{n-1} est hyperbolique au point singulier $u = 0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, si et seulement si φ est presque hyperbolique en $0 \in \mathbb{R}^n$. La première partie du théorème 2 est donc évidente. Pour montrer la stabilité nous supposons que la singularité φ de (2.1) est réductible hyperbolique et que $F_2(0) = (0, 0, \dots, 0, 1)$, $F_1(0) = 0$. Pour x dans le plan horizontal $\mathbb{R}^{n-1} \times 0$, $x_n = 0$, nous notons $F(x)$ la composante horizontale de $F_1(x)$ par rapport à la droite non-horizontale $\mathbb{R}F_2(x)$. Le champ $F'(x)$ sera défini d'une manière analogue pour l'équation

$$\varphi' : dx = F'_1(x)dt_1 + F'_2(x)dt_2$$

supposée C^∞ -proche de (2.1).

Comme φ est réductible hyperbolique, le champ de vecteurs F est hyperbolique en $0 \in \mathbb{R}^{n-1} \times 0$. Le champ F' étant C^∞ -proche de F , est lui aussi hyperbolique en un point $x^0 \in \mathbb{R}^{n-1} \times 0$ proche de 0 . En ce point x^0 les vecteurs $F'_1(x^0)$ et $F'_2(x^0)$ sont linéairement dépendants et $(\varphi', x^0, \mathbb{R}^n)$ est réductible hyperbolique avec le même indice que $(\varphi, 0, \mathbb{R}^n)$. La stabilité est ainsi établie.

3. La configuration caractéristique $\varphi(\varphi_L)$ d'une action linéaire

3.1. Préliminaire I. Une action linéaire φ_L de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} est donnée par l'équation différentielle

$$dx = (\sigma_1 dt_1 + \sigma_2 dt_2)x, \quad \text{avec solution} \quad x = e^{\sigma_1 t_1 + \sigma_2 t_2} x^0, \quad (3.1)$$

$$x, x^0, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}, \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \neq 0.$$

Le changement continu de la coordonnée x ,

$$x' = |x|^k (x/|x|), \quad k = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

conduit à la forme normale (x' sera notée : x)

$$dx = \langle \mu, dT \rangle x, \quad x = e^{\langle \mu, T \rangle} x^0, \quad |\mu| = 1. \quad (3.3)$$

où $\mu = k\sigma_1 + ik\sigma_2$, $T = t_1 + it_2$, $\langle \mu, T \rangle$ est le produit scalaire de μ et T par rapport à la norme euclidienne $|T|$ des nombres complexes $T \in \mathbb{C}$. La fonction \mathbb{R} -linéaire $T \mapsto \langle \mu, T \rangle$ est constante sur chaque droite dans le plan de T parallèle à la demi-droite (la configuration caractéristique),

$$\Phi(\varphi_L) = \mathbb{R}^+ w = \{tw : t > 0\} \subset \mathbb{C} \quad (3.4)$$

où $w = i\mu$ est orthogonal à μ dans le plan complexe de T .

3.2. Préliminaire II. Une action linéaire hyperbolique φ_L de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 sera donnée par

$$dx = (\sigma_1 dt_1 + \sigma_2 dt_2)x, \quad x = e^{\sigma_1 t_1 + \sigma_2 t_2} x^0, \quad x, T \in \mathbb{R}^2. \quad (3.5)$$

Les matrices 2×2 σ_1 et σ_2 commutent. Supposons que les valeurs propres de σ_1 ne soient pas réelles : λ_1 et $\bar{\lambda}_1 \notin \mathbb{R}$. Comme σ_1 est diagonalisable sur \mathbb{C} , et comme $\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1$, alors σ_2 et σ_1 sont simultanément diagonalisables sur \mathbb{C} . Soient λ_2 et $\bar{\lambda}_2$, les valeurs propres de σ_2 . Ces valeurs propres peuvent être réelles et égales.

Posons $x = (x_1, x_2)$, $z = x_1 + ix_2$. Après un changement linéaire des coordonnées x_1, x_2 , l'équation (3.5) est exprimée en nombres complexes par

$$dz = (\lambda_1 dt_1 + \lambda_2 dt_2)z, \quad z = e^{\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2} z^0 \quad (3.6)$$

$$z, z^0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme φ_L est hyperbolique, si $(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$ la matrice $\alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2$ n'a pas deux valeurs propres nulles, et donc λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ sont \mathbb{R} -linéairement indépendants. Soit $g \in GL(2, \mathbb{R})$ l'automorphisme \mathbb{R} -linéaire de \mathbb{C} sur \mathbb{C} , donné par

$$g : t_1 + it_2 \longmapsto \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Alors (3.6) est exprimé par

$$dz = g(dT)z, \quad z = e^{g(T)} z^0 \quad (3.7)$$

La configuration caractéristique $\Phi(\varphi_L)$ est le vecteur

$$v = g^{-1}(2\pi i) \in \mathbb{C}$$

Remarquons : $z(T+v) = z(T)$.

Définition. La fonction exponentielle $z \mapsto z' = z^k$ est l'homéomorphisme de \mathbb{C} sur \mathbb{C} , défini pour

$$k \in GL(2, \mathbb{R}), \quad \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}, \quad k(i) = i,$$

par

$$\begin{aligned} z' &= e^{kS} \quad \text{si } z = e^S, \quad S \in \mathbb{C} \\ z' &= 0 \quad \text{si } z = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Choisissons k tel que

$$\left. \begin{aligned} \text{non seulement : } kg(v) &= k(2\pi i) = 2\pi i, \\ \text{mais aussi : } kg(iv) &= i.2\pi i. \end{aligned} \right\} \tag{3.9}$$

Alors kg est la multiplication en \mathbb{C} par le nombre complexe $\lambda = 2\pi iv^{-1}$!

Le changement continu (fonction exponentielle) de la coordonnée z , donné par (3.8) et (3.9), conduit à la forme normale (qui est purement complexe!)

$$dz = \lambda z dT, \quad z = e^{\lambda T} \quad z^0 \in \mathbb{C}. \tag{3.10}$$

3.3. L'action linéaire hyperbolique φ_L de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^n .

L'action φ_L est donnée par

$$dx = (\sigma_1 dt_1 + \sigma_2 dt_2) x \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1 \tag{3.11}$$

Comme φ_L est hyperbolique un exercice élémentaire conduit avec une transformation linéaire des coordonnées à une décomposition en blocs :

$$\begin{aligned} dz_j &= (\lambda_{j1} dt_1 + \lambda_{j2} dt_2) z_j \in \mathbb{C} \quad j = 1, \dots, p \\ dx_h &= (\alpha_{h1} dt_1 + \alpha_{h2} dt_2) x_h \in \mathbb{R} \quad h = p+1, \dots, p+q, \quad q = n-2p \end{aligned} \tag{3.12}$$

et après les changements continus de coordonnées des préliminaires I et II, on trouve la forme normale de l'action φ_L .

$$\left. \begin{aligned} dz_j &= \lambda_j z_j dT & z_j &= e^{\lambda_j T} z_j^0 \quad \text{avec } \lambda_j = 2\pi iv_j^{-1} \\ dx_h &= \langle \mu_h, dT \rangle x_h & x_h &= e^{\langle \mu_h, T \rangle} x_h^0 \quad \text{avec } \mu_h = i w_k \end{aligned} \right\} \tag{3.13}$$

Les droites $\mathbb{R} v_1, \dots, \mathbb{R} v_p, \mathbb{R} w_{p+1}, \dots, \mathbb{R} w_{p+q}$ sont distinctes en raison de l'hyperbolicité. La forme normale est déterminée par la configuration caractéristique

$$\mathfrak{g}(\varphi_L) = \{v_1, \dots, v_p, \mathbb{R}^+ w_{p+1}, \dots, \mathbb{R}^+ w_{p+q}\} \subset \mathbb{C} \quad \mathbb{R}^+ = \{s \in \mathbb{R}, s > 0\} \tag{3.14}$$

ACTIONS DE \mathbb{R}^2

Comme on peut composer l'automorphisme \mathbb{R} -linéaire $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $(t_1, t_2) \rightarrow t_1 + it_2$ avec un élément $g \in GL(2, \mathbb{R})$ à gauche, $\mathfrak{F}(\mathfrak{q}_L)$ est à considérer modulo l'action de $GL(2, \mathbb{R})$. En d'autres mots, l'invariant est la figure affine $\mathfrak{F}(\mathfrak{q}_L)$. Le théorème 3 de l'introduction est une conséquence immédiate.

Corollaire. Pour $2 \leq n \leq 4$ toutes les configurations caractéristiques des actions linéaires hyperboliques de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^n sont données dans la figure 1. Seules les configurations (4;0,4a) et (4;0,4b) ont un invariant affine, le birapport. J'ignore si ce birapport est un C^0 -invariant de l'action à conjugaison près. CAMACHO [1] a démontré que toutes ces singularités sont stables même pour des perturbations non-linéaires. On a donc onze types topologiques de feuilletage.

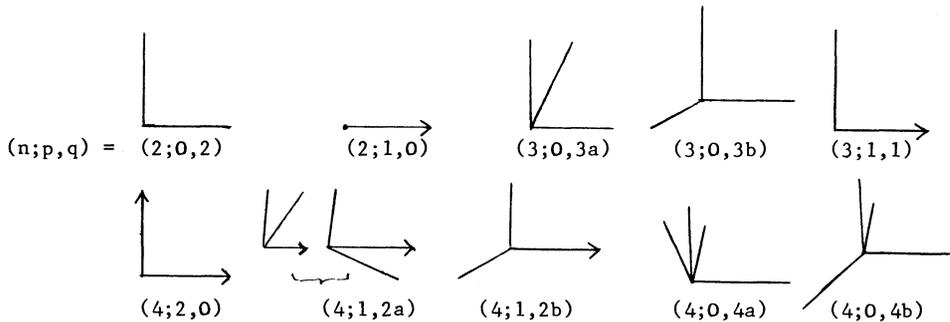


fig.1

Les feuilletages de singularités (3;0,3b) et (3;1,1) sont représentés par les figures 2a) et b) respectivement. On donne l'intersection des feuilles avec la "sphère unitaire"

$$S^2 : \sup(|x_1|, |x_2|, |x_3|) = 1, \text{ resp. } (\sup|x|, |z|) = 1$$

Les figures sont symétriques par rapport aux plans de coordonnées

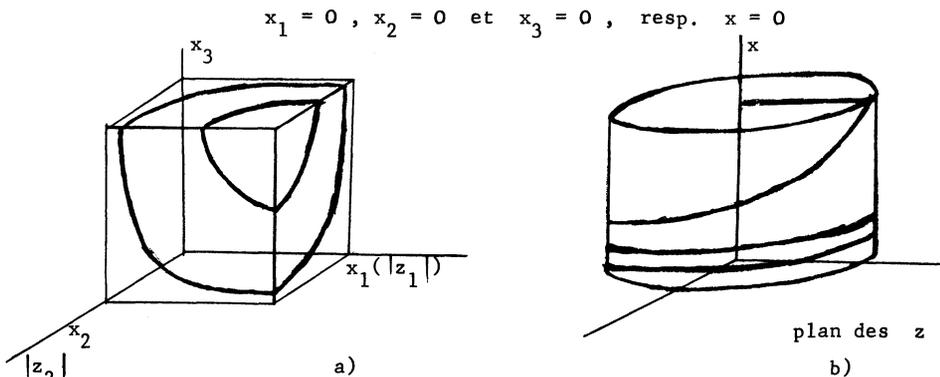


fig. 2

Le feuilletage de la fig. 2b) est homéomorphe au cône de sommet $0 \in \mathbb{R}^3$ sur le 1-feuilletage dessiné. Les feuilles dans la fig. 2a) sont obtenues en remplissant les 1-feuilles fermées dessinées par des 2-disques dans l'intérieur du cube. Les axes de coordonnées de x_1, x_2, x_3 resp. de x contiennent les points singuliers réductibles hyperboliques.

Corollaire (de (3.12)). Soit 0 un point isolé de l'ensemble des points singuliers d'une action linéaire hyperbolique de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^n . Alors $q = 0$, $n = 2p$, et l'action est C^0 -conjuguée à une action linéaire holomorphe de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^p :

$$dz_j = \lambda_j z_j dt \quad j = 1, \dots, p \quad (3.15)$$

Exercice. Etudier les feuilletages de fig.1 avec (3.13). (Voir [1]).

4. Théorème 4 de Guckenheimer-Camacho [1]

Esquisse de démonstration : Soit φ_L une action linéaire hyperbolique de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^n donnée par (3.13), (3.11), et soit

$$0 \notin \mathcal{H}(\varphi_L) \quad .$$

Alors il existe $u \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{cases} \langle u, -iv_j \rangle < 0 & j = 1, \dots, p \\ \langle u, -iw_k \rangle < 0 & k = p+1, \dots, p+q \end{cases}$$

Si $u = u_1 + iu_2$, le champ des vecteurs,

$$(u_1 \sigma_1 + u_2 \sigma_2)x \quad \text{en } 0 \in \mathbb{R}^n,$$

est contractant et transversal à la sphère

$$S_\delta : \sum_{j=1}^p |z_j|^2 + \sum_{h=p+1}^{p+q} (x_h)^2 = \delta^2 > 0$$

en coordonnées $z_1, \dots, z_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}$ de (3.13). (C'est analogue mais un peu plus compliqué à écrire avec les équations (3.12)). On peut constater que le feuilletage $\mathcal{F}(\varphi_L)$ est homéomorphe au cône, à sommet $0 \in \mathbb{R}^n$, sur le 1-feuilletage $\mathcal{F}_{1\delta}(\varphi_L)$, obtenu par l'intersection des feuilles de $\mathcal{F}(\varphi_L)$ avec la sphère S_δ . Ce feuilletage de dimension un est de Morse-Smale et donc stable. Les $2q$ points fixes stables sont

$$z_1 = z_2 = \dots = z_p = 0, \quad x_{p+1} = \dots = x_{p+q} = 0$$

à l'exception de $x_k = \pm \delta$, $k \in \{p+1, \dots, p+q\}$. Les p cycles stables sont les

cercles

$$z_1 = z_2 = \dots = z_p = 0, \quad x_{p+1} = \dots = x_{p+q} = 0$$

à l'exception de $z_j : |z_j| = \delta, j \in \{1, \dots, p\}$. La stabilité de $\mathfrak{X}_{1\delta}(\varphi_L)$ sur la sphère S_δ entraîne la stabilité de $\mathfrak{F}(\varphi_L)$, même pour les perturbations non-linéaires pour $\delta > 0$ petit. C'est le théorème 4.

5. L'invariant Δ en dimension 5.

Dans la figure 3 nous suggérons la classification des configurations caractéristiques $\mathfrak{F}(\varphi_L)$ pour $n = 5$. Les singularités de 3a) sont stables d'après le théorème 4 de Camacho, puisque $0 \notin \mathfrak{H}(\varphi_L)$. Pour les singularités de 3b) aucun invariant topologique continu est connu ou visible. Nous pensons, mais nous ne l'avons pas encore démontré en détails, qu'elles aussi sont stables.

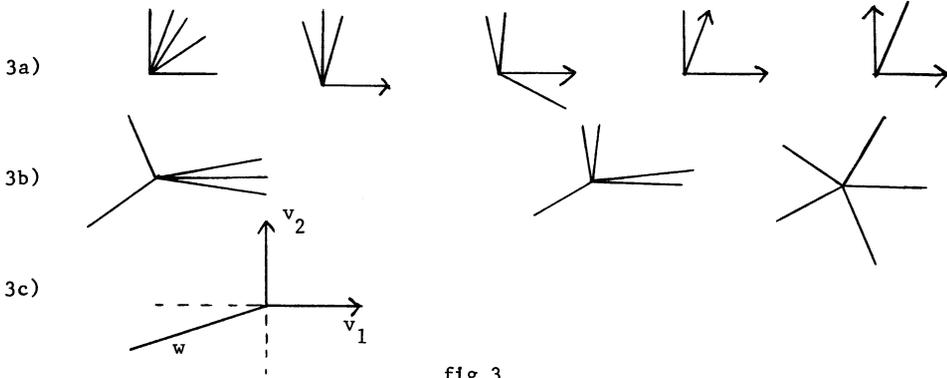


fig.3

Le cas du fig. 3c) est le cas intéressant :

Théorème 5. Soit dans la notation de §3

$$\mathfrak{F}(\varphi_L) = \{v_1, v_2, \mathbb{R}^+w\} \subset \mathbb{C}, \quad n = 5$$

et

$$0 \in \mathfrak{H}(v_1, v_2, w),$$

alors $\mathfrak{F}(\varphi_L)$ modulo $GL(2, \mathbb{R})$ est un invariant topologique du feuilletage $\mathfrak{F}(\varphi_L)$: Les singularités

$$(\varphi'_L, 0, \mathbb{R}^5) \text{ et } (\varphi_L, 0, \mathbb{R}^5)$$

sont homéomorphes si et seulement si

$$\mathfrak{F}(\varphi'_L) = \mathfrak{F}(\varphi_L) \text{ modulo } GL(2, \mathbb{R}) .$$

Définition. Pour le cas du théorème 5, l'invariant $\Delta(\varphi_L)$ est la classe d'équivalence mod $GL(2, \mathbb{R})$ de $\mathfrak{F}(\varphi_L)$.

Pour la démonstration il suffit de donner une définition topologique de $\Delta(\varphi_L)$ en termes du feuilletage $\mathfrak{F}(\varphi_L)$.

Supposons la forme normale du §3 et

$$w = -c_1 v_1 - c_2 v_2, \quad 0 < c_2 \leq c_1 : \tag{5.1}$$

$$\left. \begin{aligned} dz_1 &= \lambda_1 dT z_1 \\ dz_2 &= \lambda_2 dT z_2 \\ dx &= \langle \mu, dT \rangle x \end{aligned} \right\} \begin{aligned} z_1 &= e^{\lambda_1 T} z_1^0 \in \mathbb{C} \\ z_2 &= e^{\lambda_2 T} z_2^0 \in \mathbb{C} \\ x &= e^{\langle \mu, T \rangle} x^0 \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\lambda_j = 2\pi i \nu_j^{-1}, \quad j = 1, 2, \quad \mu = -i\nu .$$

Le nombre $0 < c_2/c_1 \leq 1$ est l'invariant affine $\Delta(\varphi_L)$.

Nous tirons des équations (5.2) les conclusions suivantes :

- a. Les points singuliers réductibles constituent l'"axe réel" de x :
 $0 = z_1 = z_2 \in \mathbb{C}, \quad 0 \neq x \in \mathbb{R} .$
- b. Deux feuilles ont la topologie du cylindre $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ce sont les axes complexes

$$\underline{\text{de}} \quad z_1 : x = 0 = z_2, \quad 0 \neq z_1 \in \mathbb{C},$$

$$\text{et} \quad \underline{\text{de}} \quad z_2 : x = 0 = z_1, \quad 0 \neq z_2 \in \mathbb{C} .$$

- c. Toutes les autres feuilles sont des plongements du plan de T dans \mathbb{R}^5 , sans points multiples ou périodiques.
- d. Chaque feuille trace sur la "4-sphère unitaire"

$$S^4 : \sup(|z_1|, |z_2|, |x|) = 1 \tag{5.3}$$

un chemin (supposé non vide) définissant un polygone convexe dans le plan de T . C'est le bord de l'ensemble convexe donné par $|z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1$ et $|x| \leq 1$. Ces côtés sont :

parallèles à v_1 sur la face $|z_1| = 1$ de S^4
 parallèles à v_2 sur le face $|z_2| = 1$ de S^4
 et parallèles à w sur les faces $x = \pm 1$ de S^4 .

Pour les images dans l'espace des triplés de valeurs absolues $(|z_1|, |z_2|, |x|)$, voir la figure 2a !.

Si $z_1^0 \neq 0$, $z_2^0 \neq 0$ et $x^0 \neq 0$, le polygone est un triangle, dont les côtés orientés sont des vecteurs $\tilde{n}_1 v_1$, $\tilde{n}_2 v_2$ et $\tilde{m} w$, par définition des nombres \tilde{n}_1, \tilde{n}_2 et $\tilde{m} \geq 0$, et (voir fig.4)

$$\tilde{n}_1 v_1 + \tilde{n}_2 v_2 + \tilde{m} w = 0 \tag{5.4}$$

La substitution de (5.1) dans (5.4) nous donne, pour $\tilde{n}_1 \neq 0$,

$$\tilde{n}_2 / \tilde{n}_1 = c_2 / c_1 \tag{5.5}$$

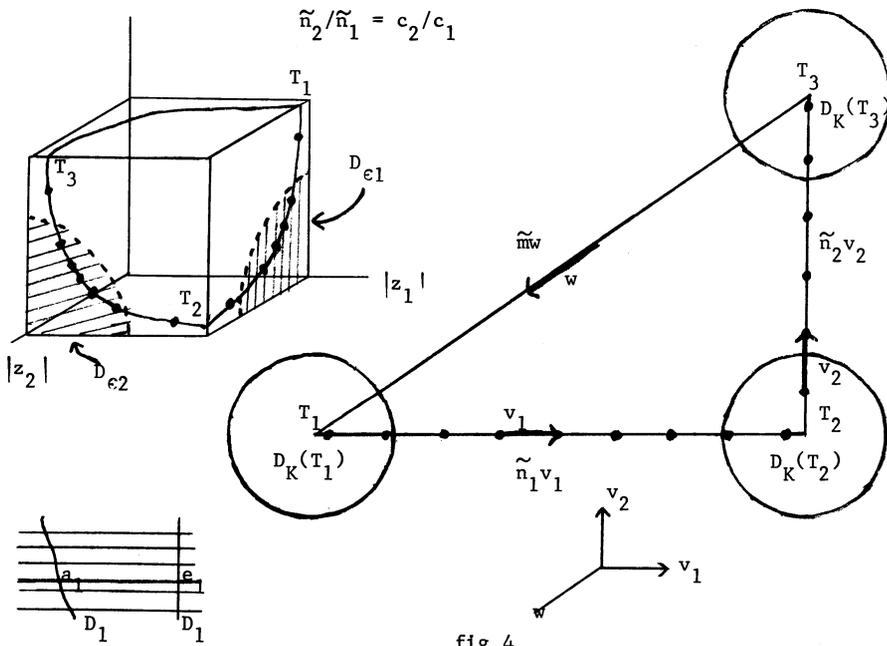


fig.4

Remarquons que sur le segment de T_1 à T_2 dans la figure 4, on a $|z_1| = 1$, tandis que $|z_2|$ augmente jusqu'à la valeur 1 en T_2 , et $|x|$ diminue à partir de la valeur 1 en T_1 . Si $|z_2|$ est très petit en T_1 , le nombre \tilde{n}_1 sera grand. C'est analogue pour les autres côtés du triangle $T_1 T_2 T_3$.

Finalement il est évident que pour $\epsilon > 0$ il existe $K > 0$ tel que si T est sur le triangle $T_1 T_2 T_3$, mais à distance $> K$ de T_1 de T_2 et de T_3 , alors

deux des nombres $|z_1|$, $|z_2|$, $|x|$ sont $< \epsilon$, tandis que le troisième est égal à 1. Le nombre K est indépendant de la grandeur du triangle $T_1T_2T_3$.

Ces préliminaires étant posés, nous choisissons arbitrairement un point a_j sur l'axe de z_j et un 3-disque D_j par a_j , petite section transversale au feuilletage, $j = 1, 2$. Soit n_j le nombre de points d'intersection d'une feuille de $\mathfrak{F}(\mathfrak{c}_L)$ avec D_j , $j = 1, 2$. La définition topologique de c_2/c_1 , donc de $\Delta(\mathfrak{c}_L)$ suit du

Lemme

$$0 < \lim_{n_1+n_2=\infty} \frac{n_2}{n_1} \Bigg| = \frac{c_2}{c_1} \quad (5.6)$$

Preuve. Déplaçons le point a_j le long un chemin dans sa feuille (l'axe de z_j) vers le point e_j ($e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^5$). Nous entraînons le disque D_j transversalement aux feuilles du feuilletage et nous le mettons dans l'espace $z_j = 1$. Le disque D_j dans sa nouvelle position contient le 3-disque

$$D_{e_j} : z_j = 1, \quad |z_k|^2 + |x|^2 < \epsilon^2 \quad (j,k) = (1,2) \text{ resp. } (2,1)$$

$\epsilon > 0$ suffisamment petit.

Les nombres n_1 et n_2 ne changent pas pendant ce transport "holonomique" des disques D_1 et D_2 . Après le transport on peut compter les points d'intersection dans la sphère (5.3). Nous utilisons maintenant la figure 4 dans le plan de T . Sur le chemin T_1T_2 les points d'intersection avec $z_1 = 1$ sont de la forme $T + kv_1$, $k \in \mathbb{Z}$, si T est un tel point. Ils sont représentés par des points en gras dans la figure 4, et de même pour le côté T_2T_3 du triangle. Les points en gras qui sont loin de T_1 et T_2 , par exemple en dehors des 2-disques de rayon K : $D_K(T_1)$ et $D_K(T_2)$, représentent des points d'intersection qui sont certainement contenus dans $D_{\epsilon^1} \subset D_1$. On trouve alors (voir figure 4) en supposant

$$|v_1| = |v_2| = 1, \quad \left. \begin{aligned} \tilde{n}_1 - 2K - 2 \leq n_1 \leq \tilde{n}_1 + 1 \\ \text{et d'une façon analogue} \quad \tilde{n}_2 - 2K - 2 \leq n_2 \leq \tilde{n}_2 + 1 \end{aligned} \right\} (5.7)$$

Le lemme (5.6) est une conséquence de (5.5) et (5.7). Les limites sont réalisées en prenant pour T_1 des suites de points $(z_1, z_2, x) \in \mathbb{R}^5$ avec $|z_1| = |x| = 1$, pour lesquels $|z_2| > 0$ converge vers 0. Le Théorème 5 est démontré.

6. L'invariant topologique Δ en dimension n .

Soit \mathbb{C} l'espace des configurations caractéristiques,

$$\mathbb{C} = \{v_1, \dots, v_p, \mathbb{R}^+_{w_{p+1}}, \dots, \mathbb{R}^+_{w_{p+q}}\} \subset \mathbb{C}$$

avec $2p+q = n$, et $\mathbb{R}v_1, \dots, \mathbb{R}w_{p+q}$ des droites distinctes. Deux configurations \mathbb{C}' et \mathbb{C} sont dites Δ -équivalentes si les conditions a et b suivantes sont vérifiées.

a. $n' = n$, $p' = p$, $q' = q$, et il existe $g \in GL(2, \mathbb{R})$ qui agit sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, tel que \mathbb{C}' et $g\mathbb{C}$ sont dans la même composante connexe de \mathbb{C} .

b. Il existe $g \in GL(2, \mathbb{R})$ tel que, après un réarrangement éventuel de v_1, \dots, v_p et de w_{p+1}, \dots, w_{p+q} , $(v'_i, v'_j, v'_\ell) = (gv_i, gv_j, gv_\ell)$ si $0 \in \mathbb{H}(v_i, v_j, v_\ell)$ et $i \neq j \neq \ell \neq i$, $i, j, \ell \in \{1, \dots, p\}$,

et

$$(v'_i, v'_j, w'_k) = (gv_i, gv_j, gw_k) \text{ si } 0 \in \mathbb{H}(v_i, v_j, w_k) \text{ et } i \neq j, i, j \in \{1, \dots, p\}, k \in \{p+1, \dots, p+q\}.$$

Définition. L'invariant $\Delta(\varphi_L)$ est la classe de Δ -équivalence de $\mathbb{C}(\varphi_L)$ dans \mathbb{C} .

Exemple. Pour $2 \leq n \leq 4$, l'invariant Δ prend seulement les dix "valeurs" représentées dans la figure 1. Pour $n = 5$ il prend les huit "valeurs" des figures 3a) et 3b) et les valeurs $0 < c_2/c_1 \leq 1$ pour le cas de la figure 3c) du théorème 5.

Exemple. $\Delta(\varphi_L) = [\mathbb{C}(\varphi_L) \text{ modulo } GL(2, \mathbb{R})]$ sous les conditions A ou B de l'énoncé du théorème 6 (§1).

Théorème 7. Δ est un invariant topologique : si $\Delta(\varphi'_L) \neq \Delta(\varphi_L)$, alors les singularités $(\varphi'_L, \mathbb{R}^n, 0)$ et $(\varphi_L, \mathbb{R}^n, 0)$ ne sont pas homéomorphes. Le théorème 6 est un corollaire d'après théorème 3.

Nous commençons la démonstration. Soit φ_L dans la forme normale (3.13). Les axes complexes de z_1, \dots, z_p et les axes réels de x_{p+1}, \dots, x_{p+q} , sont des feuilles topologiquement distinguées de $\mathbb{X}(\varphi_L)$. Les singularités aux points d'un axe réel sont réductibles hyperboliques avec l'indice i , $0 \leq i \leq \frac{1}{2}(n-1)$, comme seul invariant topologique. Ces propriétés, et plus généralement le comportement global des feuilles proches des axes, entraînent la première condition a) de la définition de Δ -équivalence : Si $(\varphi'_L, 0, \mathbb{R}^n)$ et $(\varphi_L, 0, \mathbb{R}^n)$ sont homéomorphes, a) est nécessaire. Nous n'insistons pas davantage sur les détails.

Pour démontrer la nécessité de la condition b) nous suivons la méthode du §5 et

et nous examinons l'intersection d'une feuille f de $\mathfrak{F}(\mathfrak{C}_L)$ avec la " $n-1$ -sphère unitaire"

$$S^{n-1} : \sup\{|z_1|, \dots, |z_p|, |x_{p+1}|, \dots, |x_{p+q}|\} = 1.$$

La feuille f trace sur S^{n-1} un chemin qui dans le plan du T est représenté par un polygone convexe P fermé dans \mathbb{C} dont les côtés sont parallèles à $v_1, \dots, v_p, w_{p+1}, \dots, w_{p+q}$ mais pas nécessairement dans cet ordre. P est le bord de l'ensemble convexe dans le plan du T défini par $|z_1| \leq 1, \dots, |z_p| \leq 1, |x_{p+1}| \leq 1, \dots, |x_{p+q}| \leq 1$. Si un côté parallèle à $v_j (w_h)$ est très long, le chemin correspondant dans $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, aura des points très proches de l'axe de z_j (resp. l'axe de x_k). Supposons $0 \in \mathbb{H}(v_i, v_j, w_k)$. Nous choisissons de petites sections transversales aux axes :

D_ℓ^{n-2} une disque de dimension $n-2$ dans l'espace $z_\ell = 1$,
au point $e_\ell(z = 1)$ de l'axe de $z_\ell, 1 \leq \ell \leq p$, et

D_m^{n-1} une disque de dimension $n-1$ dans l'espace $x_m = 1$,
au point $e_m(x_m = 1)$ de l'axe de $x_m, p+1 \leq m \leq p+q$.

Nous examinons des feuilles f qui ne rencontrent pas les disques

$$D_\ell, 1 \leq \ell \leq p, i \neq \ell \neq j,$$

ni les disques

$$D_m, p+1 \leq m \leq p+q, m \neq k.$$

Soient n_i et n_j les nombres de points d'intersection de f avec D_i et D_j .
Soit

$$w_k = -c_{ikj} v_i - c_{jki} v_j \tag{6.1}$$

Le nombre c_{ikj}/c_{jki} est un invariant affine de $\mathfrak{F}(\mathfrak{C}_L)$.

Lemme.

$$\lim_{n_i+n_j \rightarrow \infty} n_j/n_i = c_{jki}/c_{ikj} \stackrel{\text{def}}{=} c \tag{6.2}$$

Il est clair que le théorème 7 et la nécessité de b) ci-dessus est une conséquence du lemme, et d'un lemme analogue pour (v_i, v_j, v_ℓ) au lieu de (v_i, v_j, w_k) .

Preuve du lemme. Si $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{w}_{p+q}$ sont les vecteurs associés aux côtés du polygone P supposé borné (pas nécessairement dans cet ordre) alors

$$\tilde{n}_1 v_1 + \dots + \tilde{n}_p v_p + \tilde{m}_{p+1} w_{p+1} + \dots + \tilde{m}_{p+q} w_{p+q} = 0 \quad (6.3)$$

Avec les conditions de non intersection ci-dessus il existe $K > 0$ tel que tout côté non-parallèle à v_i, v_j ou w_k est de longueur plus petite que K .

Nous divisons (6.3) par $\tilde{n}_i + \tilde{n}_j > 0$ et obtenons

$$\frac{\tilde{n}_i v_i + \tilde{n}_j v_j + \tilde{m}_k w_k}{\tilde{n}_i + \tilde{n}_j} = 0 \left(\frac{1}{\tilde{n}_i + \tilde{n}_j} \right) \quad [0\text{-symbole de Landau}]$$

Donc avec (6.1) on trouve

$$\lim_{\tilde{n}_i + \tilde{n}_j = \infty} \tilde{n}_j / \tilde{n}_i = c. \quad (6.4)$$

Pour $K > 0$ suffisamment grand, on a comme au §5 (voir (5.7)) à propos des côtés parallèles aux vecteurs v_i et v_j :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{n}_i - 2K - 2 &\leq n_i \leq \tilde{n}_i + 1 \\ \tilde{n}_j - 2K - 2 &\leq n_j \leq \tilde{n}_j + 1 \end{aligned} \right\} (6.5)$$

La substitution en (6.4) nous donne

$$\lim_{n_i + n_j = \infty} n_j / n_i = c$$

On trouve dans l'espace \mathbb{R}^5 des axes de z_i, z_j et x_k des feuilles qui satisfont les conditions prévues avec $n_i + n_j$ aussi grand que l'on veut. Les limites se réalisent donc, le lemme établi et le théorème 7 est démontré.

Trois types de singularité dans \mathbb{R}^6 avec dimension $\Delta \geq 1$ sont donnés dans la figure 5

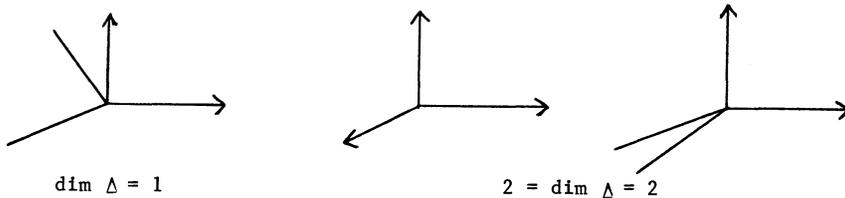


fig. 5

7. Les actions non-linéaires et la survivance de Δ .

Nous rappelons le théorème de Dumortier et Roussarie. Soit $(\varphi, \mathbb{R}^n, 0)$ une singularité hyperbolique ponctuelle d'une \mathbb{R}^2 -action dans \mathbb{R}^n , avec l'équation

$$dx = F_1(x)dt_1 + F_2(x)dt_2 = (\sigma_1 dt_1 + \sigma_2 dt_2)x + R_1(x)dt_1 + R_2(x)dt_2. \quad (7.1)$$

$F_1(0) = F_2(0) = 0$. Les matrices $n \times n$ σ_1 et σ_2 représentent les 1-jets de F_1 et F_2 au point $0 \in \mathbb{R}^n$. Les valeurs propres de $s\sigma_1 + (1-s)\sigma_2$, $s \in \mathbb{R}$, sont notées $\tau_j = \tau_j(s)$ $j = 1, 2, \dots, n$. Une résonance de $(\varphi, 0, \mathbb{R}^n)$ est un $n+1$ -tuple $(i; k_1, \dots, k_n)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k_j \in \mathbb{N}$, $k_j \geq 0 \forall j$, $k = \sum_{j=1}^n k_j \geq 2$ tel que

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n k_j \tau_j \quad \forall s$$

Théorème de linéarisation de DUMORTIER-ROUSSARIE [4]. Si la singularité hyperbolique $(\varphi, \mathbb{R}^n, 0)$ d'une C^∞ -action de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^n n'a pas de résonances, alors $(\varphi, \mathbb{R}^n, 0)$ est C^∞ -conjuguée à $(\varphi_L, \mathbb{R}^n, 0)$, ou φ_L est linéaire avec le même 1-jet que φ : $J_0^1(\varphi_L) = J_0^1(\varphi)$,

$$\varphi_L : dx = (\sigma_1 dt_1 + \sigma_2 dt_2)x \quad (7.2)$$

Ces deux singularités sont donc certainement homéomorphes.

Corollaire. (Voir le théorème 3). La configuration caractéristique $\mathfrak{F}(\varphi_L)$ d'une singularité hyperbolique ponctuelle $(\varphi, 0, \mathbb{R}^n)$ d'action de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^n , supposée sans résonance pour φ non linéaire, détermine la singularité à C^0 -conjugaison près. Elle détermine aussi la topologie de la singularité $\mathfrak{F}(\varphi)$. En plus $\Delta(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta(\varphi_L)$ est un invariant topologique de φ .

Les auteurs annoncent aussi l'existence de $k_0 = k_0(\varphi_L) > 0$ tel qu'une C^1 -conjugaison entre φ et φ_L est possible s'il n'y a pas de résonances d'ordre $\sum_{j=1}^n k_j = k \leq k_0$. Le nombre k_0 dépend du 1-jet φ_L .

Rappelons que dans le théorème 4 les résonances ne jouent pas de rôle. Ils ne jouent pas de rôle non plus dans le travail de CAMACHO-KUIPER-PALIS [3], qui démontrent que $(\varphi, \mathbb{C}^3, 0)$ et $(\varphi_L, \mathbb{C}^3, 0)$ sont homéomorphes dans le cas des champs de vecteurs holomorphes. Leur démonstration marche également pour les singularités des types

$$\mathfrak{F} = (v_1, v_2, \mathbb{R}^+ w) : 0 \in \mathfrak{H}(v_1, v_2, w) \text{ dans } \mathbb{R}^5$$

et

$$\mathfrak{F} = (v_1, v_2, v_3) : 0 \in \mathfrak{H}(v_1, v_2, v_3) \text{ dans } \mathbb{R}^6$$

$\Delta(\varphi) = \Delta\mathfrak{F}(\varphi_L)$ est un invariant topologique complet (espace modulaire) pour ces singularités $(\varphi, \mathbb{R}^n, 0)$ hyperboliques linéaires ou non linéaires.

Nous annonçons sans démonstration le

Théorème (8) de la survivance de Δ . Supposons que la singularité hyperbolique ponctuelle d'une action de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^n , $(\varphi, \mathbb{R}^n, 0)$ a le même 1-jet que l'action linéaire $(\varphi_L, \mathbb{R}^n, 0)$

$$J_0^1(\varphi) = J_0^1(\varphi_L)$$

Alors $\Delta \varphi \stackrel{\text{def}}{\Delta} \varphi_L$ est un invariant topologique de $(\mathfrak{F}(\varphi), 0, \mathbb{R}^n)$: Si $(\varphi', \mathbb{R}^n, 0)$ et $(\varphi, \mathbb{R}^n, 0)$ sont homéomorphes, alors $\Delta \varphi' = \Delta \varphi$.

Pour les champs de vecteurs holomorphes ce théorème de survivance était obtenu par V.A. Noïšul (Voir [7]).

Il reste trois problèmes généraux intéressants pour les singularités hyperboliques ponctuelles :

Problème 1. $J_0^1(\varphi) = J_0^1(\varphi_L) \stackrel{?}{\Rightarrow} [(\varphi, \mathbb{R}^n, 0) \text{ et } (\varphi_L, \mathbb{R}^n, 0) \text{ sont homéomorphes}]$.

Problème 2. φ'_L et φ_L C^0 -conjuguées $\stackrel{?}{\Rightarrow} \mathfrak{F}(\varphi'_L) = \mathfrak{F}(\varphi_L) \text{ mod } GL(2, \mathbb{R})$.

Problème 3. $\Delta(\varphi'_L) = \Delta(\varphi_L) \stackrel{?}{\Rightarrow} [(\varphi'_L, \mathbb{R}^n, 0) \text{ et } (\varphi_L, \mathbb{R}^n, 0) \text{ sont homéomorphes}]$.

Références

- [1] C. CAMACHO, On $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^l$ -actions, Proceed. Symp. on Dynamical Systems, Salvador 1971, Ed. Peixoto, p. 23-74.
- [2] C. CAMACHO, N.H. KUIPER, J. PALIS, La topologie du feuilletage d'un champ de vecteurs holomorphes près d'une singularité, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 282, Ap. 959-961.
- [3] C. CAMACHO, N.H. KUIPER, J. PALIS, The topology of holomorphic flows with singularity, Publ. Math. IHES, 48 (1978), p.5-38.
- [4] F. DUMORTIER et R. ROUSSARIE, Smooth linearizations of germs of \mathbb{R}^2 -actions and holomorphic vectorfields, Topology, to appear.
- [5] J. GUCKENHEIMER, Hartman's theorem for complex flows in the Poincaré domain, Compositio Math., 24, no.1 (1972), p. 75-82.
- [6] Ju. IL'IAŠENKO, Functional analysis and its applications, Vol.II : 2(1977), p. 28-38.
- [7] Ju. IL'IAŠENKO, Global and Local aspects of the theory of complex differential equations, I.C.M. 1978 Helsinki (à paraître).
- [8] J. PALIS, I.C.M. 1978 Helsinki (à paraître).

Octobre 1978

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
35, rt. de Chartres
91440-Bures-sur-Yvette (France)