Astérisque

JEAN-PIERRE FRANCOISE

# Modèle local simultané d'une fonction et d'une forme de volume

*Astérisque*, tome 59-60 (1978), p. 119-130
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__59-60__119_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 59-60 (1978) p. 119-130

# MODÈLE LOCAL SIMULTANÉ D'UNE FONCTION ET D'UNE FORME DE VOLUME

par Jean-Pierre **FRANCOISE**.

## I. - INTRODUCTION

On présente une généralisation d'un théorème de J. VEY [12] sur l'existence et l'unicité d'une forme normale isochore d'un germe de fonction de Morse. Rappelons qu'un difféomorphisme est qualifié d'isochore s'il préserve une forme de volume.

Dans un premier temps, il nous a paru utile de démontrer que ce théorème peut se lire d'une autre manière ; l'autre énoncé proposé ne s'interprétant plus comme l'obtention d'une forme normale isochore mais comme la solution à la recherche d'un modèle local simultané d'un germe de Morse $P$ et d'une forme de volume $\omega$ .

C'est ce deuxième énoncé qui se prête le mieux à une généralisation simple au cas où le germe de fonction est suffisamment tangent à une fonction $P$ ayant à l'origine de $\mathbb{C}^n$ une singularité isolée.

Le théorème d'E. BRIESKORN et M. SEBASTIANI [7] qui décrit la cohomologie relative des hypersurfaces $P = t$ est l'outil essentiel à la démonstration.

Précisons les notations utilisées,

- $\mathcal{O}$ désigne l'anneau local des germes de fonctions analytiques en $0 \in \mathbb{C}^n$ ,
- $\mathfrak{m}$ son idéal maximal,
- $\Omega^k$ le $\mathcal{O}$-module des germes de sections au-dessus de l'origine du faisceau des k-formes extérieures holomorphes,
- $P$ est un élément de $\mathcal{O}$ présentant une singularité isolée à l'origine de $\mathbb{C}^n$ , et on note $\mu$ le nombre de Milnor de P,
- $G$ est le $\mathbb{C}\{t\}$ module libre de rang $\mu$ , $\Omega^n/dP \wedge d\Omega^{n-2}$ , où l'action de $t$ est la multiplication par $P$ ;

pour $\omega \in \Omega^n$ , nous désignerons par $[\omega]$ sa classe dans $G$ et nous choisirons des $\gamma_\alpha^{\cdot} \in \Omega^n$ , $\alpha$ parcourant un certain ensemble d'indices $A$ tels que $\{[\gamma_\alpha], \alpha \in A\}$ soit une base de $G$ considéré comme $\mathbb{C}\{t\}$-module ;

on note

$\overline{\mathrm{Diff}}_o(n)$ le groupe des germes de difféomorphismes tangents à l'identité modulo l'ordre deux

et

$\Gamma_P$ l'orbite de $P$ sous $\overline{\mathrm{Diff}}_o(n)$ ;

enfin, si nous fixons provisoirement un système de coordonnées $x = (x_1, \ldots, x_n)$ au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$ , il est commode d'introduire

$$\Omega_*^n = \{ \omega \in \Omega^n / \omega = a(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \ , \ a(0) = a \ , \ a \text{ fixé distinct de } 0 \}.$$

Le groupe $\overline{\mathrm{Diff}}_o(n)$ opère sur $\Gamma_P \times \Omega_*^n$ et on cherche à décrire les orbites de cette action ; le résultat visé est le

THÉORÈME. - <u>L'espace des orbites de</u> $\Gamma_P \times \Omega_*^n$ <u>sous</u> $\overline{\mathrm{diff}}_o(n)$ <u>est en bijection avec</u> $\mathbb{C}\{t\}^\mu$ ; <u>cette bijection n'est pas canonique mais elle dépend du choix de la base</u> $\{[\gamma_\alpha], \alpha \in A\}$ <u>de</u> $G$ <u>et les</u> $\mu$ <u>séries entières</u> $\psi_\alpha$ $(\alpha \in A)$ <u>associées à l'orbite d'un couple</u> $(f, \omega)$ <u>de</u> $\Gamma_P \times \Omega_*^n$ <u>se construisent ainsi</u>, <u>ayant choisi un système de coordonnées dans lequel</u> $f$ <u>s'écrit</u> $P$ , <u>on décompose dans ce système</u> $\omega = \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(P) \gamma_\alpha + dP \wedge d\eta$ .

Qu'il me soit permis de remercier vivement les Professeurs B. MALGRANGE, J. MARTINET et J. VEY de l'aide qu'ils m'ont apportée dans ce travail.

## II. - CAS D'UN GERME DE MORSE

On se place au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$ rapporté à un système de coordonnées locales $x = (x_1, \ldots, x_n)$, écrivons $P = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et $\Gamma_P = \{f \in \mathcal{O} / f \in P + \mathfrak{m}^3\}$ ; J. VEY a démontré le résultat suivant [12],

THÉORÈME 1. - Etant donné $(f, \omega) \in \Gamma_P \times \Omega_*^n$, il existe un système de coordonnées locales $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans lequel $f$ s'exprime comme une série entière $\psi^*(P)$ de $P = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ et $\omega = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$.

Un tel système de coordonnées n'est pas unique, mais la série $\psi^*$ est caractéristique du couple $(f, \omega)$ et peut être interprétée géométriquement au moyen d'intégrales sur des cycles évanouissants tracés dans les hypersurfaces de niveau de $P$ $(P = t)$.

Il faut observer qu'en dimension deux, on obtient l'énoncé d'un théorème de G.D. BIRKHOFF sur la forme normale d'un hamiltonien quadratique dans le sous-groupe des transformations symplectiques [8]. On sait qu'en géométrie symplectique cette forme normale existe formellement en dimension quelconque mais qu'un célèbre théorème de C.L. SIEGEL en affirme la divergence générique.

Le théorème 1 assure que les choses se passent bien en "géométrie isochore" et peut être lu ainsi : d'une part, considérons $f$ un germe de Morse, d'autre part, fixons un système de coordonnées locales autour de $0 \in \mathbb{C}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, et la forme de volume $dx = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ ; il existe un système de coordonnées $y = (y_1, \ldots, y_n)$, dans lequel $f$ est une série entière de $\sum_{i=1}^{n} y_i^2$, tel que $dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Ici, il nous faut avancer une autre version de ce théorème qui est la

PROPOSITION 1. - <u>Etant donné</u> $(f,\omega) \in \mathcal{O}_P \times \Omega_*^n$ , <u>il existe un système de coordonnées locales</u> $y = (y_1,\dots,y_n)$ <u>dans lequel</u> f <u>s'écrit</u> $P = \sum_{i=1}^n y_i^2$ <u>et</u> $\omega = \psi(P)dy_1\wedge\dots\wedge dy_n$ <u>avec</u> $\psi \in \mathbb{C}\{t\}$ ; <u>cette série</u> $\psi$ <u>est caractéristique du couple considéré</u>.

Une telle proposition ne s'interprète plus bien sûr en termes de forme normale isochore. Il faut la lire ainsi : dans les orbites de $\Gamma_P \times \Omega_*^n$ sous $\overline{\mathrm{Diff}}_o(n)$ , il existe des représentants particulièrement simples que nous appellerons des modèles locaux et qui sont précisément des couples du type $(P,\psi(P)dy)$ . Je me borne ici à suggérer comment on peut relier cette proposition au théorème 1 puisque le résultat de cette proposition apparaît comme un corollaire de la suite.

<u>Démonstration</u> : soit $(f,\omega) \in \Gamma_P \times \Omega_*^n$ , le théorème 1 fournit un système de coordonnées locales $x = (x_1,\dots,x_n)$ dans lequel $f = \psi^*(P) = P+\dots$ et $\omega = dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$ avec $P = \sum_{i=1}^n x_i^2$ .

Nous posons $\psi^*(P)^{\frac{1}{2}} = P^{\frac{1}{2}}u(P)$ avec $u \in \mathbb{C}\{t\}$ et $u(0) = 1$ , puis nous définissons un nouveau système de coordonnées par les relations

$$x'_i = x_i u(P) \ ;$$

il est clair que dans ce système, d'une part

$$P' = \sum_{i=1}^n x_i'^2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)u^2(P) = \psi^*(P) = f \ ,$$

et d'autre part, les relations $x'_i = x_i u(P)$ se retournent en $x_i = x'_i v(P')$ avec $v \in \mathbb{C}\{t\}$ et $v(0) = 1$ , donc

$$\omega = dx_1\wedge\dots\wedge dx_n = [v(P')^n + 2v^{n-1}(P')v'(P')P']\ dx'_1\wedge\dots\wedge dx'_n \ ;$$

soit

$$\omega = \psi(P')dx'_1\wedge\dots\wedge dx'_n$$

et nous obtenons la proposition.

Réciproquement, si nous considérons un système de coordonnées $x' = (x'_1,\dots,x'_n)$ dans lequel

$$f = P' = \sum x_i'^2 \quad \text{et} \quad \omega = \psi(P')dx'_1\wedge\dots\wedge dx'_n \ ,$$

nous commençons par résoudre l'équation différentielle en w

$$\frac{2}{n}t\, w'(t) + w(t) = \psi(t) \ .$$

Si nous fixons $w(0) = 1$, la méthode de la variation de la constante donne

$$w(t) = t^{-n/2} \int_0^t \frac{n}{2} \tau^{\frac{n-2}{2}} \psi(\tau) d\tau + 1$$

qui est une solution analytique en $t$ (cf.[12]) ; dès lors, si nous posons $v = w^{1/n}$ puis $x_i = x'_i v(P')$, dans le système de coordonnées $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = P'$ devient une série entière en $P = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ tandis que $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, ce qui est le résultat du théorème 1. ∎

## III. - CAS D'UNE SINGULARITÉ ISOLÉE

Dans ce paragraphe, nous désignerons par $P$ un élément de $\mathcal{O}$ qui présente à l'origine de $\mathbb{C}^n$ une singularité isolée et par $\mathfrak{X}$ l'algèbre de Lie des germes de champs holomorphes à l'origine. On souhaite exhiber dans chaque orbite de $\Gamma_P \times \Omega_*^n$ sous $\overline{\mathrm{Diff}}_o(n)$ un modèle local qui soit le plus simple possible.

Prenons un couple $(f, \omega) \in \Gamma_P \times \Omega_*^n$ ; par un premier changement de coordonnées locales, nous pouvons supposer que $f = P$ tandis que $\omega = a(x)dx$ avec $a(0) = a$ ; pour trouver un modèle local du couple, on se propose de chercher à réduire $\omega$ à une forme simple par un difféomorphisme qui conserve $P$.

Il s'agit donc de mieux comprendre l'action de $I(P)$, le sous-groupe d'isotropie de $P$ sous $\overline{\mathrm{Diff}}_o(n)$, sur $\Omega_*^n$ ; dans cette direction il me paraît utile de commencer par énoncer la

PROPOSITION 2 (J. MARTINET). - <u>Soit</u> $\omega \in \Omega_*^n$, <u>l'espace tangent</u> $T(\omega)$ <u>en</u> $\omega$ <u>à l'orbite sous</u> $I(P)$ <u>est égal à</u> $dP \wedge d\Omega^{n-2}$.

<u>Preuve</u> : par définition, $T(\omega)$ est l'ensemble des dérivées de Lie $\theta_X \omega$ où $X$ parcourt la sous-algèbre de Lie $\mathcal{J}(P)$ des champs qui conservent $P$,

$$T(\omega) = \{\theta_X\omega / X \in \mathfrak{X}, \theta_X P = 0\} \ .$$

Commençons par considérer un $X \in \mathcal{G}(P)$ , puisque

$$dP \wedge \iota_X\omega = (\theta_X P)\omega = 0 \ ,$$

le théorème de De RHAM [2] implique l'existence de $\eta \in \Omega^{n-2}$ telle que

$$\iota_X\omega = dP \wedge \eta \ ,$$

et de la formule d'H. CARTAN, il résulte

$$\theta_X\omega = dP \wedge d(-\eta) \ .$$

Réciproquement, soit $\eta$ un quelconque élément de $\Omega^{n-2}$ , puisque $\omega$ est une forme de volume, il existe $X \in \mathfrak{X}$ tel que

$$\iota_X\omega = dP \wedge (-\eta) \ ,$$

en fait $X \in \mathcal{G}(P)$ car

$$0 = dP \wedge \iota_X\omega = (\theta_X P)\omega \ ,$$

et finalement

$$\theta_X\omega = dP \wedge d\eta \ . \ \blacksquare$$

Cette proposition n'est pas indispensable pour la suite mais elle a le mérite d'éclaircir pourquoi le $\mathbb{C}\{t\}$ module $G = \Omega^n / dP \wedge d\Omega^{n-2}$ est le bon outil d'investigation dans la recherche d'un modèle local simultané.

Nous allons reprendre l'idée de J. MOSER et J. MATHER [5] [6] pour "linéariser" l'action de $I(P)$ sur $\Omega^n_*$ et établir la

PROPOSITION 3 (J. MARTINET). - Etant données $(\omega, \omega') \in \Omega^n_* \times \Omega^n_*$ telles que $\omega - \omega' \in dP \wedge d\Omega^{n-2}$ , il existe $\varphi \in I(P)$ satisfaisant à $\varphi^*\omega' = \omega$ .

Posons $\omega - \omega' = dP \wedge d\eta$ , puis introduisons le chemin linéaire qui relie $\omega$ à $\omega'$ dans $\Omega^n_*$

$$\omega_t = \omega + t(\omega' - \omega) \ , \ t \in [0,1] \ .$$

On commence par chercher un arc de difféomorphismes $\varphi_t \in \overline{\mathrm{Diff}}_o(n)$ vérifiant

$$\varphi_t^* \omega_t = \omega \ , \qquad (1)$$

qui provient de l'intégration d'un chemin de champs de vecteurs $X_t$ . L'équation (1) implique

$$\varphi_t^*(\theta_{X_t}\omega_t + \dot{\omega}_t) = 0 \ ,$$

soit

$$\theta_{X_t}\omega_t = dP \wedge d\eta \ . \qquad (2)$$

Définissons le chemin $X_t$ par

$$\iota_{X_t}\omega_t = -dP \wedge \eta \ ; \qquad (3)$$

alors $X_t$ satisfait (2) et la famille de difféomorphismes $\varphi_t$ que l'on obtient par intégration de $X_t$ en fixant $\varphi_o$ égal à l'identité vérifie (1) ; je rappelle à cette occasion que l'on peut intégrer $X_t$ pour tout $t$ appartenant à $[0,1]$ sur une boule centrée en $\{0\}$ parce que $X_t$ est nul en $\{0\}$ comme il est démontré dans [10] . Mais (3) implique

$$0 = dP \wedge \iota_{X_t}\omega_t = (\theta_{X_t}P)\omega_t \ ,$$

en sorte que $X_t \in \mathcal{J}(P)$ et les $\varphi_t$ obtenus par intégration conservent P . Il suffit de prendre $\varphi = \varphi_1$ pour avoir le résultat requis. ■

Dès lors, si nous rappelons le

THÉORÈME 2 [1] , [7] , [4] , [11] , [3] . - <u>Le</u> $\mathbb{C}\{t\}$-<u>module</u> $G = \Omega^n / dP \wedge d\Omega^{n-2}$ <u>est libre de rang</u> $\mu$ .

Après choix de $\gamma_\alpha$ $(\alpha \in A)$ dont les classes modulo $dP \wedge d\Omega^{n-2}$ forment une $\mathbb{C}\{t\}$ base de $G$ , nous pouvons énoncer le

COROLLAIRE. - <u>Etant donné un couple</u> $(f,\omega) \in \Gamma_p \times \Omega^n_*$ , <u>il existe</u> $\varphi \in \overline{\mathrm{Diff}}_o(n)$ <u>tel que</u> $\varphi^* f = P$ <u>et</u> $\varphi^*\omega = \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(P)\gamma_\alpha$ , <u>avec</u> $\psi_\alpha \in \mathbb{C}\{t\}$ .

Dans le cas particulier où $P$ est quasi homogène, c'est-à-dire qu'il existe un champ $H$ tel que $H \cdot P = P$, on dispose d'une base $\gamma_\alpha$ explicite [3].

On peut en effet démontrer que si on désigne par $x^\alpha (\alpha \in A)$ des monômes dont les classes modulo l'idéal jacobien de $P$, $J_P$, forment une $\mathbb{C}$-base de $\mathcal{O}/J_P$ alors les classes $[x^\alpha dx]$ $(\alpha \in A)$ forment une $\mathbb{C}\{t\}$ base de $G$. Dans le cas général qui nous occupe ici j'ignore si l'on dispose d'une base explicite pour $G$.

Passons maintenant à l'importante question de l'unicité des $\psi_\alpha$ du corollaire, il nous faut en effet savoir dans quelle mesure ces fonctions $\psi_\alpha$ dépendent du système de coordonnées choisi pour rappeler $f$ à $P$.

Pour la suite, il est utile de noter :

$\widehat{\mathrm{Diff}_o}(n)$ le groupe des transformations formelles de $\mathbb{C}^n$ dont le jet d'ordre un est l'identité,

$\hat{\mathfrak{X}}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels,

$\hat{\Omega}^k$ le complété formel de $\Omega^k$,

$\hat{G}$ le $\mathbb{C}[[t]]$ module $\hat{\Omega}^n / dP \wedge d\hat{\Omega}^{n-2}$.

On est alors en mesure d'établir le

LEMME 1. - Soit $\varphi$ un élément de $I(P)$ ; $\varphi$ peut être interpolé par un groupe à un paramètre de transformations formelles qui préservent $P$.

Démonstration : Ce lemme est un cas particulier d'un théorème de S. STERNBERG [9]. Nous reproduisons néanmoins sa démonstration car le contexte qui nous occupe est différent.

Il s'agit de trouver un groupe à un paramètre $\varphi_t$ contenu dans $\widehat{\mathrm{Diff}_o}(n)$ tel que

$$\varphi_1 = \varphi \quad \text{et} \quad \varphi_t^* P = P .$$

Ecrivons $\varphi = \{\varphi_i ; i = 1,\dots,n\}$ les fonctions composantes de $\varphi$ et $\varphi_i = x_i + \sum_j \sum_{|\beta|=j} \varphi_{i,\beta} x^\beta$ leurs développements de Taylor en 0 . Il nous faut d'abord construire $\varphi_t = \{\varphi_{t,i} ; i = 1,\dots,n\}$ , avec

$$\varphi_{t,i} = x_i + \sum_j \sum_{|\beta|=j} \varphi_{i,\beta}(t)\, x^\beta ,$$

qui satisfait l'équation différentielle

$$\varphi'_t = \varphi'_o \circ \varphi_t \tag{4}$$

et est astreint aux conditions initiales et finales

$$\varphi_o = \mathrm{Id} \quad \text{et} \quad \varphi_1 = \varphi .$$

Supposons connues par récurrence les $\varphi_{i,\beta}(t)$ pour $|\beta| = j \leq k-1$ et déterminons les $\varphi_{i,\beta}$ avec $|\beta| = k$ .

(4) impose aux $\varphi_{i,\beta}(t)$ pour $|\beta| = k$ de vérifier l'équation différentielle

$$\varphi'_{i,\beta}(t) = \varphi'_{i,\beta}(0) + f_{i,\beta}(t) \tag{5}$$

où les $f_{i,\beta}(t)$ sont connues par l'hypothèse de récurrence et s'annulent pour $t = 0$ .

(5 ) s'intègre immédiatement en

$$\varphi_{i,\beta}(t) = \varphi'_{i,\beta}(0)t + \int_0^t f_{i,\beta}(\tau)d\tau$$

et donne $\varphi_{i,\beta}(0) = 0$ . Il reste à choisir $\varphi'_{i,\beta}(0)$ en sorte que $\varphi_{i,\beta}(1) = \varphi_{i,\beta}$ .

Nous observons alors que les coefficients $\varphi_{i,\beta}(t)$ sont des polynômes en $t$ , puis, du fait que $\varphi_t$ interpole $\varphi$ , que $\varphi_t^* P = P$ lorsque $t$ est un entier. En sorte que si nous fixons un nombre $k$ , la partie homogène de degré $k$ de $\varphi_t^* P - P$ est un polynôme en $t$ qui s'annule pour toutes les valeurs entières de $t$ . Ce polynôme en $t$ est donc identiquement nul et nous en déduisons que $\varphi_t^* P = P$ pour n'importe quelle valeur réelle de la variable $t$ . ∎

Nous noterons $\hat{X} \in \hat{\mathfrak{X}}$ le champ formel générateur infinitésimal de $\varphi_t$ et nous retiendrons du lemme 1 que $\theta_{\hat{X}} P = 0$ . Je ne sais pas si $\varphi$ s'interpole par un groupe à un paramètre de difféomorphismes analytiques mais c'est sans conséquence sur la suite, grâce au

THÉORÈME 3. - $\hat{G}$ <u>est isomorphe à</u> $G \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} \mathbb{C}[[t]]$ .

Ce théorème est de BLOOM et BRIESKORN [1] qui l'on démontré par désingularisation. Dans [4] , B. MALGRANGE met en relief le fait que ce résultat est lié au théorème de régularité de la connexion de Gauss-Manin en utilisant l'indice analytique.

Dans le cas où $P$ est quasi homogène, il devient facile et est par exemple une conséquence de la démonstration de [3] .

Je retiendrai pour la suite que si $[\gamma_\alpha]$ est une base de $G$ en tant que $\mathbb{C}\{t\}$ module, $[\gamma_\alpha]$ est aussi une base de $\hat{G}$ considéré comme $\mathbb{C}[[t]]$ module ; ainsi tout $\omega \in \hat{\Omega}^n$ se décompose de manière unique,

$$\omega = \sum_{\alpha \in A} \hat{\psi}_\alpha(P)\gamma_\alpha + dP \wedge d\hat{\eta} \tag{6}$$

où $\hat{\psi}_\alpha \in \mathbb{C}[[t]]$ et $\hat{\eta} \in \hat{\Omega}^{n-2}$ .

On peut alors prouver la

PROPOSITION 4. - <u>Soit</u> $\varphi \in I(P)$ <u>et</u> $\omega \in \Omega^n$ , <u>il existe</u> $\eta \in \Omega^{n-2}$ <u>telle que</u> $\omega - \varphi^*\omega = dP \wedge d\eta$ .

<u>Preuve</u> : Interpolons $\varphi$ par le groupe à un paramètre formel $\varphi_t = \exp t\hat{X}$ du lemme 1, il vient

$$\omega - \varphi^*\omega = \int_0^1 \frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega)dt = \int_0^1 \varphi_t^*(\theta_{\hat{X}}\omega)dt \quad , \tag{7}$$

puisque $\theta_{\hat{X}} P = 0$ , nous avons $dP \wedge \iota_{\hat{X}}\omega = 0$ et le théorème de De RHAM conduit à introduire $\hat{\rho} \in \hat{\Omega}^{n-2}$ telle que

$$\iota_{\hat{X}}\omega = dP \wedge \hat{\rho} \ ;$$

$\varphi_t$ conservant $P$ , il vient

$$\omega - \varphi^*\omega = dP \wedge d\left(\int_0^1 \varphi_t^* \hat{\rho}\, dt\right) = dP \wedge d\hat{\eta} \; . \tag{8}$$

Dans $\Omega^n$ on peut écrire :

$$\omega - \varphi^*\omega = \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(P)\gamma_\alpha + dP \wedge d\eta \; ,$$

mais ceci peut aussi s'interpréter comme une décomposition dans $\hat{\Omega}^n$ , de ( 8 ) et de l'unicité de la décomposition ( 6 ) déjà mentionnée comme conséquence du théorème 3, il résulte que

$$\psi_\alpha = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \in A \quad \text{et} \quad \omega - \varphi^*\omega = dP \wedge d\eta \; . \; ■$$

On peut rassembler les résultats en le

THÉORÈME 4. - <u>Il existe une bijection entre</u> $\Gamma_P \times \Omega^n_* / \overline{\mathrm{Diff}}_o(n)$ <u>et</u> $\mathbb{C}\{t\}^\mu$ ; <u>les</u> $\mu$ <u>séries entières</u> $\psi_\alpha$ <u>associées à l'orbite d'un couple</u> $(f,\omega) \in \Gamma_P \times \Omega^n_*$ <u>s'obtiennent ainsi</u> : <u>ayant choisi un système de coordonnées dans lequel</u> $f$ <u>s'écrit</u> $P$ , <u>on décompose dans ce système</u> $\omega = \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(P)\gamma_\alpha + dP \wedge d\eta$ .

Ces fonctions $\psi_\alpha$ sont effectivement indépendantes du système de coordonnées dans lequel $f$ s'écrit $P$ d'après la proposition 4 et ne dépendent que des classes $[\gamma_\alpha]$ .

<u>Preuve</u> : D'une part, si nous disposons de deux systèmes $x = (x_1,\dots,x_n)$ et $y = (y_1,\dots,y_n)$ dans lequel on écrit $f = P$ et si nous désignons par $\varphi$ le difféomorphisme de changement de coordonnées de $x$ vers $y$ ; et d'autre part, si nous notons $[\omega]$ la classe d'un élément $\omega$ de $\Omega^n$ dans $G$ , nous pouvons écrire

$$[\omega] = \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(P)[\gamma_\alpha]$$

dans le système $x = (x_1,\dots,x_n)$ , et à priori

$$[\varphi^*\omega] = \sum_{\alpha \in A} \bar{\psi}_\alpha(P)[\gamma_\alpha]$$

dans le système $y$ , mais la proposition 4 a pour conséquence que $[\omega] = [\varphi^*\omega]$ , et donc

$$\bar{\psi}_\alpha = \psi_\alpha \quad \text{pour tout} \quad \alpha \quad \text{dans} \quad A \; . \; ■$$

RÉFÉRENCES

[1] E. BRIESKORN - Die monodromie der isolierten Singularitäten von hyperflächen. (Manuscripta Math. vol.2, 1970, pp. 103-161).

[2] G. DE RHAM - Sur la division des formes et des courants par une forme linéaire. (Comment. Math. Helv. 28, pp. 346-352 (1954)).

[3] J.P. FRANCOISE - Le théorème de M. Sébastiani pour une singularité quasi homogène isolée. A paraître.

[4] B. MALGRANGE - Intégrales asymptotiques et monodromie. Annales de l'E.N.S., t.7, fasc.3, 1974).

[5] J. MOSER - On the volume elements on a manifold. (Transactions of the Am. Math. Soc. vol. 120-121, 1965, pp. 286-294).

[6] R. ROUSSARIE - Modèles locaux de champs et de formes. Astérisque n° 30.

[7] M. SEBASTIANI - Preuve d'une conjecture de E. BRIESKORN. (Manuscripta Math.2, pp. 301-308, 1970).

[8] C.L. SIEGEL et J. MOSER - Lectures on celestial mechanics. Springer Verlag, 1971.

[9] S. STERNBERG - Infinite Lie groups and formal aspects of dynamics. Journal of Math. and mechanics, vol. 10, n° 113, 1961).

[10] J. C. TOUGERON - Idéaux de fonctions différentiables. Ergebnisse der Mathematik.

[11] J. VEY - Un problème de cohomologie relative. (Arkiv för Mathematik vol.15, n° 1, 1977).

[12] J. VEY - Sur le lemme de Morse. (Inventiones mathematicae n° 40, pp. 1-9, 1977).

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)