Astérisque

RONALD R. COIFMAN
YVES MEYER

Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels

Astérisque, tome 57 (1978)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__57__1_0>

Table des matières

INTRODUCTION

Autour de la théorie "indéfiniment dérivable" des opérateurs pseudo-différentiels (o.p.d.), s'est développée, sous l'impulsion de A. CALDERÓN et A. ZYGMUND une théorie "non orthodoxe" ; on y cherche les conditions les plus faibles possibles de régularité permettant d'obtenir les résultats que l'on a, sans difficulté, dans les cas C^{∞} usuels.

L'objet de ces notes est de décrire, avec précision, ce "voisinage de la théorie classique".

On se propose alors d'alléger le plus possible les hypothèses tout en conservant la conclusion désirée. On obtiendra le plus souvent des conditions nécessaires et suffisantes ; aussitôt on sort de la théorie classique (qui ne décrit que des conditions suffisantes).

Naturellement ce travail nous obligera à introduire des démonstrations différentes de celles que l'on peut trouver dans la littérature (ces dernières avaient déjà souvent été poussées jusqu'à leurs limites).

Enfin les hypothèses minimales à faire dépendront du problème étudié.

Les chapitres I et II traitent de la continuité des o.p.d. classiques ou exotiques sur les espaces fonctionnels usuels (L^2, L^p, fonctions hölderiennes etc..).

Au chapitre III, nous étudions l'énoncé suivant : "Si D est un champ de vecteurs à coefficients C^∞ et si T est un o.p.d. classique d'ordre 0, le commutateur $[T, D]$ est borné sur L^2."

On se propose de ramener à sa forme minimale l'hypothèse de régularité faite sur les coefficients de D. On examine ensuite celle faite sur T.

Les opérateurs définis par des intégrales singulières de CALDERÓN-ZYGMUND constituent, eux aussi, un "voisinage" des o.p.d. classiques d'ordre 0 et forment la matière du chapitre IV.

Le chapitre V traite de l'action des o.p.d. classiques ou exotiques sur l'espace L^∞ des fonctions mesurables et bornées. On doit alors introduire l'espace BMO (car les o.p.d. classiques d'ordre 0 ne sont pas bornés sur L^∞).

L'espace BMO est le dual de H^1 (FEFFERMAN et STEIN) et l'on traite alors de la continuité des o.p.d. exotiques sur H^1 en prouvant une conjecture de E. STEIN ($S^{-n/2}_{0,0}$ est borné sur $H^1(R^n)$).

Dans le chapitre VI les estimations L^2 pour les opérateurs sont obtenues par des procédés très différents où les mesures de CARLESON jouent un grand rôle.

C'est un plaisir de remercier R. BEALS, A. CALDERÓN et E. STEIN qui nous ont initiés à cette théorie et dont les encouragements ont conduit à ces notes. La rédaction doit beaucoup aux conseils de J. SJÖSTRAND. Le travail de dactylographie de Mme DUMAS a été, comme d'habitude, excellent et nous l'en remercions tout particulièrement.

R. VAILLANCOURT a bien voulu lire ces notes pendant le congrès de WILLIAMSTOWN et en extirper de nombreuses erreurs. Nous lui en sommes très reconnaissants.

INTRODUCTION A LA SECONDE ÉDITION

Certains des opérateurs pseudo-différentiels à régularité minimale en x que l'on a rencontrés dans la première édition de cet ouvrage ont été utilisés dans l'étude de la régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires (de type hyperbolique).

Il a fallu pour cela développer un calcul symbolique (absent dans la première édition) ; ceci a été fait par J.-M. Bony et les opérateurs du théorème 9, correctement modifiés et simplifiés, sont devenus les "opérateurs para-différentiels" qui se situent donc "au delà des opérateurs pseudo-différentiels".

Nous donnons dans le premier appendice un aperçu de la théorie de Bony.

Enfin les méthodes du Chapitre VI ont permis d'obtenir la solution des conjectures présentées par A. Calderón au Congrès International d'Helsinki et d'un problème de Kato.

Dans le second appendice, nous décrirons (sans les démontrer) ces nouveaux résultats.

Notations utilisées de façon systématique

$C^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de toutes les fonctions indéfiniment dérivables.

$C_o^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ est le sous-espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact.

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide (ainsi que toutes leurs dérivées).

$\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, définie par $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)\, dx$; $x.\xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \ldots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$.

$L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\, dx\right)^{1/p} < \infty$.

$H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Sobolev des distributions S telles que $\|S\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{S}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s\, d\xi\right)^{1/2} < \infty$.

Enfin o. p. d. signifie opérateur pseudo-différentiel.

CHAPITRE I

LES INÉGALITÉS L^2 POUR LA CLASSE $S^0_{0,0}$.

A. Calderón et R. Vaillancourt ont prouvé le résultat suivant ([7])

THÉORÈME 1. <u>Soit</u> $\sigma : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ <u>une fonction continue et bornée telle que si</u> $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\alpha_j = 0, 1, 2$ <u>ou</u> 3, $\beta_j = 0, 1, 2$ <u>ou</u> 3 <u>les dérivées</u> $\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \sigma(x,\xi)$ <u>appartiennent à</u> $L^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$. <u>Alors</u> $\sigma(x,D)$ <u>est borné sur</u> $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Les dérivées sont prises au sens des distributions et

$$\left[\sigma(x,D)f\right](x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix.\xi} \sigma(x,\xi) \hat{f}(\xi)\, d\xi .$$

Pour obtenir ce résultat, Calderón et Vaillancourt ont utilisé un lemme de M. Cotlar et E. Stein. Comme il arrive souvent des méthodes moins générales donnent des résultats plus précis. De plus le lemme de Cotlar et Stein ne s'applique qu'au cas L^2 alors que les méthodes que nous allons introduire conviennent au cas L^p, $1 < p < +\infty$ et seront reprises au chapitre V ([47]).

Pour mieux comprendre le cadre dans lequel s'inscrit le théorème 1 et dans lequel nous allons travailler, deux remarques sont nécessaires.

Tout d'abord si un symbole $\sigma(x,\xi)$ définit un o.p.d. borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, alors pour tout $x_o \in \mathbb{R}^n$ et tout $\xi_o \in \mathbb{R}^n$, le symbole $\sigma(x+x_o\,,\ \xi+\xi_o)$ définit un o.p.d. ayant la même norme d'opérateur sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

C'est pour cela qu'il est, dans un premier temps, si naturel de faire des hypothèses uniformément invariantes sous l'effet de ces translations.

Plus précisément, les hypothèses de régularité en x seront décrites par la donnée d'une algèbre de Banach A de fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$, contenant $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ et par la condition suivante : "il existe une constante $C > 0$ et une fonction non identiquement nulle $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que pour tout $\alpha \in \{0,1,2\}^n$ et pour tout couple $(x_o, \xi_o) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, la fonction $\varphi(x)(\partial_\xi^\alpha \sigma)(x+x_o\,,\ \xi_o)$ appartienne à A et que sa norme ne dépasse pas C". En d'autres termes, on exige que la fonction $x \longrightarrow \sigma(x,\xi)$ ainsi que ses dérivées premières en ξ appartiennent localement à A et que cette condition soit uniforme par rapport aux translations.

Le résultat principal de ce chapitre est une amélioration très sensible du théorème 1.

<u>L'appartenance locale à</u> $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > \frac{n}{2}$, <u>est une condition minimale de régularité locale en</u> x <u>qui</u> (<u>si elle est vérifiée pour</u> $x \longrightarrow \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, <u>uniformément en</u> ξ) <u>entraîne que</u> $\sigma(x,D)$ <u>soit borné sur</u> $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Nous allons même donner un résultat plus précis où l'algèbre $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > \frac{n}{2}$, est remplacée par une algèbre A_ω que nous allons maintenant décrire.

Dire qu'une fonction appartient localement à A_ω, uniformément par rapport aux translations, reviendra à exprimer que cette fonction appartient à l'algèbre des multiplicateurs de A_ω.

1. LES ALGÈBRES A_ω ET B_ω.

L'algèbre A_ω que nous allons décrire permettra d'obtenir les conditions minimales de régularité locale en x assurant qu'un symbole $\sigma(x,\xi)$ définisse un o.p.d. $\sigma(x,D)$ borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Suivant A. Beurling, on appelle $\theta : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ une fonction continue vérifiant les quatre propriétés suivantes

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x)\, dx = 1$

(2) il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, on ait $(\theta * \theta)(x) \leq C\theta(x)$

(3) en posant $\omega(x) = \dfrac{1}{\theta(x)}$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ et tout $y\in\mathbb{R}^n$, on ait $\omega(x+y) \leq C\, \omega(x)\omega(y)$

(4) il existe une constante $C > 0$ et un entier $m \geq 1$ tels que $\omega(x) \leq C(1+|x|)^m$.

DÉFINITION 1. Soit ω un poids vérifiant (1), (2), (3) et (4). On désigne par A_ω l'algèbre des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{A_\omega} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2\, \omega(\xi)\, d\xi\right)^{1/2} < +\infty.$$

La condition (1) assure que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Donc A_ω est contenue dans l'algèbre de Wiener $\mathfrak{F}L^1(\mathbb{R}^n)$.

Le fait que A_ω soit une algèbre résulte de (2) comme il est prouvé dans [2].

La condition (3) implique que si $f \in A_\omega$ et $\chi_\xi(x) = e^{ix.\xi}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, alors $\chi_\xi f \in A_\omega$ et $\|\chi_\xi f\|_{A_\omega} \leq C\omega(\xi)\, \|f\|_{A_\omega}$.

Enfin la condition (4) implique que $A_\omega \supset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Nous aurons besoin de l'observation suivante

(1 bis) $$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \theta(x+k) < +\infty.$$

Posons, en effet $g(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \theta(x+k)$ et désignons par a un élément arbitraire de $\mathbf{R}^n$. On a, grâce à (3) $C\theta(x+k) \geq \theta(x-a)\,\theta(a+k)$ et donc $Cg(x) \geq \theta(x-a)\,g(a)$. En appelant D l'hypercube $a_j \leq x_j \leq a_j+1$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $a = (a_1,\ldots,a_n)$, il vient, à l'aide de (1),

$$\int_D g(x)\,dx = 1 \quad \text{et donc} \quad C \geq g(a) \int_D \theta(x-a)\,dx.$$

Posons $\gamma = \int_{0 \leq x_j \leq 1} \cdots \int \theta(x)\,dx$. On a $\gamma > 0$ et il en résulte que $g(a) \leq C\gamma^{-1}$, c'est-à-dire (1 bis).

Comme exemples de poids ω, on peut choisir $\omega(\xi) = C(1+|\xi|^2)^s$ avec $s > \frac{n}{2}$; alors $A_\omega = H^s$, l'espace de Sobolev usuel.

On peut aussi choisir, avec une constante C convenable,

$$\omega(\xi) = C(1+\xi_1^2)^a \ldots (1+\xi_n^2)^a \quad \text{avec} \quad a > \tfrac{1}{2}.$$

DÉFINITION 2. *Soit ω un poids vérifiant (1) à (4). Nous désignerons par B_ω l'algèbre des multiplicateurs de A_ω, c'est-à-dire des fonctions $m : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ telles que, pour toute fonction $f(x) \in A_\omega$, le produit $m(x)\,f(x)$ appartienne à A_ω.*

La proposition suivante fournit une description plus précise de l'algèbre B_ω.

PROPOSITION 1. *Soit $m : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ une fonction. Alors les deux propriétés suivantes de m sont équivalentes*

(5) $m \in B_\omega$

(6) *il existe une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, non identiquement nulle et une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^n$, la norme dans A_ω de $x \to \varphi(x-x_0)\,m(x)$ ne dépasse pas C.*

Que (5) implique (6) est très simple. Le théorème du graphe fermé montre que tout multiplicateur $m \in B_\omega$ définit une application linéaire continue sur A_ω. D'autre part, la norme dans A_ω est invariante par translation.

Il résulte enfin de la croissance polynomiale du poids ω que $C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \subset A_\omega$.

Ces trois remarques mises bout à bout fournissent (6).

La démonstration de (6) $\Rightarrow$ (5) est plus élaborée et repose sur les deux lemmes suivants.

LEMME 1. Soient $\varphi \in C_o^\infty(\mathbf{R}^n)$ et $\theta \in (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^n$. Alors la transformée de Fourier de la fonction $\Sigma\, \varphi(x-k)e^{ik.\theta}$ est la mesure ν_θ donnant la masse $(2\pi)^n\, \hat{\varphi}(2k\pi+\theta)$ au point $2k\pi+\theta$.

Appelons en effet S la mesure $\Sigma\, \delta(x-k)$, somme des masses 1 en $k\in\mathbf{Z}^n$. Alors, par la formule de Poisson, $\hat{S} = (2\pi)^n\, \Sigma\, \delta(x-2k\pi)$.

La transform'e de Fourier de $\varphi * (S\chi_\theta)$ est donc $(2\pi)^n\, \Sigma\, \hat{\varphi}(2k\pi+\theta)\, \delta(x - 2k\pi - \theta)$.

LEMME 2. Soit $K \subset \mathbf{R}^n$ une partie compacte telle que $(K-K) \cap \mathbf{Z}^n = \{0\}$. Pour tout poids ω vérifiant (1), (2), (3) et (4), il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que pour toute suite $f_k \in C_o^\infty(\mathbf{R}^n)$ de fonctions portées par K, on ait, en posant

$$F(x) = \Sigma\, f_k(x-k),$$

(7) $$C_1\|F\|_{A_\omega} \le (\Sigma\, \|f_k\|^2_{A_\omega})^{1/2} \le C_2\|F\|_{A_\omega}.$$

Pour le voir, on désigne par θ un élément arbitraire de $(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^n$ et l'on pose $F(x,\theta) = \Sigma\, e^{ik.\theta} f_k(x-k)$. Appelons $\varphi \in C_o^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction égale à 1 sur K et telle que, si $K' =$ support φ, $(K'-K') \cap \mathbf{Z}^n = \{0\}$. On pose $b(x,\theta) = \Sigma\, e^{ik.\theta}\varphi(x-k)$ et l'on a

(8) $$F(x,\theta) = b(x,\theta)\, F(x).$$

Appelons $g(\xi)$ la transformée de Fourier de $F(x)$ et $g_\theta(\xi)$ celle de $F(x,\theta)$. Alors (8) devient $g_\theta = g * \nu_\theta$. La mesure ν_θ a une décroissance rapide à l'infini, uniformément par rapport à θ ; la condition (3) sur le poids ω entraîne que la norme de la translation $f(x) \longrightarrow f(x-x_o)$ dans L^2_ω ne dépasse pas $C\omega(x_o)$. Il en résulte que $\|g_\theta\|_{L^2_\omega} \le C\|g\|_{L^2_\omega}$.

Nous allons écrire cette inégalité de façon plus explicite en appelant $g_k(\xi)$ la transformée de Fourier de f_k. On a $g(\xi) = \Sigma\, e^{ik.\xi}\, g_k(\xi)$ et $g_\theta(\xi) = \Sigma\, e^{ik.(\xi+\theta)} g_k(\xi)$. Il vient donc

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left| \Sigma\, e^{ik.(\xi+\theta)}\, g_k(\xi) \right|^2 \omega(\xi)\, d\xi \le C\|F\|^2_{A_\omega} \tag{9}$$

et l'intégration en $\theta \in \mathbf{T}^n$ de (9) donne l'inégalité de droite de (7).

Pour obtenir l'inégalité de gauche, on procède presque de la même façon mais on part cette fois de $\|g\|_{L^2_\omega} \le C\|g_\theta\|_{L^2_\omega}$ que l'on élève ensuite au carré pour intégrer par rapport à $\theta \in \mathbf{T}^n$.

La preuve de la proposition 1 est presque immédiate. Par une partition C^∞ de l'unité sur $\mathbf{T}^n$, on écrit $1 = p_1(x) + \ldots + p_N(x)$ où p_j est $\mathbf{Z}^n$-périodique et où le support de p_j est contenu dans $x_j + \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]^n + \mathbf{Z}^n = K_j + \mathbf{Z}^n$. On a donc, si $f \in A_\omega$, $f = p_1 f + \ldots + p_N f = f_1 + \ldots + f_N$.

En oubliant tous les indices, on peut donc supposer que $f \in A_\omega$ est de la forme décrite par le lemme 2.

On a alors $f(x) = \Sigma\, f_k(x-k)$ et $g(x) = m(x)\, f(x) = \Sigma\, m(x)\, f_k(x-k) = \Sigma\, m_k(x-k)\, f_k(x-k)$; la suite m_k décrivant une partie bornée de A_ω est définie par $m_k(x) = m(x+k)\,\varphi(x)$.

Finalement $\|g\|^2_{A_\omega} \le C_2\, \Sigma\, \|m_k\, f_k\|^2_{A_\omega} \le C_3\, \Sigma \|f_k\|^2_{A_\omega} \le C_4 \|f\|^2_{A_\omega}$.

2. ÉNONCÉ DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

Nous désignerons par $\omega : \mathbf{R}^n \to [1, +\infty[$ un poids vérifiant les quatre conditions de Beurling

$$\int_{\mathbf{R}^n} \frac{dx}{\omega(x)} = 1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{\omega} * \frac{1}{\omega} \le C\omega \tag{2}$$

(3) $\omega(x+y) \leq C\, \omega(x)\, \omega(y)$

(4) $\omega(x) \leq C(1+|x|)^m$.

L'algèbre A_ω est définie par $f \in A_\omega$ si $\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2\, \omega(\xi)\, d\xi < +\infty$ et l'algèbre B_ω est l'algèbre des multiplicateurs de A_ω, décrite par la proposition 1.

THÉORÈME 2. Soit $\sigma(x,\xi) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ et un poids ω vérifiant les conditions (1), (2), (3) et (4) tels que, pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1,2\}^n$, la fonction $x \longrightarrow \partial_\xi^\alpha\, \sigma(x,\xi)$ appartienne à $B_\omega(dx)$ et que sa norme ne dépasse pas C. Alors $\sigma(x,D) : L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ est borné.

Compte tenu de la proposition 1, on peut paraphraser le théorème 2 de la façon suivante.

COROLLAIRE 1. Supposons que $\sigma(x,\xi) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ soit continue et vérifie la propriété suivante : il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute boule B de $\mathbf{R}^n$ de rayon 1 et tout $\alpha \in A = \{0,1,2\}^n$, on puisse trouver une fonction $f_{\xi,\alpha}(x) \in A_\omega$ telle que

(5) $\|f_{\xi,\alpha}\|_{A_\omega} \leq C$

(6) $f_{\xi,\alpha}(x) = \partial_\xi^\alpha\, \sigma(x,\xi)$ si $x \in B$.

Alors $\sigma(x,D) : L^2(\mathbf{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}^n)$ est borné.

COROLLAIRE 2. Même conclusion en supposant l'existence d'un nombre réel $s > \frac{n}{2}$ tel que, au lieu de (5) on ait $\|f_{\xi,\alpha}\|_{H^s} \leq C$; H^s désignant l'espace de Sobolev usuel.

COROLLAIRE 3. On appelle $N > \frac{n}{2}$ un entier et $\sigma(x,\xi) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue telle que pour tout $\alpha \in A = \{0,1,2\}^n$ et tout $\beta \in \mathbf{N}^n$ vérifiant $|\beta| \leq N$, on ait

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C.$$

<u>Alors</u> $\sigma(x,D) : L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ <u>est borné</u>.

Avant de commencer la démonstration du théorème 2, montrons que le corollaire 2 (et donc le théorème 2) décrivent les conditions minimales de régularité en x conduisant à des opérateurs pseudo-différentiels bornés sur $L^2(\mathbf{R}^n)$.

PROPOSITION 2. <u>Le corollaire 2 est inexact si</u> $s = \frac{n}{2}$ <u>et le corollaire 3 est inexact si</u> $N \leq \frac{n}{2}$ $(N \in \mathbf{N})$.

La première assertion de la proposition 2 est évidente. On se contente d'examiner un symbole $\sigma(x,\xi) = m(x)$ ne dépendant pas de ξ. L'opérateur $\sigma(x,D)$ n'est autre que la multiplication par $m(x)$; s'il est borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, on doit avoir $\|m(x)\|_\infty < +\infty$. Pour que cette condition découle de l'appartenance locale à $H^s(\mathbf{R}^n)$, il est nécessaire d'avoir $s > \frac{n}{2}$ puisque $H^{n/2}(\mathbf{R}^n)$ n'est pas contenu dans $L^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Pour démontrer la seconde assertion de la proposition 2, il suffit de considérer le symbole $\sigma(x,\xi) = e^{-ix\xi} e^{-|x|^2} / (1+|\xi|^2)^{n/4}$. Un calcul évident montre que $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$ et tout $\beta \in \mathbf{N}^n$ tel que $|\beta| \leq \frac{n}{2}$. Cependant $\sigma(x,D)$ n'est pas borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ car $\sigma(x,D)f = ce^{-|x|^2}$ où $c = (2\pi)^{-n} \int \frac{\hat{f}(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{n/4}} d\xi$ si $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Il est dès lors aisé de construire une suite $f_j \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ telle que $\|f_j\|_2 \leq 1$ et que $|c_j| \to +\infty$ puisque $(1+|\xi|^2)^{-n/4} \notin L^2(\mathbf{R}^n)$.

3. PREUVE DU THÉORÈME 2 : LE LEMME DE PRESQUE-ORTHOGONALITÉ.

Dans la preuve qui suit, le lemme de Cotlar et Stein (que nous rappelons) doit être remplacé par un lemme de nature analogue, plus précis, mais moins général.

LEMME 3 (Cotlar et Stein). Soit $a(j)$, $j \in \mathbf{Z}^n$, une suite positive telle que $A = \Sigma\, a(j) < +\infty$ (la somme porte sur $\mathbf{Z}^n$). Soit T_j une suite d'opérateurs bornés d'un espace de Hilbert telle que $\|T_i T_j^*\| \leq a^2(i-j)$ et $\|T_i^* T_j\| \leq a^2(i-j)$, pour tout $i \in \mathbf{Z}^n$ et tout $j \in \mathbf{Z}^n$.

Alors $\|\Sigma\, T_i\| \leq A$, la somme portant sur n'importe quelle partie finie de $\mathbf{Z}^n$.

LEMME 4. Soient $n \geq 1$ un entier, $s > \frac{n}{2}$ un nombre réel et H^s l'espace de Sobolev des fonctions $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ telles que

$$\|f\|^2_{H^s} = \int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \, d\xi < +\infty.$$

Alors il existe une constante $C = C(s,n)$ ayant la propriété suivante : pour toute somme finie

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} f_k(x)\, e^{ik.x} \tag{1}$$

où pour fixer les idées, $f_k(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, on a

$$\|f\|_2 \leq C\Big(\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \|f_k\|^2_{H^s}\Big)^{1/2}. \tag{2}$$

Pour une fonction de L^2, appartenir à H^s, $s > \frac{n}{2}$, c'est être suffisamment plate. De sorte que la somme (1) est une série trigonométrique perturbée dont les coefficients, au lieu d'être constants, ont de lentes variations. Le lemme 4 exprime que la norme L^2 d'une telle série trigonométrique perturbée peut être calculée par une formule de type Parseval.

LEMME 5. Plus généralement, pour tout poids ω vérifiant les conditions (1) à (4), il existe une constante C_ω telle que, pour toute somme (1), on ait $\|f\|_2 \leq C_\omega\Big(\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \|f_k\|^2_{A_\omega}\Big)^{1/2}$.

La preuve est immédiate. On a

$$\theta(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{\omega(\xi - k)} \leq C.$$

Par le théorème de Plancherel,

$$\|f\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\Sigma \hat{f}_k(\xi - k)|^2 \, d\xi \leq$$

$$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\Sigma |\hat{f}_k(\xi - k)|^2 \omega(\xi - k)\right] \left[\Sigma \frac{1}{\omega(\xi - k)}\right] d\xi$$

$$\leq C(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_k |\hat{f}_k|^2(\xi)\, \omega(\xi)\, d\xi = C(2\pi)^{-n} \sum_k \|f_k\|_{A_\omega}^2 .$$

Les lemmes 4 et 5 sont donc démontrés. Enfin il est facile de voir que le lemme 4 est faux si $s = \frac{n}{2}$.

LEMME 6. __Si__ $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\sigma(x,\xi)\|_{A_\omega(d\xi)} \leq C_1 < +\infty$, __alors l'opérateur pseudo-différentiel associé__ $\sigma(x,D)$ __est borné sur__ L^p __pour__ $2 \leq p \leq +\infty$ __et__

(3) $$\|\sigma(x,D)\|_{p,p} \leq C_2 \;;$$

__la constante__ C_2 __ne dépendant que de__ C_1 __et du poids__ ω (__toujours décrit par les conditions__ (1) __à__ (4) __du__ § 1).

Pour le voir, rappelons la relation entre symboles et noyaux.

On pose $K(x,y) = \int e^{i(x-y).\xi} \sigma(x,\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^n}$ $\quad (x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^n,$ $y.\xi = y_1\xi_1 + \ldots + y_n\xi_n)$.

On a alors $g(x) = \left[\sigma(x,D) f\right](x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\xi) e^{ix.\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi =$ $\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)\, dy$.

L'hypothèse sur $\sigma(x,\xi)$ s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,x-y)|^2 \omega(y)\, dy \leq C_1^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|g(x)|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|^2 \omega(x-y)\, dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|^2}{\omega(x-y)} dy\right) \leq C_1^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|^2}{\omega(x-y)}\, dy.$$

En d'autres termes $|g|^2 \leq C_1^2 \, |f|^2 * \frac{1}{\omega}$. Or $\frac{1}{\omega} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Il en résulte que, pour

$p/2 \geq 1$, $\||g|^2\|_{p/2} \leq C_1^2 \|\frac{1}{\omega}\|_1 \||f|^2\|_{p/2}$ ce qui est l'inégalité désirée.

4. PREUVE DU THÉORÈME 2 : LES OPÉRATEURS ÉLÉMENTAIRES.

Toujours dans l'esprit de la preuve donnée par Calderón et Vaillancourt du théorème 1, nous allons "casser l'opérateur" $\sigma(x,D)$ en une série de morceaux "presque-orthogonaux" au sens du lemme 5.

Pour être plus clair, nous introduisons la définition suivante.

DÉFINITION 3. Un opérateur linéaire $T : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ est dit "élémentaire" s'il existe un poids ω vérifiant les conditions du § 1, une constante $C > 0$ et une suite d'opérateurs linéaires continus $T_k : L^2(\mathbf{R}^n) \longrightarrow A_\omega(\mathbf{R}^n)$, de sorte que, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$

(1) $$T(f)(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} (T_k f)(x)\, e^{ik.x}$$

et $$\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \|T_k f\|^2_{A_\omega} \leq C\|f\|^2_2 .$$

On peut alors décomposer le théorème 2 en deux étapes.

PROPOSITION 3. a) Tout opérateur élémentaire est borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$.

b) Pour tout symbole $\sigma(x,\xi)$ vérifiant les hypothèses du théorème 2, $\sigma(x,D)$ est un opérateur élémentaire.

L'assertion a) n'est qu'une paraphrase du lemme 5. Pour vérifier b), on appelle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction telle que $\varphi \geq 0$ et $\Sigma\, \varphi^2(\xi - k) = 1$. Cette fonction nous permettra de découper $\sigma(x,D)$ de la façon suivante.

On écrit $g(x) = \left[\sigma(x,D)\, f\right](x) = Tf(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix.\xi}\, \sigma(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi =$

$\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix.\xi}\, \sigma(x,\xi)\, \varphi^2(\xi-k)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$.

On pose alors $\tau_k(x,\xi) = \sigma(x,\xi+k)\, \varphi(\xi)$, on appelle T_k l'opérateur

$\tau_k(x,D)$ et l'on définit $f_k \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ par $\hat{f}_k(\xi) = \varphi(\xi)\,\hat{f}(\xi + k)$.

On a donc (en changeant ξ en $\xi+k$)

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix.\xi}\,\sigma(x,\xi)\,\varphi^2(\xi-k)\,\hat{f}(\xi)\,d\xi =$$

$$e^{ik.x}\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix.\xi}\,\tau_k(x,\xi)\,\hat{f}_k(\xi)\,d\xi = (2\pi)^n\, e^{ik.x}\, T_k(f_k)(x).$$

Finalement $T(f)(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} e^{ik.x}\, T_k(f_k)$.

On termine la démonstration grâce au lemme suivant.

LEMME 7. <u>Il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ <u>et tout</u> $k\in\mathbf{Z}^n$, <u>on ait</u>

(2) $$\|T_k(f)\|_{A_\omega} \le C\|f\|_2.$$

Admettons ce résultat ; il sera démontré dans un moment. On a alors $\sum_k \|T_k(f_k)\|^2_{A_\omega} \le C^2 \sum_k \|f_k\|_2^2 = C^2\|f\|_2^2$; en effet $\|f_k\|_2^2 = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi+k)|^2\,\varphi^2(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2\,\varphi^2(\xi-k)\,d\xi$ et donc $\sum\|f_k\|_2^2 = \|f\|_2^2$.

Nous allons, en fait, démontrer le résultat suivant.

LEMME 8. <u>Soient</u> B <u>une partie compacte de</u> $\mathbf{R}^n$ <u>et</u> ω <u>un poids vérifiant les conditions</u> (1) <u>à</u> (4) <u>du théorème 2</u>. <u>Il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que si</u> $\sigma(x,\xi) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ <u>est continue, nulle dès que</u> $\xi \notin B$ <u>et vérifie</u> $\|\partial_\xi^\alpha\, \sigma(x,\xi)\|_{B_\omega(dx)} \le 1$ <u>pour tout</u> $\alpha \in A = \{0,1,2\}^n$, <u>l'opérateur</u> $\sigma(x,D) : L^2(\mathbf{R}^n) \longrightarrow A_\omega(\mathbf{R}^n)$ <u>est borné et sa norme ne dépasse pas</u> C. <u>La conclusion subsiste dans les deux cas suivants</u>

(3) $\omega(x) = (1+|x|^2)^s$, $s\in\mathbf{N}$, $s > \frac{n}{2}$ et $|\partial_\xi^\alpha\,\partial_x^\beta\,\sigma(x,\xi)| \le C$ <u>pour</u> $|\alpha| \le s$ <u>et</u> $|\beta| \le s$

(4) $\omega(x) = (1+x_1^2)\ldots(1+x_n^2)$ <u>et</u> $|\partial_\xi^\alpha\,\partial_x^\beta\,\sigma(x,\xi)| \le C$ <u>pour</u> $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, $\alpha_j = 0$ <u>ou</u> 1, $\beta_j = 0$ <u>ou</u> 1.

Dans la preuve du lemme 8, on peut se ramener au cas où B est la boule $|\xi| \leq 1$ (par une homothétie en ξ). On écrit alors que

(5) $$\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \sigma(x,\xi+2k\pi) = \tilde{\sigma}(x,\xi) = \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} m_j(x)\, e^{ij\cdot\xi}.$$

En appelant $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, une fonction égale à 1 sur la boule B et égale à 0 hors de la boule $2B$, on retrouve $\sigma(x,\xi)$ par $\sigma(x,\xi) = \tilde{\sigma}(x,\xi)\,\varphi(\xi)$.

Finalement l'hypothèse entraîne, après dérivation de (5) en ξ,

$$\|m_j\|_{B_\omega(dx)} \leq \frac{C}{(1+j_1^2)\ldots(1+j_n^2)} \quad \text{et, a fortiori} \quad \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} \|m_j\|_{B_\omega(dx)} \leq C.$$

On a obtenu la décomposition

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} m_j(x)\, e^{ij\cdot\xi}\varphi(\xi)$$

qui entraîne, en posant $g(x) = [\varphi(D)\, f](x)$

$$[\sigma(x,D)\, f](x) = \sum_{j\in\mathbf{Z}^n} m_j(x)\, g(x+j).$$

La conclusion est immédiate : $\hat{g}(\xi) = \varphi(\xi)\,\hat{f}(\xi)$ entraîne $\|g\|_{A_\omega} \leq C\|f\|_2$; la norme dans A_ω est invariante par translation et enfin les $m_j(x)$ forment une série normalement convergente de multiplicateurs de A_ω.

Dans le second cas, on procède plus simplement.

On pose alors directement $g(x) = [\sigma(x,D)\, f](x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\, \sigma(x,\xi)\,\hat{f}(\xi)\, d\xi$.

Montrer que $g \in H^s$ revient à vérifier que $\partial^\beta g \in L^2$ pour $|\beta| \leq s$. On commence par $\beta = 0$. Alors il suffit d'employer le lemme 6. Pour le cas général, la formule de Leibniz montre que $\partial^\beta g$ est défini par un symbole

$$\sigma_\beta(x,\xi) = \sum_{\beta=\beta_1+\beta_2} \frac{\beta!}{\beta_1!\,\beta_2!}\,(i\xi)^{\beta_1}\,\partial_x^{\beta_2}\,\sigma(x,\xi).$$

Le lemme 6 s'applique encore à ce nouveau symbole.

Le dernier cas s'obtient de façon analogue.

5. AUTRES RÉSULTATS L^2 DANS LE STYLE DU THÉORÈME 2.

THÉORÈME 3. Soient $n \geq 1$ et $N > \frac{n}{2}$ deux entiers, $\sigma(x,\xi) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe une constante C telle que les dérivées $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)$, prises au sens des distributions, vérifient $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C$ si $|\alpha| \leq N$, $|\beta| \leq N$. Alors l'o.p.d. $\sigma(x,D)$ est borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$. La même conclusion a lieu si l'on suppose que $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C$ lorsque $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\alpha_j = 0$ ou 1, $\beta_j = 0$ ou 1. (*)

La preuve du théorème 3 est identique à celle du théorème 2, compte tenu des trois formes que peut prendre le lemme 8.

On peut également développer une théorie des o.p.d. sur le tore n-dimensionnel $\mathbf{T}^n$.

On définit un o.p.d. par son symbole qui est une suite $m_k(x)$ indexée par $k \in \mathbf{Z}^n$, de fonctions de $L^2(\mathbf{T}^n)$. L'opérateur pseudo-différentiel correspondant est donné, sur les caractères, par

$$T(e^{ik.x}) = m_k(x)\, e^{ik.x} \tag{1}$$

et étendu par linéarité et densité à tout $L^2(\mathbf{T}^n)$. Ceci à condition de pouvoir montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\left\| \Sigma\, c_k\, m_k(x)\, e^{ik.x} \right\|_2 \leq C (\Sigma\, |c_k|^2)^{1/2} \tag{2}$$

pour toute suite $c_k \in \ell^2(\mathbf{Z}^n)$. En fait on se contente des suites ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Si l'on s'en tenait là, tout opérateur continu $T : L^2(\mathbf{T}^n) \longrightarrow L^2(\mathbf{T}^n)$ serait un o.p.d.

Le point de vue des o.p.d. sera donc différent : on cherche des conditions de régularité portant sur la suite des $m_k(x)$, $k \in \mathbf{Z}^n$, et entraînant la continuité de l'opérateur T.

PROPOSITION 4. Soient $s > \frac{n}{2}$ un nombre réel et $m_k(x)$ une suite de

(*) Ce théorème est dû à H. Cordes [24].

fonctions continues sur $\mathbf{T}^n$ vérifiant, pour une certaine constante $C > 0$, $\|m_k\|_{H^s} \leq C$.

Alors il existe un (et un seul) opérateur linéaire continu $T : L^2(\mathbf{T}^n) \to L^2(\mathbf{T}^n)$ tel que $T(e^{ik.x}) = m_k(x)\, e^{ik.x}$.

La proposition 4 résulte immédiatement du lemme 4.

6. AUTRES LEMMES DE PRESQUE-ORTHOGONALITÉ.

Comme le lecteur l'a deviné, chaque nouvelle forme du lemme de presque-orthogonalité donnera une variante distincte du résultat de continuité des opérateurs pseudo-différentiels.

Nous allons examiner quelques-unes de ces variantes.

Tout d'abord on a $\|\Sigma f_k(x)\, e^{ik.x}\|_2 \leq \Sigma \|f_k\|_2$ qui est la forme la plus triviale mais n'exige aucune régularité sur les fonctions $f_k \in L^2(\mathbf{R}^n)$. A l'opposé, la forme que nous avons utilisée est $\|\Sigma f_k(x)\, e^{ik.x}\|_2 \leq C(s,n)(\Sigma \|f_k\|^2_{H^s})^{1/2}$ si $s > \frac{n}{2}$. On "consomme" beaucoup de régularité sur les f_k mais on a une estimation meilleure puisque la norme ℓ^1 est remplacée par la norme ℓ^2. Un résultat "intermédiaire" exigerait seulement un contrôle dans H^s pour $0 < s \leq \frac{n}{2}$ et l'estimation obtenue serait $(\Sigma \|f_k\|^p_{H^{(s)}})^{1/p}$ avec $1 < p < 2$ et une relation correcte entre p et s.

En fait on a le résultat suivant.

PROPOSITION 5. Supposons que $1 \leq p \leq 2$ et que $s > n(1 - \frac{1}{p})$. Alors il existe une constante $C = C(n,p,s)$ telle que, pour toute somme finie $f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} f_k(x)\, e^{ik.x}$ où $f_k \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $k\in\mathbf{Z}^n$, on ait $\|f\|_2 \leq C(\Sigma\|f_k\|^p_{H^s})^{1/p}$.

On définit d'abord q par $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ puis la fonction $\omega(\xi) = (\Sigma\, (1 + |\xi - k|^2)^{-sq/2})^{1/q}$. On a alors $\omega(\xi) \leq C_1$ puisque $sq > n$.

Il vient $|\Sigma \hat{f}_k(\xi - k)| \leq \Sigma |\hat{f}_k(\xi - k)| \leq \omega(\xi)(\Sigma |\hat{f}_k(\xi-k)|^p(1+|\xi-k|^2)^{sp/2})^{1/p}$.

Posons $g_k(\xi) = |\hat{f}_k(\xi-k)|^p(1+|\xi-k|^2)^{sp/2}$. On a, grâce au théorème de Plancherel,

$$\|f\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} |\Sigma \hat{f}_k(\xi - k)|^2 \, d\xi \leq$$

$$C_1^2 \int_{\mathbf{R}^n} (\Sigma g_k(\xi))^{2/p} \, d\xi \leq C_1^2 (\Sigma \|g_k\|_{2/p})^{2/p}.$$

7. ESTIMATIONS L^2 POUR DES SYMBOLES NON BORNÉS.

Soit $\sigma(x,\xi) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ une fonction à valeurs complexes. Supposons que, pour tout compact $K \subset \mathbf{R}^n$, on puisse trouver une constante C et un entier N tels que $|\sigma(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^N$ $(x \in K\ ,\ \xi \in \mathbf{R}^n)$ et imposons des conditions analogues aux dérivées $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)$:

$$(1) \qquad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{N_{\alpha,\beta}}$$

sans préciser de conditions sur les $C_{\alpha,\beta}$ ou les $N_{\alpha,\beta}$, $(\alpha,\beta) \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n$.

On peut alors se poser la question suivante : est-il possible que l'opérateur pseudo-différentiel $\sigma(x,D)$ associé à un symbole $\sigma(x,\xi)$ vérifiant toutes ces conditions raisonnables soit borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ sans que la fonction $\sigma(x,\xi)$ soit bornée ? Peut-on en particulier avoir, pour tout x, $\sup_\xi |\sigma(x,\xi)| = +\infty$?

Nous allons décrire des classes très naturelles de symboles conduisant à des o.p.d. bornés sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ mais qui ne soient pas, eux-mêmes, des fonctions bornées.

Si $\sigma(x,\xi) = m(\xi)$ ne dépend pas de x, il est presque évident que $\|m(\xi)\|_{L^\infty(d\xi)}$ est égale à la norme de $m(D)$ agissant sur $L^2(\mathbf{R}^n)$. Donc on ne peut obtenir le phénomène annoncé dans ce cas. On a cependant le résultat suivant.

PROPOSITION 6. <u>Soient</u> $q \in [2,+\infty]$, $a \in L^q(\mathbf{R}^n)$ <u>et</u> $b \in L^q(\mathbf{R}^n)$. <u>Formons</u> $\sigma(x,\xi) = a(x)\, b(\xi)$. <u>Alors</u> $\sigma(x,D) : L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ <u>est borné et sa norme ne dépasse pas</u> $(2\pi)^{-n/q} \|a\|_q \|b\|_q$.

En effet définissons r par $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$. On a $1 \le r \le 2$ et l'exposant conjugué s est défini par $\frac{1}{s} = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$.

L'inégalité d'Hausdorff-Young est précisément que, pour toute fonction $g \in L^r$, $\hat{g} \in L^s$ et $\|\hat{g}\|_s \le (2\pi)^{n/s}\|g\|_r$.

Or on a $[\sigma(x,D)\,f](x) = a(x) \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix.\xi}\, b(\xi)\,\hat{f}(\xi)\,\frac{d\xi}{(2\pi)^n} = a(x)\,h(x)$ en appelant h la transformée de Fourier inverse du produit $\hat{f}b$.

Finalement $\|b\hat{f}\|_r \le \|b\|_q\|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|b\|_q\|f\|_2$ et $\|h\|_s \le (2\pi)^{n/s - n/2}\|b\|_q\|f\|_2 = (2\pi)^{-n/q}\|b\|_q\|f\|_2$ et donc $\|ah\|_2 \le \|a\|_q\|h\|_s \le (2\pi)^{-n/q}\|a\|_q\|b\|_q\|f\|_2$.

Voici un exemple. On pose $p_k = (1+|k|)^{1/2}$, $T_k = (1+|k|^2)^2$, $a(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} p_k \exp\{-T_k^2\,|x-k|^2\}$ et l'on choisit la même expression pour $b(\xi)$. Dès lors le symbole $\sigma(x,\xi) = a(x)\,b(\xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, est à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées en x et ξ ; on a, pour tout x, $\sup_\xi |\sigma(x,\xi)| = +\infty$ et cependant $\sigma(x,D)$ est borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$.

COROLLAIRE. <u>Les fonctions</u> $\sigma(x,\xi)$ <u>appartenant au produit tensoriel projectif</u> $L^q(\mathbf{R}^n)\,\hat{\otimes}_\pi\,L^q(\mathbf{R}^n)$ <u>sont les symboles d'opérateurs pseudo-différentiels bornés sur</u> $L^2(\mathbf{R}^n)$ <u>lorsque</u> $2 \le q \le +\infty$.

Le lecteur au fait de la théorie des produits tensoriels topologiques peut songer à remplacer la condition "forte" $\sigma \in L^q(\mathbf{R}^n)\,\hat{\otimes}_\pi\,L^q(\mathbf{R}^n)$ par la condition "faible" $\sigma \in L^q(\mathbf{R}^n)\,\hat{\otimes}_\varepsilon\,L^q(\mathbf{R}^n)$.

Mais la condition faible ne convient pas, compte tenu du lemme suivant.

LEMME 9. <u>Soit</u> $\sigma(x,\xi) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ <u>une fonction continue. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur pseudo-différentiel</u> $\sigma(x,D)$ <u>soit borné sur</u> $L^2(\mathbf{R}^n)$ <u>est que le noyau</u> $K(x,\xi) = e^{ix.\xi}\,\sigma(x,\xi)$ <u>soit borné sur</u> $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Un tel énoncé peut choquer car le noyau naturel associé à $\sigma(x,D)$ est défini par $K(x,x-z) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz.\xi} \sigma(x,\xi)\, d\xi$.

La preuve du lemme 9 est cependant immédiate. On écrit $I = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} g(x)\, e^{ix.\xi} \sigma(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi dx$ pour $\hat{f}, g \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour simplifier l'écriture on pose $h(\xi) = \hat{f}(\xi)$ et, compte tenu de la formule de Plancherel, $\sigma(x,D)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ si et seulement s'il existe C tel que

$$|I| \leq C\, \|g\|_2\, \|h\|_2 .$$

Pour montrer que la condition "faible" $\sigma(x,\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes}_\varepsilon L^2(\mathbb{R}^n)$ ne convient pas, on prend l'exemple de

$$\sigma(x,\xi) = e^{-|x|^2} e^{-ix.\xi} (1+|\xi|^2)^{-n/4} \in L^2(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes}_\varepsilon L^2(\mathbb{R}^n)$$

pour lequel $K(x,\xi) = e^{ix.\xi}\, \sigma(x,\xi)$ n'est manifestement pas borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

8. UN DERNIER RÉSULTAT DANS LE STYLE DU THÉORÈME 1.

Le "style" du théorème 1 est celui d'hypothèses de régularité sur le symbole, isométriquement invariantes sous l'action des translations en x et ξ. Le résultat suivant ne nécessite pas que le symbole soit borné.

THÉORÈME 4. Soient $\delta \in [0, 1/2]$ un nombre réel et $N > n\delta$ un entier. Soit $\sigma(x,\xi) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant

$$\left(\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)|^{\frac{2}{1-2\delta}} dx\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}-\delta} \leq C_\alpha \tag{4}$$

pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\beta| \leq N$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Alors l'opérateur pseudo-différentiel $\sigma(x,D)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Naturellement l'hypothèse signifie que les dérivées $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)$, prises au sens des distributions, sont des fonctions de L^q, $q = \dfrac{2}{1-\delta}$.

Les hypothèses du théorème de Sobolev (injection dans les fonctions continues bornées) ne sont pas remplies quand $\delta < \frac{1}{2}$ et les symboles décrits par le théorème

4 ne sont pas bornés (en général).

La preuve du théorème 4 débute par le lemme suivant.

LEMME 10. Supposons que $\sigma(x,\xi)=0$ si $|\xi|\geq 2$ et que, pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$, une constante C_α existe telle que, pour $q=\dfrac{2}{1-2\delta}$,

(5) $$\iint|\partial_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)|^q\,dx\,d\xi\leq C_\alpha.$$

Alors l'opérateur pseudo-différentiel associé $\sigma(x,D)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

La preuve est immédiate. On fait, comme dans la démonstration du lemme 8, une analyse de Fourier en ξ. Cela amène à poser, pour $k\in\mathbb{Z}^n$,

$c_k(x)=(2\pi)^{-n}\int\sigma(x,\xi)\,e^{-ik.\xi}d\xi=(2\pi)^{-n}(1+|k|^2)^{-n}\int(I-\Delta_\xi)^n\,\sigma(x,\xi)\,e^{-ik.\xi}\,d\xi=$ $\dfrac{m_k(x)}{(1+|k|^2)^n}$. De façon évidente la suite $m_k(x)$ est bornée dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Il existe donc une fonction $\hat{\varphi}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\sigma(x,\xi)=\big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}c_k(x)\,e^{ik.\xi}\big)\,\hat{\varphi}(\xi)=$ $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^{-n}\,m_k(x)\,e^{ik.\xi}\,\hat{\varphi}(\xi)$.

Nous venons d'écrire que $\sigma\in L^q\hat{\otimes}_\pi L^q$. Donc $\sigma(x,D)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Nous pouvons passer au cas général.

Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $1=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\varphi^2(\xi-k)$. On d'finit $f_k\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par $\hat{f}_k(\xi)=\hat{f}(\xi+k)\,\varphi(\xi)$ et l'on a évidemment $\sum\|f_k\|_2^2=\|f\|_2^2$. On a

$$g(x)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix.\xi}\,\sigma(x,\xi)\,\hat{f}(\xi)\,d\xi=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}e^{ik.x}\,g_k(x)$$ où, comme dans la démonstration du théorème 2,

$$g_k(x)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix.\xi}\,\sigma(x,\xi+k)\,\varphi(\xi)\,\hat{f}_k(\xi)\,d\xi=(\tau_k(x,D)\,f_k)(x).$$

Le lemme 10 fournit, pour tout $\beta\in\mathbb{N}^n$

$$\|\tau_k(x,D)\|_{2,2}\leq C\Big(\sum_{|\alpha|\leq 2n}\iint_{|\xi-k|\leq 2}|\partial_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)|^q\,dx\,d\xi\Big)^{1/q}$$

et l'on a donc, en reprenant la preuve du lemme 8,

$$\|g_k\|_{H^{(N)}}=\sum_{|\beta|\leq N}\|\partial_x^\beta g_k(x)\|_2\leq\omega_k\|f_k\|_2\qquad\text{où}$$

$$\omega_k = C\Big(\sum_{|\alpha|\le 2n}\ \sum_{|\beta|\le N} \iint_{|\xi-k|\le 2} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)|^q\, dx\, d\xi\Big)^{1/q}.$$

Finalement $\|\Sigma\, e^{ik.x} g_k(x)\|_2 \le C(\Sigma \|g_k\|^r_{H^{(N)}})^{1/r}$ où $r = \frac{1}{1-\delta}$. Il ne reste plus qu'à observer que $(\Sigma\, \omega_k^r \|f_k\|_2^r)^{1/r} \le (\Sigma \|f_k\|_2^2)^{1/2}(\Sigma\, \omega_k^q)^{1/q}$ puisque $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$.

Le théorème 4 s'apparente au théorème 2 mais la condition de régularité locale en x est moins exigeante ; en revanche on demande plus sur le comportement à l'infini.

Dans les deux résultats, les hypothèses de régularité en x et ξ sont isométriquement invariantes sous l'effet des translations de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Le théorème 4 est le meilleur possible au sens que la condition $N > n\delta$ ne peut être remplacée par $N \le n\delta$, $N \in \mathbb{N}$.

Voici un contre exemple pour $\delta > 0$. On pose $\sigma(x,\xi) = e^{-|x|^2} e^{-ix.\xi} a(\xi)$ où $a(\xi) = (1+|\xi|^2)^{-n/4}\left[\log(2+|\xi|^2)\right]^{-1/2}$. Le choix de $a(\xi)$ permet d'avoir $\int_{\mathbb{R}^n} a^2(\xi)\, d\xi = +\infty$ de sorte que, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on obtienne $\sigma(x,D)\, f(x) = \ell(f)\, e^{-|x|^2}$ où $\ell(f) = \int_{\mathbb{R}^n} a(\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$ n'est pas une forme linéaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

D'autre part $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\forall\, \beta \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\beta| \le n\delta$, $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi) \le C_\alpha\, b(\xi)(1+|x|)^{|\alpha|} e^{-|x|^2}$ où $b(\xi) = (1+|\xi|)^{-\frac{n}{2}+n\delta}\left[\log(2+|\xi|^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$.

On a donc $b(\xi) \in L^q(d\xi)$ où $q = \frac{2}{1-2\delta} > 2$. Le cas $\delta = 0$ est tout à fait différent car la seule condition $\iint |\sigma(x,\xi)|^2 dx\, d\xi < +\infty$ entraîne que l'o.p.d. $\sigma(x,D)$ soit borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ comme le montre le lemme 9.

Le théorème 4 est donc exact (et évident) si $N = \delta = 0$.

Ce contre exemple permet également de vérifier que, dans l'énoncé du théorème 2, on ne peut remplacer l'algèbre A_ω par une version plus fine, introduite également par Beurling dans [2], et dont nous allons rappeler la définition.

On désigne par Ω l'ensemble de toutes les fonctions continues $\omega : \mathbb{R}^n \to [1, +\infty[$ qui sont en fait des fonctions croissantes de $|x|$ et qui vérifient

$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{\omega(x)} = 1$. On appelle alors $\mathcal{A}$ la réunion des espaces $\mathfrak{F}L^2_\omega$ pour $\omega \in \Omega$. En d'autres termes $f \in \mathcal{A}$ s'il existe un poids $\omega \in \Omega$ tel que $\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \omega(\xi)\, d\xi < +\infty$.

A. Beurling a montré dans [2] que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach et qu'elle est contenue dans l'algèbre de Wiener $A = \mathfrak{F}L^1(\mathbb{R}^n)$.

Pour montrer que l'on ne peut remplacer A_ω par cette algèbre $\mathcal{A}$ dans le théorème 2, nous allons définir une fonction $\sigma(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et une suite C_α, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, de constantes positives ayant les deux propriétés suivantes

(a) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \to \partial^\alpha_\xi \sigma(x,\xi)$ appartient à $\mathcal{A}$ et sa norme n'y dépasse pas C_α

(b) l'o.p.d. associé au symbole $\sigma(x,\xi)$ n'est cependant pas borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

On choisit $\sigma(x,\xi) = e^{-|x|^2} e^{-ix.\xi} a(\xi)$ avec $a(\xi) = (1+|\xi|^2)^{-n/4}$, compte tenu du lemme suivant.

LEMME 11. <u>Pour toute fonction</u> $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, <u>il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que la norme, dans l'algèbre de Beurling</u> $\mathcal{A}$, <u>de</u> $e^{-ix.\xi}g(x)$ <u>ne dépasse pas</u> $C(1+|\xi|)^{n/2}$.

Pour vérifier ce résultat, on utilise la caractérisation du dual de $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ donnée par le théorème II, page 10 de [2] : f appartient à ce dual si et seulement si $\int_{|x|\le r} |f|^2\, dx \le C(1+r^n)^{1/2}$ pour une certaine constante C. Dès lors, si $h(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la norme, dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}$, de la fonction translatée $\frac{h(\xi-\xi_0)}{(1+|\xi_0|^n)^{1/2}}$ est majorée par une constante indépendante de ξ_0.

9. CONVERGENCE DES SÉRIES DE FOURIER ET O.P.D.

Il serait impossible de clore ce chapitre sans citer une conséquence inattendue du théorème de Carleson sur la convergence presque sûre des sommes partielles des séries de Fourier des fonctions de $L^2(0,2\pi)$.

THÉORÈME 5. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $\sigma(x,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ vérifiant $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial \xi}\sigma(x,\xi)\right| d\xi \leq 1$, la norme sur $L^2(\mathbf{R})$ de l'o.p.d. $\sigma(x,D)$ associé ne dépasse pas C.

On utilise, dans la preuve du théorème 5, le résultat suivant.

LEMME 12. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on ait, en posant $S^*f(x) = \sup_{u\in\mathbf{R}} \left|\int_0^u e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi\right|$, $\|S^*f\|_2 \leq C\|f\|_2$.

Dans le cas où $\mathbf{R}$ est remplacé par $[0,2\pi]$, le lemme est dû à R. Hunt. P. Tomas et C. Kenig ont montré dans [39] comment passer de $[0,2\pi]$ à $\mathbf{R}$.

Revenons au théorème 5. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on a, en posant

$$S(u,x) = \int_0^u e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi, \quad u\in\mathbf{R}, \quad g(x) = 2\pi[\sigma(x,D)f](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(u,x)\frac{\partial}{\partial u}\sigma(x,u)\,du.$$

D'où $|g(x)| \leq \sup_{u\in\mathbf{R}} |S(u,x)| \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial}{\partial u}\sigma(x,u)\right| du \leq S^*f(x)$. Alors la continuité sur L^2 découle du lemme.

Naturellement ceci n'est qu'une paraphrase du théorème de Carleson. Le théorème 5 se situe dans le cadre de ce chapitre puisque les hypothèses faites sur le symbole sont isométriquement invariantes sous l'effet des translations en x et ξ.

Remarquons enfin qu'aucune régularité en x n'est nécessaire : en revanche la condition en ξ est de nature globale et non plus locale. Cette observation s'applique aussi au théorème 4 : on peut, pour obtenir un résultat $L^2(\mathbf{R}^n)$, compenser le manque de régularité en x par des hypothèses de nature globale en ξ.

Enfin la conclusion du théorème 5 s'applique également si $L^2(\mathbf{R})$ est remplacé par $L^p(\mathbf{R})$, $1 < p < +\infty$.

CHAPITRE II

ESTIMATIONS L^2 POUR LES CLASSES EXOTIQUES

Nous avons, au cours du chapitre I, donné un ensemble de résultats sur la continuité L^2 d'o.p.d. définis à l'aide de symboles $\sigma(x,\xi)$ appartenant à certaines classes C de fonctions. D'un énoncé à l'autre, la classe C changeait mais dans tous les cas, C était définie par des conditions métriques invariantes par translations en x et en ξ.

Le rôle joué par le groupe des translations s'explique par l'observation suivante : si un symbole $\sigma(x,\xi)$ conduit à un o.p.d. $\sigma(x,D)$ borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, de norme C, alors pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et tout $\xi_0 \in \mathbf{R}^n$, le symbole $\sigma(x+x_0\ ,\ \xi+\xi_0)$ définit un o.p.d. $\tau(x,D)$ borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ dont la norme est égale à C.

Nous allons maintenant vérifier que le groupe des homothéties (ou dilatations) a également une action tout à fait remarquable sur les symboles des opérateurs pseudo-différentiels. Cette action est décrite par le lemme suivant.

LEMME 1. <u>Si un symbole</u> $\sigma(x,\xi) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ <u>conduit à un o.p.d.</u> $\sigma(x,D)$ <u>borné sur</u> $L^2(\mathbf{R}^n)$, <u>alors pour tout</u> $T > 0$, <u>le symbole</u>

$$\tau(x,\xi) = \sigma(Tx\ ,\ T^{-1}\xi)$$

<u>définit un o.p.d.</u> $\tau(x,D)$ <u>borné sur</u> $L^2(\mathbf{R}^n)$ <u>et les normes de</u> $\sigma(x,D)$ <u>et de</u> $\tau(x,D)$ <u>sont les mêmes</u>.

La vérification est très simple. Désignons par $H_T : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ l'opérateur défini par $H_T f(x) = f(\frac{x}{T})$. On a alors

$$(1) \qquad \tau(x,D) = H_T^{-1} \circ \sigma(x,D) \circ H_T$$

car $(2\pi)^n \left[\tau(x,D) f\right](x) = \int e^{ix.\xi}\, \tau(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi =$

$$\int e^{ix.\xi}\, \sigma(Tx\,,\, T^{-1}\,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi = \int e^{iTx.\xi}\, \sigma(Tx\,,\,\xi)\, T^n\, \hat{f}(T\xi)\, d\xi =$$

$$\int e^{iTx.\xi}\, \sigma(Tx,\xi)(H_T f)^{\wedge}(\xi)\, d\xi = (2\pi)^n\, H_T^{-1} \left\{\sigma(x,D) \left[H_T f\right]\right\}(x).$$

Or la norme de H_T sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ est $T^{n/2}$, celle de H_T^{-1} est $T^{-n/2}$; on a donc $\|\tau(x,D)\| \leq \|\sigma(x,D)\|$ en désignant par $\|\ \ \|$ la norme de l'o.p.d. agissant sur $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Naturellement, on peut échanger les rôles joués par τ et σ et l'on obtient $\|\sigma(x,D)\| \leq \|\tau(x,D)\|$; et l'égalité annoncée en découle.

Au niveau de l'analyse de Fourier, l'action du groupe des dilatations (ou homothéties) est décrite par la théorie de Littlewood-Paley dont nous allons rappeler les grandes lignes (elle sera reprise en détail au chapitre IV).

Au lieu de faire agir sur $\mathbf{R}^n$ le groupe de toutes les homothéties, on se restreint au sous-groupe discret Δ des homothéties dyadiques c'est-à-dire de rapport 2^j, $j \in \mathbf{Z}$.

Dès lors il existe une partition de $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ en "couronnes dyadiques" $\Gamma_j = \left\{\xi \in \mathbf{R}^n \ ;\ 2^j \leq |\xi| < 2^{j+1}\right\}$, $j \in \mathbf{Z}$, et Δ opère de façon simplement transitive sur cette partition.

En dimension 1, Γ_j est la réunion de deux "intervalles dyadiques" et, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, on définit $f_j \in L^2(\mathbf{R}^n)$ par $\hat{f}_j(\xi) = \hat{f}(\xi)$ si $\xi \in \Gamma_j$, $\hat{f}_j(\xi) = 0$ sinon.

Le théorème de Littlewood-Paley ([44]) prend, en dimension 1 la forme suivante : pour tout $p \in \left]1,+\infty\right[$ il existe deux constantes positives C_p et C'_p telles que, pour toute fonction $f \in L^2 \cap L^p$ on ait

(2) $$C_p \|f\|_p \le \|(\sum_{-\infty}^{+\infty} |f_j(x)|^2)^{1/2}\|_p \le C'_p \|f\|_p .$$

Cet énoncé est faux en dimension supérieure car Ch. Fefferman a montré que la simple inégalité $\|f_j\|_p \le C'_p \|f\|_p$ est inexacte si $p \neq 2$: la fonction caractéristique de la boule n'est pas un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p$ si $p \neq 2$.

On a cependant un substitut où l'on utilise, au lieu du découpage "brutal" décrit par la partition Γ_j, un découpage "adouci" obtenu par une partition dyadique de l'unité à l'aide de fonctions C^∞.

Il est aisé de construire une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, positive ou nulle, portée par $\frac{1}{3} \le |\xi| \le 1$, ne dépendant en fait que de $|\xi|$ et telle que $1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2^{-j}\xi)$ si $\xi \neq 0$.

Dès lors on définit f_j par $\hat{f}_j(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)$ et (2) est vraie en toute dimension.

Nous venons de décrire sommairement les idées et les méthodes qui seront systématiquement utilisées dans ce chapitre.

1. DÉFINITION DES CLASSES EXOTIQUES ET ÉNONCÉS DES RÉSULTATS DE CONTINUITÉ L^2.

La définition des classes $S^m_{\rho,\delta}$ et la démonstration du premier résultat de continuité $(m = 0,\ 0 \le \delta < \rho \le 1)$ sont dues à Hörmander, Kumano-go et Unterberger ([35], [43], [52]).

DÉFINITION 1. Une fonction $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ appartient à $S^m_{\rho,\delta}$ s'il existe une famille $C_{\alpha,\beta}$, $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $\beta \in \mathbf{N}^n$ de constantes positives telles que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et tout $\xi \in \mathbf{R}^n$ on ait

(3) $$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.$$

Naturellement si $\rho_1 \le \rho_2$, $\delta_1 \ge \delta_2$ et $m_1 \ge m_2$, $S^{m_1}_{\rho_1,\delta_1} \supset S^{m_2}_{\rho_2,\delta_2}$. de sorte que le théorème de continuité de Hörmander est une conséquence du théorème de A. Calderón et R. Vaillancourt suivant.

THÉORÈME 6. Soient $\delta \in [0,1[$ un nombre réel et $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction continue dont les dérivées $\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \sigma(x,\xi)$, prises au sens des distributions, vérifient

$$|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \sigma(x,\xi)| \le C(1+|\xi|)^{\delta|\beta|-\delta|\alpha|}$$

si $0 \le |\alpha| \le 2\left[\frac{n}{2}\right]+n$ et $0 \le |\beta| \le 2m$ où $m \in \mathbb{N}$, $m(1-\delta) \ge \frac{5}{4}n$.

Alors $\sigma(x,D)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Le lecteur a observé que A. Calderón et R. Vaillancourt se souciaient déjà de trouver les hypothèses minimales de régularité entraînant la conclusion désirée.

Ensuite E. Stein a montré, en reprenant la méthode de Calderón et Vaillancourt que le nombre de dérivées nécessaires en x et ξ pouvait être ramené à $2n$.

La méthode utilisée est la décomposition de l'opérateur $\sigma(x,D)$ en morceaux presque-orthogonaux auxquels on applique le lemme de Cotlar.

Dans [38], Cordes et Kato emploient une approche entièrement différente.

Nous allons vérifier que la théorie de Paley-Littlewood donne ici des résultats beaucoup plus précis que le lemme de Cotlar et fournit les énoncés les meilleurs possibles.

THÉORÈME 7. Soient $n \ge 1$ et $N > \frac{n}{2}$ deux entiers. Supposons que $\sigma(x,\xi)$ et toutes les dérivées $\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \sigma(x,\xi)$, $|\alpha| \le N$, $|\beta| \le N$, soient continues sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et vérifient

$$|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \sigma(x,\xi)| \le C(1+|\xi|)^{\delta(|\beta|-|\alpha|)} \tag{4}$$

où $0 \le \delta < 1$ et $C > 0$ sont deux constantes.

Alors $\sigma(x,D)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Avant de démontrer ce résultat, nous allons vérifier qu'il est optimal au sens suivant : la condition $N > \frac{n}{2}$ ne peut y être remplacée par $N = \frac{n}{2}$.

Si le théorème 7 était vrai quand $N = \frac{n}{2}$, le théorème du graphe fermé entraînerait la conséquence suivante : "il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $\sigma \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, les inégalités $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq (1+|\xi|)^{\delta(|\beta|-|\alpha|)}$, $|\alpha| \leq \frac{n}{2}$, $|\beta| \leq \frac{n}{2}$, impliquent que la norme de $\sigma(x,D)$ sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ ne dépasse pas C".

Pour montrer qu'il n'en est pas ainsi, on se restreint à des symboles $\sigma(x,\xi)$ portés par la couronne dyadique $2^j \leq |\xi| \leq 2^{j+1}$. On a donc, par hypothèse $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq c\, 2^{j\delta(|\beta|-|\alpha|)}$ si $|\alpha| \leq \frac{n}{2}$, $|\beta| \leq \frac{n}{2}$ et la norme de $\sigma(x,D)$ opérant sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ ne devrait pas dépasser C.

On procède alors à un changement d'échelle en posant $\tau(x,\xi) = \sigma(\frac{x}{2^{j\delta}}, 2^{j\delta}\xi)$. Grâce au lemme 1, les normes d'opérateurs de $\tau(x,D)$ et $\sigma(x,D)$ coïncident sur $L^2(\mathbf{R}^n)$. Ensuite on a $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tau(x,\xi)| \leq c$ si $|\alpha| \leq \frac{n}{2}$ et $|\beta| \leq \frac{n}{2}$ et enfin $\tau(x,\xi)$ est porté par la couronne $2^{j(1-\delta)} \leq |\xi| \leq 2^{j(1-\delta)+1}$ que nous appellerons Ω_j.

Les estimations vérifiées par τ étant invariantes par translation, il résulterait de tout cela que pour toute fonction $\tau(x,\xi) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, les inégalités $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tau(x,\xi)| \leq c$ pour $|\alpha| \leq \frac{n}{2}$, $|\beta| \leq \frac{n}{2}$ entraîneraient que la norme d'opérateur de $\sigma(x,D)$ ne dépasse pas C. En effet, par une translation convenable en ξ, on peut toujours se ramener au cas où $\tau(x,\xi)$ est porté par Ω_j.

Finalement un simple passage à la limite donne $\varphi(\frac{x}{k})\, \varphi(\frac{\xi}{k})\, \tau(x,\xi) \to \tau(x,\xi)$ si $k \to +\infty$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\varphi(0) = 1$ et permet de réduire le cas général au cas des symboles à support compact.

Pour résumer, nous venons de démontrer que si le théorème 7 était vrai quand $N = \frac{n}{2}$, il en serait de même du théorème 3 du chapitre I ; ce qui n'est pas.

2. PLAN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 7.

On utilise d'abord la décomposition dyadique de l'identité $1 = \varphi_o(\xi) + \sum_o^\infty \varphi(2^{-j}\xi)$ où $\varphi_o \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ et support $\varphi \subset \left\{\frac{1}{3} \leq |\xi| \leq 1\right\}$ pour écrire

$$\sigma(x,\xi) = \sigma(x,\xi)\,\varphi_o(\xi) + \sum_o^\infty \sigma(x,\xi)\,\varphi(2^{-j}\xi) = \tau_o(x,\xi) + \sum_o^\infty \sigma_j(x,\xi). \tag{5}$$

Cette décomposition spectrale du symbole est exactement dans l'esprit de la théorie de Littlewood-Paley.

L'opérateur $\tau_o(x,D)$ est borné grâce au théorème 3 et il en est de même pour chacun des opérateurs $\sigma_j(x,D)$ pris isolément ; car les symboles $\sigma_j\left(\frac{x}{2^{j\delta}}, 2^{j\delta}\xi\right)$ vérifient les hypothèses du théorème 3 et l'on applique le lemme 1.

Il reste à montrer que les opérateurs $\sigma_j(x,D)$ sont, en un certain sens que nous allons préciser, presque-orthogonaux.

A cet effet, on construit, par une analyse spectrale en x, la décomposition $\sigma_j(x,\xi) = \tilde{\sigma}_j(x,\xi) + \rho_j(x,\xi)$ qui jouit des propriétés suivantes

$$\sum_{j \geq 0} \|\rho_j(x,D)\| \leq C \tag{6}$$

(7) pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, les fonctions $g_j = \tilde{\sigma}_j(x,D)\,f$ sont orthogonales dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et vérifient $\sum_o^\infty \|g_j\|_2^2 \leq C\|f\|_2^2$.

Dès lors le théorème 7 est démontré.

La construction des opérateurs $\tilde{\sigma}_j(x,D)$ et $\rho_j(x,D)$ nécessite de préciser le théorème 3 en introduisant des classes de Lipschitz dont nous allons rappeler la définition et montrer le rôle.

3. LES CLASSES DE LIPSCHITZ ET LE THÉORÈME 3.

Soit $m > 0$ un nombre réel n'appartenant pas à $\mathbb{N}$. On définit $\Lambda_m(\mathbb{R}^n)$

de la façon suivante : si $0 < m < 1$, $f \in \Lambda_m(\mathbf{R}^n)$ signifie l'existence d'une constante C telle que $|f(x)| \leq C$ et $|f(x+y) - f(x)| \leq C|y|^m$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et tout $y \in \mathbf{R}^n$. Si $m > 1$, on écrit $m = q + r$ où $q \in \mathbf{N}$ et $0 < r < 1$. Alors $f \in \Lambda_m$ si toutes les dérivées $\partial^\alpha f$ telles que $|\alpha| \leq q = [m]$ appartiennent à Λ_r ; il revient au même d'exiger que f soit bornée et que $\partial^\alpha f \in \Lambda_r$ quand $|\alpha| = q$.

De façon classique les fonctions lipschitziennes sont caractérisées par des propriétés de "meilleure approximation par les fonctions basse-fréquences". Plus précisément on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1. *Soient* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ *une fonction et* $m > 0$, $m \notin \mathbf{N}$ *un nombre réel. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes*

(8) $f \in \Lambda_m$;

(9) $f = g_0 + \sum_0^\infty f_j$

où $\hat{g}_0(\xi)$ *est portée par* $|\xi| \leq 1$, $\hat{f}_j(\xi)$ *est portée par* $\frac{1}{3} 2^j \leq |\xi| \leq 2^j$ *et où* $\|g_0\|_\infty \leq C$, $\|f_j\|_\infty \leq C2^{-mj}$ (*les transformées de Fourier étant prises au sens des distributions*) ;

(10) *il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout* $T \geq 1$, *on puisse trouver une fonction* $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ *vérifiant* $\|g\|_\infty \leq C$, support $\hat{g} \subset \{|\xi| \leq T\}$ *et* $\|f - g\|_\infty \leq CT^{-m}$.

Cet énoncé est classique ([45]).

Pour la commodité du lecteur nous allons cependant rappeler comment la décomposition (9) est obtenue.

On utilise la décomposition dyadique de l'identité $1 = \varphi_0(\xi) + \sum_0^\infty \varphi(2^{-j}\xi)$ présentée au § 3. Il suffit de poser $\hat{f}_j(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)$ comme dans la théorie de Littlewood-Paley.

Nous aurons besoin du corollaire suivant.

COROLLAIRE. *Soient* $m_2 > m_1 > 0$ *deux nombres réels qui ne sont pas des entiers et* $f \in \Lambda_{m_2}$. *Alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout* $R \geq 1$, *on puisse écrire* $f = g + h$ *où* support $\hat{g} \subset \{ |\xi| \leq R \}$, $\|h\|_{\Lambda_{m_1}} \leq CR^{m_1 - m_2}$ *et* $\|g\|_{\Lambda_{m_2}} \leq C$.

De plus si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *est égale à* 1 *au voisinage de* 0, *on peut définir* g *par* $\hat{g}(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{R})\, \hat{f}(\xi)$.

Naturellement on peut se limiter au cas où $R = 2^j$ et il suffit alors de prendre $g = g_0 + f_0 + f_1 + \ldots + f_j$ et $h = f_{j+1} + f_{j+2} + \ldots$ Ce choix est d'ailleurs compatible avec la dernière assertion du corollaire.

L'emploi des classes de Lipschitz permet de mieux cerner l'indice critique $\frac{n}{2}$ dans le théorème 3. On a

THÉORÈME 8. *Soient* $m > \frac{n}{2}$ *un nombre réel qui n'est pas un entier et* $N > \frac{n}{2}$ *un entier. Soit* $\sigma(x, \xi) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *une fonction continue telle que* $x \to \partial_\xi^\alpha \sigma(x, \xi) \in \Lambda_m$ *pour* $|\alpha| \leq N$ *et pour tout* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *avec une norme ne dépassant pas* C. *Alors l'o.p.d.* $\sigma(x, D)$ *est borné sur* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

La preuve du théorème 3 s'applique mot à mot à condition d'avoir démontré le lemme suivant.

LEMME 2. *Soient* $N > \frac{n}{2}$ *un entier et* $m > m' > 0$ *deux nombres réels. On suppose que* m *n'est pas entier. Soient* C_1 *et* C_2 *deux constantes positives. Il existe une constante* C_3 *telle que, si* $\sigma(x, \xi) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *est une fonction continue, nulle si* $|\xi| \geq C_1$, *telle que* $x \to \partial_\xi^\alpha \sigma(x, \xi)$ *appartienne à* Λ_m, *pour tout* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *fixé et pour* $|\alpha| \leq N$, *ceci avec une norme ne dépassant pas* C_2, *alors* $\sigma(x, D) : L^2 \to H^{m'}$ *est borné et sa norme ne dépasse pas* C_3.

$H^{m'}$ désigne ici l'espace de Sobolev usuel.

Pour le voir, on applique la proposition 1 à $\sigma(x,\xi)$ regardée comme fonction de x. On obtient la décomposition

$$\sigma(x,\xi) = a_o(x,\xi) + \sum_o^\infty b_j(x,\xi)$$

où le spectre (en x) de $a_o(x,\xi)$ est porté par $|u| \le 1$, celui de $b_j(x,\xi)$ étant porté par la couronne $\Delta_j = \left\{\frac{1}{3}\,2^j \le |u| \le 2^j\right\}$.

Appelons $K_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ le noyau dont $\varphi(2^{-j}\xi)$ est la transformée de Fourier ; alors $b_j(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x-t\,,\,\xi)\, K_j(t)\, dt$. Cette formule intégrale permet de vérifier que $|\partial_\xi^\alpha b_j(x,\xi)| \le C2^{-mj}$ si $|\alpha| \le N$.

Posons $g_j(x) = \int e^{ix.\xi}\, b_j(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$. Le spectre en x de $x \to e^{ix.\xi}\, b_j(x,\xi)$ appartient à la couronne élargie $\tilde{\Delta}_j = \left\{-C_1 + \frac{1}{3}\,2^j \le |u| \le 2^j + C_1\right\}$ et il en est de même de celui de $g_j(x)$.

Par ailleurs $2^{jm}\, b_j(x,\xi)$ et ses dérivées en ξ d'ordre au plus N sont bornés par une constante C_3. Puisque ce symbole est nul si $|\xi| > C_1$, le lemme 6 du chapitre I s'applique et la norme de $2^{jm}\, b_j(x,D)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ ne dépasse pas C_4.

On a donc $\|g_j\|_2 \le C_4 2^{-jm}\|f\|_2$ et le spectre de g_j est contenu dans la couronne dyadique $\tilde{\Delta}_j$. Il en résulte aussitôt que $\|g_j\|_{H^{m'}} \le C_5 2^{j(m'-m)}\|f\|_2$ et le lemme en découle.

4. DÉTAILS DE LA PREUVE DU THÉORÈME 7.

On reprend la formule (5) du § 3. Le terme $\tau_o(x,D)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ grâce au théorème 3.

Posons $s_j(x,\xi) = \sigma_j\left(\frac{x}{2^{\delta j}}\,,\, 2^{\delta j}\xi\right)$. Alors $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta s_j(x,\xi)| \le C$ si $|\alpha| \le N$ et $|\beta| \le N$. On pose $R = \frac{1}{10}\, 2^{j(1-\delta)}$ et l'on applique la décomposition décrite par le corollaire de la proposition 1 avec $\frac{n}{2} < m' < m < N$. On obtient

$s_j(x,\xi) = \tilde{s}_j(x,\xi) + r_j(x,\xi)$ avec les propriétés suivantes :

(11) $x \to \partial_\xi^\alpha \tilde{s}_j(x,\xi)$ appartient à $\Lambda_m(\mathbb{R}^n)$ si $|\alpha| \le N$ et sa norme n'y dépasse pas C ;

(12) le spectre de $x \to \tilde{s}_j(x,\xi)$ est contenu dans $|u| \le \frac{1}{10}\, 2^{j(1-\delta)}$;

(13) $x \to \partial_\xi^\alpha r_j(x,\xi)$ appartient à $\Lambda_{m'}(\mathbb{R}^n)$ si $|\alpha| \le N$ et sa norme n'y dépasse pas $C 2^{j(1-\delta)(m'-m)}$.

Finalement on pose $\tilde{\sigma}_j(x,\xi) = \tilde{s}_j(2^{\delta j}x\,,\, \frac{\xi}{2^{\delta j}})$ et $\rho_j(x,\xi) = r_j(2^{\delta j}x\,,\, \frac{\xi}{2^{\delta j}})$. On a $\sigma_j = \tilde{\sigma}_j + \rho_j$. Compte tenu du lemme 1, les opérateurs $r_j(x,D)$ et $\rho_j(x,D)$ ont la même norme sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Le théorème 8 et (13) montrent que $\sum_0^\infty \|\rho_j(x,D)\| < +\infty$; la norme est la norme d'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Posons enfin $(2\pi)^n g_j(x) = \int e^{ix\cdot\xi}\, \tilde{\sigma}_j(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi = \int_{\Delta_j} e^{ix\cdot\xi} \tilde{\sigma}_j(x,\xi)\, \hat{f}_j(\xi)\, d\xi$ avec $\Delta_j = \left\{\frac{1}{3}\, 2^j \le |\xi| \le 2^j\right\}$ et $\hat{f}_j(\xi) = \hat{f}(\xi)\, \chi_j(\xi)$, χ_j étant la fonction caractéristique de Δ_j.

Lorsque $\xi \in \Delta_j$, le spectre de $x \to e^{ix\cdot\xi}\, \tilde{\sigma}_j(x,\xi)$ est contenu dans la couronne élargie Δ_j^* définie par $(\frac{1}{3} - \frac{1}{10})\, 2^j \le |\xi| \le (1 + \frac{1}{10})\, 2^j$. Ces couronnes sont quatre à quatre disjointes et il en résulte que $\|\sum_0^\infty g_j(x)\|_2 \le 4(\Sigma \|g_j\|_2^2)^{1/2}$.

Toujours en vertu du lemme 1 et du théorème 8, on a $\|\tilde{\sigma}_j(x,D)\| \le C$ et $\|g_j\|_2 \le C\|f_j\|_2$. Or le théorème de Plancherel donne $\Sigma\|f_j\|_2^2 = (2\pi)^n \|f\|_2^2$ et $\|\sum_0^\infty g_j\|_2 \le C'\|f\|_2$.

5. LE CAS DES SYMBOLES CLASSIQUES.

Deux conceptions existent pour définir les symboles classiques. Au niveau des estimations L^2, L^p ou Lipschitz ces deux conceptions conduisent à des résultats tellement différents qu'il importe de préciser très soigneusement les deux points de vue.

Les pionniers (Giraud, Calderón et Zygmund) ont imposé aux symboles $\sigma(x,\xi)$ définissant les o.p.d. des conditions extrêmement précises : $\xi \longrightarrow \sigma(x,\xi)$ doit être homogène de degré s et indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; et ceci, uniformément par rapport à x. C'est-à-dire que, si $|\xi| = 1$,

$$|\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq C_\alpha. \tag{14}$$

Un des résultats principaux de la théorie classique est alors que, pour un symbole $\sigma(x,\xi)$ homogène de degré 0 et vérifiant (14), $\sigma(x,D)$ est borné sur L^2 et tous les L^p, $1 < p < +\infty$.

<u>Aucune régularité en</u> x <u>n'est nécessaire</u>.

Rappelons comment ce résultat remarquable est obtenu. Sur $|\xi| = 1$, on développe $\xi \longrightarrow \sigma(x,\xi)$ en harmoniques sphériques et l'on obtient, compte tenu de (14),

$$\sigma(x,\xi) = \sum_0^\infty \lambda_j\, a_j(x)\, H_j(\xi) \quad \text{si} \quad |\xi| = 1 \quad \text{et} \tag{15}$$

$$\sigma(x,\xi) = \sum_0^\infty \lambda_j\, a_j(x)\, H_j\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)$$

dans le cas général ; $H_j(\xi)$ est une harmonique sphérique de degré j normalisée par $\|H_j\|_{L^2(S^{n-1})} = 1$, λ_j est une suite de nombres complexes à décroissance rapide et $\|a_j\|_\infty = 1$.

Dès lors les résultats de continuité sur L^2 (par exemple) sont essentiellement trivaux ; ils se ramènent à l'observation banale suivante : si le symbole $\sigma(x,\xi)$ définit un o.p.d. $\sigma(x,D)$ borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, de norme $\leq C$, il en est de même pour le symbole $a(x)\,\sigma(x,\xi)$ lorsque $\|a\|_\infty \leq 1$.

On obtient de même les estimations L^p $(1 < p < +\infty)$ ou les estimations de Lipschitz.

Une conception différente est due à Hörmander. La condition d'homogénéité en ξ est remplacée par les conditions de décroissance à l'infini des dérivées successives $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)$ qui découleraient de l'homogénéité.

Plus précisément $\sigma \in S^0_{1,0}$ si pour tout couple $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, on peut trouver une constante $C_{\alpha,\beta}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ on ait

(16) $$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}.$$

Il n'est évidemment pas nécessaire d'avoir tant de régularité en x pour que $\sigma(x,D)$ soit borné sur L^2 ou sur L^p, $1 < p < +\infty$. Mais cette fois il est inexact que $\sigma(x,D) : L^2 \longrightarrow L^2$ soit borné sous la seule condition que

(17) $$|\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq C_\alpha(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$$

qui, en un sens est l'analogue de celle écrite pour les symboles homogènes.

Les conditions les plus faibles possibles sont plus précises que (17), moins que (16) et sont décrites par le théorème 9 suivant dont nous indiquons d'abord les notations.

Nous appellerons module de continuité toute fonction $\omega : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ qui est continue, croissante, concave et telle que $\omega(0) = 0$. Les cas typiques dans la suite seront $\omega(h) = h^\delta$ si $0 < \delta < 1$ et $\omega(h) = (\log \frac{1}{h})^{-\delta}$, $0 < \delta$, pour $0 < h \leq \frac{1}{2}$.

Cette fonction ω permettra de mesurer la régularité minimale en x d'un symbole $\sigma(x,\xi)$ "classique en ξ" ; la régularité minimale est celle permettant d'obtenir des estimations L^2.

THÉORÈME 9. <u>Soient</u> ω <u>un module de continuité et</u> Σ_ω <u>l'ensemble des fonctions continues</u> $\sigma(x,\xi) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ <u>telles que, pour tout</u> $\alpha \in \mathbb{N}^n$, <u>il existe une constante</u> C_α <u>pour laquelle on ait</u>

$$|\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq C_\alpha(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$$

et

$$|\partial_\xi^\alpha \sigma(x+y,\xi) - \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq C_\alpha\, \omega(|y|)(1+|\xi|)^{-|\alpha|}.$$

<u>Alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes</u>

(18) $\sum_0^\infty [\omega(2^{-j})]^2 < +\infty$

(19) <u>pour tout symbole</u> $\sigma(x,\xi) \in \Sigma_\omega$, <u>l'opérateur pseudo-différentiel associé</u> $\sigma(x,D)$ <u>est borné sur</u> $L^2(\mathbb{R}^n)$

(20) __pour tout symbole__ $\sigma(x,\xi) \in \Sigma_\omega$ __et tout__ $p \in]1,+\infty[$, __l'opérateur pseudo-différentiel__ $\sigma(x,D)$ __est borné sur__ $L^p(\mathbf{R}^n)$

(21) __pour tout symbole__ $\sigma(x,\xi) \in \Sigma_\omega$, __l'opérateur pseudo-différentiel__ $\sigma(x,D)$ __est continu de__ $H^1(\mathbf{R}^n)$ __dans__ $L^1(R^n)$; __ici__ $H^1(\mathbf{R}^n)$ __désigne l'espace de Hardy généralisée__.

Avant de démontrer le théorème, donnons quelques exemples : si $\omega(h) = h^\delta$, $\delta > 0$, (18) est évidemment satisfaite. Mais on peut aller plus loin. Si $\omega(h) = \frac{1}{(\log \frac{1}{h})^\delta}$, (18) est vérifiée si et seulement si $\delta > \frac{1}{2}$; le fait que $\delta > 1$ suffise pour obtenir (19), (20) et (21) avait déjà été observé par Mossaheb et Okada dans [48].

Nous allons d'abord expliquer pourquoi (18) est nécessaire pour obtenir la continuité de $\sigma(x,D)$ dans les divers espaces fonctionnels.

Nous supposons que $\sum_1^\infty \omega^2(2^{-j}) = +\infty$ et posons, pour abréger, $\omega_j = \omega(2^{-j})$.

Le contre-exemple est présenté en dimension 1. Le cas $n > 1$, tout à fait semblable, est laissé au lecteur.

On appelle $\varphi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ une fonction égale à 1 sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$ et dont le support est contenu dans l'intervalle $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$; on pose $\sigma(x,\xi) = \sum_0^\infty \omega_j\, \varphi(2^{-j}\xi)\exp(-i2^jx)$.

Nous allons d'abord vérifier que $\sigma(x,\xi) \in \Sigma_\omega$. Naturellement, pour tout couple (x,ξ) fixé, il y a, au plus, un terme non nul dans cette somme.

D'autre part les fonctions $m_j(x) = \omega_j \exp(-i2^jx)$ vérifient, uniformément en j, $|m_j(x+y) - m_j(x)| \le \omega(|y|)$.

On a $\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi) = \sum_1^\infty \omega_j 2^{-\alpha j}\varphi(2^{-j}\xi)\exp(-i2^jx)$ et dans cette somme, un terme au plus n'est pas nul : celui où $\frac{2}{3}2^j \le \xi \le \frac{4}{3}2^j$. Alors $|\xi|$ et 2^j sont du même ordre de grandeur et il en résulte que $\sigma(x,\xi)$ appartient à Σ_ω.

Pour voir que $\sigma(x,D)$ n'est pas borné sur $L^2(\mathbf{R})$, on appelle $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ une fonction, non identiquement nulle ; on note $\hat{\psi}$ la transformée de Fourier de ψ et l'on suppose que le support de $\hat{\psi}$ est contenu dans $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$.

Pour tout $N \geq 1$, on pose $f_N(x) = (\sum_1^N \gamma_j \exp(i2^j x))\,\psi(x)$ en choisissant $\gamma_j \in \ell^2$ de sorte que $\sum_1^N \omega_j \gamma_j \to +\infty$ avec N ; c'est possible puisque $\sum_1^\infty \omega_j^2 = +\infty$.

La transformée de Fourier de f_N est

$$\hat{f}_N(\xi) = \sum_1^N \gamma_j \hat{\psi}(\xi - 2^j) \; ; \tag{22}$$

les fonctions qui composent cette somme ont des supports disjoints et il en résulte que $\|f_N\|_2 = (2\pi)^{-1/2}\|\hat{f}_N\|_2 = c(\sum_1^N |\gamma_j|^2)^{1/2} \leq C$.

D'autre part $g_N(x) = (2\pi)^{-1}\int e^{ix\xi}\,\sigma(x,\xi)\,\hat{f}_N(\xi)\,d\xi =$
$\sum_{j=1}^N (2\pi)^{-1}\,\omega_j\gamma_j \int e^{ix\xi}\,\varphi(2^{-j}\xi)\,e^{-i2^j x}\,\hat{\psi}(\xi - 2^j)\,d\xi$; puisque $\varphi(2^{-j}\xi) = 1$ sur le support de $\hat{\psi}(\xi - 2^j)$, cette dernière intégrale vaut $2\pi\psi(x)$.

On a donc $g_N = (\sum_1^N \omega_j \gamma_j)\,\psi$ et il est clair que $\|g_N\|_2 \to +\infty$ avec N.

En ce qui concerne le fait que la suite f_N est bornée dans L^p, $1 < p < +\infty$, il suffit d'appliquer le théorème de Littlewood-Paley [44] car (22) est la décomposition de $\hat{f}_N$ en blocs dyadiques.

Enfin $$\left(\int_{2k\pi}^{2k\pi+2\pi} \left|\sum_1^N \gamma_j \exp(i2^j x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \leq C.$$

Puisque ψ est à décroissance rapide, il en résulte que $\|f_N\|_1 \leq C_1$. Par ailleurs $\hat{f}_N$ est portée par $[0\,,\,+\infty[$. Il en résulte aussitôt que f_N appartient à $H^1(\mathbb{R})$, l'espace de Hardy usuel et que sa norme n'y dépasse pas C_1.

Nous venons de vérifier que (18) est nécessaire pour obtenir (19), (20) et (21).

Il s'agit maintenant de montrer que (18) est suffisante pour avoir (19), (20) et (21).

Nous allons, à cet effet, décomposer le problème en deux étapes en introduisant les "symboles réduits".

6. PLAN DE LA DÉMONSTRATION DE (18) = (19) ET DÉFINITION DES SYMBOLES RÉDUITS.

Avant de nous attaquer aux symboles généraux $\sigma \in \Sigma_\omega$, nous allons étudier les "symboles réduits".

DÉFINITION. Nous dirons que $\sigma(x,\xi) \in \Sigma_\omega$ est un symbole réduit s'il existe une constante C_1, une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et une suite m_j, $j \geq 0$, de fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ telles que

(23) $$\sigma(x,\xi) = \sum_0^\infty m_j(x)\,\varphi(2^{-j}\xi)$$

et que

(24) $$\|m_j(x)\|_\infty \leq C_1$$

(25) $$\|m_j(x+y) - m_j(x)\|_\infty \leq C_1\,\omega(|y|)$$

(26) $$\varphi(\xi) \text{ est portée par } \tfrac{1}{3} \leq |\xi| \leq 3$$

(27) $$|\partial_\xi^\alpha \varphi(\xi)| \leq C_1 \quad \text{pour } |\alpha| \leq n.$$

Nous commencerons par prouver la proposition suivante :

PROPOSITION 2. Pour toute fonction ω vérifiant (18) et tout entier $n \geq 1$ et toute constante C_1 et tout $p \in \left]1, +\infty\right[$, il existe une constante C_2 telle que, si le symbole $\sigma(x,\xi)$ vérifie (23) à (27), alors $\sigma(x,D) : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ est borné et sa norme ne dépasse pas C_2.

Nous définissons la norme d'un symbole réduit comme la plus petite constante C_1 figurant dans (24), (25) et (27). On a alors, pour compléter la preuve du théorème 9, le résultat suivant.

PROPOSITION 3. Tout symbole $\sigma(x,\xi)$ vérifiant les hypothèses du théorème 9 est une somme normalement convergente de symboles réduits.

7. DÉTAILS DE LA DÉMONSTRATION : LE LEMME DE PRESQUE-ORTHOGONALITÉ.

PROPOSITION 4. Soit $\omega : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ un module de continuité tel que $\sum_{0}^{\infty} \omega^2(2^{-j}) < +\infty$.

Soient C_1 une constante positive et $m_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$, $j \geq 0$, une suite de fonction continues telles que

(28) $\|m_j(x)\|_\infty \leq C_1$ pour tout $j \geq 0$

(29) $\|m_j(x+y) - m_j(x)\|_\infty \leq C_1\, \omega(|y|)$ pour tout $y \in \mathbf{R}^n$ et tout $j \geq 0$.

Alors il existe une constante C_2 ne dépendant que de C_1, ω et n telle que, pour toute suite de fonctions $f_j \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ vérifiant

$$\text{support } \hat{f}_j \subset \left\{\tfrac{1}{3}\, 2^j \leq |\xi| \leq 3.2^j\right\}, \tag{30}$$

on ait

$$\Big\|\sum_{0}^{\infty} m_j(x)\, f_j(x)\Big\|_2 \leq C_2\Big(\sum_{0}^{\infty} \|f_j\|_2^2\Big)^{1/2}. \tag{31}$$

Plus généralement, pour tout $p \in]1,+\infty[$, il existe une constante C_3 telle que

$$\Big\|\sum_{0}^{\infty} m_j(x)\, f_j(x)\Big\|_p \leq C_3\Big\|\Big(\sum_{0}^{\infty} |f_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p. \tag{32}$$

La signification intuitive de la proposition 4 est claire. Les fonctions $m_j(x)$ au lieu d'être constantes sont très plates et il en résulte que la somme $\sum_{0}^{\infty} m_j(x)\, f_j(x)$ au lieu d'être composée de termes orthogonaux est composée de termes presque-orthogonaux.

Là encore la proposition 4 est une amélioration décisive du lemme de Cotlar dont l'application nécessiterait l'hypothèse $\sum_{0}^{\infty} \omega(2^{-j}) < +\infty$; néanmoins l'esprit de la proposition 4 est très proche de celui du lemme de Cotlar.

La preuve de la proposition 4 dépend du résultat classique caractérisant les classes de fonctions ayant un module de continuité donné par des propriété de "meilleure approximation par les fonctions basse-fréquences".

Nous énonçons et prouvons ce lemme pour la commodité du lecteur.

LEMME 3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\|f\|_\infty \le C_1$ et $\|f(x+y) - f(x)\|_\infty \le C_1\, \omega(|y|)$.

Alors il existe une constante C_2 (ne dépendant que de C_1 et n) telle que, pour tout $T \ge 1$, on puisse trouver une décomposition

$$f(x) = g(x) + b(x) \tag{33}$$

où $\|g\|_\infty \le C_2$ et $\text{support}\ \hat{g} \subset \{|\xi| \le T\}$ et

$$\|b\|_\infty \le C_2\, \omega(T^{-1}). \tag{34}$$

La partie g est l'approximation "basse fréquence" de la fonction $f(x)$; la qualité de cette approximation est de l'ordre de grandeur de $\omega(T^{-1})$.

La preuve du lemme 3 est immédiate. On choisit une fonction $K \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{K}(0) = 1$ et que $\hat{K}(\xi) = 0$ quand $|\xi| > 1$.

On pose $K_T(x) = T^n K(Tx)$, $g = K_T * f$ et $b = f - g$, de sorte qu'il suffit de prouver (34).

On écrit $b(x) = \int [f(x) - f(x-t)] K_T(t)\, dt$ et l'on a $\|b\|_\infty \le C_1 \int \omega(|t|)\, T^n |K(Tt)|\, dt = C_1 \int \omega(\frac{|t|}{T})\, |K(t)|\, dt$. La concavité de la fonction ω et sa croissance entraînent $\omega(\frac{|t|}{T}) \le (1+|t|)\, \omega(\frac{1}{T})$. L'inégalité (34) résulte alors de la convergence de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|t|)|K(t)|\, dt$.

Retournons à la proposition 4.

On écrit $m_j(x) = g_j(x) + b_j(x)$ où $\|g_j\|_\infty \le C_2$, $\text{Support}\ \hat{g}_j \subset \{|\xi| \le \frac{1}{6} 2^j\}$ et $\|b_j\|_\infty \le C_2\, \omega(\frac{6}{2^j}) \le 6\, C_2\, \omega(2^{-j})$.

Cette décomposition permet d'écrire

$$\sum_0^\infty m_j(x) f_j(x) = \sum_0^\infty g_j(x) f_j(x) + \sum_0^\infty b_j(x) f_j(x) = A(x) + B(x).$$

La spectre du produit $f_j g_j$ est contenu dans la somme algébrique des spectres de f_j et de g_j ; c'est-à-dire dans $\frac{1}{6} 2^j \le |\xi| \le 4.2^j$.

Les termes de la somme $A(x)$ d'indices $j \in 5\mathbb{N}$ sont donc deux à deux orthogonaux. Il en est de même des termes d'indices $j \in 5\mathbb{N} + r$ quand $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$ et $r = 4$.

Finalement $\|A\|_2 \leq 5(\sum_0^\infty \|f_j g_j\|_2^2)^{1/2} \leq C(\sum_0^\infty \|f_j\|_2^2)^{1/2}$. Pour évaluer $\|B\|_2$, on emploie l'estimation triviale $\|B\|_2 \leq \sum_0^\infty \|b_j\|_\infty \|f_j\|_2 \leq (\sum_0^\infty \|f_j\|_2^2)^{1/2}(\sum_0^\infty \|b_j\|_\infty^2)^{1/2}$. C'est alors qu'on utilise l'hypothèse sur ω : $\sum_0^\infty \|b_j\|_\infty^2 \leq C^2 \sum_0^\infty \omega^2(2^{-j}) \leq C'^2$.

Il reste à examiner le cas de la norme L^p, $p \neq 2$, $p \in \left]1,+\infty\right[$.

Naturellement l'organisation de la démonstration est identique et il suffit de prouver les deux inégalités

$$\|\sum_0^\infty b_j(x)\, f_j(x)\|_p \leq C_p \|(\sum_0^\infty |f_j(x)|^2)^{1/2}\|_p \tag{35}$$

et

$$\|\sum_0^\infty g_j(x)\, f_j(x)\|_p \leq C_p \|(\sum_0^\infty |f_j(x)|^2)^{1/2}\|_p . \tag{36}$$

En ce qui concerne (35), on observe tout simplement que

$$|\sum_0^\infty b_j(x)\, f_j(x)| \leq |\sum_0^\infty |b_j(x)|^2)^{1/2}(\sum_0^\infty |f_j(x)|^2)^{1/2} \leq C(\sum_0^\infty |f_j(x)|^2)^{1/2}.$$

Il suffit alors de prendre les normes L^p.

La preuve de (36) est plus subtile.

La encore, le spectre du produit $f_j g_j$ est contenu dans la couronne dyadique $\frac{1}{6} 2^j \leq |\xi| \leq 4.2^j$. On appelle $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction égale à 1 sur la couronne $\frac{1}{6} \leq |\xi| \leq 4$ et à 0 hors de $\frac{1}{7} \leq |\xi| \leq 5$.

Nous allons grouper les termes de la somme $A(x) = \sum_0^\infty g_j(x)\, f_j(x)$ de 7 en 7 ; si $r = 0, 1, \ldots, 6$, on pose $A_r(x) = \sum_k g_k(x)\, f_k(x)$ avec $k \equiv r \pmod 7$. Les termes $f_k g_k$ sont alors les "blocs dyadiques" de la décomposition de Littlewood-Paley de la série de Fourier de $A_r(x)$. En d'autres termes, si l'on définit Δ_k par $\hat{\Delta}_k(\xi) = \psi(2^{-k}\xi)\, \hat{A}_r(\xi)$, on a, en fait, $\Delta_k(x) = f_k(x)\, g_k(x)$. Cette petite gymnastique n'avait pas d'autre but que de montrer que l'inégalité de Littlewood-Paley s'applique à une somme telle que $\sum g_k(x)\, f_k(x)$, $k \equiv r \pmod 7$ pour donner

$$\|A_r\|_p \le C_p \|(\Sigma |g_k(x)\, f_k(x)|^2)^{1/2}\|_p \le C'_p \|(\Sigma |f_k(x)|^2)^{1/2}\|_p \le C'_p \|(\sum_0^\infty |f_j(x)|^2)^{1/2}\|_p .$$

Nous examinerons plus loin l'analogue de la proposition 4 dans le cadre de l'espace de Hardy généralisé H^1.

8 . DÉTAILS DE LA DÉMONSTRATION : LES SYMBOLES RÉDUITS SONT BORNÉS SUR L^p, $1 < p < +\infty$.

Nous nous proposons de démontrer la proposition 2.

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par $\hat{f}_j(\xi) = \hat{f}(\xi)\,\varphi(2^{-j}\xi)$; φ vérifiant les conditions (26) et (27). Alors pour toute suite $\omega_j \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ la fonction $m(\xi) = \sum_0^\infty \omega_j\, \varphi(2^{-j}\xi)$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(\mathbb{R}^n)$. De plus la norme de $m(\xi)$ ne dépasse pas $C_2 = C_2(C_1,n,p)$; le résultat que nous venons d'énoncer est le théorème de multiplicateur de Marcinkiewicz.

On a donc

$$\|\sum_0^\infty \omega_j\, f_j(x)\|_p \le C_2 \|f\|_p . \tag{37}$$

En suivant un procédé classique, on élève (37) à la puissance p et on prend la moyenne des inégalités obtenues par rapport à toutes les suites $\omega = (\omega_j)_{j\ge 0} \in \{-1\ ,\ 1\}^{\mathbb{N}}$. On obtient, grâce à l'inégalité de Kintchine,

$$\|(\sum_0^\infty |f_j(x)|^2)^{1/2}\|_p \le C_3 \|f\|_p . \tag{38}$$

Revenons alors à notre symbole réduit.

Lorsque $\sigma(x,\xi) = \sum_0^\infty m_j(x)\,\varphi(2^{-j}\xi)$, on a $[\sigma(x,D)](x) = \sum_0^\infty m_j(x)\, f_j(x)$ et la proposition 2 résulte donc de la proposition 4 et de (38).

9. DÉTAILS DE LA DÉMONSTRATION : DÉCOMPOSITION DU SYMBOLE EN SYMBOLES RÉDUITS.

PROPOSITION 5. Pour tout module de continuité ω et tout symbole $\sigma(x,\xi) \in \Sigma_\omega$, on peut trouver une suite $\sigma_k(x,\xi)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, et une constante C_1 telles que les $\sigma_k(x,\xi)$ satisfassent aux conditions (23) à (27), que $\sigma(x,\xi) = \tau(x,\xi) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|^2)^{-n} \sigma_k(x,\xi)$ et que $|\partial_\xi^\alpha \tau(x,\xi)| \leq C_\alpha$, $\tau(x,\xi) = 0$ dès que $|\xi| \geq 1$.

Nous allons décomposer la preuve de la proposition 5 en deux étapes.

LEMME 4. Soient $n \geq 1$ un entier et $C > 0$ une constante positive. Il existe alors une constante C' avec la propriété suivante. Pour toute fonction continue $a(x,\xi) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telle que

(39) $a(x,\xi) = 0$ dès que $|\xi| \geq 1$

(40) $\|\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)\|_\infty \leq C$ et

(41) $\|\partial_\xi^\alpha a(x+y,\xi) - \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)\|_\infty \leq C\,\omega(|y|)$, il existe une suite $a_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, de fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ telles que $\|a_k\|_\infty \leq C'$, $\|a_k(x+y) - a_k(x)\|_\infty \leq C'\,\omega(|y|)$ et que

(42) $a(x,\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|^2)^{-2n} a_k(x)\, e^{ik\cdot\xi} \varphi(\xi)$;

φ étant une fonction, par ailleurs arbitraire, égale à 1 sur la boule $|\xi| \leq 1$, indéfiniment dérivable et nulle hors de l'hypercube $-\pi \leq \xi_j \leq \pi$, $1 \leq j \leq n$.

Comme le lecteur le devine (42) est une sorte de série de Fourier d'une fonction périodique que nous allons définir.

On forme, en fait, $A(x,\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a(x,\xi - 2k\pi)$ de sorte que $A(x,\xi)$ est 2π-périodique en chacune des variables $\xi_1,\ldots,\xi_n$ et coïncide avec $a(x,\xi)$ si

$-\pi \leq \xi_j \leq \pi$.

On a donc $a(x,\xi) = A(x,\xi)\,\varphi(\xi)$.

Calculons les coefficients de Fourier de $\xi \to A(x,\xi)$ par

$$c_k(x) = (2\pi)^{-n} \int \cdots \int_{-\pi \leq \xi_j \leq \pi} e^{-i\xi.k}\, a(x,\xi)\, d\xi = \frac{(2\pi)^{-n}}{(1+|k|^2)^{2n}} \int \cdots \int_{-\pi \leq \xi_j \leq \pi} e^{-i\xi.k} (I-\Delta_\xi)^{2n}\, a(x,\xi)\, d\xi =$$

$(1+|k|^2)^{-2n}\, a_k(x)$.

Il est clair que la suite $a_k(x)$, $k \in \mathbf{Z}^n$ est bornée dans l'espace de Banach Λ_ω des fonctions continues et bornées sur $\mathbf{R}^n$ dont le module de continuité est $O(\omega)$.

Il ne reste plus qu'à écrire que $A(x,\xi)$ est la somme de sa série de Fourier.

COROLLAIRE. <u>Soient</u> $n \geq 1$ <u>un entier et</u> $C > 0$ <u>une constante. Il existe une constante</u> C' <u>ayant la propriété suivante. Quel que soit</u> $T \geq 1$ <u>et quelle que soit la fonction</u> $a(x,\xi) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ <u>vérifiant</u>

(43) $a(x,\xi) = 0$ <u>quand</u> $|\xi| \geq T$

(44) $|\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq C\, T^{-|\alpha|}$, $\alpha \in \mathbf{N}^n$

et

(45) $|\partial_\xi^\alpha a(x+y,\xi) - \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq C T^{-|\alpha|} \omega(|y|)$, <u>il existe une suite</u> $a_k(x)$, $k \in \mathbf{Z}^n$, <u>de fonctions continues sur</u> $\mathbf{R}^n$ <u>telles que</u>

(46) $a(x,\xi) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} (1+|k|^2)^{-2n}\, a_k(x)\, e^{ik.\xi T^{-1}}\, \varphi(\xi T^{-1})$

(47) $\|a_k\|_\infty \leq C'$ et

(48) $\|a_k(x+y) - a_k(x)\|_\infty \leq C'\, \omega(|y|)$.

Enfin la fonction φ est la même que celle du lemme 4.

Pour obtenir le corollaire, on applique le lemme 4 à la fonction $b(x,\xi) = a(x, T\xi)$.

La preuve de la proposition 5 est maintenant très simple. On peut d'abord supposer que $\sigma(x,\xi)=0$ si $|\xi|\le 1/2$. Sinon, par une première partition de l'identité effectuée à l'aide d'une fonction $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 si $|\xi|\le 1/2$ et à support dans $|\xi|\le 1$, on écrit $\sigma(x,\xi)=\theta(\xi)\,\sigma(x,\xi)+(1-\theta(\xi))\,\sigma(x,\xi)=\tau(x,\xi)+\rho(x,\xi)$. Le terme $\tau(x,\xi)$ a les propriétés annoncées par la proposition 5.

Il faut maintenant décomposer le terme $\rho(x,\xi)$. On appelle $\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction portée par $\frac{1}{3}\le|\xi|\le 1$ et telle que $\sum_0^\infty \lambda(2^{-j}\xi)=1$ si $|\xi|\ge\frac{1}{2}$ et l'on pose $a_j(x,\xi)=\rho(x,\xi)\,\lambda(2^{-j}\xi)$, dans l'esprit de la théorie de Littlewood-Paley.

Ces fonctions $a_j(x,\xi)$ vérifient uniformément en x et j les hypothèses de notre corollaire avec $T=2^{-j}$.

On a donc $a_j(x,\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\dfrac{a_{j,k}(x)}{(1+|k|^2)^{2n}}\,e^{ik.\xi 2^{-j}}\,\varphi(2^{-j}\xi)$ et les modules de continuité des fonctions $a_{j,k}$ sont uniformément bornés par $C\omega$; enfin $\|a_{j,k}\|_\infty\le C$.

Nous touchons au but.

On pose $\Phi(\xi)=e^{ik.\xi}\,\varphi(\xi)(1+|k|^2)^{-n}$; on a $|\partial^\alpha\Phi(\xi)|\le C_\alpha$ si $|\alpha|\le 2n$ et $\Phi(\xi)$ est portée par $\frac{1}{3}\le|\xi|\le 1$.

On forme alors $\sigma_k(x,\xi)=\sum_0^\infty a_{j,k}(x)\,\Phi(2^{-j}\xi)$; il s'agit bien d'un symbole réduit au sens de la définition et l'on a

$$\sigma(x,\xi)=\tau(x,\xi)+\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+|k|^2)^{-n}\,\sigma_k(x,\xi).$$

10. FIN DE LA DÉMONSTRATION.

Il ne reste plus qu'à examiner l'opérateur pseudo-différentiel associé au symbole $\tau(x,\xi)$ nul quand $|\xi|\ge 1$.

On considère alors le noyau de l'opérateur $T=\tau(x,D)$ c'est-à-dire que l'on forme $K(x,z)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\xi.z}\,\sigma(x,\xi)\,d\xi$; $z\in\mathbb{R}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$ et l'on a $Tf(x)=\int K(x\;,\;x-y)\,f(y)\,dy$.

On a, par un certain nombre d'intégrations par parties $|K(x,z)|\le C_n(1+|z|^2)^{-n}$

Il en résulte qu'en tout point x, $|Tf(x)| \le K_o * |f|(x)$ en appelant $K_o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ la fonction $C_n(1+|x|^2)^{-n}$.

Tous les résultats de continuité pour $\tau(x,D)$ en résultent évidemment.

Il faut enfin examiner ce qui se passe quand L^p est remplacé par l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Comme l'a remarqué L. Carleson, toute fonction $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ est une somme finie $f_1+\ldots+f_m$ où $f_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et support $\hat{f}_j \subset \Gamma_j$, cône de la forme $\xi.\nu_j \ge \frac{\sqrt{3}}{2}|\xi|$ avec $|\nu_j| = 1$. Réciproquement une telle somme définit automatiquement une fonction de $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Tout cela signifie que l'étude de $H^1(\mathbb{R}^n)$ se ramène à l'étude d'idéaux fermés de l'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R}^n)$.

En dimension 1, tout cela prend une forme particulièrement simple : une fonction de $H^1(\mathbb{R})$ n'est autre qu'une somme $g+h$ où $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{g}$ est portée par $[0,+\infty[$ tandis que $h \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{h}$ est portée par $]-\infty,0]$.

Retournant à la dimension n, nous montrerons que l'o.p.d. $\sigma(x,D)$ est borné sur $H^1(\mathbb{R}^n)$ en examinant l'action de $\sigma(x,D)$ sur les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dont la transformée de Fourier est portée par l'un des cônes Γ décrits ci-dessus.

Les conditions sur les symboles $\sigma(x,\xi)$ étant invariantes par rotations en x et ξ, on peut se limiter au cas où $\nu = (1, 0, \ldots, 0)$; le cône Γ étant alors défini par $\xi_1 \ge \frac{\sqrt{3}}{2}|\xi|$.

Nous allons d'abord prouver un analogue de la proposition 4 dans ce cadre. Si $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et si support $\hat{f}_j \subset \left\{\frac{1}{3}2^j \le |\xi| \le 3.2^j \text{ et } \xi_1 \ge \frac{\sqrt{3}}{2}|\xi|\right\}$ alors

$$(49) \qquad \left\| \sum_0^\infty m_j(x) f_j(x) \right\|_1 \le C \left\| \left(\sum_0^\infty |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 .$$

La preuve de (49) suit de très près celle de la proposition 4. On décompose encore $m_j(x) = g_j(x) + b_j(x)$; il est très simple de vérifier géométriquement que les spectres des produits $f_j g_j$ sont contenus dans un cône élargi fixe $\Gamma^* = \{\xi_1 \ge c|\xi|\}$. De sorte que $\sum_0^\infty g_j(x) f_j(x)$ appartient à $H^1(\mathbb{R}^n)$. Or d'après un théorème de

Fefferman et Stein, les multiplicateurs de Hörmander opèrent sur $H^1(\mathbb{R}^n)$. On en déduit que pour tout couple de deux constantes positives $C_2 > C_1 > 0$ et pour toute suite $h_j(x)$ de fonctions de $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ telles que support $\hat{h}_j \subset \left\{C_1 2^j \leq \xi_1 \leq |\xi| \leq C_2 2^j\right\}$, on a

$$\left\|\sum_0^\infty h_j\right\|_1 \leq C_3 \left\|\left(\sum_0^\infty |h_j|^2\right)^{1/2}\right\|_1. \tag{50}$$

On doit, sans doute, donner davantage d'explications. Les voilà. La série du membre de gauche peut s'écrire comme une somme finie de séries extraites où l'on somme de p en p ; c'est-à-dire pour $j \equiv r \pmod p$.

On peut donc supposer que les spectres de h_j sont deux à deux disjoints et que, de plus, la série $\sum\limits_{j \equiv r \pmod p} h_j = F_r$ soit exactement la décomposition de Littlewood-Paley de F_r.

Puisque les spectres des h_j sont contenus dans un cône fixe Γ^*, les normes L^1 et H^1 sont équivalentes.

Le théorème de Fefferman et Stein nous indique l'existence d'une constante $C > 0$ telle que si $\omega_j = \pm 1$, on ait $\|\Sigma\, \omega_j h_j\|_1 \geq C \|\Sigma\, h_j\|_1$; la somme étant encore prise sur les $j \equiv r \pmod p$.

Il suffit de faire la moyenne de ce qui vient d'être écrit par rapport à toutes les suites $\omega_j = \pm 1$ pour obtenir (50).

Compte tenu de ces remarques, la preuve de la proposition 4 s'applique mot pour mot et fournit (49).

De même en ce qui concerne la proposition 2 ; le théorème de Fefferman et Stein y remplace l'inégalité de Littlewood-Paley.

11. INVARIANCE PAR DIFFÉOMORPHISME DES O.P.D. DONT LES SYMBOLES APPARTIENNENT A Σ_ω.

Les notations de ce paragraphe sont celles du théorème 9. En particulier ω

est un module de continuité vérifiant (18). Nous désignons par Σ_ω l'algèbre des symboles définis au théorème 9, par $\mathcal{C}_\omega$ l'ensemble des o.p.d. dont les symboles appartiennent à Σ_ω et par $\mathcal{K}_\omega$ l'ensemble des noyaux-distributions définissant ces opérateurs ; tout noyau $K \in \mathcal{K}_\omega$ est donné par $K(x,y) = R(x\ ,\ x-y)$ où $R(x,z) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\xi.z}\,\sigma(x,\xi)\,d\xi$; cette dernière intégrale étant prise au sens des distributions.

Nous avons donc atteint l'état le plus rudimentaire de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels.

Ces opérateurs dont la régularité est minimale conservent cependant deux qualités essentielles que l'on attend d'o.p.d. : l'invariance par difféomorphisme et le calcul symbolique.

Examinons d'abord l'invariance par difféomorphisme.

DÉFINITION. <u>Un difféomorphisme</u> $\Phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ <u>est dit régulier s'il existe deux constantes</u> $C_2 > C_1 > 0$ <u>telles que, pour tout</u> $x \in \mathbf{R}^n$, <u>on ait</u> $C_1 \le |J_\Phi| \le C_2$; $|J_\Phi|$ <u>désignant le déterminant Jacobien de</u> Φ.

A un tel difféomorphisme nous associons une application linéaire $T_\Phi : L^2(\mathbf{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}^n)$ définie par $T_\Phi(f)(x) = (f \circ \Phi)(x)\,|J_\Phi(x)|$.

Alors un ensemble X d'opérateurs de $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ est invariant par difféomorphisme si, pour tout $L \in X$, $T_\Phi^{-1} \circ L \circ T_\Phi \in X$.

Si ces opérateurs sont définis par des noyaux distributions $K(x,y) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, l'invariance par difféomorphisme se résume en la condition suivante : si $K(x,y)$ est le noyau d'un opérateur de X, il en est de même du noyau $|J_\Phi(x)|\,K(\Phi(x),\Phi(y))$ pour tout difféomorphisme régulier Φ.

THÉORÈME 10. <u>Soient</u> ω <u>un module de continuité tel que</u> $\sum_0^\infty \omega^2(2^{-j}) < +\infty$ <u>et</u> $\mathcal{C}_\omega$ <u>l'ensemble des o. p. d. dont les symboles appartiennent à</u> Σ_ω. <u>Alors</u> $\mathcal{C}_\omega$ <u>est invariant par difféomorphisme régulier</u>.

La preuve du théorème 10 est très simple et s'obtient par une discription précise des noyaux $K(x,y) \in \mathcal{K}_\omega$ définissant les o. p. d. $T \in \mathcal{C}_\omega$.

On appelle successivement :

$\hat{E}$ l'algèbre des fonctions $m(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que $|\partial^\alpha m(\xi)| \leq C_\alpha(1 + |\xi|)^{-|\alpha|}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

et E l'ensemble des distributions $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que $\hat{S}(\xi) \in \hat{E}$; E est un espace de Fréchet dont la topologie est définie par les semi-normes $p_\alpha(S) = \sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{|\alpha|} |\hat{S}(\xi)|$.

LEMME 5. <u>Les noyaux</u> $K(x,y) \in \mathcal{K}_\omega$ <u>sont caractérisés par la condition suivante : pour tout</u> $x_o \in \mathbb{R}^n$ <u>fixé, la distribution</u> $S_{x_o}(z) = K(x_o, x_o - z)$ <u>appartient à</u> E <u>et l'application de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>dans</u> E, $x \longrightarrow S_x$, <u>ainsi définie appartient à</u> $\Lambda_\omega(\mathbb{R}^n, E)$.

Nous avons noté par $\Lambda_\omega(\mathbb{R}^n, E)$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans E dont le module de continuité est $0(\omega)$. Comme E est un espace de Fréchet, il faut être plus précis : $F \in \Lambda_\omega(\mathbb{R}^n, E)$ si, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante C_α telle que, pour tout x et tout y appartenant à $\mathbb{R}^n$, $p_\alpha(F(x) - F(y)) \leq C_\alpha \omega(|x-y|)$ et $p_\alpha(F(x)) \leq C_\alpha$. Une autre façon de s'exprimer est d'écrire qu'il existe une partie bornée B de E telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$, $F(x) \in B$ et $F(x) - F(y) \in \omega(|x-y|) B$.

La preuve du lemme 5 est immédiate. Les conditions définissant les symboles $\sigma(x,\xi) \in \Sigma_\omega$ peuvent s'écrire, sous forme vectorielle, $\sigma \in \Lambda_\omega(\mathbb{R}^n, \hat{E})$.

En retournant aux noyaux, on pose $R(x,z) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\xi \cdot z} \sigma(x,\xi)\, d\xi$ et l'on obtient $R \in \Lambda_\omega(\mathbb{R}^n, E)$. Puisque le noyau $K(x,y)$ est $R(x, x-y)$, le lemme 5 est prouvé.

Naturellement le lemme 5 a son analogue pour les symboles classiques usuels $\sigma \in S^0_{1,0}$. Si $\mathfrak{F}$ est un espace de Fréchet, on notera $B^\infty(\mathbb{R}^n, \mathfrak{F})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathfrak{F}$ qui sont bornées ainsi que toutes leurs dérivées. On désigne par $\mathcal{K}$ l'ensemble des noyaux associés aux o. p. d. classiques d'ordre 0 et l'on a la caractérisation suivante : $K \in \mathcal{K}$ si et seulement si, pour tout $x_o \in \mathbb{R}^n$ fixé, $K(x_o , x_o-z) = S_{x_o}(z) \in E$ et si l'application $x \to S_x$ ainsi définie appartient à $B^\infty(\mathbb{R}^n, E)$.

Enfin les o. p. d. classiques d'ordre 0 sont invariants par difféomorphisme. Cela entraîne que si $K(x,y)$ est le noyau d'un tel o. p. d. et si Φ est un difféomorphisme régulier de $\mathbb{R}^n$, $K(\Phi(x) , \Phi(y))$ est un noyau de la même classe $\mathcal{K}$.

En particulier on a

LEMME 6. <u>Soit</u> $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ <u>un difféomorphisme régulier</u>. <u>Alors</u> Φ <u>définit une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> $\mathcal{K}$ <u>par</u> $K(x,y) = S(\Phi(x) - \Phi(y))$, $S \in E$.

Nous sommes en mesure de terminer la preuve du théorème 10. On part de $K(x,y) \in \mathcal{K}_\omega$. Alors $K(x,y) = R(x , x-y)$ où, par abus de langage, $R(x,z) \in \Lambda_\omega(\mathbb{R}^n , E)$.

On forme $R(x , \Phi(u) - \Phi(v)) = K_1(x,u,v)$. Le lemme 6 montre que, pour tout x fixé dans $\mathbb{R}^n$, $K_1(x,u,v) \in \mathcal{K}(du \otimes dv)$; l'application ainsi définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{K}(du \otimes dv)$ appartient à $\Lambda_\omega(\mathbb{R}^n , \mathcal{K})$.

On pose ensuite $R_1(x,u,w) = K_1(x,u,u-w)$ et l'on paraphrase la conclusion précédente. Pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe une partie bornée B_β de E telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $y \in \mathbb{R}^n$ et tout $u \in \mathbb{R}^n$, on ait $\partial_u^\beta R_1(x,u,w) \in B_\beta$ et

$$\partial_u^\beta R_1(x,u,w) - \partial_u^\beta R_1(y,u,w) \in \omega(|x-y|)\, B_\beta .$$

Ces deux conditions entraînent, par l'inégalité triangulaire, que $R_1(\Phi(u),u,w)$ appartient à $\Lambda_\omega(\mathbb{R}^n , E)$.

En d'autres termes $R_1(\Phi(u),u,u-v) \in \mathcal{K}_\omega$. Or $R_1(\Phi(u),u,u-v) = K_1(\Phi(u),u,v) = R(\Phi(u), \Phi(u)-\Phi(v)) = K(\Phi(u),\Phi(v))$.

12. LE CALCUL SYMBOLIQUE.

L'invariance par difféomorphisme permet de définir la classe $\mathcal{C}_\omega$ d'o. p. d. "rudimentaires" sur les variétés C^∞ compactes (le cas non-compact demande des énoncés plus circonstanciés). Nous avons alors le résultat "de base" suivant.

THÉORÈME 11. Si V est une variété C^∞ compacte, et si S et T : $L^2(V) \to L^2(V)$ appartiennent à $\mathcal{C}_\omega$, alors le commutateur $[S,T]$ est compact.

Ce résultat est très bien connu si S et T sont des o. p. d. classiques d'ordre 0. Pour atteindre le cas général il suffit de prouver le lemme suivant.

LEMME 7. Pour tout opérateur $S \in \mathcal{C}_\omega$, on peut trouver une suite d'o. p. d. classiques d'ordre 0, S_j , $j \in \mathbb{N}$, telle que $\|S - S_j\| \to 0$; la norme étant la norme d'opérateur de L^2.

Naturellement il suffit de prouver le lemme dans le cadre de $\mathbb{R}^n$.

On observe d'abord que si ω est un module de continuité vérifiant la condition (18), il existe un autre module de continuité ω' vérifiant la même condition et tel que $\omega = o(\omega')$ à l'origine.

On part de $\sigma(x,\xi) \in \Sigma_\omega$ et l'on forme, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est d'intégrale égale à 1, $\sigma_j(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x - \frac{t}{j}, \xi)\, \varphi(t)\, dt$. On vérifie immédiatement que $\sigma_j \in S^0_{1,0}$ et que $\sigma_j \to \sigma$ dans l'espace $\Lambda_{\omega'}(\mathbb{R}^n, \hat{E})$ (avec les notations du § 12); ceci parce que $\omega = o(\omega')$. Le théorème entraîne que $\|\sigma_j(x,D) - \sigma(x,D)\| \to 0$ ce qui est la conclusion du lemme 7.

13. OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS BILINÉAIRES.

Nous désignerons encore par ω un module de continuité tel que

$$\sum_0^\infty \omega^2(2^{-j}) < +\infty .$$

Nous allons définir des symboles d'un nouveau type $\sigma(x,\xi,\eta) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$; $x \in \mathbf{R}^n$, et $\eta \in \mathbf{R}^n$. Les conditions de régularité sont

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta \sigma(x,\xi,\eta)\right| \leq C_{\alpha,\beta}$$

(51) et

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta \sigma(x',\xi,\eta) - \partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta \sigma(x,\xi,\eta)\right| \leq C_{\alpha,\beta}\, \omega(|x'-x|).$$

A l'aide d'un tel symbole on définit un opérateur bilinéaire $T_\sigma : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ par $T_\sigma(f,g)(x) = (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} e^{ix.(\xi+\eta)}\, \sigma(x,\xi,\eta)\, \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\eta)\, d\xi\, d\eta.$

Si, par exemple, $\sigma = 1$, alors $T_\sigma(f,g)(x) = f(x)\, g(x)$. Pour cette raison, les estimations que nous allons obtenir doivent généraliser l'inégalité de Hölder $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ si $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

L'utilité de ces opérateurs bilinéaires apparaîtra au Chapitre III et au Chapitre IV.

THÉORÈME 12. Supposons que $1 < p < +\infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \in \left]0,1\right[$ et soit $\sigma(x,\xi,\eta)$ un symbole vérifiant les conditions (51). Il existe alors une constante $C > 0$ telle que l'on ait

(52)
$$\|T_\sigma(f,g)\|_r \leq C \|f\|_p \|g\|_q$$

pour tout couple (f,g) de deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

Un résultat analogue a été obtenu dans [21] avec des hypothèses plus fortes de régularité sur le symbole. Mais l'organisation de la démonstration est semblable dans les deux cas. Pour cette raison nous allons nous limiter, dans la preuve du théorème 12 au cas $n = 1$. Le lecteur soucieux d'écrire le cas général peut soit faire les transcriptions évidentes qui s'imposent, soit se reporter à [21].

Nous pouvons d'abord ramener notre attention au cas des symboles réduits de la forme

(53)
$$\sigma(x,\xi,\eta) = \sum_0^\infty m_j(x)\, \varphi(2^{-j}\xi\, ,\, 2^{-j}\eta)$$

où $\|m_j\|_\infty \leq C$, $|m_j(x) - m_j(x')| \leq C\,\omega(|x-x'|)$ et $|\partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta \varphi(\xi,\eta)| \leq C$ pour $0 \leq \alpha \leq N$, $0 \leq \beta \leq N$ (le lemme 4 nous donne seulement cette dernière inégalité pour $\alpha + \beta \leq 2$ mais en reprenant la démonstration du lemme 4, on voit immédiatement que l'on peut obtenir n'importe quel nombre, fixé à l'avance, de dérivées).

Nous allons pousser plus loin la décomposition en "cassant" la fonction $\varphi(\xi,\eta)$ en une série de produits de la forme $a_k(\xi)\, b_k(\eta)$, $k \in \mathbb{Z}^2$.

Voici les détails de cette opération.

Le support de $\varphi(\xi,\eta)$ est contenu dans le compact K défini par $\frac{1}{3} \leq (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} \leq 3$. On désigne par Ω_1, Ω_2 et Ω_3 les ouverts de K définis respectivement par $\left\{|\eta| < \frac{1}{10}\right\}$, $\left\{\frac{1}{20} < |\eta| \text{ et } \frac{1}{20} < |\xi|\right\}$ et $\left\{|\xi| < \frac{1}{10}\right\}$. Naturellement ces trois ouverts constituent un recouvrement de K et l'on peut donc écrire $\varphi(\xi,\eta) = \varphi_1(\xi,\eta) + \varphi_2(\xi,\eta) + \varphi_3(\xi,\eta)$ où le support de φ_m est contenu dans Ω_m ; φ_m ayant la même régularité que φ ($m = 1, 2$ ou 3).

Nous employons maintenant la méthode du lemme 4 en développant en séries de Fourier les fonctions $\Phi_m(\xi,\eta) = \Sigma\,\Sigma\, \varphi_m(\xi - 2k\pi\ ,\ \eta - 2\ell\pi)$, $m = 1, 2$ ou 3. Un "cut off" convenable nous rendra φ_m qui est précisément la restriction de Φ_m à K.

Le "cut off" est réalisé de la façon suivante : en ce qui concerne $\varphi_1(\xi,\eta)$ portée par Ω_1, on a $\varphi_1(\xi,\eta) = \Phi_1(\xi,\eta)\, a_1(\xi)\, b_1(\eta)$ avec $a_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $b_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, support $a_1 \subset \left[\frac{1}{4}\ ,\ 4\right] \cup \left[-4\ ,\ -\frac{1}{4}\right]$ et support $b_1 \subset \left[-\frac{1}{8}\ ,\ \frac{1}{8}\right]$. Pour Ω_3 on a un "cut off" semblable où les rôles de ξ et η sont échangés. Enfin pour $\varphi_2(\xi,\eta)$ on emploie $a_2 \in C_0^\infty(R)$ et l'on peut choisir $b_2 = a_2$. Le support de a_2 est contenu dans $\left[-4\ ,\ -\frac{1}{20}\right] \cup \left[\frac{1}{20}\ ,\ 4\right]$.

Grâce à ces deux opérations (développement en série de Fourier, puis "cut off"), on écrit $\varphi_m(\xi,\eta)$ comme une série normalement convergente de produits $A_m(k, \ell\ ;\ \xi)\, B_m(k, \ell\ ;\ \eta)$. Plus précisément, on a, en désignant par $\|f\|$ la norme de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dans $\mathcal{C}^{N-2}(\mathbb{R})$,

$$\Sigma\,\Sigma\, \|A_m(k,\ell,\xi)\|\, \|B_m(k,\ell,\eta)\| < +\infty$$

(la somme est prise sur tous les $k\in\mathbf{Z}$ et tous les $\ell\in\mathbf{Z}$).

Cette factorisation est rendue possible par l'observation que $e^{i(k\xi+\ell\eta)} = e^{ik\xi}\, e^{i\ell\eta}$.

Oubliant les indices k et ℓ, nous voilà ramenés à des symboles réduits d'une forme très particulière. A savoir

$$\sigma_1(x,\xi,\eta) = \sum_0^\infty m_j(x)\, A_1(2^{-j}\xi)\, B_1(2^{-j}\eta)$$

$$\sigma_2(x,\xi,\eta) = \sum_0^\infty m_j(x)\, A_2(2^{-j}\xi)\, B_2(2^{-j}\eta)$$

et

$$\sigma_3(x,\xi,\eta) = \sum_0^\infty m_j(x)\, A_3(2^{-j}\xi)\, B_3(2^{-j}\eta)\ ;$$

le support de A_1 est contenu dans $\left\{\frac14 \le |\xi| \le 4\right\}$; celui de B_1 dans $|\eta| \le \frac18$. En ce qui concerne A_3 et B_3 les rôles de ξ et η sont simplement inversés. Enfin les supports de A_2 et B_2 sont contenus respectivement dans $\frac{1}{20} \le |\xi| \le 4$ et $\frac{1}{20} \le |\eta| \le 4$. Par ailleurs A_m et B_m appartiennent à $\mathcal{C}^{N-2}(\mathbf{R})$.

Etudions l'action bilinéaire de σ_1.

On posera, pour $f\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$, $\hat f_j(\xi) = A_1(2^{-j}\xi)\,\hat f(\xi)$ et $\hat g_j(\xi) = B_1(2^{-j}\eta)\,\hat g(\eta)$.

La théorie de Littlewood-Paley permet de montrer que si $N \geq 4$, on a

$$\Big\|\Big(\sum_0^\infty |f_j(x)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \le C_p \|f\|_p \tag{54}$$

tandis que

$$\Big\|\sup_{j\geq 0} |g_j(x)|\Big\|_q \le C_q \|g\|_q\ . \tag{55}$$

On a alors

$$h_1(x) = \frac{1}{4\pi^2}\iint e^{ix(\xi+\eta)}\, \sigma_1(x,\xi,\eta)\,\hat f(\xi)\,\hat g(\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$= \sum_{j\geq 0} m_j(x)\, f_j(x)\, g_j(x) = \sum_{j\geq 0} m_j(x)\, q_j(x).$$

Le spectre de $q_j(x)$ appartient à $\frac18 2^j \le |\xi| \le 5.2^j$ (car il est contenu dans la somme algébrique des spectres de f_j et g_j). Le "lemme de presque-orthogonalité" s'applique et il vient

$$\|h_1\|_r \le C\|\sum_{j\ge 0} |q_j(x)|^2)^{1/2}\|_r \le$$

$$C\|(\sum_0^\infty |f_j(x)|^2)^{1/2}\|_p \, \|\sup_{j\ge 0} |g_j(x)|\|_q \le$$

$$C_{p,q} \|f\|_p \|g\|_q .$$

Passons alors à $\sigma_2(x,\xi,\eta)$ définissant $h_2(x)$. On obtient encore

$$h_2(x) = \sum_{j\ge 0} m_j(x) F_j(x) G_j(x)$$

mais, cette fois, le spectre de $Q_j(x) = F_j(x) G_j(x)$ n'a plus rien de remarquable. On emploie alors la majoration triviale résultant de $\|m_j\|_\infty \le C$

$$|h_2(x)| \le C\Big(\sum_0^\infty |F_j|^2(x)\Big)^{1/2} \Big(\sum_0^\infty |G_j|^2(x)\Big)^{1/2}$$

et l'on applique successivement à ce produit les inégalités de Hölder et de Littlewood-Paley.

Enfin le terme h_3 est semblable à h_1.

14. LES OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS ET LES FONCTIONS HÖLDÉRIENNES D'EXPOSANT NON ENTIER.

Nous allons maintenant montrer que les opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 0 sont bornés sur l'espace Λ_δ des fonctions höldériennes d'exposant $\delta \in \,]0,1[$. Ceci en donnant, une fois encore, les conditions minimales de régularité en x pour obtenir le résultat désiré.

THÉORÈME 13. Soit $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que $\delta \in \,]0,1[$ et que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on puisse trouver une constante C_α telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ on ait

(56) $\quad |\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \le C_\alpha$ et

(57) $\quad |\partial_\xi^\alpha \sigma(y,\xi) - \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \le C_\alpha |y-x|^\delta .$

Alors $\sigma(x\ ,\ D) : \Lambda_\delta \to \Lambda_\delta$ est borné.

Il est clair qu'on ne peut remplacer l'hypothèse de régularité en x du symbole par quelque chose de plus faible. Pour le voir, on examine le cas d'un symbole de la forme $m(x)\,a(\xi)$ où $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$; on appelle $A : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ l'o. p. d. $a(D)$ défini par $(Af)^\wedge(\xi) = a(\xi)\,\hat{f}(\xi)$. Alors, si pour tout $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $m(x)A$ envoie $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dans Λ_δ, il est nécessaire que $m(x)$ appartienne, du moins localement, à Λ_δ. Il n'est pas difficile de montrer que cette condition doit être réalisée uniformément (par rapport aux translations en x) ; on obtient donc $m(x) \in \Lambda_\delta$.

La preuve du théorème 13 repose sur trois lemmes.

LEMME 8. Soit $F(x,y) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ une fonction telle que, pour tout $y \in \mathbf{R}^n$ fixé, la fonction $x \to F(x,y)$ appartienne à $\Lambda_\delta(\mathbf{R}^n)$ et que l'application ainsi définie de $\mathbf{R}^n$ dans $\Lambda_\delta(\mathbf{R}^n)$ appartienne elle-même à $\Lambda_\delta(\mathbf{R}^n\ ,\ \Lambda_\delta(\mathbf{R}^n))$.

Alors $F(x,y)$ appartient à $\Lambda_\delta(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ et, en particulier, $F(x,x)$ appartient à $\Lambda_\delta(\mathbf{R}^n)$.

Rappelons que $0 < \delta < 1$ et que l'espace de Banach $E = \Lambda_\delta(\mathbf{R}^n)$ a pour norme $\|f\| = \sup\left\{ |f(x)| + \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\delta}\ ;\ x \in \mathbf{R}^n,\ \ y \in \mathbf{R}^n,\ \ x \neq y \right\}$.

Par ailleurs la preuve du lemme est immédiate et laissée au lecteur.

Le second lemme a déjà été utilisé et est classique.

LEMME 9. Soient $n \geq 1$ un entier et $\delta \in \,]0,1[$. Il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ ayant les propriétés suivantes.

Toute fonction $f \in \Lambda_\delta(\mathbf{R}^n)$ peut s'écrire $f(x) = b(x) + \sum_0^\infty f_j(x)$ où

(58) le support de la distribution $\hat{b}(\xi)$ est contenu dans $|\xi| \leq 1$

(59) le support de $\hat{f}_j(\xi)$ est contenu dans $\frac{1}{3}\, 2^j \leq |\xi| \leq 3.2^j$

(60) $\quad \|b\|_\infty \leq C_1 \|f\|$ et $\|f_j\|_\infty \leq C_1 2^{-j\delta} \|f\|$.

Réciproquement toute série $b(x) + \sum_0^\infty f_j(x)$ dans laquelle $\|b\|_\infty \leq 1$, $\|f_j\|_\infty \leq 2^{-j\delta}$ et pour laquelle (58) et (59) aient lieu définit une fonction $f \in \Lambda_\delta(\mathbb{R}^n)$ de norme $\leq C_2$.

Le dernier lemme est un cas particulier du théorème 13 lorsque le symbole $\sigma(x,\xi)$ ne dépend pas de x.

Nous l'énonçons puis le démontrons.

LEMME 10. Soient $m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction et $C > 0$ une constante telles que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\alpha| \leq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, on ait $|\partial_\xi^\alpha m(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$.

Alors si $f \in \Lambda_\delta$ et si $\hat{g}(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi)$, on a $g \in \Lambda_\delta$; l'opérateur $m(D) : \Lambda_\delta \to \Lambda_\delta$ ainsi défini est continu et sa norme ne dépasse pas $C(n,\delta)C$.

Nous allons d'abord observer qu'il existe une constante C' et, pour tout $j \geq 0$, une fonction $\lambda_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telles que

(61) $\quad \|\lambda_j\|_1 \leq C'$ et $\hat{\lambda}_j(\xi) = m(\xi)$ si $\frac{1}{3} 2^j \leq |\xi| \leq 3.2^j$.

Pour le voir on fixe une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 si $\frac{1}{3} \leq |\xi| \leq 3$ et nulle hors de $\frac{1}{4} \leq |\xi| \leq 4$. Les dérivées du produit $m_j(\xi) = m(\xi)\varphi(2^{-j}\xi)$ vérifient $|\partial_\xi^\alpha m_j(\xi)| \leq C_1 2^{-|\alpha| j}$, $|\alpha| \leq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

On pose alors $M_j(\xi) = m_j(2^j\xi)$; le support de M_j est contenu dans $\frac{1}{4} \leq |\xi| \leq 4$ et les dérivées de M_j d'ordres $\leq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ sont uniformément bornées.

Il suffit d'appliquer à M_j le théorème d'injection de Sobolev : on a $M_j(\xi) = \hat{S}_j(\xi)$ où $\|S_j\|_1 \leq C_2$. On pose alors $\lambda_j(x) = 2^{nj} S_j(2^j x)$ et l'on a encore $\|\lambda_j\|_1 \leq C_2$.

Revenons alors à la preuve du lemme 10.

On appelle L_j l'opérateur de convolution avec λ_j : $L_j(f) = f * \lambda_j$ et M

l'opérateur dont le symbole est $m(\xi)$.

On utilise la décomposition de $f \in \Lambda_\delta$ fournie par le lemme 9. On a donc

$$M(f) = M(b) + \sum_0^\infty M(f_j) = M(b) + \sum_0^\infty L_j(f_j).$$

Or $\|L_j(f_j)\|_\infty \leq C' \|f_j\|_\infty \leq C_1 C' \, 2^{-j\delta}$.

D'autre part la transformée de Fourier de $L_j(f_j)$ est $m(\xi)\,\hat{f}_j(\xi)$ et son support est contenu dans $\frac{1}{3} 2^j \leq |\xi| \leq 3.2^j$. En utilisant la réciproque du lemme 9, on obtient $M(f) \in \Lambda_\delta$.

Pour terminer, on pose, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$F(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\, \sigma(y,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

de sorte que $F(x,x) = [\sigma(x,D)\, f](x)$.

Si $f \in \Lambda_\delta$, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ fixé, la fonction $x \longrightarrow F(x,y)$ appartient à $\Lambda_\delta(\mathbb{R}^n)$; c'est le lemme 10.

D'autre part, l'application de $y \in \mathbb{R}^n$ dans $\Lambda_\delta(\mathbb{R}^n)$ ainsi définie appartien à $\Lambda_\delta(\mathbb{R}^n, \Lambda_\delta(\mathbb{R}^n))$; car, en employant les notations du lemme 5, $\sigma(y, \xi)$ peut être considéré comme une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\hat{E}$ (espace des symboles ne dépendant pas de x) et cette application appartient à $\Lambda_\delta(\mathbb{R}^n, \hat{E})$.

Il suffit alors d'employer le lemme 8.

CHAPITRE III

LES COMMUTATEURS

L'étude systématique des commutateurs entre les opérateurs pseudo-différentiels et les champs de vecteurs présente un double intérêt.

D'une part, comme le remarque R. Beals, les o.p.d. peuvent être caractérisés par leurs propriétés remarquables de commutation avec les champs de vecteurs à coefficients C^∞.

D'autre part, A. Calderón et ses élèves ont trouvé les conditions minimales de régularité des coefficients d'un champ de vecteur pour que les commutateurs avec les o.p.d. classiques d'ordre 0 soient bornés sur L^2.

Nous nous proposons de développer ces deux courants d'idées. Nous rappellerons d'abord les résultats de R. Beals et d'A. Calderón. Puis nous présenterons des variantes ou des généralisations de ces énoncés.

1. LE THÉORÈME DE R. BEALS.

Soit $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ une fonction vérifiant les deux conditions suivantes

(1) $\rho(\xi) \geq c > 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$

(2) il existe $\delta > 0$ et trois constantes C_1, C_2, C_3 strictement positives telles que

$$C_1\, \rho(\xi) \leq \rho(\eta) \leq C_2\, \rho(\xi) \quad \text{si} \quad |\xi-\eta| \leq C_3 [\rho(\xi)]^{1+2\delta}.$$

Nous désignons alors par $H^m_{(\rho)}$ l'espace de Sobolev à poids de toutes les distributions

$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que $\rho^m(\xi)\,\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$; la norme de u dans $H^m(\rho)$ étant, naturellement, $(2\pi)^{-n/2}\|\rho^m\,\hat{u}\|_2$.

Soient D_j l'opérateur $-i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ et x_j l'opérateur de multiplication par la fonction coordonnée x_j, $1 \leq j \leq n$.

Enfin désignons par $S^m(\rho)$ l'espace de Fréchet des symboles $\sigma(x\,,\,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tels que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, la semi-norme

$$p_{\alpha,\beta}(\sigma) = \sup_{x,\xi}\ \rho(\xi)^{-m+|\alpha|-|\beta|}\,|\partial_\xi^\alpha\,\partial_x^\beta\,\sigma(x,\xi)|$$

soit finie.

Nous désignons par $\mathcal{L}^m(\rho)$ l'algèbre des o.p.d. dont les symboles appartiennent à $S^m(\rho)$.

Alors tout opérateur $A \in \mathcal{L}^m(\rho)$ définit une application linéaire continue de $H^{p+m}(\rho)$ dans $H^p(\rho)$; et ceci pour tout $p \in \mathbb{R}$.

On peut dès lors chercher à caractériser les opérateurs $A \in \mathcal{L}^m(\rho)$ parmi les applications linéaires continues de $H^{p+m}(\rho)$ dans $H^p(\rho)$.

La caractérisation est donnée par l'énoncé suivant [1].

THÉORÈME 14. Une application linéaire $B : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ appartient à $\mathcal{L}^o(\rho)$ si et seulement si $B : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ est continu et si les conditions suivantes sont satisfaites

(3) le commutateur, noté L_jB, entre l'opérateur B et l'opérateur de multiplication par x_j est continu de $H^{-1}(\rho)$ dans L^2 ;

(4) le commutateur M_jB entre B et D_j est continu de $H^1(\rho)$ dans L^2 ;

(5) plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, le commutateur itéré

$$L_1^{\alpha_1}\,L_2^{\alpha_2}\ldots L_n^{\alpha_n}\,M_1^{\beta_1}\ldots M_n^{\beta_n}\,B$$

est continu de $H^{|\beta|-|\alpha|}(\rho)$ dans L^2.

2. LA CARACTÉRISATION DES O. P. D. CLASSIQUES.

Le résultat que nous allons présenter concerne le cas des o. p. d. classiques ; ce cas est exclu par la condition (2) portant sur la fonction ρ.

Par ailleurs les o. p. d. classiques sont invariants par difféomorphismes et il est naturel de remplacer dans leur caractérisation les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_j}$ par des champs de vecteurs arbitraires à coefficients C^∞.

On a alors

THÉORÈME 15. <u>Soient</u> V <u>une variété</u> C^∞ <u>compacte et</u> $T : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ <u>un opérateur linéaire</u>.

<u>Alors les deux propriétés suivantes de</u> T <u>sont équivalentes</u>

(6) T <u>est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre</u> 0

(7) T <u>est borné sur</u> $L^2(V)$ <u>et, pour toute suite</u> $X_1, \ldots, X_j, \ldots$ <u>de champs de vecteurs à coefficients</u> C^∞, <u>les commutateurs</u> $T_1 = [T, X_1], \ldots, T_j = [T_{j-1}, X_j], \ldots$ <u>sont aussi bornés sur</u> $L^2(V)$.

La preuve de ce résultat est très simple.

D'abord il est évident que (6) implique (7) car le commutateur entre un o. p. d. classique d'ordre 0 et un champ de vecteurs à coefficients C^∞ est encore un o. p. d. classique d'ordre 0 ; à ce titre, les T_j sont bornés sur $L^2(V)$.

Il reste à vérifier que (7) implique (6).

Rappelons tout d'abord la définition d'un o. p. d. classique sur une variété C^∞ compacte.

DÉFINITION 1. <u>Soient</u> V <u>une variété compacte et</u> $T : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ <u>un opérateur linéaire</u>.

<u>On dit que</u> T <u>est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre</u> m ($m \in \mathbb{R}$) <u>si les deux conditions suivantes sont satisfaites</u>

(8) il existe un noyau $K(x,y)$ qui est une fonction de classe C^∞ sur $V \times V$ privé de sa diagonale, tel que $(Tf)(x) = \int_V K(x,y)\, f(y)\, dy$ quand $f \in C^\infty(V)$ et quand x n'appartient pas au support de f.

(9) pour tout ouvert $\Omega \subset V$ assez "petit" pour que l'on puisse utiliser des coordonnées locales et pour tout couple φ , ψ de deux fonctions de $C_0^\infty(\Omega)$, l'opérateur $\varphi\, T\, \psi$ devient un o. p. d. classique d'ordre m sur $\mathbf{R}^n$ quand il est exprimé à l'aide de ces coordonnées locales ; $\varphi\, T\, \psi$ est défini par

$$\left[\varphi\, T\, \psi\right](f)(x) = \varphi(x) \left[T(\psi f)\right](x).$$

Naturellement cette définition n'aurait aucun sens si l'algèbre des o. p. d. classiques n'était pas invariante par difféomorphisme.

Pour montrer que (7) entraîne (6) nous allons d'abord nous assurer de (8).

Soient A et B deux parties compactes de V et X un champ de vecteurs à coefficients C^∞ sur V. On peut trouver une modification X' de X telle que $X' = 0$ au voisinage de A et $X' = X$ au voisinage de B.

Dès lors, pour toute fonctions $f \in L^2(V)$ portée par A, $X'(f) = 0$ et $TX'(f) = 0$. On a, puisque le commutateur $\left[T\, ,\, X'\right]$ est borné sur $L^2(V)$, $X'(Tf) \in L^2$ et donc, au voisinage de B, la distribution $X(Tf)$ coïncide avec une fonction de $L^2(V)$. Comme ceci a lieu pour tout champ de vecteurs X à coefficients C^∞, la fonction Tf coïncide, au voisinage de B, avec une fonction appartenant à l'espace de Sobolev $H^{(1)}$. Il suffit d'itérer ce raisonnement pour montrer que, pour toute fonction $f \in L^2(A)$, la restriction de $T(f)$ à tout compact B disjoint de A appartient à tous les $H^{(s)}$, donc à C^∞.

Sous forme quantitative nous venons de montrer que, si $x \in B$, $Tf(x) = \int_V K(x,y)\, f(y)\, dy$ où $\int_A \left|\partial_x^\alpha K(x,y)\right|^2 dy \le C_\alpha^2$.

Pour donner à cette inégalité une forme plus concise, on appelle $\varphi \in C^\infty(V \times V)$ une fonction nulle au voisinage de la diagonale. On a alors

$$\iint_{V\times V} |\partial_x^\alpha (K\varphi)|^2 dx\,dy \le C'^2_\alpha .$$

On observe ensuite que l'opérateur adjoint T^* de T vérifie les conditions (7) car, par exemple, $[T^*, X] = -([T, X^*])^*$ et l'adjoint d'un champ de vecteurs X est un champ de vecteurs. On a donc aussi

$$\iint_{V\times V} |\partial_y^\alpha (K\varphi)|^2 dx\,dy \le C''^2_\alpha .$$

La remarque suivante termine la démonstration.

LEMME 1. Soit $f \in L^2(V\times V)$ une fonction telle que, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $\partial_x^\alpha f(x,y) \in L^2(V\times V)$ et $\partial_y^\alpha f(x,y) \in L^2(V\times V)$. Alors $f \in C^\infty(V\times V)$.

Les dérivées sont prises au sens des distributions. La preuve du lemme est immédiate. A l'aide d'une partition C^∞ de l'unité, on localise le problème et l'on est ramené au cas de $V = \mathbf{T}^n$ où le théorème de Plancherel donne immédiatement la solution.

Pour terminer la preuve de l'implication (7) $\Rightarrow$ (6), il suffit de décrire les opérateurs "localisés" $\varphi T \psi$ à l'aide des coordonnées locales.

Il est utile d'introduire la définition suivante.

DÉFINITION 2. Un opérateur linéaire $T : L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ est "porté" par une partie compacte K de $\mathbf{R}^n$ si les deux conditions suivantes sont remplies

(10) pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ nulle sur K, on a $T(\varphi) = 0$;

(11) pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $T\varphi$ est supportée par K.

Une fois exprimés à l'aide de coordonnées locales, les opérateurs $\varphi T \psi$ sont évidemment portés par des parties compactes de $\mathbf{R}^n$.

Dès lors, la proposition suivante termine la preuve du théorème.

PROPOSITION 1. Soient K une partie compacte de $\mathbf{R}^n$ et $T : L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ un opérateur linéaire continu porté par K. Alors les deux propriétés suivantes de T sont équivalentes

(12) T <u>est un o. p. d. classique d'ordre</u> 0

(13) <u>pour toute suite</u> $X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots$ <u>de champs de vecteurs à coefficients</u> C^∞ <u>sur</u> $\mathbb{R}^n$, <u>les commutateurs</u> $T_1 = [T, X_1], \ldots, T_j = [T_{j-1}, X_j], \ldots$ <u>sont bornés sur</u> $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Nous désignerons par $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n)\ ,\ L^2(\mathbb{R}^n))$ l'ensemble de tous les opérateurs portés par K et vérifiant la condition (13).

LEMME 2. <u>L'ensemble</u> $\mathcal{E}$ <u>ci-dessus est une algèbre pour la composition</u>. <u>En particulier si</u> $T \in \mathcal{E}$ <u>et si</u> A <u>est l'opérateur de multiplication par une fonction</u> $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, AT <u>et</u> TA <u>appartiennent à</u> $\mathcal{E}$.

Le fait que $\mathcal{E}$ soit une algèbre est à peu près évident. Si, par exemple $S \in \mathcal{E}$, $T \in \mathcal{E}$ et si D est un champ de vecteurs à coefficients C^∞, alors $[ST\ ,\ D] = S[T, D] + [S, D]T$; à ce titre l'opérateur $[ST\ ,\ D]$ est borné sur L^2. Pour les commutateurs d'ordre supérieur, les calculs sont tout à fait analogues.

Si $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, il existe une modification $a_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ égale à a sur K et l'on désigne par A_1 l'opérateur de multiplication par a_1. Alors $AT = A_1T$ et $TA_1 = TA$. Pour conclure, on remarque simplement que $A_1 \in \mathcal{E}$.

La seconde remarque nécessite l'introduction de l'espace vectoriel Σ des symboles des opérateurs de $\mathcal{E}$.

Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est égale à 1 sur K, on pose $\sigma(x,\xi) = e^{-i\xi . x}T(e^{i\xi . x}\,\varphi(x))$ et cette définition ne dépend pas du choix de $\varphi \in C_0^\infty$ puisque T est porté par K.

Appelons Σ l'espace vectoriel de tous les symboles $\sigma(x,\xi)$ associés aux opérateurs $T \in \mathcal{E}$. Puisque T est continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\sigma(x,\xi) \in L^2(dx)$ et l'application de $\mathbb{R}^n$ dans L^2 définie par $\xi \to \sigma(.\ ,\ \xi)$ est continue.

Notre seconde remarque suit de très près la démarche de R. Beals dans [1].

LEMME 3. Pour tout $\sigma \in \Sigma$, on a $\frac{\partial \sigma}{\partial x_j} \in \Sigma$, $\frac{\partial \sigma}{\partial \xi_k} \in \Sigma$ et $\xi_j \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_k} \in \Sigma$; $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq n$.

Là encore, la vérification est presque immédiate. Supposons que $\sigma(x, \xi)$ soit le symbole de l'opérateur T. Alors $-\frac{\partial \sigma}{\partial x_j}$ est le symbole du commutateur $\left[T, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]$; $-i \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_k}$ est le symbole du commutateur $[T, x_k]$ entre T et la multiplication par x_k. Enfin $-x_k \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} + \xi_j \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_k}$ est le symbole du commutateur $\left[T, x_k \frac{\partial}{\partial x_j}\right]$. Le lemme 2 montre que $x_k \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} \in \Sigma$ et il en résulte que $\xi_j \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_k} \in \Sigma$.

LEMME 4. Soient $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $\beta \in \mathbf{N}^n$, $p = |\alpha|$ et $P(X_1, \ldots, X_n)$ un polynôme de degré au plus égal à p. Alors, pour tout $\sigma \in \Sigma$, $P(\xi_1, \ldots, \xi_n) \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x, \xi) \in \Sigma$.

Il suffit, en effet, d'itérer le lemme 3.

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration de la proposition 1.

Si T est borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ et porté par le compact K, il existe une constante $C > 0$ telle que, quel que soit $\xi \in \mathbf{R}^n$, le symbole $\sigma(x, \xi)$ de T vérifie

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\sigma(x, \xi)|^2 dx \leq C. \tag{14}$$

Cette inégalité résulte de $T(e^{ix.\xi}) = T(e^{ix.\xi} \varphi(x)) = e^{ix.\xi} \sigma(x, \xi)$ si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ est égale à 1 sur K.

On a donc, pour tout $\sigma \in \Sigma$, si degré $P \leq |\alpha|$,

$$\int_{\mathbf{R}^n} |P(\xi_1, \ldots, \xi_n) \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x, \xi)|^2 dx \leq C_{\alpha, \beta}. \tag{15}$$

Le théorème d'injection de Sobolev s'applique et donne

$$|P(\xi_1, \ldots, \xi_n) \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x, \xi)| \leq C'_{\alpha, \beta}$$

ce qui est la définition des symboles classiques.

3. CARACTÉRISATION DES O. P. D. EXOTIQUES.

Nous allons présenter l'analogue du théorème 15 pour les opérateurs définis par des symboles appartenant à la classe exotique $S^0_{1/2,1/2}$.

Nous allons d'abord définir ces opérateurs dans le cadre des variétés compactes.

DÉFINITION 3. Soient V une variété compacte et $T : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ un opérateur linéaire.

On écrira $T \in L^0_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites

(16) il existe un noyau $K(x,y)$ qui est une fonction de classe C^∞ sur $V \times V$ privé de sa diagonale, tel que $(Tf)(x) = \int_V K(x,y)\, f(y)\, dy$ quand $f \in C^\infty(V)$ et quand x n'appartient pas au support de f

(17) pour tout ouvert $\Omega \subset V$ assez "petit" pour que l'on puisse utiliser des coordonnées locales et pour tout couple φ, ψ de deux fonctions de $C^\infty_0(\Omega)$, l'opérateur $\varphi T \psi$, quand il est exprimé à l'aide de ces coordonnées locales, est un o. p. d. exotique dont le symbole appartient à $S^0_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$.

Nous désignerons toujours par $H^{(s)}(V)$ l'espace de Sobolev habituel.

On a alors la caractérisation suivante des o. p. d. $T \in L^0_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ par le continuité des commutateurs avec les champs de vecteurs à ceofficients C^∞.

THÉORÈME 16. Soient V une variété C^∞ compacte et $T : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ un opérateur linéaire.

Alors les deux propriétés suivantes de T sont équivalentes

(18) T appartient à la classe exotique $L^0_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$

(19) T est borné sur $L^2(V)$ et, pour toute suite $D_1, \ldots, D_j, \ldots$ de champs de vecteurs à coefficients C^∞, les commutateurs itérés $T_1 = [T, D_1], \ldots,$ $T_j = [T_{j-1}, D_j], \ldots$ vérifient les conditions suivantes : pour tout $s \in \mathbb{R}$,

T_j se prolonge en un opérateur linéaire continu de $H^{(s)}(V)$ dans $H^{(s-\frac{j}{2})}(V)$.

Pour vérifier l'implication (18) $\Rightarrow$ (19), on définit, la classe $L^s_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, $s\in\mathbf{R}$, de façon analogue à $L^o_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$; avec la seule différence que les opérateurs $T \in L^s_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ sont définis localement par des symboles $\sigma \in S^s_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$.

Alors si $T \in L^s_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ et si D est un champ de vecteurs à coefficients C^∞, le commutateur $[T,D]$ appartient à $L^{s+\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ comme on le vérifie par un calcul immédiat.

Par ailleurs $T \in L^s_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ est borné de $H^{(s_1)}(V)$ dans $H^{(s_2)}(V)$ si $s = s_1 - s_2$.

La preuve de (19) $\Rightarrow$ (18) est plus subtile et suit, grosso modo, la démarche utilisée pour démontrer le théorème 15.

On vérifie d'abord (16) en employant exactement le même raisonnement que pour (8). Le seul ingrédient un peu nouveau est le lemme suivant.

LEMME 5. Si $f \in L^2(V)$ et si, pour tout entier $j \geq 1$ et toute suite $D_1, \ldots, D_j$ de champs de vecteurs à coefficients C^∞, $D_1 \circ \ldots \circ D_j f \in H^{j/2}(V)$, alors $f \in C^\infty(V)$.

La vérification de (17) repose sur un analogue de la proposition 1.

PROPOSITION 2. Soient K une partie compacte de $\mathbf{R}^n$ et $T : C^\infty_o(\mathbf{R}^n) \longrightarrow C^\infty_o(\mathbf{R}^n)$ un opérateur linéaire continu porté par K. Alors les deux propriétés suivantes de T sont équivalentes

(20) $T \in L^o_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$

(21) pour tout $s\in\mathbf{R}$, $T : H^{(s)}(\mathbf{R}^n) \longrightarrow H^{(s)}(\mathbf{R}^n)$ est borné et pour toute suite $D_1, \ldots, D_j, \ldots$ de champs de vecteurs à coefficients C^∞ sur $\mathbf{R}^n$, les

commutateurs itérés $T_1 = [T , D_1], \dots, T_j = [T_{j-1}, D_j], \dots$ ont la propriété de continuité suivante :

pour tout $s \in \mathbf{R}$ et tout j, T_j se prolonge en un opérateur linéaire continu de $H^{(s)}(R^n)$ dans $H^{(s-j/2)}(R^n)$.

Il suffit, pour notre propos, de vérifier que (21) implique (20).

Désignons, pour tout nombre réel t, par $\mathcal{E}_t$ l'ensemble des opérateurs $T : C_o^\infty(\mathbf{R}^n) \longrightarrow C_o^\infty(\mathbf{R}^n)$ qui sont portés par K, continus de $H^{(s)}(\mathbf{R}^n)$ dans $H^{(s-t)}(\mathbf{R}^n)$ (pour tout $s \in \mathbf{R}$) et tels que les opérateurs T_j, définis par (21) à l'aide de T, soient continus de $H^{(s)}(\mathbf{R}^n)$ dans $H^{(s-t-j/2)}(\mathbf{R}^n)$.

L'ensemble des symboles des opérateurs de $\mathcal{E}_t$ sera noté Σ_t.

Avec ces notations, T vérifie (21) lorsque $T \in \mathcal{E}_o$ et l'opérateur T_j, j-ième commutateur itéré de T avec les champs de vecteurs, appartient à $\mathcal{E}_j$.

D'autre part si $T \in \mathcal{E}_t$ et si D est un champ de vecteurs à coefficients C^∞, le commutateur $[T , D]$ appartient à $\mathcal{E}_{t+1/2}$.

L'analogue du lemme 2 est le résultat suivant.

LEMME 6. Si $S \in \mathcal{E}_o$ et $T \in \mathcal{E}_t$, alors $TS \in \mathcal{E}_t$ et $ST \in \mathcal{E}_t$. En particulier si A est l'opérateur de multiplication par une fonction $a \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $AT \in \mathcal{E}_t$ et $TA \in \mathcal{E}_t$.

La preuve est identique à celle du lemme 2.

De même pour l'analogue du lemme 3.

LEMME 7. Pour tout $\sigma \in \Sigma_t$, on a $\frac{\partial \sigma}{\partial x_j} \in \Sigma_{t+\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial \xi_k} \in \Sigma_t$ et $\xi_j \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_k} \in \Sigma_{t+\frac{1}{2}}$.

Par itération on obtient que

$$P(\xi_1, \dots, \xi_n)\, \partial_\xi^\alpha\, \partial_x^\beta\, \sigma(x, \xi) \in \Sigma_s \tag{22}$$

lorsque $\sigma \in \Sigma_o$, degré $P \leq |\alpha|$ et $s = \frac{|\alpha|+|\beta|}{2}$.

Une partition dyadique de l'unité en ξ permet de localiser (22). On écrit $1 = \varphi(\xi) + \sum_o^\infty \psi(2^{-j}\xi)$ où $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ est portée par $|\xi| \leq 1$ et $\psi \in C_o^\infty(R^n)$ est portée par $\frac{1}{3} \leq |\xi| \leq 1$.

La seule information que nous retiendrons de (22) est que $P(\xi_1,\ldots,\xi_n)\, \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)$ est le symbole d'un opérateur continu du $H^{(s)}$ dans L^2, $s = \frac{|\alpha|+|\beta|}{2}$. On teste ce renseignement sur des fonctions de la forme $2^{-js}f_j$ où $\|f_j\|_2 = 1$ et Support $\hat{f}_j(\xi) \subset \left\{\frac{1}{3}2^j \leq |\xi| \leq 2^j\right\}$; ces conditions impliquent que la norme, dans $H^{(s)}$, de f_j ne dépasse pas $C2^{js}$.

En posant $\sigma_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi) = \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)$, il vient

$$\|\sigma_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,D) f_j\|_2 \leq C\, 2^{j|\beta|/2 - j|\alpha|/2}.$$

Finalement on pose $\sigma_j(x,\xi) = \sigma(x,\xi)\,\psi(2^{-j}\xi)$. La norme de l'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dont le symbole est $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma_j(x,\xi)$ ne dépasse pas $C''_{\alpha,\beta} 2^\lambda$;

$$\lambda = \frac{j|\beta| - j|\alpha|}{2}.$$

Alors on emploie la transformation canonique $x \longrightarrow 2^{-j/2}x$, $\xi \longrightarrow 2^{j/2}\xi$ décrite par le lemme 1 du Chapitre II et l'on pose $\tau_j(x,\xi) = \sigma_j(2^{-j/2}x\,,\,2^{j/2}\xi)$.

Les o. p. d. dont les symboles sont $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tau_j(x,\xi)$ sont bornés sur $L^2(R^n)$ et leur norme ne dépasse pas $C''_{\alpha,\beta}$.

Nous terminons donc en démontrant le lemme suivant.

LEMME 8. <u>Soient</u> $n \geq 1$ <u>un entier et</u> $C_{\alpha,\beta}$ <u>une suite de constantes positives</u> $(\alpha \in \mathbb{N}^n,\ \beta \in \mathbb{N}^n)$. <u>Il existe une seconde suite</u> $C'_{\alpha,\beta}$ <u>telle que si les symboles</u> $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)$ <u>conduisent à des o.p.d. dont la norme sur</u> $L^2(\mathbb{R}^n)$ <u>ne dépasse pas</u> $C_{\alpha,\beta}$, <u>alors</u> $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C'_{\alpha,\beta}$.

La preuve de ce dernier lemme est sans surprise. On remarque d'abord que hypothèses et conclusions sont invariantes par translations en x et ξ. Il suffit donc de prouver que $\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(0,0)\right| \le C'_{\alpha,\beta}$.

Pour cela on appelle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction égale à 1 en 0 et portée par $|x| \le 1$. On pose $\tau(x,\xi) = \sigma(x,\xi)\,\varphi(x)\,\varphi(\xi)$.

A l'aide de la formule de Leibniz on montre que $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tau(x,\xi)$ est le symbole d'un o. p. d. dont la norme sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ ne dépasse pas $C''_{\alpha,\beta}$.

Enfin on pose $K(x,\xi) = e^{ix.\xi}\tau(x,\xi)$. Alors $K(x,\xi)$ est un noyau borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ en vertu du lemme 9 du chapitre I. De même $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta K(x,\xi)$ se calcule par la formule de Leibniz et est également borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Finalement tout revient à voir que l'on peut conclure une majoration de $K(0,0)$.

Si f et g appartiennent à $L^2(\mathbf{R}^n)$, on a donc

$$\left|\iint \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta K(x,\xi)\, f(x)\, g(\xi)\, dx\, d\xi\right| \le C^*_{\alpha,\beta}\|f\|_2\|g\|_2. \tag{23}$$

Définissons $f(x)$ par $f(x) = \exp(-ik.x)$, $k \in \mathbf{Z}^n$, si $-\pi \le x_j \le \pi$ et $f(x) = 0$ sinon ; de même $g(\xi) = \exp(-i\ell.\xi)$, $\ell \in \mathbf{Z}^n$, si $-\pi \le \xi_j \le \pi$ et $g(\xi) = 0$ sinon.

Puisque $K(x,\xi)$ est nul si $|x| \ge 1$, $\iint K(x,\xi)\, f(x)\, g(\xi)\, dx\, d\xi = \hat{K}(k,\ell)$ pour ce choix particulier de f et g.

Il vient $\left|k^\alpha \ell^\beta \hat{K}(k,\ell)\right| \le \tilde{C}_{\alpha,\beta}$; ces inégalités permettent le contrôle de la décroissance rapide de $\hat{K}(k,\ell)$ et donc la majoration de $K(0,0) = (4\pi^2)^{-n}\,\Sigma\,\Sigma\,\hat{K}(k,\ell)$.

Revenant à τ_j, on a donc $\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tau_j(x,\xi)\right| \le \tilde{C}_{\alpha,\beta}$ et cela entraîne $\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma_j(x,\xi)\right| \le \tilde{C}_{\alpha,\beta} 2^\lambda$; $\lambda = \dfrac{j|\beta| - j|\alpha|}{2}$.

Si $|\xi| \ge 1$, on a $\sigma(x,\xi) = \sum_{j\ge 0} \sigma_j(x,\xi)$ mais les seuls termes non nuls de cette somme sont ceux où $|\xi|$ et 2^j sont du même ordre de grandeur. Il en résulte que $\sigma(x,\xi) \in S^0_{1/2,1/2}$ car le cas $|\xi| \le 1$ ne pose aucune difficulté.

4. LES COMMUTATEURS DE CALDERÓN ET LEURS GÉNÉRALISATIONS.

On part de la transformation de Hilbert, c'est-à-dire de l'exemple le plus simple d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 sur le cercle $\mathbf{T}$; H est définie par $H(e^{ikx}) = -i \operatorname{sign} k \, e^{ikx}$ et par $H(1) = 0$. Le symbole de H est $m_k(x) = -i$ si $k > 0$, $m_o(x) = 0$ et $m_k(x) = i$ si $k < 0$.

A. Calderón a montré en 1965 dans [3] que, pour toute fonction $A : \mathbf{T} \to \mathbf{C}$ vérifiant $|A(x) - A(y)| \leq |x-y|$ pour $x \in \mathbf{T}$, $y \in \mathbf{T}$, le commutateur $[H, A]$ envoie $L^2(\mathbf{T})$ dans l'espace de Sobolev $H^{(1)}$.

Si $A \in C^{\infty}(\mathbf{T})$, c'est très facile car $[H, A]$ est un o. p. d. classique d'ordre -1 et envoie, à ce titre L^2 dans $H^{(1)}$.

Si $A \in C^1(\mathbf{T})$, il s'agit au contraire d'un résultat très profond. Si $D = \frac{d}{dx}$, on calcule très simplement le symbole de l'opérateur $T = D[H, A]$ par la règle $T(e^{ikx}) = m_k(x) \, e^{ikx}$.

On développe $A(x)$ en la série de Fourier $\Sigma\, a_j e^{ijx}$ et l'on obtient $m_k(x) = -\Sigma\, j(\operatorname{sign} k - \operatorname{sign}(k+j)) \, a_j e^{ijx}$. C'est-à-dire que $m_k(x)$ n'appartient pas, en général, à $L^{\infty}(\mathbf{T})$. L'opérateur T n'est plus un opérateur pseudo-différentiel en aucun sens du terme.

Les méthodes employées par A. Calderón utilisent la variable complexe et reposent sur la caractérisation qu'il a obtenue de l'espace de Hardy H^1 par l'intégrabilité de la fonction d'aire de Lusin. Cette découverte a été le point de départ de très beaux travaux sur H^1 menés principalement par Ch. Fefferman et E. Stein ([31]).

Une autre façon d'exprimer ce résultat est d'écrire que si $A' \in L^{\infty}(\mathbf{T})$, A' étant la dérivée, au sens des distributions de la fonction continue $A : \mathbf{T} \to \mathbf{C}$, le commutateur entre la transformation de Hilbert H et le champ de vecteurs $A(x)\frac{d}{dx}$ est borné sur $L^2(\mathbf{T})$.

Ce résultat est même valable si $A' \in BMO$ ([20]) ; l'espace BMO de John et Nirenberg contient strictement $L^\infty(T)$.

Comme le lecteur l'a sans doute deviné, le théorème de Calderón admet la généralisation suivante ([21]).

THÉORÈME 17. Soient V une variété C^∞ compacte, $T : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 0 et X un champ de vecteurs sur V vérifiant une condition de Lipschitz. Alors le commutateur $[T, X]$ est borné de $L^2(V)$ dans lui-même.

La condition de Lipschitz est que, pour tout choix de coordonnées locales, X s'écrive $\sum_1^n a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$ où $|a_j(x) - a_j(x')| \leq C|x - x'|$.

La démonstration de Calderón et les méthodes de variables complexes ne permettent pas de prouver ce résultat. Pour ce faire, nous aurons besoin des méthodes de variables réelles, introduites par A. Calderón et A. Zygmund, et présentées au Chapitre IV. Nous différons donc la preuve du théorème 17 au §5 de ce chapitre IV.

CHAPITRE IV

OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS
et
INTÉGRALES SINGULIÈRES DE CALDERÓN-ZYGMUND

Nous n'avons pas pu résister au plaisir de rappeler les résultats obtenus par A. Calderón, A. Zygmund et les mathématiciens de leur groupe. Ces résultats d'appliquent à une grande variété d'opérateurs incluant les opérateurs pseudo-différentials classiques d'ordre 0. Les méthodes employées, dites de "variable réelle" complètent les méthodes "spectrales" utilisant la transformation de Fourier ou la variable complexe et qui sont nécessaires pour obtenir les estimations L^2.

Les méthodes de "variable réelle" ont été découvertes par A. Calderón et A. Zygmund et développées par R. Coifman, M. Cotlar, E. Stein, G. Weiss, etc. Elles ont le caractère remarquable de convenir à des situations beaucoup plus générales que celle des intégrales singulières particulières pour lesquelles elle ont été conçues.

La définition que nous donnerons des "opérateurs de Calderón-Zygmund" ne correspond pas à la terminologie généralement utilisée.

Mais cette définition permet de traiter à la fois les intégrales singulières les plus traditionnelles et des noyaux plus compliqués comme ceux introduits par A. Calderón dans [6].

De toute façon les raisonnements utilisés sont exactement les mêmes que ceux que les auteurs nommés ci-dessus ont employés.

Ce chapitre n'est donc pas original (si l'on excepte la démonstration du théorème 17 et le théorème 18).

Venons-en au contenu.

On désigne par Ω l'ouvert $y \neq x$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$. On a, pour tout o. p. d. classique d'ordre 0, T, une formule de représentation intégrale

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\, f(y)\, dy \; ; \tag{1}$$

formule dans laquelle $K \in C^\infty(\Omega)$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et x n'appartient pas au support de f.

La fonction K (singulière sur la diagonale $y = x$ avec un type de croissance que l'on peut préciser) sera appelée le "noyau" associé à l'o. p. d. T. Le mot "noyau" est donc pris, dans tout ce chapitre, dans un sens différent de l'acception usuelle de "noyau-distribution" associé à un opérateur.

Les "noyaux" figurant dans (1) appartiennent à une famille plus générale que nous appellerons "noyaux de Calderón-Zygmund" (cette dénomination nous étant propre); famille que nous allons décrire dans ce chapitre et à laquelle s'appliquent les méthodes dites de "variable réelle" introduites par A. Calderón et A. Zygmund.

Il y a de nombreux cas où l'on peut, à l'aide du "noyau" $K(x,y)$, définir entièrement l'opérateur T (sur les fonctions $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$) par l'intégrale singulière

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} K(x,y)\, f(y)\, dy. \tag{2}$$

L'inégalité de Cotlar permet alors de montrer que, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, (2) a lieu pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Ce résultat est profond et repose sur l'étude de l'opérateur maximal

$$(T_* f)(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|y-x| \geq \varepsilon} K(x,y)\, f(y)\, dy \right|. \tag{3}$$

Une autre inégalité fondamentale est due à Ch. Fefferman et E. Stein. Elle relie directement le comportement de $(Tf)^{\#}(x)$ et de la fonction maximale usuelle de $|f|^p$, $p > 1$. La fonction "diéze" de Fefferman et Stein est une modification très utile de la fonction maximale de Hardy et Littlewood.

Nous supposerons que le lecteur a acquis une certaine familiarité avec les premiers chapitres du livre de Stein [50] et qu'il connaît, par exemple, la définition et les propriétés de la fonction maximale de Hardy et Littlewood.

1. DÉFINITION DES OPÉRATEURS DE CALDERÓN-ZYGMUND.

Dans tout ce qui suit Ω désignera l'ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ défini par $y \neq x$; $y \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. En d'autres termes Ω est $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ privé de la "diagonale".

DÉFINITION 1. <u>Un opérateur linéaire</u> $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ <u>est appelé un opérateur de Calderón-Zygmund si les quatre conditions suivantes sont satisfaites</u>

(4) T <u>se prolonge en un opérateur linéaire continu de</u> $L^2(\mathbb{R}^n)$ <u>dans</u> $L^2(\mathbb{R}^n)$

(5) <u>il existe une fonction continue</u> $K : \Omega \to \mathbb{C}$ <u>et une constante</u> $C > 0$ <u>telles que</u>

(5a) $|K(x,y)| \le C\,|x-y|^{-n}$;

(5b) <u>les gradients</u> $\nabla_x K(x,y)$ <u>et</u> $\nabla_y K(x,y)$, <u>pris au sens des distributions, sont, en fait, des fonctions localement bornées dans</u> Ω <u>et</u> <u>y vérifient</u>

$|\nabla_x K(x,y)| \le C\,|x-y|^{-n-1}$ <u>et</u> $|\nabla_y K(x,y)| \le C\,|x-y|^{-n-1}$; <u>enfin on a</u>

(5c) $Tf(x) = \int K(x,y)\, f(y)\, dy$ <u>chaque fois que</u> $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ <u>et que</u> x <u>n'appartient pas au support de</u> f.

<u>Soit</u> $\|T\|_{2,2}$ <u>la norme de</u> $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$; <u>la norme de Calderón-Zygmund de</u> T, <u>notée</u> $\|T\|$, <u>est alors définie par</u> $\|T\| = \|T\|_{2,2} + \inf C$; inf C <u>désignant la borne inférieure des constantes</u> C <u>pouvant figurer au second membre de</u> (5a) <u>et</u> (5b).

On remarquera que $K(x,y)$ n'est pas le "noyau-distribution" associé à l'opérateur T et que d'ailleurs T n'est pas entièrement défini par $K(x,y)$.

Il existe cependant un cas particulier important où T est déterminé par $K(x,y)$.

DÉFINITION 2. Soit $K : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant les propriétés (5a) et (5b) de la définition 1. Nous dirons que K est un noyau de Calderón-Zygmund si les deux conditions suivantes ont lieu

(6) pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\psi(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} K(x,y)\, \varphi(y)\, dy$$

existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(7) en posant $\psi = T(\varphi)$, il existe une constante C telle que $\|T(\varphi)\|_2 \leq C\|\varphi\|_2$ pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

La norme L^2 est la norme L^2 usuelle relative à la mesure de Lebesgue dx.

La plus petite constante C telle que (5.a), (5.b) et (7) aient lieu sera notée $\|K\|_*$ et appelée la norme de Calderón-Zygmund du noyau K.

Compte tenu de (5.a), l'intégrale $\int_{|x-y| \leq 1} K(x,y) \left[\varphi(y) - \varphi(x)\right] dy$ converge, de sorte que (6) est équivalente à l'existence de $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |y-x| \leq 1} K(x,y)\, dy$.

Nous allons montrer par un contre-exemple très simple que cette dernière condition dépend de la structure euclidienne choisie sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction portée par $\frac{1}{2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 1$, telle que pour tout $r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\int_0^\pi \varphi(r \cos\theta\ , r \sin\theta)\, d\theta = 0$ mais telle que $\iint_{4y^2+x^2 \leq 1} \varphi(x,y)\, dx\, dy = 1$.

Posons $S(x,y) = \sum_0^\infty 16^k \varphi(4^k x\ , 4^k y)$ et considérons le noyau de convolution avec S ; x et y représentent ici les coordonnées de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $\int_{\frac{1}{2}4^{-k}\leq\sqrt{4y^2+x^2}\leq 4^{-k}} S(x,y)\,dx\,dy = 1$ car, sur le domaine d'intégration $\frac{1}{2}\,4^{-k} \leq \sqrt{4y^2+x^2} \leq 4^{-k}$, seul le terme $16^k\,\varphi(4^k x\ ,\ 4^k y)$ n'est pas identiquement nul et le changement de variable $x = 4^{-k}u$, $y = 4^{-k}v$ donne le résultat.

Le noyau $K(x,y\ ;\ u,v) = S(u-x\ ,\ v-y)$ satisfait les conditions de la définition 2 et cependant $I(\varepsilon) = \iint_{\varepsilon\leq\sqrt{4y^2+x^2}\leq 1} S(x,y)\,dx\,dy$ ne tend pas vers une limite quand $\varepsilon > 0$ tend vers 0.

Donc les noyaux de Calderón-Zygmund dépendent de la structure euclidienne choisie sur $\mathbb{R}^n$. A fortiori, l'ensemble des opérateurs définis par les noyaux de Calderón-Zygmund n'est pas invariant par difféomorphismes.

Nous verrons d'ailleurs que les o.p.d. classiques d'ordre 0 ne sont pas, en général, définis par des intégrales singulières (6).

Le cas des opérateurs de Calderón-Zygmund est tout différent. La structure euclidienne choisie ne joue plus aucun rôle et l'ensemble des opérateurs de Calderón-Zygmund est invariant par difféomorphismes réguliers (le déterminant Jacobien étant, en valeur absolue, compris entre deux constantes positives).

Naturellement les opérateurs décrits par la définition 2 constituent un cas particulier de ceux de la définition 1.

Voici deux exemples montrant qu'un opérateur de Calderón-Zygmund n'est pas toujours une "intégrale singulière" (6).

Si γ est un nombre réel non nul, on définit $M_\gamma : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ par $(M_\gamma f)^\wedge(\xi) = |\xi|^{i\gamma}\,\hat{f}(\xi)$. Alors M_γ est un opérateur de Calderón-Zygmund et le noyau associé est $K_\gamma(x,y) = c\,|x-y|^{-n-i\gamma}$; la constante complexe c n'est pas nulle et s'exprime de façon simple à l'aide de la fonction Γ ([50]).

Cependant, même si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, la limite $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x-y|\geq 0} |x-y|^{-n-i\gamma} f(y)\,dy$ n'existe pas lorsque $f(x) \neq 0$.

Par ailleurs, si T est l'application identique, T est un opérateur de Calderón-Zygmund pour lequel le noyau $K(x,y)$ est identiquement nul. La limite écrite dans le second membre de (6) existe cette fois mais ne vaut pas $(T\varphi)(x)$.

La relation entre opérateurs de Calderón-Zygmund et noyaux de Calderón-Zygmund est donnée par l'énoncé suivant.

THÉORÈME 18. Soit $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ un opérateur linéaire continu. Alors les trois propriétés suivantes de T sont équivalentes

(a) T est un opérateur de Calderón-Zygmund

(b) il existe une constante $C > 0$ et une suite $K_j(x,y)$ de noyaux de Calderón-Zygmund telles que $\|K_j\|_* \leq C$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, et que, pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on ait $\|T_j(f) - T(f)\|_2 \to 0$ $(j \to +\infty)$; ceci en appelant T_j l'opérateur associé à K_j par (6).

(c) il existe une constante $C > 0$ et une suite T_j d'opérateurs de Calderón-Zygmund dont les normes $\|T_j\|$ de Calderón-Zygmund ne dépassent pas C et telle que, pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|T_j(f) - T(f)\|_2 \to 0$ $(j \to +\infty)$.

En fait nous prouverons que l'on peut imposer à $K_j(x,y)$ d'être une fonction appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ de sorte que $T_jf(x) = \int K_j(x,y)\, f(y)\, dy$. Naturellement $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |K_j(x,y)| \to +\infty$ avec j.

Le théorème 18 donne un procédé d'approximation des opérateurs généraux de Calderón-Zygmund par les opérateurs particuliers définis par les noyaux de Calderón-Zygmund.

Passons à la preuve du théorème 18.

Nous allons d'abord montrer que (a) implique (b).

Rappelons à cet effet la définition du "noyau distribution" associé à un opérateur linéaire continu $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

On définit ce noyau $S(x,y)$ par

(8) $$\langle S(x,y)\, ,\, f(x)\, g(y)\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (Tf)(x)\, g(x)\, dx$$

si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; puis on prolonge cette définition par linéarité et continuité à tout $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Pour ce faire, on remarque simplement que toute fonction $f(x,y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ s'écrit

$$f(x,y) = \sum_0^\infty f_k(x)\, g_k(y)$$

où $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $g_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\sum_0^\infty \|f_k\|_2 \, \|g_k\|_2 < +\infty \, .$$

Finalement on obtient $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. La définition du "noyau-distribution" S étant rappelée, revenons à l'opérateur T vérifiant (a) et désignons par $S(x,y)$ le noyau distribution correspondant.

On a évidemment $S(x,y) = K(x,y)$ dans Ω ; pour le voir on combine (5c) et (8).

Appelons $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction d'intégrale 1 portée par la boule $|u| \le \frac{1}{10}$.

On pose successivement $\varphi_j(x) = j^n \varphi(jx)$, $j \ge 1$, et $S_j(x,y) = \iint S(u,v)\, \varphi_j(x-u)\, \varphi_j(y-v)\, du\, dv = S * (\varphi_j \otimes \varphi_j)$.

Naturellement $S_j(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Nous allons montrer que les S_j sont des noyaux de Calderón-Zygmund uniformément bornés et définissant des opérateurs T_j tels que

(9) $$\|T_j(f) - T(f)\|_2 \longrightarrow 0 \quad (j \longrightarrow +\infty)$$

pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Vérifions en premier lieu que $\|S_j\|_* \le C$. Supposons d'abord que $|x-y| \ge \frac{1}{j}$. Les supports de $\varphi_j(x-u)$ et de $\varphi_j(x-v)$ sont contenus dans $|x-u| \le \frac{1}{10j}$ et $|x - v| \le \frac{1}{10j}$. Le produit cartésien de ces supports est contenu dans l'ouvert $\Omega_1 = \left\{ |u - v| > \frac{1}{2j} \right\}$.

Les restrictions de $S(u,v)$ et $K(u,v)$ à cet ouvert Ω_1 coïncident et l'on a donc, si $|x-y| \ge \frac{1}{j}$,

$$S_j(x,y) = \iint K(u,v)\, \varphi_j(x-u)\, \varphi_j(y-v)\, du\, dv.$$

Dès lors on majore cette intégrale de façon évidente en l'écrivant $\iint K(x-u\ ,\ y-v)\ \varphi_j(u)\ \varphi_j(v)\ du\ dv$ et l'on obtient $|S_j(x,y)| \leq C\,|x-y|^{-n}$ et $|\nabla_x S_j(x,y)| \leq C\,|x-y|^{-n-1}$, $|\nabla_y S_j(x,y)| \leq C\,|x-y|^{-n-1}$.

Il reste à examiner le cas $|x-y| \leq \frac{1}{j}$. On va montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|S_j(x,y)| \leq C\,j^n$, $|\nabla_x S_j(x,y)| \leq C\,j^{n+1}$ et $|\nabla_y S_j(x,y)| \leq Cj^{n+1}$; ce qui est plus précis que l'estimation cherchée.

La distribution S a la propriété que

$$|\langle S(x,y)\ ,\ f(x)\,g(y)\rangle| \leq C\|f\|_2\ \|g\|_2 \tag{10}$$

résultant de la continuité de T.

On a donc $|S_j(x,y)| \leq C\|\varphi_j\|_2^2 = C'\ j^n$ et, de même $|\nabla_x S_j(x,y)| \leq C\|\varphi_j\|_2\ \|\nabla\varphi_j\|_2 \leq C'\ j^{n+1}$.

Si $T_j f(x) = \int S_j(x,y)\ f(y)\ dy$, il est aisé de majorer la norme de $T_j : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$. On appelle $\tau_a : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur de translation par a défini par $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$.

On a alors $T_j = \iint \tau_u \circ T \circ \tau_{-v}\ \varphi_j(u)\ \varphi_j(v)\ du\ dv$ ce qui entraîne $\|T_j\| \leq \|T\|\ \|\varphi\|_1^2$.

D'autre part, si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la continuité de la translation dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ implique $\|T_j(f) - T(f)\|_2 \longrightarrow 0$ $(j \longrightarrow +\infty)$.

Il est évident que (b) entraîne (c) et il reste à prouver (c) $\Rightarrow$ (a). Appelons $K_j(x,y)$ les noyaux associés aux opérateurs T_j par la définition 1.

Le théorème d'Ascoli permet d'extraire de la suite $K_j(x,y)$ une sous-suite K_{j_ν} uniformément convergente sur tout compact de Ω vers une fonction $K(x,y)$.

Il est clair que $|K(x,y)| \leq C\,|x-y|^{-n}$ par simple passage à la limite.

On vérifie facilement les conditions sur les gradients $\nabla_x K(x,y)$ et $\nabla_y K(x,y)$ en remarquant qu'elles sont équivalentes aux inégalités

$$|K(x+h\ ,\ y) - K(x,y)| \leq \frac{C\,|h|}{|x-y|^{n+1}}$$

et
$$|K(x\ ,\ y+h) - K(x,y)| \leq \frac{C\,|h|}{|x-y|^{n+1}}$$

lorsque $|h| \leq \frac{|x-y|}{2}$.

Enfin si $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, on a, pour tout x n'appartenant pas au support de f,

$$(T_{j_\nu} f)(x) = \int K_{j_\nu}(x,y)\, f(y)\, dy \longrightarrow \int K(x,y)\, f(y)\, dy\ ;$$

par ailleurs $\|T_{j_\nu} f - Tf\|_2 \longrightarrow 0$ $(\nu \to +\infty)$. Il en résulte que $Tf(x) = \int K(x,y) f(y)\, dy$ presque partout sur le complémentaire du support de f.

Nous voilà en possession d'un ensemble remarquable d'opérateurs de $L^2(\mathbf{R}^n)$.

On rappelle que si T est un opérateur de Calderón-Zygmund, $\|T\| = \|T\|_{2,2} + C$ où C est la plus petite constante pouvant figurer dans (5.a) et (5.b) et où $\|T\|_{2,2}$ est la norme de T comme opérateur de $L^2(\mathbf{R}^n)$. Alors l'ensemble des opérateurs de Calderón-Zygmund est un espace de Banach. Ce n'est malheureusement pas une algèbre.

Nous allons le montrer par un contre-exemple en dimension 1. Soit $\theta : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ une fonction impaire, nulle à l'infini, de classe C^1 dans $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ et telle que $|\theta'(x)| \leq \frac{1}{x^2}$. Commençons par établir le lemme suivant.

LEMME 1. <u>L'opérateur</u> $T : L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ <u>défini sur</u> $C_0^\infty(\mathbf{R})$ <u>par</u> $(Tf)(x) = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} \theta(x-y)\, f(y)\, dy$ <u>est un opérateur de Calderón-Zygmund.</u>

L'existence de la limite ne pose aucun problème : θ étant impaire, on a $\int_{1 \geq |y-x| \geq \varepsilon} \theta(x-y)\, f(y)\, dy = \int_{1 \geq |y-x| \geq \varepsilon} \theta(x-y) \left[f(y) - f(x)\right] dy$. Cette dernière intégrale a évidemment une limite quand ε tend vers zéro. Il reste à montrer (4). A cet effet, on pose, si $\varepsilon > 0$, $\theta_\varepsilon(x) = \theta(x)$ pour $|x| \geq \varepsilon$ et $\theta_\varepsilon(x) = 0$ si $|x| < \varepsilon$.

Si $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $(Tf)(x) = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \theta_\varepsilon * f = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} f_\varepsilon$. Dès que nous aurons montré l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\|f_\varepsilon\|_2 \leq C\|f\|_2$, le lemme de Fatou s'appliquera et donnera $\|Tf\|_2 \le C\|f\|_2$.

Pour calculer $\|\theta_\varepsilon * f\|_2$, on observe que $|\hat{\theta}_\varepsilon| \le C$ et l'on utilise le théorème de Plancherel. Enfin $|\hat{\theta}_\varepsilon| \le C$ résulte de

$$\hat{\theta}_\varepsilon(\xi) = -2i\int_\varepsilon^\infty \sin(t\xi)\theta(t)\,dt = -2i\left[\frac{1-\cos t\xi}{\xi}\theta(t)\right]_\varepsilon^\infty + 2i\int_\varepsilon^\infty \frac{1-\cos t\xi}{\xi}\theta'(t)\,dt = A(\xi) +$$

$B(\xi)$; ceci si $\xi > 0$ ce qui suffit à notre propos. On a

$|A(\xi)| = 2\ \dfrac{1-\cos \varepsilon\xi}{\xi}\ |\theta(\varepsilon)| \le 2\,\dfrac{1-\cos\varepsilon\xi}{\varepsilon\xi} \le C.$ De même

$$|B(\xi)| \le 2\int_0^\infty \frac{1-\cos t\xi}{t^2\xi}\,dt = 2\int_0^\infty \frac{1-\cos u}{u^2}\,du.$$

Désignons par H la transformation de Hilbert (non normalisée) correspondant au cas particulier où $\theta(t) = \frac{1}{t}$. Nous nous limiterons à des fonctions $\theta(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifiant $|\theta'(x)| \le \frac{1}{x^2}$ et telles que θ' soit paire. Alors l'opérateur $T_1 = T \circ H$ est l'opérateur de convolution avec la fonction θ_1 donnée par $\theta_1(x) = \int \theta(x-t)\,\frac{dt}{t}$; cette dernière intégrale étant prise au sens d'une valeur principale de Hadamard.

Nous montrerons qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que, quelle que soit la fonction $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions ci-dessus, on ait $|\theta_1'(x)| \le \frac{C}{x^2}$. Cela suffira pour établir notre contre-exemple.

On a, si $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\theta_1'(x) = \int \theta'(x-t)\,\frac{dt}{t} = \int \theta'(t)\,\frac{dt}{x-t}$.

Or, si, par exemple, $x = 1$, la seule propriété de $\theta'(t)$ autour de $x = 1$ est d'être majorée en valeur absolue par 2 ce qui ne permet évidemment pas de majorer $\theta_1'(1)$ puisque $\displaystyle\int_{1/2}^{3/2} \frac{dt}{|t-1|} = +\infty$.

Avant de terminer ce premier paragraphe, rappelons quelques exemples classiques de noyaux de Calderón-Zygmund.

Soit $S : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ une fonction indéfiniment dérivable, homogène de degré $-n$ et telle que $\int_{|x|=1} S(x)\,d\sigma(x) = 0$; $d\sigma$ désigne la mesure de Haar de la sphère $|x| = 1$ (invariante sous l'action de $SO(n, \mathbb{R})$ et normalisée par $\int d\sigma = 1$).

Alors $K(x,y) = S(x-y)$ est un noyau de Calderón-Zygmund. La fonction S définit une distribution, encore notée S, par la formule

$$(11) \qquad \langle S,\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} S(x)\,\varphi(x)\,dx$$

et l'opérateur T associé au noyau $S(x-y)$ peut être décrit par la formule

$$(12) \qquad T(\varphi) = S * \varphi$$

conduisant à

$$(13) \qquad (T(\varphi))\hat{}\,(\xi) = m(\xi)\,\hat{\varphi}(\xi).$$

La transformée de Fourier $m(\xi)$ de S est une fonction indéfiniment dérivable dans $\mathbf{R}^n$ privé de 0 et homogène de degré 0 en ξ.

On a donc

$$(14) \qquad T(\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi}\, m(\xi)\,\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi.$$

Il faut cependant remarquer que $m(\xi)$ n'appartient pas à la classe $S^0_{1,0}$ des symboles classiques (à cause de la singularité de $m(\xi)$ à l'origine).

Réciproquement si l'on part d'une fonction $m : \mathbf{R}^n\setminus\{0\} \to \mathbf{C}$ qui soit indéfiniment dérivable et homogène de degré 0, elle est la somme de la transformée de Fourier d'une distribution S du type précédent et d'une constante.

L'exemple le plus classique de cette situation est celui où $S(x) = c\,\dfrac{x_j}{|x|^{n+1}}$ conduisant, pour un choix approprié de la constante c, à $m(\xi) = i\,\dfrac{\xi_j}{|\xi|}$. L'opérateur R_j correspondant est appelé transformation de Riesz ; $1 \leq j \leq n$.

2. OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS ET OPÉRATEURS DE CALDERÓN-ZYGMUND.

Nous rappelons que $S^0_{1,0} \subset C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ est l'algèbre des symboles $\sigma(x,\xi)$ vérifiant les inégalités

$$\left|\partial_\xi^\alpha\, \partial_x^\beta\, \sigma(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}.$$

Nous appellerons opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 0 les o.p.d.

$\sigma(x\,,\,D)$ associés aux symboles $\sigma \in S^0_{1,0}$. Ce point de vue assure que les o.p.d. classiques d'ordre 0 soient continus sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Le lien entre o.p.d. classiques d'ordre 0 et opérateurs de Calderón-Zygmund est donné par le résultat suivant.

THÉORÈME 19. Tout opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 0 est un opérateur de Calderón-Zygmund.

Plus précisément soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction égale à 1 en 0 et, pour tout symbole classique $\sigma \in S^0_{1,0}$, $\sigma_j(x,\xi) = \varphi(\frac{\xi}{j})\,\sigma(x\,,\,\xi)$.

Alors l'o.p.d. $\sigma_j(x,D)$ est défini par un noyau K_j de Calderón-Zygmund ; on a $\|K_j\|_* \le C$ et pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a

(15) $$\|\sigma(x,D)\,f - \sigma_j(x\,,\,D)\,f\|_2 \longrightarrow 0 \qquad (j \longrightarrow +\infty).$$

La première observation à faire est que $\varphi(\frac{\xi}{j})$ décrit une partie bornée de $S^0_{1,0}$ quand $j \ge 1$. La vérification est évidente et laissée au lecteur.

Il en résulte que l'ensemble des $\sigma_j(x,\xi)$, $j \ge 1$, est aussi une partie bornée de $S^0_{1,0}$.

Nous allons donc nous restreindre à des symboles $\sigma \in S^0_{1,0}$ ayant des supports compacts en ξ. Nous désignerons par $\mathcal{K}^0_{1,0}$ ce sous espace vectoriel de $S^0_{1,0}$.

Avec ces notations, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 1. Pour toute suite double $C_{\alpha,\beta}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\beta \in \mathbb{N}^n$, de constantes positives, il existe une constante C telle que si

(16) $\sigma \in \mathcal{K}^0_{1,0}$ vérifie $|\partial^\alpha_\xi\,\partial^\beta_x\,\sigma(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$

le noyau $K(x,y)$ défini par $K(x,y) = R(x\,,\,x-y)$ avec $R(x,z) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\xi . z}\,\sigma(x,\xi)\,d\xi$ est un noyau de Calderón-Zygmund tel que

(17) $$\|K\|_* \le C.$$

Cette proposition fournit $\|K_j\|_* \leq C$ dans le théorème 19.

Nous supprimons ainsi l'indice j et supposons, tout simplement, que toutes les intégrales en ξ convergent.

Il vient $R(x,z) = \int e^{i\xi\cdot z}\,\sigma(x,\xi)\,d\xi = (-1)^N |z|^{-2N} \int \Delta_\xi^N\,\sigma(x,\xi)\,e^{i\xi\cdot z}\,d\xi$ si $z \neq 0$. Cette dernière égalité est obtenue par $2N$ intégrations par parties en ξ.

On a, par hypothèse $|\Delta_\xi^N\,\sigma(x,\xi)| \leq C_N(1+|\xi|^2)^{-N}$ et donc, pour $N > \frac{n}{2}$, $|R(x,z)| \leq C'_N |z|^{-2N}$. De même toutes les dérivées en z et x de $R(x,z)$ ont une décroissance rapide à l'infini que l'on contrôle explicitement à l'aide de la suite donnée $C_{\alpha,\beta}$.

Les inégalités (5.a) et (5.b) sont donc satisfaites pour $K(x,y) = R(x\ ,\ x-y)$ quand $|x-y| \geq 1$.

Pour étudier le comportement de $R(x,z)$ quand $z \to 0$, on pose $|z| = \frac{1}{R}$ et on appelle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction égale à 1 au voisinage de 0. On a

$$R(x,z) = R_1(x,z) + R_2(x,z)$$

où $R_1(x,z) = \int \sigma(x,\xi)\,\varphi(\frac{\xi}{R})\,e^{i\xi\cdot z}\,d\xi$.

L'estimation de $R_1(x,z)$ s'obtient directement en remarquant que $|\sigma(x,\xi)\,\varphi(\frac{\xi}{R})\,e^{i\xi\cdot z}| \leq C$ sur $|\xi| \leq CR$. Une majoration brutale donne $|R_1(x,z)| \leq CR^n = \frac{C}{|z|^n}$.

En ce qui concerne $R_2(x,z)$, on emploie la méthode ci-dessus (les $2N$ intégrations par parties). On obtient

$$|R_2(x,z)| \leq |z|^{-2N} \int \left|\Delta_\xi^N \left\{\sigma(x,\xi)(1-\varphi(\tfrac{\xi}{R}))\right\}\right| d\xi$$

$$\leq C_N\,|z|^{-2N} \int_{|\xi| \geq cR} |\xi|^{-2N}\,d\xi = C'_N\,R^n \qquad (\text{si } N > \tfrac{n}{2}).$$

Les estimations de $\partial_x^\alpha\,\partial_z^\beta R(x,z)$ sont semblables et l'on obtient $|\partial_x^\alpha\,\partial_z^\beta R(x,z)| \leq C_{\alpha,\beta}\,|z|^{-n-|\beta|}$.

Nous venons de vérifier que, pour tout ensemble borné B de symboles $\sigma \in S^0_{1,0}$, les noyaux K des o.p.d. correspondants $\sigma(x,D)$ satisfont $\|K\|_* \leq C$.

Pour terminer la preuve du théorème 19, appelons $f_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ la fonction définie par $\hat{f}_j(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{j})\,\hat{f}(\xi)$. Alors $\|f - f_j\|_2 \to 0$ $(j \to +\infty)$ et $\sigma(x, D)f - \sigma_j(x, D)f = \sigma(x, D)\,[f - f_j] \to 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ car $\sigma(x, D)$ est continu sur L^2.

Maintenant que les opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 0 sont des opérateurs de Calderón-Zygmund, nous allons oublier les premiers et ne nous occuper que des seconds durant de chapitre IV.

Il y a, en effet, des exemples très intéressants d'opérateurs de Calderón-Zygmund qui ne sont pas des opérateurs pseudo-différentiels, ni classiques, ni exotiques.

En voici quelques uns, dûs principalement à Calderón et définis par des noyaux de Calderón-Zygmund :

$$K(x,y) = \frac{A(x) - A(y)}{(x-y)^2} \qquad \text{où } A' \in L^\infty(\mathbb{R})$$

$$K_n(x,y) = \frac{[A(x) - A(y)]^n}{(x-y)^{n+1}} \qquad \text{où } n \in \mathbb{N} \text{ et } A' \in L^\infty(\mathbb{R})$$

$$C(x,y) = \frac{1}{z(x) - z(y)} \qquad \text{où } z(x) = x + i\varphi(x)$$

et où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $\|\varphi'\|_\infty < \delta$; la valeur minima du nombre $\delta > 0$ n'est pas connue ([21] et [6]).

Nous croyons que les opérateurs de Calderón-Zygmund présentent un intérêt indépendant des opérateurs pseudo-différentiels classiques auxquels ils sont apparentés. Cet intérêt justifie une étude "en soi".

3. LES THÉORÈMES DE CALDERÓN-ZYGMUND-COTLAR.

THÉORÈME 20. Tout opérateur de Calderón-Zygmund est borné sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ quand $1 < p < +\infty$ et envoie L^1 dans L^1-faible.

C'est-à-dire que si T est un opérateur de Calderón-Zygmund, il existe une constante $C > 0$ telle que, si $f \in L^1 \cap L^2$, on ait, pour tout $\lambda > 0$,

(18) $$\operatorname{mes}\{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; |Tf|(x) > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1 .$$

La preuve du théorème 20 que nous présentons est due à A. Calderón et A. Zygmund et est exposée dans leur célèbre travail ([9]). Nous la rappelons pour la commodité du lecteur.

Nous allons commencer par démontrer (18) si f est une "fonction simple" ; c'est-à-dire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs non nulles sur un nombre fini de cubes dyadiques. Puis nous en déduirons (18) dans le cas général où $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Enfin le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz montrera que T est borné sur L^p quand $1 < p \leq 2$. Le cas général résulte de l'observation que l'adjoint T^* de T est un opérateur de Calderón-Zygmund.

Pour démontrer (18) on peut évidemment se restreindre au cas où $\|f\|_1 = 1$ et où la norme de T, en tant qu'opérateur de Calderón-Zygmund, est égale à 1.

La preuve de (18) repose alors sur la célèbre décomposition de Calderón-Zygmund de f que nous rappelons.

Appelons cube dyadique de $\mathbb{R}^n$ tout cube Q de la forme $Q = \{m_\nu 2^k \leq x_\nu < (m_\nu+1)\, 2^k\}$ où $k \in \mathbb{Z}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ et $m_\nu \in \mathbb{Z}$.

Désignons par Q_j les cubes dyadiques maximaux (pour l'inclusion) tels que $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)|\,dx > \lambda$. Si $\|f\|_\infty > \lambda$, ces cubes maximaux existent : plus précisément tout cube dyadique Q tel que $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,dx > \lambda$ est contenu dans un cube dyadique maximal Q^* vérifiant la même condition.

Pour le voir on construit la suite emboitée $Q = Q^0 \subset Q^1 \subset \ldots \subset Q^k \subset \ldots$ des cubes dyadiques définis par la condition que le côté de Q^{k+1} est le double de celui de Q^k ; on appellera alors Q^{k+1} le "cube dyadique double" de Q^k et l'on posera $Q^{k+1} = \tilde{Q}^k$.

Puisque $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a $\frac{1}{|Q^k|}\int_{Q^k} |f(x)|\,dx \to 0$ $(k \to +\infty)$ et il existe un plus grand entier k tel que $\frac{1}{|Q^k|}\int_{Q^k} |f(x)|\,dx > \lambda$; ce cube Q^k est donc l'un des cubes maximaux Q_j cherchés et l'on a $\frac{1}{|\tilde{Q}_j|}\int_{\tilde{Q}_j} |f(x)|\,dx \le \lambda$.

A fortiori $\int_{Q_j} |f(x)|\,dx \le 2^n \lambda\, |Q_j|$.

Remarquons que les cubes Q_j étant dyadiques et maximaux sont disjoints. Par ailleurs si $\|f\|_\infty \le \lambda$, il n'y a pas de cubes Q_j.

Posons finalement $f_j = f - m_{Q_j} f$ sur Q_j et $f_j = 0$ sur le complémentaire de Q_j ; on a noté $m_Q f$ la moyenne de f sur le cube Q.

Les supports des f_j sont deux à deux disjoints et $\int f_j(x)\,dx = 0$ tandis que $\int |f_j(x)|\,dx \le 2^{n+1}\lambda\,|Q_j|$.

Appelons Ω la réunion des cubes Q_j ; $\Omega = \emptyset$ s'il n'y a pas de cubes Q_j.

LEMME 2. <u>On a</u> $|f(x)| \le \lambda$ <u>presque partout sur le complémentaire de</u> Ω <u>dans</u> $\mathbb{R}^n$.

Pour prouver le lemme 2, remarquons d'abord que, si $x \notin \Omega$, on a, pour tout cube dyadique Q contenant x, $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)|\,dt \le \lambda$. Sinon on aurait $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)|\,dt > \lambda$ et, comme nous l'avons déjà remarqué, Q serait contenu dans l'un des cubes maximaux Q_j composant Ω. Or x n'appartient pas à Ω.

Le théorème de différentiation de Lebesgue implique $|f(x)| \le \lambda$ presque partout sur le complémentaire de Ω. On pose alors $b(x) = \sum_1^\infty f_j(x)$; f_j est supportée par le cube dyadique Q_j ; les Q_j sont deux à deux disjoints, $\int_{Q_j} f_j(x)\,dx = 0$, $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f_j(x)|\,dx \le 2^{n+1}\lambda$ et la mesure de la réunion Ω des Q_j ne dépasse pas $\frac{\|f\|_1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$; ceci parce que $\lambda |Q_j| < \int_{Q_j} |f(x)|\,dx$ et en additionnant $\lambda\,|\Omega| \le \|f\|_1$.

La décomposition $f(x) = g(x) + b(x)$ s'appelle la décomposition de Calderón-

Zygmund de f et, en vertu du lemme 2, on a $|g(x)| \leq 2^n\lambda$ presque partout. En fait $f(x)$ et $g(x)$ coïncident sur le complémentaire de Ω tandis que $g(x) = m_{Q_j} f$ si $x \in Q_j$.

Puisque f est une fonction simple, la décomposition de Calderón-Zygmund de f ne comporte, en réalité, qu'un nombre fini de termes.

Désignons, pour chaque j, par Q_j^* le cube ayant même centre que Q_j et pour côté le double de celui de Q_j. Soit Ω^* la réunion des Q_j^*. On a $|\Omega^*| \leq \sum_j |Q_j^*| = 2^n \sum_j |Q_j| = 2^n |\Omega| \leq 2^n/\lambda$.

Pour démontrer l'inégalité (18), nous désignerons par E l'ensemble des $x \notin \Omega^*$ tels que $|T(f)(x)| > \lambda$ et montrerons que $|E| \leq C_n/\lambda$. Puisque l'on a une majoration analogue pour $|\Omega^*|$, l'inégalité (18) en découle.

Désignons par E_1 l'ensemble des $x \in E$ tels que $|T(g)|(x) > \frac{\lambda}{2}$ et par E_2 l'ensemble des $x \in E$ vérifiant $|T(b)|(x) > \frac{\lambda}{2}$. Puisque $|T(f)| \leq |T(g)| + |T(b)|$, on a $E \subset E_1 \cup E_2$.

Pour majorer $|E_1|$, remarquons d'abord que

$$\int_{\mathbf{R}^n} |g|^2 = \int_{\Omega} |g|^2\,dx + \int_{\Omega^c} |g|^2\,dx \leq$$

$$\sum_j |Q_j| |m_{Q_j} f|^2 + \lambda \int_{\Omega^c} |f(x)|\,dx \leq C_n \lambda .$$

Il en résulte $\frac{\lambda^2}{4} |E_1| \leq \int_{\mathbf{R}^n} |T(g)|^2\,dx \leq \int_{\mathbf{R}^n} |g|^2\,dx \leq C_n\lambda$ et $|E_1| \leq \frac{4C_n}{\lambda}$.

Pour majorer $|E_2|$, il suffit de prouver le résultat suivant.

LEMME 3. $\int_{\complement\Omega^*} |T(b)(x)|\,dx \leq C'_n$.

La vérification du lemme 3 repose sur les estimations des noyaux associés aux opérateurs de Calderón-Zygmund.

Si $x \notin \Omega^*$, on écrit $T(b)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} T(f_j)(x) =$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_{Q_j} K(x,y)\,f_j(y)\,dy = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{Q_j}\Big[K(x,y)-K(x,y_j)\Big]f_j(y)\,dy\ ;$$

cette dernière égalité vient de ce que $\int_{Q_j} f_j(y)\,dy = 0$. Or si y et y_j appartiennent à Q_j dont le côté a pour longueur ℓ_j, on a, quand $x \notin Q_j^*$,

$$\left|K(x,y)-K(x,y_j)\right| \leq C\,\ell_j\,|x-y_j|^{-n-1} \leq C'\,\frac{\ell_j}{|x-y_j|^{n+1}+\ell_j^{n+1}}$$

puisque $|x-y_j| \geq \frac{\ell_j}{2}$.

Finalement $\left|T(b)\right|(x) \leq C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\ell_j}{|x-y_j|^{n+1}+\ell_j^{n+1}} \int_{Q_j} |f_j(y)|\,dy \leq C_n\,\lambda\,\Delta(x)$

où $\Delta(x)$ est la fonction de Marcinkiewicz :

$\Delta(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\ell_j^{n+1}}{|x-y_j|^{n+1}+\ell_j^{n+1}}$. On a $\int_{\mathbf{R}^n} \Delta(x)\,dx = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}^n} \frac{\ell_j^{n+1}}{|x-y_j|^{n+1}+\ell_j^{n+1}}\,dx$

$= C_n \sum_{j=1}^{\infty} \ell_j^n = C_n\,|\Omega| \leq C_n'/\lambda$.

On en déduit aussitôt le lemme 3.

Pour passer au cas général où $f \in L^1 \cap L^2$, on peut supposer $\|f\|_1 \leq \frac{1}{10}$ et écrire $f = \sum_1^{\infty} f_\nu$ où f_ν est une fonction simple telle que $\|f_\nu\|_1 \leq 4^{-\nu}$. Naturellement on peut aussi supposer que la série $\sum_1^{\infty} f_\nu$ converge normalement dans $L^2(\mathbf{R}^n)$. On a alors $T(f) = \sum_1^{\infty} T(f_\nu)$ ce qui entraîne, en appelant E_ν l'ensemble des x tels que $|T(f_\nu)|(x) > 2^{-\nu}\lambda$, $\{x\ ;\ |T(f)| > \lambda\} \subset \bigcup_{\nu\geq 1} E_\nu$. Or $\operatorname{mes}(E_\nu) \leq \frac{C\|f_\nu\|_1}{2^{-\nu}\lambda} \leq C\,2^{-\nu}/\lambda$. et donc $\left|\{x\ ;\ |T(f)| > \lambda\}\right| \leq C/\lambda$.

L'opérateur linéaire T est donc de type faible $(1,1)$ et de type fort $(2,2)$. Le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz ([50] p. 21 th. 5) montre que $T : L^p(\mathbf{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbf{R}^n)$ est borné.

Si $p \in [2, +\infty[$, on remarque que l'adjoint T^* de T est aussi un opérateur de Calderón-Zygmund ; le noyau associé $K^*(x,y)$ étant $\overline{K}(y,x)$. En appelant $q \in]1,2[$ l'exposant conjugué de p, T^* est borné sur $L^q(\mathbf{R}^n)$ et donc T l'est sur $L^p(\mathbf{R}^n)$.

Remarques sur la démonstration du théorème 20.

Le cadre des "opérateurs de Calderón-Zygmund" a l'avantage d'être commode et de comprendre beaucoup d'opérateurs usuels. Mais on peut chercher à affaiblir les hypothèses faites sur le noyau $K(x,y)$ et permettant d'obtenir les conclusions du théorème 20.

Par exemple, dans la définition 1, (5.a) et (5.b) peuvent être remplacés par la condition suivante :

il existe une constante C et un nombre $\delta \in \left]0,1\right]$ tels que, si $|y-y_o| \leq d$ et $|x-y_o| \geq 2d$ ($x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^n$, $y_o \in \mathbf{R}^n$, $d > 0$) on ait $|K(x,y)| \leq \dfrac{C}{|x-y|^n}$,

$$|K(x,y) - K(x,y_o)| \leq \frac{Cd^\delta}{|x-y_o|^{n+\delta}}$$

et
$$|K(y,x) - K(y_o,x)| \leq \frac{Cd^\delta}{|x-y_o|^{n+\delta}}.$$

Nous verrons d'ailleurs que ces trois conditions suffisent également pour obtenir le théorème 21 ci-dessous (en remplacement de (5.a) et (5.b)).

Enfin la géométrie euclidienne sur $\mathbf{R}^n$ peut être remplacée par une géométrie plus complexe. R. Coifman et G. Weiss ont systématiquement développé ce point de vue en définissant les "espaces de nature homogène" ([22]).

3^{bis}. LA CONVERGENCE PRESQUE PARTOUT DES INTÉGRALES SINGULIÈRES DE CALDERÓN-ZYGMUND.

Soient K un noyau de Calderón-Zygmund et T l'opérateur associé ; T est défini presque partout par

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} K(x,y)\, f(y)dy$$

quand $f \in C_o^\infty(\mathbf{R}^n)$.

On pose $T_\varepsilon f(x) = \int_{|x-y| \geq \varepsilon} K(x,y)\, f(y)\, dy$ et

$$T_* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon f(x)| .$$

Plus généralement, si T est un opérateur de Calderón-Zygmund et si K désigne le noyau associé, on définira de même T_ε et T_*.

THÉORÈME 21. Si K est un noyau de Calderón-Zygmund, l'opérateur maximal associé T_* envoie L^1 dans L^1-faible et est borné sur L^p pour $1 < p < +\infty$.

Pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$, $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} T_\varepsilon f(x)$ existe presque partout et coïncide presque partout avec $Tf(x)$, définie au sens fonctionnel de la façon suivante : si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$, Tf est la limite, dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, de $T\varphi_k$ lorsque $\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\|f - \varphi_k\|_p \to 0$ $(k \to +\infty)$.

On peut se demander quel est l'analogue du théorème 21 pour les opérateurs de Calderón-Zygmund.

Si T est un opérateur de ce type, T_* est encore borné de L^1 dans L^1-faible et sur tous les L^p, $1 < p < +\infty$. Cependant on n'a plus $Tf = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} T_\varepsilon f$ presque-partout ; ceci puisque l'on n'a pas cette relation quand $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

L'inégalité suivante, dite "inégalité de Cotlár" est au coeur de la démonstration du théorème 21.

PROPOSITION 2. Il existe une constante C_n ne dépendant que de la dimension n et ayant la propriété suivante. Soient T un opérateur de Calderón-Zygmund et $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$T_* f(x) \leq C_n \left\{ (Tf)^*(x) + \|T\| \, f^*(x) \right\} . \tag{19}$$

On a noté g^* la fonction maximale de Hardy et Littlewood de g.

Il n'est pas exclu que les deux membres de (19) vaillent $+\infty$.

La preuve de (19) débute par le lemme suivant.

LEMME 4. Il existe une constante C_n telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, on ait

(20) $$\varepsilon \int_{|y-x| \geq \varepsilon} |y-x|^{-n-1} |f(y)| dy \leq C_n f^*(x).$$

Naturellement on peut se ramener au cas où $x = 0$. On emploie alors des coordonnées sphériques et l'on pose $m(r) = \int_{|y| \leq r} |f(y)| dy$.

On a donc, en appelant γ_n le volume de la boule $|y| \leq 1$, $f^*(0) = \sup\limits_{r>0} \frac{m(r)}{\gamma_n r^n}$ et le membre de gauche de (20) vaut

(21) $$\begin{aligned} &\varepsilon \int_{|y| \geq \varepsilon} |y|^{-n-1} |f(y)| dy = \varepsilon \int_\varepsilon^\infty r^{-n-1} m'(r)\, dr = \\ &\varepsilon \Big[r^{-n-1} m(r) \Big]_\varepsilon^\infty + (n+1)\, \varepsilon \int_\varepsilon^\infty r^{-n-2} m(r)\, dr. \end{aligned}$$

On a, puisque $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, $m(r) \leq \|f\|_1$ et dans le terme tout intégré, la contribution de $+\infty$ est nulle ; celle de ε est négative et (21) ne dépasse pas
$(n+1)\, \varepsilon \int_\varepsilon^\infty r^{-n-2} m(r)\, dr \leq \gamma_n f^*(0)(n+1)\, \varepsilon \int_\varepsilon^\infty r^{-2}\, dr = (n+1)\, \gamma_n f^*(0)$.

LEMME 5. Pour tout noyau de Calderón-Zygmund K, tout $\varepsilon > 0$, tout $x \in \mathbf{R}^n$, tout $x' \in \mathbf{R}^n$ et toute fonction $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, on a

(22) $$|x'-x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow \left| \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \Big[K(x,y) - K(x',y) \Big] f(y)\, dy \right| \leq C_n \|K\|_* f^*(x).$$

En effet $|K(x,y) - K(x',y)| \leq C''_n |x-x'|\, |x-y|^{-n-1} \|K\|_*$ si $|x-y| \geq 2|x'-x|$; ceci grâce à l'inégalité des accroissements finis et à la définition des noyaux de Calderón-Zygmund.

On est alors ramené à (20).

Remarquons que dans (22) on peut remplacer

$$\int_{|x-y| \geq \varepsilon} K(x',y) f(y)\, dy \quad \text{par} \quad \int_{|x'-y| \geq \varepsilon} K(x',y) f(y) dy \quad \text{car}$$

l'erreur commise ne dépasse pas $\int_{\frac{\varepsilon}{2} \leq |x-y| \leq \frac{3\varepsilon}{2}} |K(x',y)|\, |f(y)|\, dy \leq$

$$\leq C_n\, \varepsilon^{-n}\|K\|_* \int_{\frac{\varepsilon}{2}\leq |x-y| \leq \frac{3\varepsilon}{2}} |f(y)|\,dy \;\leq C_n'\, f^*(x)\|K\|_* .$$

Nous en venons à la preuve de l'inégalité de Cotlar. On peut évidemment se limiter au cas où $x = 0$ et où la norme de l'opérateur de Calderón-Zygmund T est égale à 1.

Appelons ε un nombre positif, T_ε l'opérateur tronqué $\int_{|y-x|\geq\varepsilon} K(x,y)f(y)dy$, f_1 le produit de f par la fonction caractéristique de $|y|\leq\varepsilon$ et $f_2 = f - f_1$.

Nous nous proposons de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$|T_\varepsilon f|(0) \leq C_n\left\{(Tf)^*(0) + f^*(0)\right\}. \tag{23}$$

En prenant la borne supérieure du membre de gauche de (23) par rapport à tous les $\varepsilon > 0$, on obtient l'inégalité de Cotlár.

On remarque que $(T_\varepsilon f)(0) = T(f_2)(0)$. Désignons par B la boule $|y|\leq\frac{\varepsilon}{2}$. Pour majorer $(T_\varepsilon f)(0) = T(f_2)(0)$, nous allons comparer $T(f_2)(0)$ aux autres valeurs prises par $T(f_2)$ dans la boule B.

On a, par le lemme 5, pour tout $x\in B$,

$$|Tf_2(0) - Tf_2(x)| \leq C_n\, f^*(0). \tag{24}$$

Pour revenir à $Tf(x)$, on écrit, pour presque tout $x\in B$,

$$Tf_2(x) = Tf(x) - Tf_1(x) \tag{25}$$

et (24) devient, pour presque tout $x\in B$,

$$|Tf_2|(0) \leq |Tf|(x) + |Tf_1|(x) + C_n f^*(0). \tag{26}$$

Si $Tf_2(0) = 0$, l'inégalité (23) est évidemment satisfaite. Sinon soit $\lambda > 0$ et $\lambda < |Tf_2|(0)$. Désignons par μ la mesure de probabilité $|B|^{-1}\chi_B\,dx$ (χ_B étant la fonction caractéristique de B).

Soient E_1 l'ensemble des $x\in B$ tels que $|Tf|(x) > \frac{\lambda}{3}$, E_2 l'ensemble des $x\in B$ tels que $|Tf_1|(x) > \frac{\lambda}{3}$ et $E_3 = \emptyset$ si $C_m f^*(0)\leq\frac{\lambda}{3}$, $E_3 = B$ sinon.

Compte tenu de (26) et de $\lambda < |Tf_2|(0)$, on a $B = E_1\cup E_2\cup E_3$ et $1 = \mu(B)\leq\mu(E_1)+\mu(E_2)+\mu(E_3)$.

Or l'inégalité de Bienaymé-Tchebitcheff entraîne

(27) $$\mu(E_1) \leq \frac{3}{\lambda}\int |Tf|\,d\mu = \frac{3}{\lambda\,|B|}\int_B |Tf|(x)\,dx \leq \frac{3}{\lambda}(Tf)^*(0).$$

Pour évaluer $\mu(E_3)$, on utilise la majoration triviale $\mu(E_3) \leq \dfrac{C_n f^*(0)}{\lambda/3}$.

Enfin pour $\mu(E_2)$, on emploie le type faible $(1,1)$ de l'opérateur T.

Il vient $\mu(E_2) = \dfrac{|E_2|}{|B|} \leq \dfrac{3C_n}{\lambda|B|}\displaystyle\int |f_1|\,dx \leq C'_n\,\lambda^{-1}\,f^*(0)$.

On a donc, pour tout $\lambda < |Tf_2|(0)$,

(28) $$1 \leq \mu(E_1) + \mu(E_2) + \mu(E_3) \leq C''_n\,\lambda^{-1}\left\{(Tf)^*(0) + f^*(0)\right\}.$$

En multipliant les deux membres de (28) par λ, il vient

(29) $$\lambda \leq C''_n\left\{(Tf)^*(0) + f^*(0)\right\}$$

et, en prenant la borne supérieure du membre de gauche par rapport à $\lambda < |Tf_2|(0)$, on obtient (23).

PROPOSITION 3. Il existe, pour tout $p \in \left]1,+\infty\right[$ et tout $n \geq 1$ une constante $C(p,n)$ telle que, pour tout opérateur de Calderón-Zygmund T et toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, on ait

(30) $$\|T_* f\|_p \leq C(p,n)\,\|f\|_p\,\|T\|.$$

L'inégalité (30) est une conséquence immédiate de l'inégalité de Cotlar et de l'inégalité de Hardy et Littlewood suivante : $\|g^*\|_p \leq \gamma(p,n)\|g\|_p$ si $1 < p < +\infty$ et $g \in L^p(\mathbf{R}^n)$.

Compte tenu du théorème 20, on a $\|(Tf)^*\|_p \leq \gamma(p,n)\|Tf\|_p \leq C'(p,n)\|T\|\,\|f\|_p$. De même l'inégalité de Hardy et Littlewood s'applique à $\|f^*\|_p$.

Nous venons de prouver que l'opérateur maximal T_* est borné sur L^p si $1 < p < +\infty$.

Pour vérifier que T_* envoie continûment $L^1(\mathbf{R}^n)$ dans l'espace L^1-faible, on procède de façon analogue mais l'inégalité de Cotlar doit être affinée de la façon suivante.

PROPOSITION 4. Soient $\delta \in]0,1]$ un nombre réel et $n \geq 1$ un entier. Il existe une constante $C_n(\delta)$ telle qu'avec les notations de la proposition 2, on ait

$$T_* f(x) \leq C_n(\delta)\left\{M_\delta(Tf)(x) + \|T\|\, f^*(x)\right\} ;$$

on a posé, si $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ est une fonction mesurable,

$M_\delta(g)(x) = \sup\limits_{x \in B} \left(\frac{1}{|B|}\int_B |g|^\delta dy\right)^{1/\delta}$; la borne supérieure étant prise par rapport à toutes les boules (de rayon non nul) contenant x.

La preuve de la proposition 4 suit, grosso modo, les lignes de celle de la proposition 2. On a cependant besoin de quelques résultats auxiliaires supplémentaires.

LEMME 6. Soit $g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Posons, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $g^*(x) = M_1 g(x)$, au sens de la proposition 4. Alors, pour tout $\lambda > 0$,

$$\left|\left\{x \;;\; g^*(x) > \lambda\right\}\right| \leq \frac{C_n}{\lambda}\int_{\{g^* > \lambda\}} |g(y)|\, dy. \tag{31}$$

Soit en effet E l'ensemble des x vérifiant $g^*(x) \leq \lambda$. Définissons $g_1(x) = g(x)$ si $x \in E$, $g_1(x) = 0$ sinon et posons $g_2(x) = g(x) - g_1(x)$. Soit finalement Ω l'ouvert $\complement E$.

Si $x \in \Omega$ et si B est une boule contenant x, deux cas peuvent se produire.

Ou bien B rencontre E. Alors, par définition de E et de g^*, on a $\frac{1}{|B|}\int_B |g(x)|\, dx \leq \lambda$.

Ou bien B ne rencontre pas E et g coïncide avec g_2 sur B. En tout état de cause, si l'on veut trouver une boule B contenant x telle que $\frac{1}{|B|}\int_B |g(x)|\, dx > \lambda$, on doit obligatoirement assurer $\frac{1}{|B|}\int_B |g_2(x)|\, dx > \lambda$.
On a donc $\left\{x \;;\; g^*(x) > \lambda\right\} \subset \left\{x \;;\; g_2^*(x) > \lambda\right\}$ ce qui implique (31).

LEMME 7 (Kolmogoroff). Si $g \in L^1$-faible avec une norme ne dépassant pas λ et si $0 < \delta < 1$, pour toute partie borélienne E de $\mathbf{R}^n$, on a

$$\int_E |g|^\delta dx \leq C_n(\delta)\, |E|^{1-\delta}\, \lambda^\delta .$$

La preuve est très simple. On peut évidemment se restreindre au cas où $\lambda = 1$ car il n'y a rien à démontrer si $\lambda = 0$.

On pose, si $k \in \mathbb{Z}$, $E_k = \{x \in E \; ; \; |g(x)| > 2^k\}$. On appelle k_o le plus grand entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{-k_o} \geq |E|$ et l'on majore $|E_k|$ par

$$|E_k| \leq |E| \qquad \text{si} \qquad k < k_o$$

$$|E_k| \leq 2^{-k} \qquad \text{si} \qquad k \geq k_o.$$

Cette dernière inégalité vient de ce que la norme de g dans L^1-faible est égale à 1.

Finalement $\int_E |g|^\delta dx \leq \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{(k+1)\delta} |E_k \setminus E_{k+1}|$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{(k+1)\delta}(|E_k| - |E_{k+1}|) = \sum_{-\infty}^{\infty} (2^\delta - 1) 2^{k\delta} |E_k| \leq$$

$$(2^\delta - 1) \sum_{k_o}^{\infty} 2^{k(\delta-1)} + (2^\delta - 1) \sum_{-\infty}^{k_o-1} 2^{k\delta} |E| \leq C_\delta |E|^{1-\delta}$$

compte tenu du choix de k_o.

Reprenant les notations de la preuve de la proposition 2, on repart de (26) que l'on élève à la puissance δ pour en prendre ensuite la moyenne par rapport à la mesure de probabilité μ.

Il vient

$$|Tf_2|(0) \leq C_\delta M_\delta (Tf)(0) + C_\delta \, \varepsilon^{-n/\delta} \left(\int_B |T f_1|^\delta (y) \, dy\right)^{1/\delta} + C_\delta f^*(0). \tag{32}$$

Il reste à majorer le second terme du membre de droite de (32). L'inégalité de Kolmogoroff donne, en désignant par λ la norme de Tf_1 dans L^1-faible,

$$\int_B |Tf_1|^\delta (y) \, dy \leq C_\delta \lambda^\delta |B|^{1-\delta} = C'_\delta \, \varepsilon^{n-n\delta} \lambda^\delta .$$

Finalement $\lambda \leq C_n \|f_1\|_1 \leq \varepsilon^n C_n \, f^*(0)$ et ceci termine la preuve de la proposition 4.

Nous allons maintenant majorer la norme L^1-faible de $T_* f$ par $C_n \|T\| \|f\|_1$ lorsque T est un opérateur de Calderón-Zygmund et $f \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Le passage aux fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ quelconques s'obtient par l'argument utilisé pour le théorème 20.

Compte tenu de la proposition 4, il suffit de majorer la norme dans L^1-faible de $M_\delta(Tf)$ quand $0 < \delta < 1$.

Soient $\lambda > 0$ et E l'ensemble défini par $M_\delta(Tf) > \lambda$. Puisque $f \in C_o^\infty(\mathbf{R}^n)$, E est un ouvert borné (donc de mesure finie) et, grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebitcheff et au lemme 6, on a

$$|E| = \left|\left\{(|Tf|^\delta)^* > \lambda^\delta\right\}\right| \le \frac{C_n}{\lambda^\delta}\int_E |Tf|^\delta(y)\,dy.$$

On majore cette intégrale par l'inégalité de Kolmogoroff et l'on obtient

$$|E| \le C_n'(\delta)\,\lambda^{-\delta}\,|E|^{1-\delta}\|f\|_1^\delta\,\|T\|^\delta.$$

Puisque $|E| < +\infty$, on peut diviser les deux membres de cette inégalité par $|E|^{1-\delta}$ pour avoir $|E|^\delta \le C_n'(\delta)\,\|f\|_1^\delta\,\|T\|^\delta$ qui implique l'inégalité désirée.

Montrons enfin que, si $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < +\infty$, $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0}(T_\varepsilon f)(x)$ existe presque partout et coïncide avec le prolongement à $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ de la restriction de T à $C_o^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Nous pouvons évidemment nous restreindre au cas où $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ et le noyau K sont réels.

On pose alors $\Delta(f\,;\,x) = \overline{\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}}\,(T_\varepsilon f)(x) - \underline{\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}}\,(T_\varepsilon f)(x)$. Pour tout $\eta > 0$, on a $f = g + h$ où $g \in C_o^\infty(\mathbf{R}^n)$ et $\|h\|_p \le \eta$.

On a alors presque partout $\Delta(f\,;\,x) = \Delta(h\,;\,x)$. Or $\Delta(h\,;\,x) \le 2(T_* h)(x)$. C'est-à-dire que, pour tout entier $N \ge 1$,

$$\left|\left\{x\,;\,\Delta(f;x) > \tfrac{1}{N}\right\}\right| \le 2^p N^p \|T^* h\|_p^p \le C_p N^p \eta^p. \tag{33}$$

Le membre de gauche de (33) ne dépend évidemment pas de $\eta > 0$; en laissant η tendre vers 0, il vient $\left|\left\{x\,;\,\Delta(f\,;\,x) > \frac{1}{N}\right\}\right| = 0$.

Il en résulte que, pour presque tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\Delta(f\,;\,x) = 0$. Nous venons de prouver l'existence presque partout de $Lf(x) = \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}(T_\varepsilon f)(x)$ si $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$.

Appelons encore T l'opérateur qui prolonge à $L^p(\mathbf{R}^n)$ notre opérateur

$T : C_o^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

Puisque $|Lf|(x) \leq T_* f(x)$, les deux opérateurs T et L sont continus sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ et ils coïncident sur $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$. On a donc $L = T$ sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ ce qui s'écrit $(Tf)(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} K(x,y)\, f(y)\, dy$ presque-partout.

4. L'INÉGALITE DE FEFFERMAN ET STEIN.

L'inégalité de Cotlar a été essentielle dans la preuve du théorème 21. Cette inégalité présente la particularité que l'opérateur T intervient dans les deux membres, à gauche sous sa forme maximale, à droite par le biais de la fonction maximale de Tf.

Ceci est dans l'ordre des choses car l'inégalité $T_* f(x) \leq C\, f^*(x)$ ne peut être vraie : sinon les opérateurs de Calderón-Zygmund seraient bornés de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Or ceci n'est pas : il suffit pour le voir de considérer l'exemple (si $n = 1$) du noyau $K(x,y) = \dfrac{1}{x-y}$.

Il existe cependant une inégalité semblable à celle de Cotlar où T n'intervient que dans le membre de gauche.

Cette inégalité repose sur la définition de la fonction $f^\#$ de Fefferman et Stein ([31]).

DÉFINITION 3. <u>Soit</u> $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ <u>une fonction localement intégrable. On pose alors</u>

$$f^\#(x) = \sup_{r>0} \left\{ \inf_{c \in \mathbb{C}} \frac{1}{\gamma_n r^n} \int_{|x-y| \leq r} |f(y) - c|\, dy \right\}.$$

<u>C'est-à-dire que</u> $f^\#(x) \leq \lambda$ <u>signifie que pour toute boule</u> B <u>centrée en</u> x, <u>on peut trouver une constante</u> $c = c(B)$ <u>telle que</u>

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - c|\, dy \leq \lambda. \tag{34}$$

On a appelé γ_n le volume de $|y| \leq 1$.

On en déduit immédiatement $|m_B f - c| \leq \lambda$ et donc $\frac{1}{|B|}\int_B |f(y) - m_B f|\,dy \leq 2\lambda$; or dans la plupart des applications, changer λ en 2λ n'a aucune importance et l'on peut toujours supposer que c est la moyenne de f sur B.

THÉORÈME 22. <u>Pour tout entier</u> $n \geq 1$ <u>et tout</u> $p \in \left]1,+\infty\right[$ <u>il existe une constante</u> $C(p,n)$ <u>ayant la propriété suivante</u>.

<u>Si</u> T <u>est un opérateur de Calderón-Zygmund de norme</u> $\|T\|$, <u>on a pour toute fonction</u> $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ <u>et tout</u> $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(Tf)^{\#}(x) \leq C(p,n)\, M_p f(x) \|T\| \tag{35}$$

<u>où</u> $M_p f(x) = \left[(|f|^p)^*(x)\right]^{1/p}$.

En d'autres termes $M_p f(x) = \sup\limits_{B \ni x}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f|^p\,dy\right)^{1/p}$. Avant de démontrer (35), remarquons que si $1 \leq p_1 \leq p_2$, $f^*(x) \leq M_{p_1} f(x) \leq M_{p_2} f(x)$. L'inégalité (35) est donc d'autant plus précise que p est plus proche de 1 et l'on peut se demander si elle reste vraie quand $p = 1$.

Nous allons voir qu'il n'en est rien en présentant un contre exemple en dimension 1.

PROPOSITION 5. <u>Il n'existe pas de constante</u> $C > 0$ <u>telle que, pour toute fonction</u> $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, <u>on ait</u> $(Hf)^{\#}(x) \leq C\, f^*(x)$.

On a appelé H la transformation de Hilbert définie par le noyau $\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{x-y}$. On part d'une fonction $\varphi \geq 0$, appartenant à $C_0^\infty(\mathbb{R})$, d'intégrale égale à 1 et portée par $[0,1]$. On forme successivement (si $j \geq 1$), $f_j(x) = j\varphi(jx)$ et $g_j(x) = f_j(x-1)$.

Alors un calcul immédiat donne $g_j^*(0) \leq 1$. En désignant par $\tilde{\psi}$ la transformée de Hilbert de ψ, on a $\tilde{g}_j(x) = \frac{1}{\pi}\int \frac{1}{x-y} f_j(y-1)\,dy \longrightarrow \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{x-1}$.

Pour terminer de prouver la proposition 5, il suffit d'établir le résultat suivant.

LEMME 8. Soient $k_j \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $c_j \in \mathbb{C}$ tels que

(36) il existe C telle que $\int_{-2}^{2} |k_j(x) - c_j|\,dx \leq C$

(37) $k_j(x) \longrightarrow k(x)$ presque partout $(j \longrightarrow +\infty)$.

Alors $$\int_{-2}^{2} |k(x)|\,dx < +\infty .$$

Dans notre cas, on a $k_j(x) = \tilde{g}_j(x)$ et $k(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{x-1}$. La propriété (36) résulte de $k_j^{\#}(0) \leq C'$ et cependant $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{|x-1|} = +\infty$.

La preuve du lemme 8 se ramène à vérifier que la suite $|c_j|$ est bornée. Sinon, quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que $|c_j| \rightarrow +\infty$ et même que $\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{|c_j|}} < +\infty$.

Alors on écrit $k_j(x) = c_j + \ell_j(x)$, on a $\int_{-2}^{2} |\ell_j(x)|\,dx \leq C$ et donc $|c_j|^{-1/2}\,\ell_j(x) \longrightarrow 0$ presque partout sur $[-2,2]$. Or $|c_j|^{-1/2}\,\ell_j(x) = |c_j|^{-1/2}\,k_j(x) + \frac{c_j}{\sqrt{|c_j|}}$; $|c_j|^{-1/2}\,k_j(x)$ tend également presque partout vers 0 et il en résulterait la même propriété pour $\frac{c_j}{\sqrt{|c_j|}}$ ce qui est absurde.

Venons-en à la preuve du théorème 22.

On peut naturellement se ramener au cas où $x = 0$; on en profitera pour désigner par x la variable d'intégration.

Soit B une boule de rayon $r > 0$ centrée en 0. Désignons par $\tilde{B}$ la boule double et posons $f = f_1 + f_2$ où $f_1 = f$ sur $\tilde{B}$, $f_1 = 0$ sur le complémentaire de $\tilde{B}$.

Nous allons vérifier successivement que, si $\|T\| = 1$,

(38) $$\frac{1}{|B|} \int_B |Tf_1|(x)\,dx \leq C'(p,n)\, M_p f(0)$$

et qu'en posant $c = (Tf_2)(0) = \int K(0,y)\, f_2(y)\, dy$, on a, si $|x| \leq r$,

(39) $$|(Tf_2)(x) - (Tf_2)(0)| \leq C''_n\, f^*(0).$$

Il en résultera évidemment que $\frac{1}{|B|}\int_B |Tf(x) - c|\,dx \leq C(p,n)\, M_p f(0)$ ce qui est l'inégalité désirée.

L'inégalité (39) n'est autre que l'inégalité du lemme 5. En ce qui concerne (38), on a tout simplement

(47) $$\begin{aligned}\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1|(x)\,dx &\leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1|^p\,dx\right)^{1/p} \\ &\leq |B|^{-1/p}\|Tf_1\|_p \leq C(p,n)|B|^{-1/p}\|f_1\|_p \leq C'(p,n)(M_p f)(0).\end{aligned}$$

Comme J. O. Strömberg l'a remarqué, cette démonstration s'applique également au résultat suivant (qui sera utilisé dans la preuve du théorème 17).

PROPOSITION 6. Soient $1 < q \leq r < +\infty$ deux nombres réels. Il existe une constante $C = C(q,r,n)$ ayant la propriété suivante.

Si $K(x,y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est une fonction continue telle que $|K(x,y)| \leq |x-y|^{-n}$, $|\nabla_x K(x,y)| \leq |x-y|^{-n-1}$ et $|\nabla_y K(x,y)| \leq |x-y|^{-n-1}$; si, de plus l'opérateur $Tf(x) = \int K(x,y)\, f(y)\, dy$ a la propriété que, pour toute boule $B \subset \mathbb{R}^n$ et toute fonction $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ portée par B, on ait

(41) $$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |Tf|^q\,dx\right)^{1/q} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B |f|^r dx\right)^{1/r},$$

alors l'opérateur T est un opérateur de Calderón-Zygmund dont la norme ne dépasse pas $C(q,r,n)$.

En effet la preuve de (39) s'applique car elle ne dépend que des propriétés de décroissance du noyau $K(x,y)$.

En ce qui concerne (40), on a grâce à (41),

$$\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1|(x)\,dx \leq \frac{2^n}{|\tilde{B}|}\int_{\tilde{B}} |Tf_1|(x)\,dx \leq \tag{42}$$
$$2^n\Big(\frac{1}{|\tilde{B}|}\int_{\tilde{B}} |Tf_1|^q\,dx\Big)^{1/q} \leq 2^n\Big(\frac{1}{|\tilde{B}|}\int_{\tilde{B}} |f_1|^r\,dx\Big)^{1/r} \leq 2^n M_r(f)(x).$$

Soit $s > r$ un nombre réel. On sait que l'opérateur sous-linéaire $g \to g^*$ est borné sur tous les $L^p(\mathbf{R}^n)$ pour $1 < p < +\infty$. Il en résulte que

$$\|M_r(f)\|_s \leq C(\tfrac{s}{r}, n)\|f\|_s. \tag{43}$$

Or en combinant (39) et (42), on a

$$(Tf)^{\#}(x) \leq C_n\,(M_r f)(x). \tag{44}$$

Les inégalités (43) et (44) impliquent

$$\|(Tf)^{\#}\|_s \leq C'(\tfrac{s}{r}, n)\|f\|_s. \tag{45}$$

On utilise alors un théorème de Fefferman et Stein ([31] p. 153 th. 5).

THÉORÈME 23. Soient $p \in \,]1,+\infty[$ un nombre réel et $n \geq 1$ un entier. Il existe une constante $C(p,n)$ ayant la propriété que, pour toute fonction $g \in L^p(\mathbf{R}^n)$, on ait $\|g\|_p \leq C(p,n)\,\|g^{\#}\|_p$.

On applique ce résultat à $g = Tf$; Tf appartient à $L^s(\mathbf{R}^n)$ parce que T est défini par un noyau tronqué et que $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Alors (45) et le théorème 23 donnent, si $s \in \,]r,+\infty[$

$$\|Tf\|_s \leq C''(s,n)\|f\|_s. \tag{46}$$

Cette inégalité suffit pour reprendre la preuve de la proposition 2 et conclure que si f appartient à $L^1(\mathbf{R}^n)$ avec une norme égale à 1, Tf appartient à L^1-faible avec une norme ne dépassant pas C.

Par interpolation, on obtient $\|Tf\|_2 \leq C'\|f\|_2$ et la norme de T, en tant qu'opérateur de Calderón-Zygmund, ne dépasse pas $C' + 1$.

5. PREUVE DU THÉORÈME 17.

Nous allons démontrer le théorème 17 en prouvant un résultat plus précis.

PROPOSITION 7. Soient $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $|A(x) - A(y)| \leq |x-y|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$ et M_A l'opérateur de multiplication par la fonction A.

Alors, pour tout opérateur pseudo-différentiel T, classique et d'ordre 1, le commutateur $[T,A]$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Montrons d'abord pourquoi cette proposition entraîne le théorème 17.

L'énoncé du théorème 17 est que le commutateur entre un o.p.d. classique d'ordre 0, S, et un champ de vecteurs X à coefficients Lipschitz, tous deux définis sur une variété C^∞ compacte V, est un opérateur borné sur $L^2(V)$.

En réalité il s'agit d'un résultat local que l'on démontre en utilisant des coordonnées locales. Pour le voir, on fait les deux remarques suivantes

α) si $f \in L^2(V)$ est portée par un compact ω de V, alors $[S,X]f = S(Xf) - X(Sf)$ est une fonction de classe Lipschitz sur le complémentaire de ω et tout revient donc à estimer la norme L^2 de $[S,X]f$ sur un voisinage de ω.

β) on peut recouvrir V par les intérieurs de compacts $\omega_1, \ldots, \omega_N$ assez petits pour que l'on puisse, au voisinage de chaque ω_j, $1 \leq j \leq N$, utiliser des coordonnées locales ; alors toute fonction $f \in L^2(V)$ s'écrit $f = f_1 + \ldots + f_N$ où f_j est portée par ω_j.

Pour traiter le problème local, on se ramène à $\mathbb{R}^n$ et l'on peut supposer que le champ de vecteurs est $X = A \frac{\partial}{\partial x_j}$, A étant Lipschitzienne et à support compact.

On appelle S' le commutateur $\left[S, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]$; S et S' sont alors deux o.p.d. classiques d'ordre 0 définis par des symboles appartenant à $S^0_{1,0}$.

On doit étudier l'opérateur L défini par

$L(f) = S\left(A \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - A \frac{\partial}{\partial x_j}(Sf).$

Or on a

$$S\left(A \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = S\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(Af)\right) - S\left(\frac{\partial A}{\partial x_j} f\right) = \tag{47}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[S(Af)\right] + S'(Af) - S\left(\frac{\partial A}{\partial x_j} f\right).$$

Puisque le support de A est compact, l'opérateur $f \longrightarrow Af$ est borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$. Les deux derniers termes de (47) sont donc des opérateurs bornés sur $L^2(\mathbf{R}^n)$. On a ainsi, modulo des opérateurs bornés, $L \equiv \left[\frac{\partial S}{\partial x_j}, M_A\right]$.

La preuve de la proposition 7 sera présentée en dimension 1. Ceci pour deux raisons. D'une part la démonstration complète peut être trouvée dans [21]. D'autre part le passage à la dimension n ne nécessite que des modifications superficielles entraînant cependant un alourdissement très sensible de l'écriture.

Désignons par $\tau(x,\xi) \in S^1_{1,0}$ le symbole de l'opérateur T.

Nous allons procéder en deux temps.

Dans une première étape nous allons tronquer $\tau(x,\xi)$ en le remplaçant par $\tau(x,\xi)\,\varphi(\frac{\xi}{j})$ où $\varphi \in C_o^\infty(\mathbf{R})$ est égale à 1 en 0. De sorte que toutes les intégrales écrites à l'aide du noyau $K_j(x,y)$ de l'o.p.d. T_j (associé au symbole tronqué) seront absolument convergentes).

Nous montrerons l'existence d'une constante C telle que, quel que soit $j \geq 1$, on ait, si $f \in C_o^\infty(\mathbf{R})$,

$$\|T_j(Af) - AT_j(f)\|_2 \leq C\|f\|_2. \tag{48}$$

Un o.p.d. d'ordre 1 est continu de l'espace de Sobolev $H^{(1)}$ dans L^2. Il en résulte que si $g \in H^{(1)}$, $\|T_j(g) - T(g)\|_2 \longrightarrow 0$ $(j \to +\infty)$. En particulier si $f \in C_o^\infty(\mathbf{R})$ est fixé et si l'on fait tendre j vers $+\infty$ dans (48), on obtient, à la limite, l'inégalité désirée

$$\|T(Af) - AT(f)\|_2 \leq C\|f\|_2. \tag{49}$$

Naturellement pour alléger les notations nous oublierons l'indice j dans ce qui suit.

Nous allons faire une autre simplification en supposant que la dérivée $a = A'$ de A appartient à $C_0^\infty(\mathbf{R})$. Dans ce cas nous montrerons la proposition suivante.

PROPOSITION 8. <u>Pour tout ensemble borné</u> B <u>de symboles</u> $\tau \in S^1_{1,0}$, <u>il existe une constante</u> C <u>telle que, pour toute fonction</u> $A \in C^\infty(\mathbf{R})$ <u>vérifiant</u> $A' \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ <u>et pour toute fonction</u> $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ <u>on ait, si</u> T <u>est un o.p.d. dont le symbole</u> $\tau(x,\xi)$ <u>appartient à</u> B <u>et a un support compact en</u> ξ,

$$(50) \qquad \|T(Af) - AT(f)\|_2 \leq C\|f\|_2\|a\|_\infty .$$

L'uniformité obtenue dans cet énoncé permettra d'atteindre le cas général où $A' \in L^\infty(\mathbf{R})$.

Dorénavent les symboles sont tronqués en ξ et les fonctions $a = A'$ et f appartiennent à $C_0^\infty(\mathbf{R})$.

Nous énonçons trois lemmes.

LEMME 9. <u>On a, pour tout</u> $x \in \mathbf{R}$, <u>tout</u> $y \in \mathbf{R}$ <u>et toute fonction</u> $A \in C^\infty(\mathbf{R})$ <u>telle que</u> $A' = a \in C_0^\infty(\mathbf{R})$

$$(51) \qquad A(x) - A(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{i\alpha x} - e^{i\alpha y}}{i\alpha}\right)\hat{a}(\alpha)\, d\alpha .$$

La vérification est très simple et laissée au lecteur.

Le noyau $K(x,y)$ de T est défini par $R(x,z) = (2\pi)^{-1}\int e^{i\xi.z}\,\tau(x,\xi)\,d\xi$ et $K(x,y) = R(x\ ,\ x-y)$. Il est immédiat que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $z \longrightarrow R(x,z)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$; ceci parce que τ a été tronqué. On a donc $Tf(x) = \int K(x,y)f(y)dy$ si $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ et l'intégrale converge de façon évidente.

En particulier $T(Af) - ATf = g(x) = \int K(x,y)\left[A(y) - A(x)\right]f(y)\, dy.$

LEMME 10. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $a = A'$,

$T(Af)(x) - A(x)(Tf)(x) =$

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint e^{ix(\xi+\alpha)} \frac{\tau(x,\xi+\alpha) - \tau(x,\xi)}{i\alpha} \hat{a}(\alpha) \hat{f}(\xi)\, d\alpha\, d\xi .$$

On part de $g(x) = \int K(x,y) [A(y) - A(x)] f(y)\, dy$ et l'on substitue (51). On a donc

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \iint K(x,y) \frac{e^{i\alpha y} - e^{i\alpha x}}{i\alpha} \hat{a}(\alpha) f(y)\, d\alpha\, dy. \tag{53}$$

Or $\int K(x,y) e^{i\alpha y} f(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix\xi} \tau(x,\xi) \hat{f}(\xi - \alpha)\, d\xi =$

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ix(\xi+\alpha)} \tau(x,\xi+\alpha) \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

et de même $\int K(x,y) e^{i\alpha x} f(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix(\xi+\alpha)} \tau(x,\xi) \hat{f}(\xi)\, d\xi$.

Donc, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (le cas $\alpha = 0$ résultant d'un simple passage à la limite), il vient

$$\int K(x,y) \frac{e^{i\alpha y} - e^{i\alpha x}}{i\alpha} f(y)\, dy =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ix(\xi+\alpha)} \frac{\tau(x,\xi+\alpha) - \tau(x,\xi)}{i\alpha} \hat{f}(\xi)\, d\xi .$$

Le théorème de Fubini appliqué au second membre de (53) donne alors le résultat annoncé.

LEMME 11. Soit $\tau(x,\xi) \in S^1_{1,0}$. Alors on a

$$\tau(x,\xi) = \tau_0(x,\xi) + i\xi\sigma(x,\xi)$$

où $\tau_0(x,\xi) \in S^0_{1,0}$ est nul si $|\xi| \geq 20$ et où $\sigma(x,\xi) \in S^0_{1,0}$ est nul si $|\xi| \leq 10$.

C'est immédiat : on découpe $\tau(x,\xi)$ grâce à une partition C^∞ de l'unité $1 = \varphi_0(\xi) + \varphi_1(\xi)$ dans laquelle $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Nous allons décomposer la démonstration de l'inégalité (50) en trois parties.

Dans un premier temps nous montrerons que la symbole $\tau_o(x,\xi)$ donne lieu à une estimation triviale.

Ensuite nous nous occupons de l'opérateur T dont le symbole est $\xi\sigma(x,\xi)$ et montrons que

$$\text{(54)} \qquad \|T(Af) - AT(f)\|_r \leq C(p,q)\|f\|_p\|A'\|_q$$

si $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$, $1 < r < +\infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Enfin la proposition 6 s'appliquera et montrera comment passer au cas général où $1 < q \leq +\infty$.

(α) <u>Le cas de l'opérateur</u> T_o <u>associé à</u> $\tau_o(x,\xi)$.

On a $g_o(x) = T_o(Af) - A\ T_of = \int K_o(x,y)\left[A(y) - A(x)\right]f(y)$. Or $|K_o(x,y)| \leq C(1 + |x-y|)^{-3}$ comme le montre un calcul immédiat. Donc, si $\|A'\|_\infty \leq 1$, on a

$$|g_o(x)| \leq C\int (1+|x-y|)^{-2}|f(y)|dy.$$

Cette dernière intégrale est le produit de convolution entre $|f|$ et un noyau appartenant à $L^1(\mathbf{R})$.

On a donc $\|g_o\|_2 \leq C'\|f\|_2$.

(β) <u>L'inégalité (54).</u>

On utilise le lemme 10 que l'on applique à $\tau(x,\xi) = i\xi\sigma(x,\xi)$. Il vient

$$g(x) = \frac{1}{4\pi^2}\iint e^{ix(\xi+\alpha)}\ \frac{(\xi+\alpha)\,\sigma(x,\xi+\alpha) - \xi\sigma(x,\xi)}{\alpha}\ \hat{f}(\xi)\,\hat{a}(\alpha)\,d\xi d\alpha =$$
$$g_1(x) + h(x)$$

où $g_1(x) = \frac{1}{4\pi^2}\iint e^{ix(\xi+)}\,\sigma(x,\xi+\alpha)\,\hat{f}(\xi)\,\hat{a}(\alpha)\,d\xi d\alpha = S(af)(x)$; ceci en appelant S l'o.p.d. $\sigma(x,D)$. On a donc $\|g_1\|_r \leq C_r\|af\|_r \leq C_r\|f\|_p\|a\|_q$. Il reste à examiner

$$h(x) = \frac{1}{4\pi^2}\iint e^{ix(\xi+\alpha)}\left[\sigma(x,\xi+\alpha) - \sigma(x,\xi\right]\frac{\xi}{\alpha}\hat{f}(\xi)\,\hat{a}(\alpha)\,d\xi d\alpha.$$

On appelle $\varphi_o \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ une fonction paire, égale à 1 sur $\left[-\frac{1}{20}, \frac{1}{20}\right]$ et supportée par l'intervalle $\left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$. Cette fonction sert à écrire

$$1 = \varphi_o\left(\frac{\alpha}{\xi}\right) + \varphi_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$$

en appelant $\varphi_1 \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ la fonction paire telle que

$$1 = \varphi_o(t) + \varphi_1\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nous poserons

$$h_o(x) = \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{ix(\xi+\alpha)} \left[\sigma(x,\xi+\alpha) - \sigma(x,\xi)\right] \frac{\xi}{\alpha} \varphi_o\left(\frac{\alpha}{\xi}\right) \hat{f}(\xi)\, \hat{a}(\alpha)\, d\xi d\alpha\ ,$$

$$h_{1,0}(x) = \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{ix(\xi+\alpha)} \sigma(x,\xi) \frac{\xi}{\alpha} \varphi_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \hat{f}(\xi)\, \hat{a}(\alpha)\, d\xi\, d\alpha$$

et $$h_{1,1}(x) = \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{ix(\xi+\alpha)} \sigma(x,\xi+\alpha) \frac{\xi}{\alpha} \varphi_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \hat{f}(\xi)\, \hat{a}(\alpha)\, d\xi d\alpha$$

de sorte que $h(x) = h_o(x) - h_{1,0}(x) + h_{1,1}(x)$.

Pour estimer $\|h_o\|_r$, il suffit de remarquer que

$(x,\xi,\alpha) \longrightarrow \frac{\xi}{\alpha}\left[\sigma(x,\xi+\alpha) - \sigma(x,\xi)\right] \varphi_o\left(\frac{\alpha}{\xi}\right) = \lambda(x,\xi,\alpha)$ vérifie les estimations

(55) $$\left|\partial_x^\ell \partial_\xi^m \partial_\alpha^n \lambda(x,\xi,\alpha)\right| \le C_{\ell,m,n}(1+|\xi|+|\alpha|)^{-m-n}$$

comme on s'en assure immédiatement. D'ailleurs, compte tenu du support de φ_o, $1+|\xi|+|\alpha|$ et $1+|\xi|$ sont du même ordre de grandeur et (55) résulte de $\sigma \in S^0_{1,0}$.

Dès lors le théorème 12 du chapitre II s'applique et donne $\|h_o\|_r \le C(p,q)\,\|f\|_p\,\|a\|_q$.

Les traitements de $h_{1,0}$ et $h_{1,1}$ sont semblables et reposent sur l'observation suivante.

LEMME 12. <u>Il existe une fonction</u> $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ <u>telle que, pour tout</u> $t > 0$, <u>on ait</u>

(56) $$t\,\varphi_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{iu}\,\theta(u)\,du.$$

Il suffit, pour s'en convaincre, de poser $t = e^v$, $v \in \mathbb{R}$ et de remarquer que $v \longrightarrow e^v \varphi_1(e^v)$ appartient à la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz ; à ce titre $e^v \varphi_1(e^v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuv}\,\theta(u)\,du$ où $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On a donc $\frac{\xi}{\alpha}\varphi_1(\frac{\xi}{\alpha}) = |\frac{\xi}{\alpha}|\varphi_1(|\frac{\xi}{\alpha}|)$ sign ξ sign α =

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^{iu}|\alpha|^{-iu} \text{ sign } \xi \text{ sign } \alpha\, \theta(u)\,du.$$

On définit la fonction $f_u \in C^\infty \cap L^2$ par $\hat{f}_u(\xi) = \text{sign } \xi\, |\xi|^{iu}\, \hat{f}(\xi)$ et, de même, on définit $a_u \in C^\infty \cap L^2$ par $\hat{a}_u(\xi) = \text{sign } \xi\, |\xi|^{-iu}\, \hat{a}(\xi)$.

On pose $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_u(x)\, a_u(x)\, \theta(u)\,du$ et l'on a, par un calcul évident,

$$h_{1,1}(x) = \sigma(x,D)\,F(x).$$

On a donc $\|h_{1,1}\|_r \leq C\|F\|_r \leq C\int_{-\infty}^{+\infty}\|f_u\|_p\|a_u\|_q\,|\theta(u)|\,du \leq$

$$C'\int_{-\infty}^{+\infty}\|f\|_p\,\|a\|_q(1+|u|)^2\,|\theta(u)|\,du \leq C''\|f\|_p\,\|a\|_q\,.$$

On s'est servi du fait que le multiplicateur $|\xi|^{iu}$ définit un opérateur de Calderón-Zygmund T_u dont la norme ne dépasse pas $C(1+|u|)$.

Le cas de $h_{1,0}$ est analogue et l'on a

$$h_{1,0}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sigma(x,D)\,f_u\right]a_u(x)\,dx$$

et l'on conclut de même.

(γ) <u>Le cas</u> $p = 2$, $q = +\infty$.

Nous allons étudier le noyau $N(x,y)$ de l'opérateur $[T\,,\,M_A]$. Puisque T est un o.p.d. d'ordre 1, son noyau $K(x,y)$ vérifie $|\frac{\partial}{\partial x}K(x,y)| \leq C\,|x-y|^{-3}$, $|\frac{\partial}{\partial y}K(x,y)| \leq C\,|x-y|^{-3}$ et $|K(x,y)| \leq C\,|x-y|^{-2}$.

On a clairement $N(x,y) = [A(y) - A(x)]\,K(x,y)$ et donc $|N(x,y)| \leq C\|A'\|_\infty\,|x-y|^{-1}$, $|\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)| \leq C\|A'\|_\infty\,|x-y|^{-2}$ et $|\frac{\partial N}{\partial y}(x,y)| \leq C\|A'\|_\infty\,|x-y|^{-2}$.

Montrons alors que $[T, M_A]$ est un opérateur de Calderón-Zygmund dont la norme ne dépasse pas $C\|A'\|_\infty$.

A cet effet on appelle f une fonction portée par un intervalle I, appartenant à L^4, et l'on doit montrer que $g(x) = [T, M_A]f$ vérifie

(57) $$\left(\frac{1}{|I|}\int_I |g|^2(x)\,dx\right)^{1/2} \leq C\|A'\|_\infty\left(\frac{1}{|I|}\int_I |f|^4\,dx\right)^{1/2}.$$

La proposition 6 permet alors de conclure.

Pour vérifier (57) on appelle J l'intervalle double de I (même centre et longueur double) et $a_1(x)$ une fonction de $C_0^\infty(\mathbf{R})$ égale à $a(x)$ sur I, majorée par $2\|a\|_\infty$ et portée par J.

Enfin A_1 désigne une primitive de a_1.

Alors si x et y appartiennent à I, $A_1(x) - A_1(y) = A(x) - A(y)$ de sorte que $g(x) = [T, M_A]f(x) = \int K(x,y)\left[A(y) - A(x)\right]f(y)\,dy$ et $g_1(x) = [T, M_{A_1}]f(x)$ coïncident sur I.

L'inégalité (54) avec $r = 2$, $p = q = 4$ donne
$\|g_1\|_2 \leq C\|a_1\|_4\,\|f\|_4 \leq C\|a\|_\infty\,|I|^{1/4}\|f\|_4$.

D'où $\left(\int_I |g|^2\,dx\right)^{1/2} \leq C'\|a\|_\infty\,|I|^{1/4}\,\|f\|_4$ ce qui n'est pas autre chose que (57).

Nous avons terminé la preuve de (50).

Pour passer au cas général où $a = A' \in L^\infty(\mathbf{R})$, on appelle $a_j \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ une suite de fonctions telle que $\|a_j\|_\infty \leq \|a\|_\infty$ et $a_j(x) \longrightarrow a(x)$ presque partout (quand $j \longrightarrow +\infty$).

Alors la primitive A_j de a_j normalisée par $A_j(0) = A(0)$ converge uniformément vers $A(x)$ sur tout compact de $\mathbf{R}$.

Posons $g_j(x) = T(A_j f) - A_j T(f) = \int K(x,y)\left[A_j(x) - A_j(y)\right]f(y)\,dy$.

Puisque $K(x,y) = O(1+|x-y|)^{-3}$ et que $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, on a $g_j(x) \longrightarrow g(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ avec $g(x) = \int K(x,y)\left[A(x) - A(y)\right]f(y)\,dy$. Donc $\|g\|_2 \leq \lim_{j\to+\infty}\|g_j\|_2 \leq C\|a\|_\infty\,\|f\|_2$.

Nous avons terminé la démonstration de la proposition 7.

Nous concluons ce chapitre par la remarque suivante.

PROPOSITION 9. Avec les notations de la proposition 7, l'opérateur $[T\ ,\ M_A]$ est un opérateur de Calderón-Zygmund.

Appelons encore T_j les o.p.d. d'ordre 1 associés aux symboles $\tau(x,\xi)\,\varphi(\frac{\xi}{j})$ et $K_j(x,y)$ les noyaux des opérateurs T_j. Nous avons montré que les noyaux $N_j(x,y) = [A(y) - A(x)]\,K_j(x,y)$ de $[T_j\ ,\ M_A]$ sont des noyaux de Calderón-Zygmund dont les normes sont uniformément bornées.

Si $f \in C_o^\infty(\mathbb{R})$, $T_j(Af) - AT_j(f)$ tend en norme L^2 vers $T(Af) - AT(f)$ car Af appartient à l'espace de Sobolev $H^{(1)}$ et les noyaux des T_j ont, uniformément en j, une décroissance en $O(|x-y|^{-N})$ à l'infini (pour tout $N \geq 1$).

Nous appliquons alors le théorème 18.

CHAPITRE V

OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS et ESPACES DE HARDY GÉNÉRALISÉS

Les opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 0 sont bornés sur les L^p quand $1 < p < +\infty$ mais ils ne le sont pas sur L^1.

Un substitut pour ce résultat est que les o.p.d. classiques d'ordre 0 envoient H^1 dans L^1 ; H^1 désigne ici le sous espace de L^1 défini par les conditions (de Riesz) $\frac{\partial}{\partial x_j} \circ (-\Delta)^{-1/2} f \in L^1 \quad (1 \le j \le n)$.

Le dual de H^1 est B.M.O. (espace de John-Nirenberg) ainsi que l'ont montré Ch. Fefferman et E. Stein).

Les opérateurs pseudo-différentiels exotiques d'ordre 0 ne sont pas bornés de H^1 dans L^1 et ne le sont pas davantage de L^p dans lui-même si $p \neq 2$.

Nous donnons d'abord un contre-exemple puis des conditions suffisantes pour qu'un o.p.d. exotique de la classe $S^0_{0,0}$ soit borné sur L^p ou sur H^1.

1. LES OPÉRATEURS DE CALDERÓN-ZYGMUND ET L'ESPACE BMO.

Nous rappelons d'abord la définition de BMO.

Une fonction localement intégrable $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ appartient à BMO s'il existe une constante $C > 0$ et pour tout cube Q de $\mathbf{R}^n$, une constante c_Q telles que

$$(1) \qquad \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - c_Q|\,dx \leq C .$$

En d'autres termes $f \in BMO$ si et seulement si $f^{\#} \in L^\infty$.

On observe immédiatement que les constantes appartiennent à BMO avec $C = 0$. Si la borne inférieure des constantes C que l'on peut faire figurer dans le second membre de (1) est prise comme norme de f dans BMO, les constantes ont une norme nulle.

Ce qui amène à considérer BMO non pas comme un espace de fonctions, mais comme un espace de fonctions modulo les fonctions constantes.

Ce point de vue est d'ailleurs compatible avec la dualité entre H^1 et BMO décrite ci-dessous.

THÉORÈME 24. <u>Tout opérateur de Calderón-Zygmund définit canoniquement une application linéaire continue de</u> L^∞ <u>dans</u> BMO.

Expliquons d'abord les termes de cet énoncé.

Puisque les fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ ne constituent pas une partie dense dans $L^\infty(\mathbf{R}^n)$, il faut définir directement l'opérateur T sur $L^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Appelons cube rationnel tout cube Q de $\mathbf{R}^n$ dont les sommets ont toutes leurs coordonnées rationnelles ; le cube $\tilde{Q}$ est alors un cube de même centre et de côté double.

Pour presque tout $(x,x') \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, on pose

$$(2) \qquad F(x,x') = Tf_1(x) - Tf_1(x') + \int \left[K(x,y) - K(x',y)\right] f_2(y)\,dy$$

où Q est un cube rationnel contenant x et x', $\tilde{Q}$ est le cube double, f_1 le produit de f par la fonction caractéristique de $\tilde{Q}$ et $f_2 = f - f_1$; le noyau $K(x,y)$ étant associé à l'opérateur T comme il est dit dans la définition 1 du chapitre IV.

On vérifie sans peine que la définition de $F(x,x')$ ne change pas si l'on remplace Q par un cube $Q_1 \supset \tilde{Q}$. Il en résulte que (2) ne dépend pas du cube Q contenant x et x'.

Enfin pour presque tout $x' \in \mathbb{R}^n$ et presque tout $x'' \in \mathbb{R}^n$, $F(x,x') - F(x,x'')$ est une constante (regardée comme fonction de x).

On définit alors $Tf(x)$ comme la classe dans BMO de $x \longrightarrow F(x,x')$; pour presque tout $x' \in \mathbb{R}^n$ cette classe ne dépend pas de x' et c'est précisément celle-là que l'on choisit.

Naturellement si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $F(x,x') = (Tf)(x) - (Tf)(x')$. Pour vérifier que $Tf \in$ BMO, on appelle Q un cube rationnel et l'on reprend (2).

Pour majorer la norme dans BMO de la classe de $F(x,x')$, il suffit d'estimer $\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|\,dx$ par une constante C ; puis de montrer que, si $x \in Q$,

$$\left|\int \left[K(x,y) - K(x',y)\right] f_2(y)\,dy\right| \le C. \tag{3}$$

D'une part on a $\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|\,dx \le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1|^2\,dx\right)^{1/2} \le$
$\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^n} |Tf_1|^2\,dx\right)^{1/2} \le C\,\frac{\|f_1\|_2}{|Q|^{1/2}} \le C'\,\|f\|_\infty$.

D'autre part, le membre de gauche de (3) ne dépasse pas $C\int_{Q^c} \frac{|x-x'|}{|x-y|^{n+1}}\,dy$ $\le C'$.

Si nous n'avions pas eu à définir T sur $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, nous nous serions contentés de remarquer que l'inégalité de Fefferman et Stein du théorème 22 donne, si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $(Tf)^\#(x) \le C\|T\|\,\|f\|_\infty$ ou, en d'autres termes, $\|Tf\|_{BMO} \le C\|T\|\,\|f\|_\infty$.

Dans le cas particulier d'un opérateur pseudo-différentiel T classique d'ordre 0, le problème que nous avons rencontré de définir T sur $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ne se pose pas car le noyau a une décroissance rapide à l'infini et, localement, une fonction de L^∞ appartient à L^2.

2. L'ESPACE DE HARDY GÉNÉRALISÉ H^1.

On définit $H^1(\mathbb{R}^n)$ comme le sous-espace de $L^1(\mathbb{R}^n)$ des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telles que $R_j(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si $1 \le j \le n$. La transformation de Riesz R_j est l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_j} \circ (-\Delta)^{-1/2}$ dont le symbole est $i \frac{\xi_j}{|\xi|}$ et dont le noyau est $c \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}$; ce noyau est un noyau de Calderón-Zygmund au sens du Chapitre IV et R_j est un opérateur de Calderón-Zygmund.

L'idée qui préside à la définition de $H^1(\mathbb{R}^n)$ est que, si l'on souhaite que <u>tous</u> les opérateurs de Calderón-Zygmund envoient $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, il est nécessaire d'exiger cette condition pour les plus simples d'entre eux, à savoir les opérateurs R_j, $1 \le j \le n$.

La norme $\|f\|_{H^1}$ est définie par $\|f\|_{H^1} = \|f\|_1 + \sum_1^n \|R_j f\|_1$.

On vérifie alors immédiatement que $H^1(\mathbb{R}^n)$ est, pour cette norme, un espace de Banach.

D'autre part la condition $R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ implique la continuité en 0 des transformées de Fourier $\frac{i\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi)$.

Ceci ne peut se faire que si $\hat{f}(0) = 0$.

Toute fonction $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ est obligatoirement d'intégrale nulle.

Contrairement à ce qui se passe pour les espaces L^p, $1 < p < +\infty$, la condition d'appartenir à H^1 ne peut s'écrire sous la forme d'une inégalité simple portant sur le module de f. En d'autres termes, appartenir à H^1 ne concerne pas seulement la taille de la fonction mais traduit un équilibre entre les grandes valeurs positives ou négatives de la fonction.

L'exemple suivant justifie cette remarque.

En dimension 1, la fonction $f(x) = \frac{1}{x \log^2 |x|}$ quand $|x| \le \frac{1}{2}$ et égale à 0 pour $|x| > \frac{1}{2}$ appartient à $H^1(\mathbb{R})$ tandis que $|f(x)|$ n'appartient pas à $H^1(\mathbb{R})$ pour la raison évidente que l'intégrale de $|f(x)|$ n'est pas nulle et aussi pour une raison plus profonde : il n'existe aucune fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que $|f| + \varphi$ appartienne à $H^1(\mathbf{R})$; alors que l'on peut visiblement par un choix correct de φ satisfaire à la condition d'intégrale nulle.

En revenant à notre propos, on vérifie facilement que toute fonction φ appartenant à la classe $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ de Schwartz et d'intégrale nulle appartient à $H^1(\mathbf{R}^n)$.

Nous admettrons le théorème de dualité de Fefferman et Stein ([31]).

THÉORÈME 25. L'espace dual de H^1 est BMO.

Nous allons commenter et préciser ce résultat.

Comme Coifman et Weiss l'ont observé, BMO est un treillis : si $f \in$ BMO, alors $|f| \in$ BMO. En effet, $\frac{1}{|Q|}\int_Q \big||f(x)| - |c_Q|\big| dx \le \frac{1}{|Q|}\int |f(x) - c_Q| dx$.

D'autre part, les fonctions constantes appartiennent à BMO et y ont une norme nulle. En combinant ces deux remarques, on obtient le lemme suivant.

LEMME 1. Pour toute fonction $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ appartenant à BMO et pour tout $T \ge 1$, définissons f_T par

(4) $f_T(x) = T$ si $f(x) \ge T$

(5) $f_T(x) = f(x)$ si $-T < f(x) < T$

(6) $f_T(x) = -T$ si $f(x) \le -T$.

Alors f_T appartient à BMO et

(7) $\|f_T\|_{BMO} \le \|f\|_{BMO}$.

L'inégalité (7) dépend naturellement du choix de la normalisation de $\|f\|_{BMO}$; on prend $\|f\|_{BMO} = \sup_{Q \subset \mathbf{R}^n} \left\{ \inf_{c \in R} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c| dx \right\}$.

Si f est à valeurs complexes, on écrit $f = g + ih$ et l'on pose $f_T = g_T + ih_T$ pour obtenir une inégalité du type (7) avec un facteur 2 dans le second membre.

On peut alors paraphraser le théorème 25 de la façon suivante

(a) si $g \in H^1(\mathbf{R}^n)$ et $f \in BMO(\mathbf{R}^n)$, alors $I = \lim_{T\to+\infty} \int g(x)\, f_T(x)\, dx$ existe (la fonction f_T étant tronquée comme il est expliqué ci-dessus) ; de plus il existe une constante C_n ne dépendant que de $n \geq 1$ telle que $|I| \leq C_n \|g\|_{H^1} \|f\|_{BMO}$.

(b) réciproquement toute forme linéaire continue sur H^1 est définie par le procédé (a).

Dès lors le théorème 24 admet la version duale suivante.

THÉORÈME 26. Tout opérateur de Calderón-Zygmund est continu de $H^1(\mathbf{R}^n)$ dans $L^1(\mathbf{R}^n)$. En particulier tout opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 0 est continu de $H^1(\mathbf{R}^n)$ dans $L^1(\mathbf{R}^n)$.

Il n'est pas vrai qu'un tel opérateur définisse un endomorphisme de $H^1(\mathbf{R}^n)$. Soit, par exemple, $m(x)$ une fonction bornée dont toutes les dérivées sont également bornées. Considérons l'opérateur M défini par la multiplication par la fonction $m(x)$: $Mf(x) = m(x)\, f(x)$. Alors M est un endomorphisme de H^1 si et seulement si la fonction m est constante alors que M est l'exemple le plus banal d'un o.p.d. classique d'ordre 0.

Le cas des symboles $\sigma(\xi)$ ne dépendant pas de x est différent.

PROPOSITION 1. Soit $\sigma(\xi) \in S^0_{1,0}$ un symbole ne dépendant pas de x. Alors l'o.p.d. $S = \sigma(D)$ associé envoie H^1 dans lui-même.

La preuve de la proposition 1 résulte très simplement du lemme suivant.

LEMME 2. Le symbole $\tau(\xi) = i\sigma(\xi) \frac{\xi_j}{|\xi|}$ définit un opérateur $T = \tau(D)$ de Calderón-Zygmund.

La vérification s'obtient à l'aide des trois remarques simples suivantes.

(α) si T est un opérateur de Calderón-Zygmund défini par un noyau-distribution $S(x,y)$, alors pour tout $\delta > 0$, le noyau distribution $\delta^n S(\delta x, \delta y)$ définit un opérateur de Calderón-Zygmund T_δ ayant la même norme que T

(β) le symbole de T_δ est $\sigma_\delta(x,\xi) = \sigma(\delta x, \delta^{-1}\xi)$ lorsque T est un o.p.d. classique défini par le symbole $\sigma(x,\xi) \in S^0_{1,0}$

(γ) si $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ est égale à 1 quand $|\xi| \geq 2$ et à 0 quand $|\xi| \leq 1$, $i\varphi(\xi)\,\sigma(\delta\xi)\frac{\xi_j}{|\xi|} = \tau_\delta(\xi)$ décrit une partie bornée B de $S^0_{1,0}$ pour $0 < \delta < 1$ et $\tau(\xi) = \lim\limits_{\delta \downarrow 0} \tau_\delta(\delta^{-1}\xi)$.

Ces trois remarques étant faites, le lemme 2 s'obtient en appelant T_δ l'o.p.d. classique d'ordre 0 dont le symbole est $\tau_\delta(\delta^{-1}\xi)$; les symboles $\tau_\delta(\delta^{-1}\xi)$ ne décrivent pas une partie bornée de $S^0_{1,0}$ quand $0 < \delta < 1$ mais les o.p.d. T_δ sont des opérateurs de Calderón-Zygmund et leur norme est majorée par une constante ne dépendant pas de δ ; ceci en vertu de la remarque (α). Enfin si $f \in L^2$, $\|Tf - T_\delta f\|_2 \longrightarrow 0$ $(\delta \to 0)$. Il en résulte que T est un opérateur de Calderón-Zygmund (Théorème 18 du chapitre IV).

Pour terminer, il reste à démontrer la proposition 1. On part de $f \in H^1$ et l'on pose $g = S(f)$. Alors $g \in L^1$. Pour vérifier que $g \in H^1$, il suffit de prouver que $R_j g \in L^1$ quand $1 \leq j \leq n$. Or $R_j g = Tf$ en employant les notations du lemme 2 et T envoie H^1 dans L^1.

3. UN CONTRE-EXEMPLE.

Nous avons vu que les opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 0 sont bornés de $H^1(\mathbf{R}^n)$ dans $L^1(\mathbf{R}^n)$ et de $L^p(\mathbf{R}^n)$ dans $L^p(\mathbf{R}^n)$ pour $1 < p < +\infty$.

En particulier le symbole $m(\xi) = (1+|\xi|^2)^{it} = \exp\left[it(1+|\xi|^2)\right]$, $t\in\mathbf{R}$, définit un opérateur linéaire $m(D)$ continu de $H^1(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même et de $L^p(\mathbf{R}^n)$ dans $L^p(\mathbf{R}^n)$.

Pour essayer d'étendre ce résultat, il devient naturel d'étudier les symboles de la forme $e^{i\varphi(\xi)}$ où $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est une fonction radiale (ne dépendant que de $|\xi|$), indéfiniment dérivable et ayant un certain type de croissance quand $|\xi| \to +\infty$.

Si la croissance de φ est très régulière et contrôlée par celle de $\log|\xi|$, cela signifie que $|\partial_\xi^\alpha \varphi| \leq C_\alpha(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$ si $|\alpha| \geq 1$; les estimations analogues en découlent pour $m(\xi) = e^{i\varphi(\xi)}$ et, cette fois, pour tout α. L'opérateur $m(D)$ est donc un o.p.d. classique d'ordre 0 et est borné sur $H^1(\mathbf{R}^n)$ et sur tous les $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < +\infty$.

Si l'on veut chercher quelque chose de neuf, il faut donc essayer des fonctions $\varphi(\xi)$ dont la croissance (toujours supposée très régulière en $|\xi|$) est plus rapide que celle de $\log|\xi|$ quand $|\xi| \to +\infty$.

Nous montrons alors que l'o.p.d. $m(D)$ associé au symbole $m(\xi) = e^{i\varphi(\xi)}$ n'est borné sur aucun L^p pour $p \neq 2$ et n'est pas borné sur $H^1(\mathbf{R}^n)$.

Grâce au théorème d'interpolation de Fefferman-Stein complété par le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin ([31] et [54]), on observe que les valeurs de p les plus proches de 2 sont les plus critiques ; c'est-à-dire celles pour lesquelles l'o.p.d. a le plus de chance d'être borné.

En vertu du théorème de restriction des multiplicateurs ([27]), il suffit de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 27. Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2, concave, telle que $|\varphi''(\xi)|$ tende en décroissant vers 0 $(\xi \to +\infty)$ tandis que $\xi^2|\varphi''(\xi)|$ tend en croissant vers $+\infty$ avec ξ. Alors l'opérateur pseudo-différentiel $T = m(D)$ associé au symbole $m(\xi) = e^{i\varphi(\xi)}$ n'est borné sur aucun L^p, sauf sur L^2.

Par exemple si $\varphi(\xi) = (\log \xi)\,\psi(\xi)$ où ψ tend très lentement et très régulièrement vers $+\infty$, les conditions du théorème 27 sont remplies et le multiplicateur $e^{i\varphi(\xi)}$ n'est pas borné sur $\mathcal{F}L^p$, $p \neq 2$. Les conditions sur $\psi(\xi)$ sont $|\psi^{(j)}(\xi)| \leq \dfrac{C_j}{\xi^j \log \xi}$ pour $\xi \geq 2$ et elles entraînent les hypothèses correspondantes pour la fonction φ si ξ est assez grand.

La signification du théorème 27 est que la croissance logarithmique est la meilleure possible pour φ afin que $e^{i\varphi(\xi)}$ soit un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p$, $p \neq 2$.

Venons en à la preuve du théorème 27.

Il est facile de montrer que l'opérateur adjoint de T est défini par le symbole $\bar{m}(\xi) = e^{-i\varphi(\xi)}$. Il suffira donc d'examiner le cas $1 < p < 2$.

Nous désignons par $n \geq 1$ un entier et par $E \subset \mathbb{R}$ la réunion des q intervalles $I_k = \left[2^k, 2^k + \ell_n\right]$ où $n \leq k \leq n+q-1$. Les choix de $q = q_n$ et de $\ell_n \leq 2^{n-1}$ seront faits dans un moment.

Nous désignons par $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ une fonction non identiquement nulle telle que $\hat{h}$ soit portée par $[0,1]$ et nous posons successivement

$$g(x) = h(\ell_n x) \quad \text{et} \quad f(x) = \Big(\sum_{n \leq k \leq n+q} e^{i2^k x}\Big) g(x). \tag{8}$$

Il nous suffira de comparer $\|f\|_p$ et $\|T(f)\|_p$ pour conclure que T n'est pas borné sur L^p, $p \neq 2$.

D'une part le support de $\hat{f}$ est contenu dans E. On peut donc calculer $\|f\|_p$ par la théorie de Littlewood-Paley : $\|f\|_p \leq C_p q^{1/2} \|g\|_p$.

Tout sera fini si nous montrons comment, par un choix approprié de la suite $q = q_n$ tendant vers l'infini et de ℓ_n, obtenir $\|T(f)\|_p \geq C'_p\, q^{1/p} \|g\|_p$.

Pour ce faire, désignons par Y l'espace de Banach $L^p_E \subset L^p$ des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est nulle presque partout hors de E.

Ceci étant, nous allons décomposer T en $T_2 \circ T_1$ où T_1 et T_2 sont deux endomorphismes de Y tels que

$$\|T_1(f)\|_p \geq C''_p\, q^{1/p}\|g\|_p \tag{9}$$

et où $T_2^{-1} : Y \to Y$ est borné avec une norme ne dépassant pas une autre constante C_p.

Alors $\|T(f)\|_p \geq C_p^{-1}\|T_1(f)\|_p \geq C'''_p\, q^{1/p}\|g\|_p$.

Pour définir les opérateurs T_1 et T_2, nous allons construire deux fonctions m_1 et $m_2 : E \to \mathbf{C}$ telles que $m = m_1 m_2$ sur E.

Alors $(T_1 f)^\wedge(\xi) = m_1(\xi)\hat{f}(\xi)$ et de même pour T_2.

Il reste à construire m_1 et m_2.

Appliquons la formule de Taylor, à l'ordre 2, sur chacun des intervalles I_k composant E, à la fonction φ. Il vient

$$\varphi(2^k + t) = \varphi(2^k) + t\varphi'(2^k) + r_k(t) \tag{10}$$

avec $0 \leq t \leq \ell_n$.

Posons alors $c_k = e^{i\varphi(2^k)}$ et $m_1(2^k+t) = c_k e^{it\varphi'(2^k)}$. Dans les mêmes conditions $m_2(2^k+t) = e^{ir_k(t)}$. Tout ceci entraîne $m_1(\xi)\, m_2(\xi) = m(\xi) = e^{i\varphi(\xi)}$ si $\xi \in E$.

Commençons par étudier T_1.

On a évidemment

$$T_1\Big(\sum_{n\leq k<n+q} e^{i2^k x} g(x)\Big) = \sum_{n\leq k<n+q} e^{i2^k x} c_k\, g(x+\varphi'(2^k)) = S_1(x). \tag{11}$$

Pour évaluer la norme L^p de cette somme, on utilise le lemme suivant.

LEMME 3. <u>Soit</u> $h \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ <u>une fonction telle que</u> $\|h\|_p = 1$. <u>Il existe une constante</u> $A > 0$ <u>telle que, pour tout entier</u> $q \geq 1$, <u>toute suite</u> s_k <u>de nombres réels vérifiant</u> $s_{k+1} - s_k \geq A$ <u>pour tout</u> $k \geq 0$ <u>et toute suite</u> $f_k \in L^1(\mathbf{R})$, <u>vérifiant</u> $|f_k(x)| = |h(x)|$ (<u>pour tout</u> $k \geq 0$ <u>et tout</u> $x \in \mathbf{R}$), <u>on ait</u>

$$\Big\|\sum_1^q f_k(x - s_k)\Big\|_p \geq \frac{1}{2}\, q^{1/p}. \tag{12}$$

La preuve est très simple mais nous la donnons cependant pour la commodité du lecteur.

On pose $S(x) = \sum_1^q f_k(x - s_k)$ et l'on écrit que $\|S\|_p \geq \left(\sum_1^q \int_{s_k-A/2}^{s_k+A/2} |S|^p dx\right)^{1/p}$.

Tout sera fini si nous montrons pourquoi

$$\int_{s_k-A/2}^{s_k+A/2} |S(x)|^p \, dx \geq \frac{1}{2^p} \tag{13}$$

ou, ce qui revient au même

$$\left(\int_{s_k-A/2}^{s_k+A/2} |S(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \geq \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Pour abréger, écrivons $\|.\|$ pour désigner la norme L^p sur l'intervalle $\left[s_k - \frac{A}{2}, s_k + \frac{A}{2}\right]$.

On a $\|S\| \geq \|f_k(x-s_k)\| - \sum_{j\neq k} \|f_j(x-s_j)\| \geq \left(\int_{-A/2}^{A/2} |h|^p dx\right)^{1/p} - \sum_{j\neq k} \varepsilon_j$

avec $\varepsilon_j = \left(\int_{\Delta_j} |h|^p dx\right)^{1/p}$ et $\Delta_j = \left[s_k - s_j - \frac{A}{2}, s_k - s_j + \frac{A}{2}\right]$. Les intervalles Δ_j, $j \neq k$, sont donc deux à deux disjoints et ne rencontrent pas $\left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right]$.

Il suffit pour terminer de choisir A tel que $\left(\int_{-A/2}^{A/2} |h|^p dx\right)^{1/p} \geq \frac{3}{4}$ tandis que $\sum_{j\neq k} \varepsilon_j \leq \frac{1}{4}$. Cette dernière condition étant rendue possible par la décroissance rapide de h.

Retournant à la somme $S_1(x)$ définie par (11), nous l'écrivons à l'aide de la fonction h que l'on supposera normalisée par $\|h\|_p = 1$. On a $S_1(x) = \sum_{n\leq k<n+q} f_k(x-s_k)$ où $s_k = \ell_n \varphi'(2^k)$ et $f_k(x) = c_k e^{i2^k x} h(x)$.
Pour assurer $\|S_1\|_p = \frac{1}{2} q^{1/p}$, il suffit que l'on ait $\ell_n \left[\varphi'(2^k) - \varphi'(2^{k+1})\right] \geq A$ pour $n \leq k < n+q$. Nous allons rendre cette condition plus maniable en écrivant $\varphi'(2^k) - \varphi'(2^{k+1}) = \int_{2^k}^{2^{k+1}} |\varphi''(t)| \, dt = \int_{2^k}^{2^{k+1}} t^2 |\varphi''(t)| \frac{dt}{t^2} \geq B_k 2^{-k-1}$ avec $B_k = 4^k |\varphi''(2^k)|$. Cette minoration est due à la croissance de $t^2 |\varphi''(t)|$.

Nous devons donc assurer

$$\ell_n 2^k |\varphi''(2^k)| \geq 2A \tag{15}$$

pour obtenir (12).

On va maintenant majorer la norme de $T_2^{-1} : Y \to Y$ où $Y = L^p_E$.

Pour cela, on observe que $T_2^{-1} - I$ est associé au symbole $\sigma(\xi) = e^{-ir_k(t)} - 1, \quad \xi = 2^k + t, \quad 0 \leq t \leq \ell_n$.

Définissons $\sigma_k : E \to \mathbb{C}$ par $\sigma_k(\xi) = \sigma(\xi)$ si $\xi \in I_k$ et $\sigma_k(\xi) = 0$ sinon.

On a $\sigma(\xi) = \sigma_n(\xi) + \ldots + \sigma_{n+q-1}(\xi)$.

Appelons $R_k : Y \to Y$ l'opérateur associé au symbole σ_k. On a évidemment $T_2^{-1} - I = R_n + \ldots + R_{n+q-1}$ ce qui permet de majorer $\|T_2^{-1}\|$ par $1 + \|R_n\| + \ldots$ $\ldots + \|R_{n+q-1}\|$; les normes étant celles des opérateurs sur Y.

Pour majorer $\|R_k\|$ nous allons vérifier que

(16) $\quad R_k(f) = M_k * f \quad$ où $\quad M_k \in L^1(\mathbb{R}), \quad f \in Y$.

Alors $\|R_k\| \leq \|M_k\|_1$ puisque $\|M_k * f\|_p \leq \|M_k\|_1 \|f\|_p$.

Pour assurer (16) il suffit que $\hat{M}_k(\xi) = \sigma_k(\xi)$ si $\xi \in E$.

Si nous imposons $\ell_n \leq 2^{n-1}$, les distances mutuelles entre les différents intervalles I_k dépassent ℓ_n. On appelle $\hat{\theta} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction égale à 1 sur $[0,1]$ et à 0 hors de $[-1,2]$. Alors $\hat{\theta}(\frac{\xi-2^k}{\ell_n})$ est égale à 1 sur I_k et à 0 sur les autres I_j, $j \neq k$. De plus $\hat{\theta}(\frac{\xi-2^k}{\ell_n})$ est la transformée de Fourier de $e^{i2^k x}\, \ell_n \theta(\ell_n x) = \theta_{k,n}$; la norme L^1 de cette fonction est une constante.

Il suffirait de poser $M_k = \theta_{k,n}$ si σ_k était égale à 1 sur I_k et à 0 sur les autres intervalles I_j.

Pour arriver au cas général, on utilise le lemme suivant qui est classique.

LEMME 4. Il existe une constante C telle que, pour tout intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$ et toute fonction $\alpha : I \to \mathbb{C}$ de classe C^1, il existe une fonction $\beta \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

(17) $\quad \hat{\beta}(\xi) = \alpha(\xi)$ si $\xi \in I$ et

(18) $\quad \|\beta\|_1 \leq C(\sup_I |\alpha| + |I| \sup_I |\alpha'|)$.

On applique ce résultat à l'intervalle I_k et à la fonction $e^{-ir_k(t)} - 1 = \alpha(\xi)$, $\xi = 2^k + t$, $0 \leq t \leq \ell_n$.

La formule de Taylor donne $|r_k(t)| \leq \frac{\ell_n^2}{2} \sup_{2^k \leq \xi \leq 2^{k+1}} |\varphi''|$ et $|r_k'(t)| \leq \ell_n \sup_{2^k \leq \xi \leq 2^{k+1}} |\varphi''|$.

On appelle alors M_k le produit de convolution $\alpha * \theta_{k,n}$. On a $\|M_k\|_1 \leq C\ell_n^2 |\varphi''(2^n)|$ et $\hat{M}_k(\xi) = \sigma_k(\xi)$ si $\xi \in E$. Cela entraîne l'inégalité correspondante pour $\|R_k\|$ et donc $\|T_2^{-1}\| \leq C\, q\, \ell_n^2 |\varphi''(2^n)| + 1$.

Résumons les conditions portant sur q_n et ℓ_n en posant $B_k = 4^k |\varphi''(2^k)|$ suite croissant vers $+\infty$.

Elles s'écrivent $q_n \ell_n^2 4^{-n} B_n \leq C$ et $\ell_n 2^{-k} B_k \geq 2A$; il suffit pour assurer cette dernière condition que $\ell_n 2^{-n} B_n 2^{-q} \geq A$ car $n \leq k < n+q$ et la suite $q = q_n$ tendant vers l'infini existera si et seulement si $\ell_n 2^{-n} B_n \to +\infty$. En appelant Q_n la plus grande valeur de $q \in \mathbb{N}$ telle que $2^q \leq A^{-1} \ell_n 2^{-n} B_n$, on aura $Q_n \to +\infty$ et $q \leq Q_n$.

L'autre condition à satisfaire est $q_n \leq \frac{C4^n}{\ell_n^2 B_n} = Q_n'$. On peut choisir $q_n = \inf(Q_n , Q_n')$ à condition que Q_n' tende vers $+\infty$.

Nous arrivons au choix de ℓ_n. Il doit être tel que $\ell_n 2^{-n} B_n \to +\infty$ (ou $\ell_n^2 4^{-n} B_n^2 \to +\infty$) et tel que $\ell_n^2 4^{-n} B_n \to 0$. On prend par exemple $\ell_n = 2^n B_n^{-3/4}$ et l'on a $\ell_n \leq \frac{1}{2} 2^n$ si n est assez grand.

4. SYMBOLES EXOTIQUES ET ESPACES DE HARDY.

La classe $S^0_{0,0}$ est l'espace des symboles $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ vérifiant $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}$ pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^n$. Nous allons donner une condition suffisante assurant que l'opérateur pseudo-différentiel associé $\sigma(x,D)$ envoie "l'espace de Hardy" $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Quelques définitions sont nécessaires.

DÉFINITION 1. Désignons par $H^1(\mathbf{T}^n)$ le sous-espace de $L^1(\mathbf{T}^n)$ formé des fonctions $f(\theta) \sim \Sigma\, c_k e^{ik.\theta}$ telles que, pour $1 \leq j \leq n$, $f_j(\theta) \sim \Sigma'\, c_k \frac{k_j}{|k|} e^{ik.\theta}$ appartienne aussi à $L^1(\mathbf{T}^n)$.

On a posé $\mathbf{T} = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $|k| = (k_1^2 + \ldots + k_n^2)^{1/2}$, la somme Σ porte sur tous les $k \in \mathbf{Z}^n$ et Σ' signifie que le terme $k = 0$ a été omis.

DÉFINITION 2. Un multiplicateur de $\mathfrak{F}H^1(\mathbf{T}^n)$ est une suite $(m_k)_{k \in \mathbf{Z}^n}$ telle que, pour toute fonction $f(\theta) \sim \Sigma\, c_k e^{ik.\theta} \in H^1(\mathbf{T}^n)$, la série trigonométrique $\Sigma\, c_k\, m_k\, e^{ik.\theta}$ soit la série de Fourier d'une fonction de $H^1(\mathbf{T}^n)$.

Nous désignerons par $\|m_k\|_{H^1, H^1}$ la norme de l'opérateur linéaire correspondant.

THÉORÈME 28. Soit $\sigma(x, \xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ une fonction ayant la propriété suivante : pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$ et tout $\beta \in \mathbf{N}^n$, il existe une constante $C_{\alpha,\beta}$ telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et tout $\xi \in \mathbf{R}^n$ vérifiant $\sup_{1 \leq j \leq n} |\xi_j| \leq 1$, le multiplicateur $k \longrightarrow \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x, \xi + k) = m_k^{(\alpha,\beta)}$ soit borné sur $\mathfrak{F}H^1(\mathbf{T}^n)$ et que $\|m_k^{(\alpha,\beta)}\|_{H^1, H^1} \leq C_{\alpha,\beta}$.

Alors $\sigma(x, D)$ envoie $H^1(\mathbf{R}^n)$ dans $L^1(\mathbf{R}^n)$.

L'espace des multiplicateurs de $\mathfrak{F}H^1(\mathbf{T}^n)$ est invariant (mais non isométriquement) par translation car $H^1(\mathbf{T}^n)$ est un module sur $C^\infty(\mathbf{T}^n)$. De sorte que l'hypothèse du théorème 28 pourrait aussi bien concerner les ξ tels que $\sup_{1 \leq j \leq n} |\xi_j| \leq 50$.

COROLLAIRE. Soit $m(\xi)$ une fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$ vérifiant $\sup(|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|) \leq 1$ et tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$, la suite

$k \longrightarrow \partial^{\alpha} m(\xi+k)$ soit un multiplicateur de $\mathcal{F}H^1(\mathbf{T}^n)$ dont la norme ne dépasse pas C_α, constante ne dépendant pas de ξ. Alors $m(\xi)$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}H^1(\mathbf{R}^n)$.

Ce corollaire admet une réciproque partielle.

THÉORÈME 29. Soit $m(\xi)$ un multiplicateur de $\mathcal{F}H^1(\mathbf{R}^n)$. Alors pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$, la suite $k \longrightarrow m(\xi+k)$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}H^1(\mathbf{T}^n)$.

Remarquons que $m(\xi)$ est nécessairement continue dans $\mathbf{R}^n$ privé de l'origine où $m(\xi)$ n'est pas définie. Si, dans le théorème 29, $\xi = 0$ (ou $\xi \in \mathbf{Z}^n$), on définit arbitrairement $m(0)$. Avant de prouver ces deux résultats, nous allons les illustrer par une application. Rappelons un résultat classique qui sera démontré dans l'appendice 4.4.

LEMME 5. Pour toute fonction $f \in H^1(\mathbf{T}^n)$,

$$\Sigma' |k|^{-n} |\hat{f}(k)| < +\infty .$$

Il en résulte que toute fonction m_k, $k \in \mathbf{Z}^n$, vérifiant $|m_k| \leq |k|^{-n/2}$ si $k \neq 0$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}H^1(\mathbf{T}^n)$ et envoie plus précisément $\mathcal{F}H^1(\mathbf{T}^n)$ dans $\ell^2(\mathbf{Z}^n)$.

Posons $\langle \xi \rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$. Un corollaire immédiat du théorème 28 est le théorème suivant.

THÉORÈME 30. Pour tout symbole $\sigma(x,\xi) \in S^0_{0,0}$, posons $\tau(x,\xi) = \dfrac{\sigma(x,\xi)}{\langle \xi \rangle^{n/2}}$; alors l'opérateur pseudo-différentiel correspondant $\tau(x,D)$ envoie $H^1(\mathbf{T}^n)$ dans $L^1(\mathbf{T}^n)$.

Naturellement le théorème 30 complète les résultats antérieurs de Ch. Fefferman relatifs aux classes $S^m_{\rho,\delta}$ ([28]).

Nous aurons besoin, au cours de la démonstration du théorème 28 de savoir estimer la norme de $H^1(\mathbb{R}^n)$ des fonctions du type $f(x) = \Sigma f_k(x) e^{ik.x}$ lorsque la somme porte sur $k \in \mathbb{Z}^n$ et que les "coefficients perturbés" $f_k(x)$ ont des "basses fréquences" ; tout se passe alors comme si les termes "hautes fréquences" $e^{ik.x}$ et les termes "basses fréquences" $f_k(x)$ étaient indépendants de sorte qu'en posant $F(x,\theta) = \Sigma f_k(x) e^{ik.\theta}$ $\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \|F(x,\theta)\|_{H^1(\mathbb{T}^n)} dx$ seront deux normes équivalentes. Le théorème 31 précise cette idée et sa démonstration occupe les § 4.1 et 4.2. Le § 4.3 est alors consacré à la preuve du théorème 28 et le § 4.5 à celle du théorème 29.

Avant de calculer les normes dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, il est utile d'estimer les normes dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

4.1. Calcul de certaines normes L^1.

Le lemme ci-dessous établit un lien entre les normes $L^1(\mathbb{R}^n)$ et $L^1(\mathbb{T}^n)$; ici $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ et $d\theta$ désigne la mesure de Haar normalisée sur $\mathbb{T}^n$ dont la masse totale est 1.

LEMME 6. Soient $n \geq 1$ un entier et $A = \{0,1\}^n$ l'ensemble des 2^n suites de 0 et de 1. Pour toute somme (finie) $f(x) = \sum_{k \in Z^n} f_k(x) e^{ik.x}$ où, pour fixer les idées, $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

(19) $$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx \leq (2\pi)^n \sum_{\alpha \in A} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n} |\Sigma(\partial^\alpha f_k)(x) e^{ik.\theta}| dx\, d\theta .$$

La preuve du lemme 6 est très élémentaire et repose sur des remarques bien connues (dont les preuves seront laissées au lecteur) et que nous allons maintenant rappeler.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, on a

$$\sup_{x \in [0,2\pi]} |f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|dx + \int_0^{2\pi} |f'(x)|dx.$$

Par récurrence sur la dimension, on en déduit aussitôt que si $\Omega = [0\,,\,2\pi]^n$, on a, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^n(\mathbf{R}^n)$, $\sup_\Omega |f| \le \sum_{\alpha\in A} \int_\Omega |\partial^\alpha f|(x)\,dx$; l'ensemble A est le même que dans le lemme 6.

Posons alors $f(x) = \Sigma\, f_k(x)\, e^{ik.x}$ et $F(x,y) = \Sigma\, f_k(y)\, e^{ik.x}$; imaginons que x est fixé et appelons Ω l'hypercube défini par $x_j \le y_j \le x_j + 2\pi$, $1 \le j \le n$. On a alors

$$(20) \qquad |f(x)| = |F(x,x)| \le \sup_{y\in\Omega} |F(x,y)| \le \sum_{\alpha\in A} \int_\Omega |\partial_y^\alpha F(x,y)|\,dy.$$

Il suffit d'intégrer (20) par rapport à x et d'échanger l'ordre des intégrations, compte-tenu de la périodicité en x de $F(x,y)$ pour tout y fixé, pour obtenir (19).

Nous aurons besoin de résultats plus précis.

LEMME 7. Soit V un ensemble compact tel que deux points distincts de V ne soient jamais congrus modulo $\mathbf{Z}^n$: $\mathbf{Z}^n \cap (V - V) = \{0\}$. Il existe alors deux constantes C_1 et C_2 ayant la propriété suivante : pour toute suite (finie) $f_k \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $k\in\mathbf{Z}^n$, telle que support $\hat{f}_k \subset V$ pour $k\in\mathbf{Z}^n$, on a, en posant $f(x) = \Sigma\, f_k(x)\, e^{ik.x}$ et $F(x,y) = \Sigma\, f_k(y)\, e^{ik.x}$,

$$(21) \qquad C_1 \|f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} \le \iint_{\mathbf{T}^n\times\mathbf{R}^n} |F(x,y)|\,dx\,dy \le C_2 \|f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}.$$

La première partie de (21) n'est qu'une paraphrase du lemme 6. En effet, pour tout $x\in\mathbf{T}^n$ fixé, le spectre de $y \longrightarrow F(x,y)$ est contenu dans V et l'inégalité de Bernstein fournit

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\partial_y^\alpha F(x,y)|\,dy \le C_\alpha \int_{\mathbf{R}^n} |F(x,y)|\,dy.$$

Il reste à vérifier la seconde partie de (21). Un changement de variable évident donne $\iint_{\mathbf{T}^n\times\mathbf{R}^n} |F(x,y)|\,dx\,dy = \iint_{\mathbf{T}^n\times\mathbf{R}^n} |F(x+y,y)|\,dx\,dy$ et (21) sera prouvé si nous démontrons le résultat plus précis suivant : il existe une constante C telle que pour tout $x \in \mathbf{T}^n$, on ait

(22) $$\int_{\mathbf{R}^n} |F(x+y, y)| dy \le C \|f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} .$$

L'inégalité (22) résulte immédiatement de l'observation suivante.

LEMME 8. Il existe une constante C telle que, pour tout $\theta \in \mathbf{T}^n$, on puisse trouver une mesure de Radon complexe et bornée μ_θ, de norme ne dépassant pas C et vérifiant $\hat{\mu}_\theta(\xi) = e^{ik.\theta}$ si $\xi \in k+V$, $k \in \mathbf{Z}^n$.

En reprenant les notations de (22), on a alors $F(x+y,y) = (\mu_x * f)(y)$ et l'inégalité (22) en résulte.

Pour démontrer le lemme 8, on appelle $\varphi \in \mathcal{C}_o^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction égale à 1 sur V et dont le support W possède les mêmes propriétés géométriques que V : $(W-W) \cap \mathbf{Z}^n = \{0\}$. On pose alors $\hat{\mu}_\theta(\xi) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} e^{ik.\theta} \varphi(\xi - k)$; le calcul de μ_θ se fait en utilisant la formule de Poisson et les détails sont laissés au lecteur.

4.2. Calcul de certaines normes dans $H^1(\mathbf{R}^n)$.

THÉORÈME 31. Soit $V \subset \mathbf{R}^n$ un ensemble compact tel que les ensembles $k+V$, $k \in \mathbf{Z}^n$, soient deux à deux disjoints et soit k_o l'unique élément (s'il existe) de $\mathbf{Z}^n \cap (-V)$. Alors on peut trouver deux constantes C_1 et C_2 telles que, pour toute somme (finie) $f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} f_k(x) e^{ik.x}$ dans laquelle, pour fixer les idées, $f_k \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ et

(a) le support de chaque $\hat{f}_k$ est contenu dans V

(b) $f_k = 0$ pour $k = k_o$, on ait

$$C_1 \|f\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \le \int_{\mathbf{R}^n} \left\| \sum f_k(x) e^{ik.\theta} \right\|_{H^1(\mathbf{T}^n)} dx \le C_2 \|f\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} .$$

Posons $F(x,\theta) = \sum f_k(x) e^{ik.\theta}$, $F_j(x,\theta) = \sum' \frac{k_j}{|k|} f_k(x) e^{ik.\theta}$ et

$g_j(x) = \mathfrak{R}_j f(x)$; les $\mathfrak{R}_j$ étant les transformations de Riesz. Nous montrerons plus précisément que

$$(23)\qquad C_1\|g_j\|_1 - C_3\|f\|_1 \leq \iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{T}^n} |F_j(x,\theta)|\,dx\,d\theta \leq C_2\|g_j\|_1 + C_3\|f\|_1 .$$

Cette double inégalité, combinée avec le lemme 7, fournit immédiatement le théorème 31. Comme le lecteur l'a remarqué nous désignons par C_1, C_2 etc. des constantes qui ne sont pas nécessairement les mêmes.

L'inégalité (23) découle de trois lemmes utilisant les notations suivantes. Pour tout groupe abélien localement compact G, notons Γ le groupe dual et $A(\Gamma)$ l'algèbre des transformées de Fourier des fonctions $L^1(G)$. Alors

LEMME 9. <u>Si</u> Δ <u>est un sous groupe fermé de</u> Γ, <u>les fonctions de</u> $A(\Delta)$ <u>sont exactement les restrictions à</u> Δ <u>des fonctions de</u> $A(\Gamma)$ <u>et la norme de l'opérateur de</u> $A(\Gamma)$ <u>dans</u> $A(\Delta)$ <u>ainsi défini est égale à</u> 1.

Soient $R > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction dont le support est contenu dans $|\xi| \leq R$. Désignons par $\theta \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction nulle si $|\xi| \leq 2R$ et égale à 1 si $|\xi| \geq 3R$.

Avec ces notations, on a le résultat suivant.

LEMME 10. <u>La fonction</u> $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ <u>définie par</u>

$$F(\xi,\eta) = \left(\frac{\xi_j+\eta_j}{|\xi+\eta|} - \frac{\xi_j}{|\xi|}\right)\varphi(\eta)\,\theta(\xi)$$

<u>appartient à</u> $A(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ <u>pour</u> $1 \leq j \leq n$.

Posons, en effet, $G(\xi,\eta) = \dfrac{\xi_j+\eta_j}{|\xi+\eta|} \cdot \varphi(\eta)\,\theta(\xi+\eta) - \dfrac{\xi_j}{|\xi|}\varphi(\eta)\,\theta(\xi)$.

Alors $G - F \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ et il suffit de prouver que $G \in A(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$. On appelle Ω le noyau défini par $\hat{\Omega}(\xi) = \dfrac{\xi_j}{|\xi|}\,\theta(\xi)$; on a $\Omega(x) = O(|x|^{-n})$ au voisinage de 0 et $\Omega(x)$ est à décroissance rapide à l'infini. Appelons ψ la fonction dont φ est la transformée de Fourier ; G est la transformée de Fourier de $\Omega(x)\left[\psi(y-x)-\psi(y)\right] \in L^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$.

LEMME 11. <u>Avec les notations du lemme</u> 10,

$$\left(\frac{k_j+\eta_j}{|k+\eta|}-\frac{k_j}{|k|}\right)\varphi(\eta)\,\theta(k) \in A(\mathbf{Z}^n \times \mathbf{R}^n).$$

Le lemme 11 s'obtient en combinant les lemmes 9 et 10 dans le cas où $\Gamma = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ et $\Delta = \mathbf{Z}^n \times \mathbf{R}^n$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver (23).

On a $\|g_j\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} = \left\|\frac{\xi_j}{|\xi|}\Sigma \hat{f}_k(\xi-k)\right\|_{A(\mathbf{R}^n)} = \left\|\Sigma \hat{f}_k(\xi-k)\frac{k_j+\xi_j-k_j}{|k+\xi-k|}\right\|_{A(\mathbf{R}^n)}$.

En vertu du lemme 7, cette dernière norme est équivalente à celle, notée X, de $\left(\hat{f}_k(\eta)\frac{k_j+\eta}{|k+\eta|}\right)_{k\in\mathbf{Z}^n}$ dans $A(\mathbf{Z}^n \times \mathbf{R}^n)$.

Appelons $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction égale à 1 sur V et dont le support W possède les mêmes propriétés géométriques que V ; en particulier on peut supposer que $V \cap \mathbf{Z}^n = W \cap \mathbf{Z}^n = \{-k_0\}$.

Le lemme 11 affirme l'existence d'une fonction $\rho(k,\eta)$ appartenant à $A(\mathbf{Z}^n \times \mathbf{R}^n)$ et telle que, si $k \neq 0$ et $k \neq k_0$,

$$\frac{k_j+\eta_j}{|k+\eta|}\varphi(\eta) = \frac{k_j}{|k|}\varphi(\eta)+\rho(k,\eta). \tag{24}$$

En particulier si $\eta \in V$, $k \neq k_0$ et $k \neq 0$

$$\frac{k_j+\eta_j}{|k+\eta|} = \frac{k_j}{|k|}+\rho(k,\eta). \tag{25}$$

La norme X se décompose donc en un terme principal qui est la norme de $\left(\frac{k_j}{|k|}\hat{f}_k(\eta)\right)_{k\in\mathbf{Z}^n}$ dans $A(\mathbf{Z}^n \times \mathbf{R}^n)$ et en un terme d'erreur, qui grâce au lemme 7, est $0(\|f\|_1)$; l'indice $k=0$ étant évidemment omis dans le terme principal.

Or $\left\|\left(\frac{k_j}{|k|}\hat{f}_k(\eta)\right)_{k\in\mathbf{Z}^n}\right\|_{A(\mathbf{Z}^n\times\mathbf{R}^n)} = \|F_j\|_{L^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^n)}$ et cette dernière remarque achève de prouver (23).

4.3. Preuve du théorème 28.

Elle débute par le résultat suivant.

PROPOSITION 2. Soit $(\varphi_k(x,z))_{k\in\mathbf{Z}^n}$ une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ et telle que, pour une certaine constante C, pour tout $x\in\mathbf{R}^n$ et tout $z\in\mathbf{R}^n$, $k \longrightarrow \varphi_k(x,z)$ soit un multiplicateur de $\mathcal{F}H^1(\mathbf{T}^n)$ de norme au plus égale à $\frac{C}{(1+|z|^2)^n}$. Alors, pour toute suite (finie) $f_k(x)$, $k\in\mathbf{Z}^n$, de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, on a, en posant $g_k(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_k(x,x-z)\, f_k(z)\, dz$,

$$(26) \qquad \iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{T}^n} \left|\Sigma\, e^{ik.\theta} g_k(x)\right| d\theta\, dx \le C_1 \int_{\mathbf{R}^n} \left\|\Sigma\, e^{ik.\theta} f_k(x)\right\|_{H^1(\mathbf{T}^n)} dx .$$

La constante C_1 ne dépend que de C et de la dimension n. La preuve de la proposition 2 est immédiate. On appelle I le membre de gauche de (26) et l'on a

$$(27) \qquad I \le \iiint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{T}^n} \left|\Sigma\, e^{ik.\theta} \varphi_k(x,x-z)\, f_k(z)\right| dx\, dz\, d\theta .$$

Or, pour tout x et tout z fixés dans $\mathbf{R}^n$, on a, par hypothèse,

$$(28) \qquad \int_{\mathbf{T}^n} \left|\Sigma\, e^{ik.\theta} \varphi_k(x,x-z)\, f_k(z)\right| d\theta \le \frac{C}{(1+|x-z|^2)^n} \left\|\Sigma\, e^{ik.\theta} f_k(z)\right\|_{H^1(\mathbf{T}^n)} .$$

On intègre (28) par rapport à x, z étant toujours fixé, puis par rapport à z pour obtenir (26).

PROPOSITION 3. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, il existe une constante $C > 0$ ayant la propriété suivante : pour toute fonction $f \in H^1(\mathbf{R}^n)$, si l'on définit f_k par $\hat{f}_k(\xi) = \varphi(\xi)\, \hat{f}(\xi+k)$, $k\in\mathbf{Z}^n$, et si l'on pose $F(x,\theta) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} f_k(x)\, e^{ik.\theta}$ $(x\in\mathbf{R}^n,\ \theta\in\mathbf{T}^n)$, on a

$$(29) \qquad \int_{\mathbf{R}^n} \|F(x,\theta)\|_{H^1(\mathbf{T}^n)}\, dx \le C \|f\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} .$$

Par linéarité, on peut se ramener au cas où le diamètre du support V de φ ne dépasse pas $1/2$. On appelle alors k_o l'unique élément de $\mathbf{Z}^n \cap (-V)$, s'il existe et l'on pose $m(\xi) = \sum_{k\neq k_o} \varphi(\xi-k)$; $m(\xi)$ est la transformée de Fourier d'une mesure de Radon bornée. De sorte qu'il existe une fonction $g\in H^1(\mathbf{R}^n)$ telle que $\hat{g}(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi)$; en fait $g(x) = \sum_{k\neq k_o} f_k(x)\, e^{ik.x}$.

Posons $G(x,\theta) = \sum_{k\neq k_o} f_k(x)\, e^{ik.\theta}$. Le théorème 31 implique que

$$\int_{\mathbf{R}^n} \|G(x,\theta)\|_{H^1(\mathbf{T}^n)}\, dx \le C\|g\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \le C'\|f\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}. \tag{30}$$

Mais $F(x,\theta)$ et $G(x,\theta)$ diffèrent au plus par un terme $f_{k_o}(x)\, e^{ik_o.\theta}$ pour lequel l'estimation recherchée est évidente ; (30) entraîne donc (29).

PROPOSITION 4. <u>Soit</u> $\sigma_k(x,\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, $k\in\mathbf{Z}^n$, <u>une suite de fonctions possédant la propriété suivante</u> :

(31) <u>il existe, pour tout</u> $\alpha\in\mathbf{N}^n$ <u>et tout</u> $\beta\in\mathbf{N}^n$ <u>une constante</u> $C_{\alpha,\beta}$ <u>telle que, pour tout</u> $(x,\xi) \in \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$,

$$k \longrightarrow \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma_k(x,\xi), \quad k \in \mathbf{Z}^n,$$

<u>soit un multiplicateur de</u> $\mathcal{F}H^1(\mathbf{T}^n)$ <u>de norme au plus égale à</u> $C_{\alpha,\beta}$.

<u>Pour toute fonction</u> $\varphi \in \mathcal{C}_o^\infty(\mathbf{R}^n)$, <u>définissons le symbole</u>

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \sigma_k(x\,,\,\xi-k)\,\varphi(\xi-k).$$

<u>Alors l'opérateur pseudo-différentiel</u> $\sigma(x,D)$ <u>envoie</u> $H^1(\mathbf{R}^n)$ <u>dans</u> $L^1(\mathbf{R}^n)$.

Pour le montrer, on appelle ψ une fonction appartenant à $C_o^\infty(\mathbf{R}^n)$ et égale à 1 sur le support de φ et l'on remplace $\sigma_k(x,\xi)$ par le produit $\psi(\xi)\,\sigma_k(x,\xi)$; cela ne change ni $\sigma(x,\xi)$ ni les hypothèses (31). On écrira encore $\sigma_k(x,\xi)$ au lieu de $\psi(\xi)\,\sigma_k(x,\xi)$ et l'on peut donc supposer que $\sigma_k(x,\xi) = 0$ si $|\xi| \ge R$.

Posons $\varphi_k(x,z) = \int e^{i\xi.z}\,\sigma_k(x,\xi)\,d\xi$, définissons f_k, comme dans la proposition 3, par $\hat{f}_k(\xi) = \varphi(\xi)\,\hat{f}(\xi+k)$ et posons $g_k(x) = \sigma_k(x,D)\,f_k(x) = \int \varphi_k(z)\,dz$.

Alors $g(x) = \sigma(x,D)\,f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} e^{ik.x}\,g_k(x)$. Le lemme 6 donne

$$\|g\|_1 \leq (2\pi)^n \sum_{\alpha\in A} \int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{T}^n} \left|\Sigma\, \partial^\alpha g_k(x)\, e^{ik.\theta}\right| dx\, d\theta\,.$$

Or $\partial^\alpha g_k(x) = \int \partial_x^\alpha\{\varphi_k(x\,,\,x-z)\}\,f_k(z)\,dz$ et pour tout couple $(\beta,\gamma)\in\mathbf{N}^n\times\mathbf{N}^n$, on a

$$\partial_x^\beta\partial_z^\gamma\varphi_k(x,z) = \int (i\xi)^\gamma\, e^{i\xi.z}\,\partial_x^\beta\,\sigma_k(x,\xi)\,d\xi$$

$$= (1+|z|^2)^{-n}\int e^{i\xi.z}\,(I-\Delta_\xi)^n\,\partial_x^\beta\left\{(i\xi)^\gamma\sigma_k(x,\xi)\right\}\,d\xi\,.$$

Cette dernière expression assure que $k \longrightarrow \partial_x^\beta\,\partial_z^\gamma\varphi_k(x,z)$ est un multiplicateur de $\mathfrak{F}H^1(\mathbf{T}^n)$ de norme $\leq C(1+|z|^2)^{-n}$. La proposition 2 donne

$$\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{T}^n} \left|\Sigma\,\partial^\alpha g_k(x)\,e^{ik.\theta}\right| dx\,d\theta \leq C\int_{\mathbf{R}^n}\left\|\Sigma\, f_k(z)\,e^{ik.\theta}\right\|_{H^1(\mathbf{T}^n)} dz. \tag{32}$$

La proposition 3 permet enfin de majorer le membre de droite de (32) par $C'\|f\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}$.

Le théorème 28 est un corollaire évident de la proposition 4. Soit $\varphi\in\mathcal{C}_o^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que $1 = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\varphi^2(\xi-k)$. On pose $\sigma_k(x,\xi) = \sigma(x,\xi+k)\,\varphi(\xi)$ et l'on a donc $\sigma(x,\xi) = \Sigma\,\sigma_k(x\,,\,\xi-k)\,\varphi(\xi-k)$.

4.4. Appendice.

Nous commencerons par prouver le lemme 5 puis nous décrirons des résultats analogues au théorème 28.

Pour démontrer le lemme 5, on se sert de la décomposition atomique des fonctions de $H^1(\mathbf{T}^n)$. Soient $Q\subset\mathbf{T}^n$ un cube de diamètre d et f une fonction portée par Q, d'intégrale nulle et vérifiant $\|f\|_\infty \leq \frac{1}{|Q|}$; une telle fonction est appelée un atome dans [23] et toute fonction $f \in H^1(\mathbf{T}^n)$ s'écrit $f(x) = \sum_0^\infty \lambda_k A_k$, les A_k étant des atomes (normalisés), et l'on a $\sum_0^\infty |\lambda_k| \le C\|f\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}$.

Pour montrer le lemme 5, il suffit de vérifier qu'il existe une constante C telle que, pour tout atome normalisé f, on ait

$$\Sigma' |k|^{-n} |\hat{f}(k)| \le C. \tag{33}$$

On peut naturellement se ramener au cas où le centre de Q est 0 car translater f revient à multiplier $\hat{f}$ par un caractère ce qui ne change pas le premier membre de (33). On écrit $\hat{f}(k) = \int_Q f(x)\, e^{-ik.x}\, dx = \int_Q f(x)\, [e^{-ik.x} - 1]\, dx$ et l'on a les deux estimations

$$(\Sigma\, |\hat{f}(k)|^2)^{1/2} = \|f\|_2 \le C\, |Q|^{-1/2} \tag{34}$$

et

$$|\hat{f}(k)| \le \|f\|_\infty \int_Q |e^{-ik.x} - 1|\, dx \le C\, d\, |k|. \tag{35}$$

On écrit $\Sigma' |k|^{-n} |\hat{f}(k)| = \sum_{1 \le |k| \le 1/d} + \sum_{|k| > 1/d} = S_1 + S_2$. Pour estimer S_1, on utilise (35) :

$$S_1 \le Cd \sum_{1 \le |k| \le 1/d} |k|^{-n+1} \le C'$$

tandis que l'inégalité de Schwarz donne

$$S_2 \le C\, |Q|^{-1/2} \Big(\sum_{|k| \ge 1/d} |k|^{-2n} \Big)^{1/2} \le C''.$$

La preuve du théorème 28 s'adapte immédiatement au cas des multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p(\mathbf{T}^n)$ et des opérateurs bornés sur $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \le p \le +\infty$. On a

THÉORÈME 32. Soient $p \in [1, +\infty]$ un nombre réel et $\sigma(x,\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ une fonction ayant la propriété suivante : pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$ et tout $\beta \in \mathbf{N}^n$, il existe une constante $C_{\alpha,\beta}$ telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et tout $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ vérifiant $\sup_{1 \le j \le n} |\xi_j| \le 1$, la suite $m_k = \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x, \xi+k)$, $k \in \mathbf{Z}^n$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(\mathbf{T}^n)$ dont la norme ne dépasse pas $C_{\alpha,\beta}$.

Alors l'opérateur pseudo-différentiel $\sigma(x,D)$ est borné sur $L^p(\mathbf{R}^n)$.

Une application est la suivante.

Soit $\sigma(x,\xi) \in S^0_{0,0}$ un symbole exotique arbitraire. Alors, en posant $\langle \xi \rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$ et $\tau(x,\xi) = \dfrac{\sigma(x,\xi)}{\langle \xi \rangle^{n\,|1/p-1/2|}}$, l'opérateur $\tau(x,D)$ est borné sur $L^p(\mathbb{R}^n)$; ici $1 < p < +\infty$.

Supposons d'abord $1 < p \le 2$. On commence par observer que le multiplicateur $\langle k \rangle^{-n\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}$ envoie $\mathcal{F}L^p(\mathbf{T}^n)$ dans $\mathcal{F}L^2(\mathbf{T}^n)$; c'est un résultat classique de l'intégration fractionnaire. Il en résulte que toute suite $(m_k)_{k\in\mathbf{Z}^n}$ vérifiant $|m_k| \le \langle k \rangle^{-n\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}$ définit un multiplicateur borné sur $\mathcal{F}L^p(\mathbf{T}^n)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 32.

Si $2 \le p < +\infty$, on observe que $\langle k \rangle^{-n\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}$ envoie $\mathcal{F}L^2(\mathbf{T}^n)$ dans $\mathcal{F}L^p(\mathbf{T}^n)$ et l'on continue comme ci-dessus.

Naturellement cette application peut aussi s'obtenir par interpolation complexe entre le cas H^1 et le cas L^2 comme dans [28].

5. PREUVE DU THÉORÈME 29.

Rappelons qu'un multiplicateur de $\mathcal{F}H^1(\mathbb{R}^n)$ est une fonction $m(\xi)$ continue et bornée dans $\mathbb{R}^n$ privé de 0 telle que, pour toute fonction $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, on puisse trouver $g \in H^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{g}(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi)$ pour tout $\xi \ne 0$. On peut convenir de donner à $m(0)$ une valeur arbitraire de sorte que l'égalitéci-dessus soit également vérifiée pour $\xi = 0$, compte tenu de $\hat{f}(0) = \hat{g}(0) = 0$.

La preuve du théorème 29 repose sur trois lemmes.

LEMME 12. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ une partie compacte ne contenant pas 0. Il existe une constante $C(K)$ telle que toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dont le spectre est contenu dans K appartienne à $H^1(\mathbb{R}^n)$ et vérifie $\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \le C(K)\|f\|_1$.

On peut, en effet, trouver des fonctions $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$\hat{\varphi}_j(\xi) = i\dfrac{\xi_j}{|\xi|}$ au voisinage de K. Appelons R_j les transformations de Riesz. On a donc $R_j(f) = f * \varphi_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Rappelons que $A(\mathbb{R}^n)$ désigne l'algèbre des transformées de Fourier des fonctions de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

LEMME 13. <u>Soient</u> $m(\xi)$ <u>un multiplicateur de</u> $\mathcal{F}H^1(\mathbb{R}^n)$ <u>et</u> $K \subset \mathbb{R}^n$ <u>une partie compacte ne contenant pas</u> 0. <u>Alors il existe une fonction de</u> $A(\mathbb{R}^n)$ <u>égale à</u> $m(\xi)$ <u>sur</u> K.

Soient, en effet, Ω un voisinage compact de K tel que $0 \notin \Omega$ et $\mathcal{J} \subset A(\mathbb{R}^n)$ l'idéal fermé des fonctions de $A(\mathbb{R}^n)$ dont le support est contenu dans Ω. Alors $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}H^1(\mathbb{R}^n)$ comme le montre le lemme 12 et $m(\xi)$ est donc un multiplicateur de $\mathcal{J}$. Soit enfin $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset A(\mathbb{R}^n)$ une fonction égale à 1 sur K et à support dans Ω. Alors $m(\xi)\,\varphi(\xi)$ appartient à $A(\mathbb{R}^n)$ et coïncide avec $m(\xi)$ sur K.

LEMME 14. <u>Soient</u> $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ <u>et pour tout</u> $T \geq 1$, $\varphi_T(\xi) = \varphi(T\xi)$. <u>Alors pour toute fonction</u> $f \in A(\mathbb{R}^n)$ <u>nulle en</u> 0, <u>on a</u>

$$\lim_{T\to+\infty} \|\varphi_T f\|_{A(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

C'est une propriété classique due à Ditkin.

De même si $f \in A(\mathbb{R}^n)$ est nulle en ξ_0, $\lim\limits_{T\to+\infty} \|\varphi_T(\xi-\xi_0)\, f(\xi)\|_{A(\mathbb{R}^n)} = 0$.

Nous devons montrer que, pour tout multiplicateur $m(\xi)$ de $\mathcal{F}H^1(\mathbb{R}^n)$ et tout $a \in \mathbb{R}^n$, $k \longrightarrow m(k+a)$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}H^1(\mathbb{T}^n)$. Or $H^1(\mathbb{T}^n)$ est un module sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ et donc l'algèbre des multiplicateurs de $\mathcal{F}H^1(\mathbb{T}^n)$ est invariante (non isométriquement) par translation. On peut donc supposer que $a = (a_1, \ldots, a_n)$ vérifie $|a|_0 = \sup(|a_1|, \ldots, |a_n|) \leq \frac{1}{2}$.

Désignons par $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ une fonction dont la transformée de Fourier est égale à 1 en 0 et est nulle si $|\xi|_o \geq \frac{1}{3}$; on a posé $|\xi|_o = \sup(|\xi_1|, \dots, |\xi_n|)$.

Pour tout $T \geq 1$, on pose $\psi_T(x) = T^{-n}\, \psi(T^{-1}x)$ de sorte que $(\psi_T)^\wedge(\xi) = \hat{\psi}(T\xi)$.

Soit $(c_k)_{k\in\mathbf{Z}^n}$ une suite arbitraire de nombres complexes (tous nuls sauf un nombre fini). Formons

$$f(x) = (\Sigma\, c_k\, e^{ik.x})\, e^{ia.x}\, \psi_T(x).$$

Si $c_o = 0$, le théorème 31 implique l'existence d'une constante C_1 et d'une constante C_2 telles que

$$(36) \qquad C_1 \|f\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \leq \|\Sigma\, c_k e^{ik.x}\|_{H^1(\mathbf{T}^n)} \leq C_2 \|f\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}.$$

Posons $m_k = m(a+k)$, $k\in\mathbf{Z}^n$, et

$$g_T(x) = \left(\Sigma\, m_k\, c_k\, e^{ik.x}\right) e^{ia.x}\, \psi_T(x).$$

Désignons enfin par $M : H^1(\mathbf{R}^n) \longrightarrow H^1(\mathbf{R}^n)$ l'opérateur associé au multiplicateur $m(\xi)$.

LEMME 15. <u>On a pour toute suite finie</u> $(c_k)_{k\in\mathbf{Z}^n}$, $\lim\limits_{T\to+\infty} \|g_T - Mf\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} = 0$.

La limite n'est pas atteinte uniformément par rapport à $(c_k)_{k\in\mathbf{Z}^n}$.

Admettons pour l'instant le lemme 15. En utilisant que $\|M(f)\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \leq C\|f\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}$ et, en appliquant (36) à $g_T(x)$, on obtient $\|\Sigma\, m_k\, c_k\, e^{ik.x}\|_{H^1(\mathbf{T}^n)} \leq C'\|\Sigma\, c_k\, e^{ik.x}\|_{H^1(\mathbf{T}^n)}$ si $c_o = 0$; $(m_k)_{k\in\mathbf{Z}^n}$ est donc un multiplicateur de $\mathfrak{F}H^1(\mathbf{T}^n)$.

Pour démontrer le lemme 15, on peut, par linéarité se restreindre au cas où $c_k = 0$ sauf pour une valeur de k pour laquelle $c_k = 1$. On pose alors $V = \left\{\xi\in R^n \;,\; |\xi|_o \leq \frac{1}{3}\right\}$ et $K = k + a + V$. Le lemme 12 s'applique et il suffit de prouver que

$$\left\|\left\{m(\xi) - m(k+a)\right\}\, \hat{\psi}\left[T(\xi - a)\right]\right\|_{A(\mathbf{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad (T \longrightarrow +\infty).$$

Pour cela, on applique les lemmes 13 et 14.

CHAPITRE VI

MESURES DE CARLESON ET ESTIMATIONS L^2

Le point de départ de ce chapitre est un lemme de Pommerenke ; cet auteur démontre qu'un certain opérateur est borné sur L^2 en vérifiant qu'une certaine mesure est une "mesure de Carleson". Ce type de technique s'applique à des situations très variées et fournit des résultats plus précis que ceux du chapitre IV.

En particulier, on peut démontrer directement par ce moyen que le noyau de Calderón $\frac{A(x)-A(y)}{(x-y)^2}$ définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$ quand $A' \in L^\infty(\mathbb{R})$.

La seconde partie du chapitre VI traite du commutateur entre un opérateur pseudo-différentiel T dont le symbole appartient à $S^{-1/2}_{1/2,1/2}$ et un champ de vecteurs D.

Si les coefficients de D sont des fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, nous savons déjà (théorème 16 du chapitre III) que $[T,D]$ est borné sur L^2.

Mais il en est encore de même si les coefficients de D sont de classe C^1. Ce résultat est le meilleur possible.

1. L'ESTIMATION FONDAMENTALE.

Le but de cette première partie est de définir un opérateur bilinéaire de base $T(a,f)$ et de montrer que $f \longrightarrow T(a,f)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ quand $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ensuite il faut montrer que beaucoup d'opérateurs bilinéaires naturels peuvent s'étudier au moyen de $T(a,f)$.

Pour être plus précis nous démontrerons les résultats suivants.

THEOREME 33. Soient φ et ψ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$, telles que $\hat{\varphi}$ et $\hat{\psi}$ coïncident avec des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quand, disons, $|\xi| \geq 1$ et telles que, si $|\xi| < 1$, $|\xi|^{|\alpha|} |\partial_\xi^\alpha \hat{\psi}(\xi)| \leq C_\alpha |\xi|$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ de longueur $|\alpha|$, tandis que $|\xi|^{|\alpha|} |\partial_\xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi)| \leq C_\alpha |\xi|$ pour $|\alpha| \geq 1$.

Posons $\varphi_t(x) = \frac{1}{t^n} \varphi(\frac{x}{t})$, $t > 0$ et soit m une fonction de $L^\infty [0,+\infty[$.

Alors l'opérateur

$$T(a,f) = \int_0^\infty (\varphi_t * f)(\psi_t * a) \frac{m(t)}{t} dt \tag{1}$$

vérifie

$$\|T(a,f)\|_2 \leq C \|a\|_{BMO} \|f\|_2 . \tag{2}$$

Les hypothèses du théorème 33 sont, en particulier, satisfaites si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et si $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, dx = 0$. Cette dernière condition reflète $\hat{\psi}(0) = 0$ qui est exigée de ψ.

Le caractère remarquable de l'opérateur T est d'être bilinéaire et d'être relié très simplement (si l'intégrale de φ est aussi nulle) à une fonction g de Littlewood-Paley définie par $g(f) = \left(\int_0^\infty |\psi_t * f|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$ dont la version bilinéaire est

$$G(a,f) = \int_0^\infty (\psi_t * a)(\psi_t * f) \frac{dt}{t} . \tag{3}$$

En fait l'intégrale de φ n'est pas nulle et le point de vue que nous amorçons ne donne pas le théorème 33 car il n'y a pas de théorie de Littlewood-Paley quand $a \in L^\infty$.

Le théorème 33 fournit ce qu'on pourrait appeler le "théorème de base" de ce chapitre.

Considérons par exemple l'opérateur

$$\int_0^\infty \frac{A(x+t)+A(x-t)-2A(x)}{t^2} f(x-t)\,dt \tag{4}$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R})$ et dans lequel $A' \in L^\infty(\mathbb{R})$.

L'opérateur (4) est formellement du type (1) avec $\psi(x) = \text{sign } x$, $|x| \le 1$ et $\psi(x) = 0$ si $|x| > 1$, $\varphi = \delta_1$ (masse de Dirac au point 1) et $a = A'$. Pour le commutateur de Calderón $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(x+t)-A(x)}{t^2} f(x-t)\,dt$ on prend $\psi(x) = 1$ si $0 < x < 1$, $\psi(x) = 0$ ailleurs et $\varphi = \delta_1$ mais le fait d'intégrer entre $-\infty$ et $+\infty$ introduit la compensation indispensable (pour ψ).

En fait nous verrons que ces opérateurs peuvent être représentés comme des sommes d'opérateurs du type de ceux du théorème 33.

Il en est de même en ce qui concerne le résultat suivant.

THÉORÈME 34. Soit $\sigma(x,\alpha,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nm} \times \mathbb{R}^n)$ une fonction vérifiant

$$|\partial_x^p \partial_\alpha^q \partial_\xi^r \sigma(x,\alpha,\xi)| \le C_{p,q,r}(1+|\alpha|+|\xi|)^{-|q|-|r|} \tag{5}$$

quand $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $\alpha_j \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $q = (q_1,\ldots,q_m)$, $q_j \in \mathbb{N}^n$ et $|q| = |q_1|+\ldots+|q_m|$.

Définissons à l'aide de σ l'opérateur pseudo-différentiel multilinéaire T par $T(a_1,\ldots,a_m,f)(x) = \iint_{\mathbb{R}^{nm}\times\mathbb{R}^n} e^{ix.(\xi+\alpha_1+\ldots+\alpha_m)}\sigma(x,\alpha,\xi)\hat{f}(\xi)\hat{a}_1(\alpha_1)\ldots$ $\ldots\hat{a}_m(\alpha_m)\,d\alpha_1\ldots d\alpha_m\,d\xi$. Alors on a $\|T(a_1,\ldots,a_m,f)\|_2 \le C\|a_1\|_\infty\ldots\|a_m\|_\infty\|f\|_2$ et la constante C ne dépend que des constantes $C_{p,q,r}$ qui interviennent dans (5).

Si, de plus, le symbole $\sigma(x,\alpha,\xi)$ est identiquement nul dès que l'un des α_j, $1 \le j \le m$, est nul, alors

$$\|T(a_1,\ldots,a_m,f)\|_2 \le C\|a_1\|_{BMO}\ldots\|a_m\|_{BMO}\|f\|_2. \tag{6}$$

On rappelle que $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in \mathbb{R}^{nm}$ et que $\alpha_j \in \mathbb{R}^n$.

Pour mieux comprendre le lien entre les théorèmes 33 et 34 (et celui existant avec d'autres résultats sur les commutateurs), nous allons commencer par donner une version L^2 du cas simple suivant démontré au chapitre IV.

THÉORÈME 35. Soit $m(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Supposons que $|m^{(k)}(\xi)| \leq C_k |\xi|^{-k}$. Désignons par M l'opérateur défini par $(Mf)^\wedge(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi)$. Soit $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $A' = a \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors le commutateur entre M et la multiplication par A est régularisant d'ordre 1. Plus précisément, on a

(7) $$\|[M,A]f'\|_2 \leq C\|A'\|_\infty \|f\|_2.$$

Nous reprenons la technique utilisée dans la preuve du théorème 17.

On écrit d'abord

(8) $$4\pi^2 [M,A](f')(x) = \iint e^{ix(\xi+\alpha)} \left[m(\xi+\alpha) - m(\xi)\right] \frac{\xi}{\alpha} \hat{f}(\xi)\, \hat{a}(\alpha)\, d\xi\, d\alpha.$$

On écrit ensuite $1 = \varphi_o(\frac{\xi}{\alpha}) + \Phi(\frac{\xi}{\alpha}) + \varphi_1(\frac{\xi}{\alpha})$ où $\varphi_o \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ est portée par $|t| < \frac{1}{10}$, $\Phi \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ est portée par $\frac{1}{20} < |t| < 20$ et $\varphi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ est portée par $|t| > 10$; ces trois fonctions étant de plus paires.

Nous décomposons l'intégrale I figurant au second membre de (8) en les trois termes correspondants notés I_o, J et I_1.

Pour traiter I_o nous continuons la décomposition en écrivant $1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}^2(2^j\alpha)$ où $\hat{\psi} \in C_o^\infty$ est portée par $1 < |t| < 3$ et nous écrivons $I_o(x)$ sous la forme

(9) $$\iint e^{ix(\xi+\alpha)}(m(\xi+\alpha) - m(\xi)) \frac{\xi}{\alpha} \varphi_o(\frac{\xi}{\alpha}) \hat{f}(\xi)\, \hat{a}(\alpha)\, d\xi\, d\alpha =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \iint e^{ix(\xi+\alpha)}(m(\xi+\alpha)-m(\xi)) \frac{\xi}{\alpha} \varphi_o(\frac{\xi}{\alpha}) \hat{\psi}^2(2^j\alpha)\, \hat{\varphi}^2(2^j\xi)\, \hat{a}(\alpha)\, d\alpha\, d\xi$$

lorsque $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ est égale à 1 quand $|\xi| \leq 2$.

Il suffit d'observer que $\frac{s}{t}\varphi_o(\frac{s}{t})\, \hat{\psi}(t)\, \hat{\varphi}(s) \in C_o^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ et que l'on a donc

$$(10) \qquad \frac{s}{t}\, \varphi_o\!\left(\frac{s}{t}\right) \hat{\psi}(t)\, \hat{\varphi}(s) = \iint e^{i(tu+sv)}\, \eta(u,v)\, du\, dv$$

avec $\eta \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$. En faisant $t = 2^j\alpha$, $s = 2^j\xi$ dans (10) et en introduisant le résultat obtenu dans (9), nous obtenons $\iint e^{ix(\xi+\alpha)} m(\xi)\, \frac{\xi}{\alpha}\, \varphi_o\!\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \hat{f}(\xi)\, \hat{a}(\alpha)\, d\xi\, d\alpha =$

$$\iint \eta(u,v) \left[\sum_j \iint e^{ix(\xi+\alpha)}\, \hat{\psi}_u(2^j\alpha)\, \hat{\varphi}_v(2^j\xi)\, m(\xi)\, \hat{f}(\xi)\, \hat{a}(\alpha)\, d\xi\, d\alpha\right] du\, dv =$$

$$= \iint \eta(u,v) \sum_{-\infty}^{+\infty} (M(f) * \varphi_{v,j})(a * \psi_{u,j})\, du\, dv$$

où $\psi_u(s) = \psi(s+u)$.

De même $\iint e^{ix(\xi+\alpha)}\, m(\xi+\alpha)\, \frac{\xi}{\alpha}\, \varphi_o\!\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \hat{f}(\xi)\, \hat{a}(\alpha)\, d\xi\, d\alpha =$

$$\iint \eta(u,v)\, M\left[\sum_{-\infty}^{\infty} (f * \varphi_{v,j})(a * \psi_{u,j})\right] du\, dv.$$

Le travail essentiel est alors d'estimer la norme L^2 d'une somme de la forme $\sum_{-\infty}^{+\infty} (f * \varphi_j)(a * \psi_j)$ dans laquelle $f \in L^2$, $a \in BMO$, $\varphi_j = 2^{-j}\varphi(2^{-j}x)$ et de même pour ψ_j. Mais une telle expression est une version dyadique discrète de l'intégrale $\int_o^\infty (f * \varphi_t)(a * \psi_t)\, m(t)\, \frac{dt}{t}$ et le théorème 33 fournit l'estimation désirée (la preuve que nous allons donner dans le cas continu s'applique dans le cas discret).

Le cas de $J(x)$ se traite directement et l'on obtient qu'un seul des termes de la somme ci-dessus.

Pour traiter $I_1(x)$, les rôles de α et de ξ sont essentiellement échangés. On observe de plus que

$$(11) \qquad \frac{m(\xi+\alpha) - m(\xi)}{\alpha}\, \xi\, \varphi_1\!\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \hat{\psi}(2^j\xi)\, \hat{\varphi}(2^j\alpha) = \iint e^{i(2^j\alpha u + 2^j\xi v)}\, \eta_j(u,v)\, du\, dv$$

où $|\eta_j(u,v)| \le \dfrac{C_N}{(1+u^2+v^2)^N}$ et C_N ne dépend pas de j.

Pour vérifier (11) il faut ramener toutes les fonctions à avoir un support fixe en posant $2^j\xi = s$ et $2^j\alpha = t$. En se servant de l'hypothèse sur la fonction m, on obtient que

$$(12) \qquad \left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}\, \frac{\partial^\ell}{\partial s^\ell} \left\{\left[m(2^{-j}(s+t)) - m(2^{-j}s)\right] \frac{s}{t}\, \varphi_1\!\left(\frac{s}{t}\right) \hat{\psi}(s)\, \hat{\varphi}(t)\right\}\right| \le C_{k,\ell} \text{ uniformément}$$

en j.

Ainsi on peut écrire que $\iint \sum_j \eta_j(u,v)(f * \psi_{v,j})(a * \varphi_{u,j})\,du\,dv$.

Pour estimer la norme L^2 d'une telle somme, on observe tout simplement que les termes sont orthogonaux dès que $|j_1 - j_2| > 3$; ceci parce que le premier membre de (11) est porté par $2^{-j} \le |\xi| \le 3.2^{-j}$, $|\alpha| \le \frac{3}{10}2^{-j}$ (à cause de la condition sur le support de φ_1) et que les fréquences du produit $(f * \psi_{v,j})(a * \varphi_{u,j})$ appartiennent donc à la somme algébrique de $\left[-\frac{3}{10}2^{-j}, \frac{3}{10}2^{-j}\right]$ et de $\{2^{-j} \le |\xi| \le 32^{-j}\}$.

Puisque $\|a * \varphi_{u,j}\|_\infty \le C\|a\|_\infty$ et que $\sum_j \|f * \psi_{u,j}\|_2^2 \le C\|f\|_2^2$, l'estimation de la norme L^2 de $I_1(x)$ est essentiellement triviale.

2. LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 33.

Nous commençons par quelques lemmes d'usage courant (voir [31], [50]).

LEMME 1. Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction telle que $|\psi(x)| \le \frac{1}{1+|x|^{n+1}}$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx = 0$. Alors $\int_0^\infty |\hat{\psi}(\xi t)|^2 \frac{dt}{t} \le C_n$ où C_n ne dépend que de n.

COROLLAIRE. Sous les hypothèses du lemme 1, on a

$$\int_0^\infty \|f * \psi_t\|_2^2 \frac{dt}{t} \le C_n \|f\|_2^2 .$$

LEMME 2. Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction vérifiant les hypothèses du lemme 1. Alors pour toute fonction $a \in BMO(\mathbb{R}^n)$,

$$d\mu(x,t) = |a * \psi_t|^2 \frac{dx\,dt}{t} \tag{13}$$

est une mesure de Carleson sur $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

C'est à dire que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{|x-x_0|\le\varepsilon} \int_{0\le t\le\varepsilon} |a * \psi_t|^2 \frac{dx\,dt}{t} \le C\,\varepsilon^n$$

où $C \le \|a\|_{BMO}^2 C_n$; C_n ne dépendant que de n.

LEMME 3. Soit $\varphi \in L^1(\mathbf{R}^n)$ une fonction telle que $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{1+|x|^{n+1}}$. Désignons par $\alpha > 0$ un nombre réel et par $\Gamma_\alpha(x_o)$ le cône $\{(x,t)\,;\, t \geq \alpha|x-x_o|\}$ centré en x_o. Alors il existe une constante $C_{\alpha,n}$ telle que

$$(14) \qquad \sup_{(x,t)\in\Gamma_\alpha(x_o)} |f*\varphi_t| \leq C_{\alpha,n}\, f^*(x_o).$$

Là encore $C_{\alpha,n}$ ne dépend que de α et de n.

On a désigné par f^* la fonction maximale de Hardy et Littlewood.

COROLLAIRE. Soient φ, ψ deux fonctions de $L^1(\mathbf{R}^n)$ telles que $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{1+|x|^{n+1}}$, $|\psi(x)| \leq \frac{1}{1+|x|^{n+1}}$ et $\int \psi(x)\,dx = 0$. Alors pour toute fonction $a \in BMO(\mathbf{R}^n)$,

$$(15) \qquad \int_{\mathbf{R}^n}\int_0^\infty |f*\varphi_t|^2\, |a*\psi_t|^2\, \frac{dx\,dt}{t} \leq C_n \|a\|_{BMO}^2\, \|f\|_2^2.$$

La constante C_n ne dépend que de n.

C'est une conséquence immédiate du lemme 2 et du fait (voir Stein [50]) que, pour toute mesure de Carleson

$$(16) \qquad \int_{\mathbf{R}^n}\int_0^\infty |f*\varphi_t|^2\, d\mu(x,t) \leq C\int_{\mathbf{R}^n} (f^*)^2\, dx \leq C'\int_{\mathbf{R}^n} |f|^2\, dx.$$

Une première approximation vers le théorème 33 est le résultat suivant.

PROPOSITION 1. Supposons que φ, ψ_1, ψ_2 soient, en valeur absolue, majorées par $\frac{1}{1+|x|^{n+1}}$ et que $\int_{\mathbf{R}^n} \psi_1(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} \psi_2(x)\,dx = 0$.

Formons, si $m \in L^\infty[0,+\infty[$,

$$g(x) = \int_0^\infty \psi_{1,t} * \left[(f*\varphi_t)(a*\psi_{2,t})\right] \frac{m(t)}{t}\,dt.$$

Alors $\|g\|_2 \leq C_n \|a\|_{BMO} \|m\|_\infty \|f\|_2$. On a posé $\psi_{1,t}(x) = t^{-n}\psi_1(t^{-1}x)$ etc.

La preuve de la proposition 1 est très simple. On appelle $h \in L^2(\mathbf{R}^n)$ une fonction telle que $\|h\|_2 \leq 1$ et l'on cherche à majorer

$$I = \int g(x)\, h(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty (\tilde{\psi}_{1,t} * h)(\psi_{2,t} * a)(\varphi_t * f)\, \frac{m(t)}{t}\, dx\, dt$$

avec $\tilde{\psi}(x) = \psi(-x)$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|I| \le \|m\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |\psi_{1,t} * h|^2 \frac{dx\,dt}{t} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |\psi_{2,t} * a|^2 |\varphi_t * f|^2 \frac{dx\,dt}{t} \right)^{1/2}$$

$$\le C_n \|m\|_\infty \|a\|_{BMO} \|f\|_2 \ ;$$

ceci en vertu de (15).

Nous allons maintenant écrire l'opérateur général décrit par le théorème 33 à l'aide des opérateurs particuliers de la proposition 1. Tout le problème est d'introduire la troisième convolution de $\psi_{2,t}$.

Nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

LEMME 4. Soient ψ_1 et ψ_2 deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^n)$ telles que $|\psi_1| \le \frac{1}{1+|x|^{n+1}}$, $|\psi_2| \le \frac{1}{1+|x|^{n+1}}$ et que $\hat{\psi}_1$ et $\hat{\psi}_2$ aient un support compact ne contenant pas 0.

Alors il existe une constante C (dépendant de ψ_1 et de ψ_2) telle que, pour tout $\delta > 0$, on ait

$$\left\| \int_0^\infty (f * \psi_{1,t})(a * \psi_{2,\delta t})\, \frac{m(t)}{t}\, dt \right\|_2 \le C \|m\|_\infty \|a\|_{BMO} \|f\|_2 \ . \tag{17}$$

Nous allons distinguer trois cas pour $\delta > 0$.

Si $\delta < \delta_1$ $(\delta_1 > 0)$, nous allons vérifier que le spectre du produit $(f * \psi_{1,t})(a * \psi_{2,\delta t})$ est contenu dans une couronne de la forme $\frac{r_3}{\delta t} \le |\xi| \le \frac{R_3}{\delta t}$ $(0 < r_3 < R_3)$. En effet le support de $\hat{\psi}_1$ est contenu dans $r_1 \le |\xi| \le R_1$, celui de $\hat{\psi}_2$ est contenu dans $r_2 \le |\xi| \le R_2$ de sorte que la support de $[(f * \psi_{1,t})(a * \psi_{2,\delta t})]^\wedge$ est contenu dans la somme algébrique de $\left\{ \frac{r_1}{t} \le |\xi| \le \frac{R_1}{t} \right\}$ et de $\left\{ \frac{r_2}{\delta t} \le |\xi| \le \frac{R_2}{\delta t} \right\}$.

Choisissons $\psi_3 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de sorte que $\hat{\psi}_3 = 1$ sur la couronne

$r_3 \leq |\xi| \leq R_3$ et que $\hat{\psi}_3 = 0$ quand $|\xi| \leq r_3/2$ ou $|\xi| \geq 2R_2$.

Nous pouvons alors récrire notre opérateur sous la forme

$$g = \int_0^\infty \psi_{3,\delta t} * \left[(f * \psi_{1,t})(a * \psi_{2,\delta t})\right] \frac{m(t)}{t}\, dt .$$

La technique de démonstration de la proposition 1 s'applique. On forme si $\|h\|_2 \leq 1$, $I = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, h(x)\, dx$ que l'on majore brutalement par

$$C\|a\|_{BMO} \left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty |f * \psi_{1,t}|^2 \frac{dx\, dt}{t}\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty |h * \psi_{3,t}|^2 \frac{dx\, dt}{t}\right)^{1/2}$$

ceci en utilisant $\|a * \psi_{2,t}\|_\infty \leq C\|a\|_{BMO}$.

Si $\delta \geq \delta_2$, le support de $\left[(f * \psi_{1,t})(a * \psi_{2,\delta t})\right]^\wedge$ est contenu dans $\frac{r_3}{t} \leq |\xi| \leq \frac{R_3}{t}$ pour un choix approprié de $0 < r_3 < R_3$. On est alors conduit à l'opérateur $\int_0^\infty \psi_{3,t} * \left[(f * \psi_{1,t})(a * \psi_{2,\delta t})\right] \frac{m(t)}{t}\, dt$; on intègre contre $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\|h\|_2 \leq 1$ et l'on continue comme ci-dessus.

Quand $\delta_1 < \delta < \delta_2$, par des arguments tout à fait semblables, on peut récrire notre opérateur sous la forme $\int_0^\infty \varphi_t * \left[(f * \psi_{1,t})(a * \psi_{2,\delta t})\right] \frac{m(t)}{t}\, dt$ où $\hat{\varphi}$ a un support compact et $\hat{\varphi}(\xi) = 1$ pour $|\xi| < R_3$ (pour un R_3 approprié).

Ici encore, on intègre contre h et on applique la proposition 1 en échangeant les rôles de f et h.

LEMME 5. <u>Soient</u> $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ <u>deux fonctions telles que</u> $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{1+|x|^{n+1}}$, $|\psi(x)| \leq \frac{1}{1+|x|^{n+1}}$; <u>on suppose que</u> $\hat{\varphi}$ <u>et</u> $\hat{\psi}$ <u>aient un support compact et que</u> $0 \notin \operatorname{supp} \hat{\psi}$.

<u>Alors pour tout</u> $\delta_0 > 0$, <u>il existe une constante</u> C_0 <u>telle que, si</u> $0 < \delta \leq \delta_0$, <u>on ait</u>

$$\left\|\int_0^\infty (f * \varphi_t)(a * \psi_{\delta t}) \frac{m(t)}{t}\, dt\right\|_2 \leq C_0 \|f\|_2 \|a\|_{BMO}.$$

Là encore, si δ est assez petit, on écrit notre intégrale sous la forme

$$\int_0^\infty \psi_{1,\delta t} * \left[(f * \varphi_t)(a * \psi_{2,\delta t})\right] \frac{m(t)}{t}\, dt.$$

En reprenant la preuve de la proposition 1, on est conduit à estimer

$$\left(\int_{\mathbf{R}_+^{n+1}} |f * \varphi_t|^2 \, |a * \psi_{\delta t}|^2 \, \frac{dx\, dt}{t} \right)^{1/2}.$$

Posons $\delta t = s$ et remarquons que

$$\sup_{(x,s)\in\Gamma_\alpha(x_o)} |f * \varphi_{s/\delta}| \leq \sup_{(x,s)\in\Gamma_\alpha(x_o)} |f * \varphi_{s/\delta_o}| \quad \text{si} \quad \delta \leq \delta_o.$$

Dès lors, en vertu de (16), toutes les estimations sont uniformes en δ.

Si δ n'est pas assez petit pour que le support de $\hat{\varphi}$ ne soit pas assez petit relativement à celui de $\hat{\psi}_{2,\delta}$, nous écrirons $\varphi = \varphi_1 + \psi_1$ où le support de $\hat{\varphi}_1$ est assez petit et où 0 n'appartient pas au support de $\hat{\psi}_1$.

Il suffit donc de s'occuper de

$$T(a,f) = \int_0^\infty (f * \psi_{1,t})\,(a * \psi_{\delta t})\, \frac{m(t)}{t} dt$$

auquel on applique le lemme 4.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 33. L'idée est de décomposer φ et ψ en une somme de termes auxquels s'appliquent les lemmes précédents.

Nous commençons par supposer que les supports de $\hat{\varphi}$ et de $\hat{\psi}$ sont contenus dans $\left\{|\xi| \leq 1\right\}$. Soit $p(\xi)$ une fonction radiale appartenant à $C_o^\infty(\mathbf{R}^n)$, portée par $\left\{\frac{2}{3} \leq |\xi| \leq 2\right\}$ et telle que $\sum_{j=0}^{\infty} p(2^j\xi) = 1$ pour $0 < |\xi| < 1$.

Nous utilisons l'estimation $|\psi(\xi)| < |\xi|$ pour écrire

$$\hat{\psi}(\xi) = \sum_o^\infty p(2^N\xi)\, \hat{\psi}(\xi) = \sum_o^\infty 2^{-N}\, \hat{\psi}_N^1\, (2^N\xi) \quad \text{et} \quad \hat{\varphi}(\xi) = \sum_o^N p(2^j\xi)\, \hat{\varphi}(\xi) +$$

$$\left(\sum_{N+1}^\infty p(2^j\,\xi)\right) \hat{\varphi}(\xi) = \sum_o^N \hat{\psi}_j^2(2^j\xi) + \hat{R}_N(2^N\xi).$$

Les fonctions $\hat{\psi}_j^1$ et $\hat{\psi}_j^2$ sont portées par $\frac{2}{3} \leq |\xi| \leq 2$ et toutes leurs dérivées sont bornées uniformément en j.

Comme pour $\hat{R}_N$, on peut écrire $\hat{R}_N(2^N\xi) = \hat{\varphi}_1(2^N\xi)\, \hat{\varphi}(\xi)$ avec

$\varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il en résulte que $R_N = \varphi_1 * \varphi_{2^{-N}}$ est majoré en module par $C(1+|x|)^{-n-1}$ uniformément en N.

Maintenant nous pouvons écrire T sous la forme

$T = \sum_0^\infty \sum_{j\le N} 2^{-N} T_{j,N} + \sum_1^\infty 2^{-N} S_N$ où $T_{j,N}$ est l'opérateur (du type T) associé à ψ_N^1 et ψ_j^2, $0 \le j \le N$, et où S_N est associé à ψ_N^1 et R_N.

Le lemme 4 fournit l'estimation

$$\|T_{j,N}(a,f)\|_2 \le C\|a\|_{BMO}\|f\|_2$$

tandis que le lemme 5 donne

$$\|S_N(a,f)\|_2 \le C\|a\|_{BMO}\|f\|_2 .$$

En groupant ces inégalités, il vient

$$\|T(a,f)\|_2 \le C \sum_0^\infty (N+1)\, 2^{-N} \|a\|_{BMO} \|f\|_2 .$$

Pour terminer, il faut traiter le cas général où $\hat{\varphi}$ et $\hat{\psi}$ ne sont pas portés par $|\xi| \le 1$.

On écrit
$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_o + \sum_o^\infty \omega_j \hat{\psi}_j^{(1)}(2^{-j}\xi)$$
et
$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_o + \sum_o^\infty \omega_j' \hat{\psi}_j^{(2)}(2^{-j}\xi)$$

où ω_j, ω_j' sont à décroissance rapide et $\psi_j^{(1)}$, $\psi_j^{(2)}$ sont portées par $\frac{1}{2} \le |\xi| \le 2$, sont uniformément bornées ainsi que toutes leurs dérivées.

Les couples $(\psi_j^{(1)}, \psi_k^{(2)})$ conduisent à des opérateurs $T_{j,k}$ qui sont uniformément bornés sur L^2, en vertu du lemme 4. Le lemme 5 s'applique aux opérateurs associés aux couples $(\varphi_o, \psi_j^{(2)})$; le δ du lemme 5 vaut alors 2^{-j}. Enfin le terme provenant du couple $(\psi_j^{(1)}, \psi_o)$ se traite par la démonstration du lemme 4 relative aux grandes valeurs de δ.

3. LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 34.

Nous allons d'abord démontrer le théorème 34 dans le cas bilinéaire et pour des symboles ne dépendant pas de x. Nous indiquerons ensuite comment obtenir la cas général.

PROPOSITION 2. Soit $\sigma(\alpha,\xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \setminus \{0,0\})$ une fonction telle que $|\partial_\alpha^p \partial_\xi^q \sigma(\alpha,\xi)| \le C_{p,q}(|\alpha|+|\xi|)^{-|p|-|q|}$ pour $(\alpha,\xi) \neq (0,0)$.

Alors l'opérateur bilinéaire

$$\sigma(D)(a,f) = \iint e^{ix.(\xi+\alpha)}\,\sigma(\alpha,\xi)\,\hat{f}(\xi)\,\hat{a}(\alpha)\,d\alpha\,d\xi$$

vérifie

$$\|\sigma(D)(a,f)\|_2 \le C\|a\|_\infty \|f\|_2 .$$

Si, de plus, $\sigma(0,\xi) = 0$, on a

$$\|\sigma(D)(a,f)\|_2 \le C\|a\|_{BMO} \|f\|_2 .$$

Comme dans la démonstration du théorème 17, on écrit $\sigma(\alpha,\xi) = \sigma_1(\alpha,\xi) + \sigma_2(\alpha,\xi)$ où $\sigma_1(\alpha,\xi)$ est portée par $|\alpha| \ge |\xi|/20$, $\sigma_2(\alpha,\xi)$ est portée par $10|\alpha| \le |\xi|$ et où σ_1 et σ_2 vérifient les mêmes estimations que σ.

Pour traiter l'action de $\sigma_1(D)$, on appelle $\hat{\psi}(a) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction portée par $\frac{4}{5} \le |\alpha| \le \frac{6}{5}$ et telle que $\int_0^\infty (\hat{\psi})^2\,(dt)\,\frac{dt}{t} = 1$ pour $\alpha \neq 0$. Soit d'autre part $\hat{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction égale à 1 si $|\xi| \le 30$.

Nous pouvons écrire

$$\sigma_1(D)(a,f) = \int_0^\infty\!\!\iint e^{ix.(\xi+\alpha)}\,\sigma_t(t\alpha,t\xi)\,\hat{\psi}(t\alpha)\,\hat{\varphi}(t\xi)\,\hat{a}(\alpha)\,\hat{f}(\xi)\,d\alpha\,d\xi\,\frac{dt}{t} \tag{18}$$

avec $\sigma_t(\alpha,\xi) = \hat{\psi}(\alpha)\,\hat{\varphi}(\xi)\,\sigma_1(\frac{\alpha}{t},\frac{\xi}{t})$.

Le support de $\sigma_t(\alpha,\xi)$ est compact et contenu dans $\frac{4}{5} \le |\alpha|+|\xi| \le 40$ et toutes les dérivées de $\sigma_t(\alpha,\xi)$ sont uniformément bornées en t.

Cela permet d'écrire

$$\sigma_t(\alpha,\xi) = \iint e^{i(\alpha.u+\xi.v)}\,m(t,u,v)\,\frac{du\,dv}{(1+|u|^2+|v|^2)^N} \tag{19}$$

où $m(t,u,v) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ uniformément en t ; en particulier $|m(t,u,v)| \leq C$. Les identités (18) et (19) donnent

$$\sigma_1(D)(a,f) = \iint \frac{du\,dv}{(1+|u|^2+|v|^2)^N} \int_0^\infty \left\{ \iiint e^{ix.(\xi+\alpha)} e^{i\alpha t.u} \hat{\psi}(\alpha t)\, e^{i\xi t.v} \right.$$

$$\left. \hat{\varphi}(\xi t)\, \hat{a}(\alpha)\, \hat{f}(\xi)\, d\alpha\, d\xi \right\} d\alpha\, d\xi \Big\} \frac{m(t,u,v)}{t}\, dt =$$

$$\iint \frac{du\,dv}{(1+|u|^2+|v|^2)^N} \int_0^\infty (f * \varphi_t^v)(a * \psi_t^u)\, \frac{m(t,u,v)}{t}\, dt$$

avec $\varphi^v(x) = \varphi(x+v)$ et $\psi^u(x) = \psi(x+u)$. On a donc

$$|\varphi^v(x)| \leq C \frac{(1+|v|)^{n+1}}{(1+|x|)^{n+1}} \quad , \quad |\psi^u(x)| \leq C \frac{(1+|u|)^{n+1}}{(1+|x|)^{n+1}}$$

et il suffit d'appliquer le théorème 33.

Pour traiter $\sigma_2(D)$, nous échangeons les rôles de ξ et de α. Un raisonnement analogue conduit à la formule

$$\sigma_2(D)(a,f) = \iint \frac{du\,dv}{(1+|u|^2+|v|^2)^N} \int_0^\infty \psi_{1,t} * \left\{ f * \psi_t^u)(a * \varphi_t^v) \right\} \frac{m(t,u,v)}{t}\, dt \quad \text{où}$$

$\psi_{1,t}(x) = t^{-n}\, \psi_1(t^{-1}x)$ est introduit en remarquant que si $|\xi| \geq 10|\alpha|$, $\hat{\varphi}(\alpha)\, \hat{\psi}(\xi) = \hat{\psi}_1(\alpha+\xi)\, \hat{\varphi}(\alpha)\, \hat{\psi}(\xi)$, $\hat{\psi}_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \notin \operatorname{supp} \hat{\psi}_1$.

L'opérateur $\int_0^\infty \psi_{1,t} * \left\{ (f * \psi_t)(a * \varphi_t) \right\} \frac{m(t)}{t}\, dt$ se traite en intégrant contre une fonction h de $L^2(\mathbb{R}^n)$ de norme ≤ 1, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en remarquant que $\|a * \varphi_t\|_\infty \leq C \|a\|_\infty$.

Si $\sigma(0,\xi) = 0$, on aura $\sigma_2(0,\xi) = 0$ et l'on obtient que

$$\sigma_t(\alpha,\xi) = \iint (e^{i\alpha.u} - 1)\, e^{i\xi.v}\, m(t,u,v)\, \frac{du\,dv}{(1+|u|^2+|v|^2)^N}.$$

On pose $\hat{\psi}_{2,u}(\alpha) = (e^{i\alpha.u} - 1)\, \hat{\varphi}(\alpha)$ ce qui conduit à des opérateurs de la forme $\int_0^\infty \psi_{1,t} * \left\{ (f * \psi_t)(a * \psi_{2,t}) \right\} \frac{m(t)}{t}\, dt$ qui sont bornés si $a \in BMO$.

Nous allons passer au cas général des symboles dépendant de x ; nous supposerons cependant encore que $m = 1$.

Nous observons que $\sigma(x,D)(a,f)$ est la restriction à la diagonale $x' = x$

de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de l'opérateur pseudo-différentiel sur $\mathbb{R}^{2n}$ dont le symbole est $\sigma(x',\alpha,\xi)$ et que l'on applique à la fonction $a(y_1)f(y_2)$, $(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Retournant au noyau, on a

$$\sigma(x,D)(a,f)(x) = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} K(x,x-y_1,x-y_2)a(y_1)\, f(y_2)\, dy_1\, dy_2$$

formule dans laquelle l'intégrale est prise au sens des distributions.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ une fonction portée par $|z_1|+|z_2| \leq 1/2$ et égale à 1 au voisinage de 0. Alors $K_2 = K(x,z_1,z_2)(1-\varphi(z_1,z_2)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ uniformément en x.

De sorte que $\left|\iint K_2(x,x-y_1,x-y_2)\, a(y_1)\, f(y_2)\, dy_1\, dy_2\right| \leq$

$\iint \omega(x-y_1\ ,\ x-y_2)\,|a(y_1)|\,|f(y_2)|\,dy_1\, dy_2$

où $\omega \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. La norme L^2 de cette fonction est évidemment majorée par $C\|a\|_\infty \|f\|_2$.

Le terme non trivial correspond à $K_1(x,z_1,z_2) = K(x,z_1,z_2)\,\varphi(z_1,z_2)$ et peut être écrit sous la forme

$$\sigma_1(x,D)(a,f)(x) = \iint e^{i(\xi+\alpha).x}\, \sigma_1(x,\alpha,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, \hat{a}(\alpha)\, d\xi\, d\alpha$$

où $\sigma_1(x,\alpha,\xi) = \iint \sigma(x,\alpha-u\ ,\ \xi-v)\, \hat{\varphi}(u,v)\, du\, dv$ est un symbole vérifiant les conditions du théorème 34.

De plus si f est portée par un cube Q de côté 1, alors $\sigma_1(x,D)(a,f)$ est portée par le cube double $\tilde{Q}$ de côté 2 et de même centre.

Soient Q_j, $j \in \mathbb{Z}^n$, les cubes $j_k \leq x_k < j_k+1$, $1 \leq k \leq n$. On peut écrire $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} f_j$ où f_j est portée par Q_j.

Puisque le support de $\sigma_1(x,D)(a,f_j)$ est contenu dans $\tilde{Q}_j$, il suffit de montrer que $\|\sigma_1(x,D)(a,f_j)\|_2 \leq C\|a\|_\infty \|f_j\|_2$.

On peut se limiter au cas $j = 0$, nos hypothèses étant invariantes par translation.

Nous utiliserons alors le lemme suivant.

LEMME 6. Soient N et $n \geq 1$ deux entiers tels que $N > \frac{n}{2}$. Alors il existe une constante $C(n,N)$ telle que, si $F(x,y) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, on ait

$$(20) \qquad \int_{\mathbf{R}^n} |F(x,x)|^2 \, dx \leq C_n^2 \sum_{|\alpha| \leq N} \iint |\partial_y^\alpha F(x,y)|^2 \, dx \, dy.$$

Pour le voir, il suffit, pour tout x fixé, d'appliquer le théorème d'injection de Sobolev à la fonction $y \longrightarrow F(x,y)$. On obtient $|F(x,x)|^2 \leq C_n^2 \sum_{|\alpha| \leq N} \int |\partial_y^\alpha F(x,y)|^2 \, dy$ que l'on intègre en x pour avoir (20).

Soit $\chi \in C_o^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction égale à 1 sur le cube "double" $\tilde{Q}_o$ et formons

$$F(x,y) = \chi(x)\,\chi(y) \iint e^{ix.(\xi+\alpha)}\, \sigma(y,\alpha,\xi)\, \hat{a}(\alpha)\, \hat{f}(\xi)\, d\alpha \, d\xi .$$

Le lemme 6 montre que le problème peut effectivement être réduit au cas des symboles indépendants de x.

Il nous reste à prouver la version multilinéaire du théorème 34. Comme dans [21], nous introduisons une partition de l'unité $1 = \sum_{j=0}^{m} \theta_j(\xi,\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ où θ_j est homogène de degré 0, C^∞ pour $(\xi,\alpha) \neq 0$ et telle que

$$\text{support } \theta_j \subset \left\{ \tfrac{1}{2}|\alpha_k| \leq |\alpha_j| \;;\; \tfrac{1}{2}|\xi| < |\alpha_j| \;;\; k = 1, 2, \ldots, m \right\}$$

et $\qquad \text{support } \theta_o \subset \left\{ \tfrac{1}{2}|\alpha_k| \leq |\xi| \;;\; k = 1, 2, \ldots, m \right\}.$

Le symbole $\sigma\theta_j$ est alors décomposé de façon dyadique par rapport à la variable α_j (ou la variable ξ si $j = 0$).

Les termes correspondants seront estimés comme ci-dessus en utilisant la version suivante du théorème 33.

PROPOSITION 3. Soient $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ des fonctions telles que $\hat{\varphi}_j \in C_o^\infty(\mathbf{R}^n)$, $0 \leq j \leq n$ et telles que, pour au moins une valeur de j, $\hat{\varphi}_j = 0$ sur un voisinage de 0.

Alors l'opérateur multi-linéaire

$$T(a_1,\ldots,a_m,f) = \int_0^\infty (f * \varphi_{0,t})(a_1 * \varphi_{0,t})\ldots(a_m * \varphi_{m,t})\, \frac{m(t)}{t}\, dt$$

est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ quand $a_j \in L^\infty$, $1 \le j \le m$.

Rappelons que $\varphi_{j,t}(x) = t^{-n} \varphi_j(x/t)$.

Dans la preuve de la proposition 3, on doit examiner deux cas.

a) Supposons d'abord que 0 n'appartienne pas au support de $\hat{\varphi}_o$. Désignons alors par $R > r > 0$ deux nombres réels tels que ce support soit contenu dans $r \le |\xi| \le R$.

Pour tout $j = 1, 2, \dots, m$, on écrit $\hat{\varphi}_j = \hat{\theta}_j + \hat{\psi}_j$ où $\hat{\theta}_j \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ est portée par $\left\{|\xi| \le \frac{r}{2m}\right\}$ et $\hat{\psi}_j$ par $\left\{\frac{r}{4m} \le |\xi| \le R_j\right\}$.

Différents types de termes apparaissent dans la décomposition correspondante de l'opérateur T :

(21)
$$T = \int_o^\infty (f * \varphi_{0,t}) \prod_{j=1}^m (a_j * \theta_{j,t}) \frac{m(t)}{t}\, dt$$
$$+ \Sigma \int_o^\infty (f * \varphi_{0,t}) \prod_{k=1}^{\ell} (a_{j_k} * \theta_{j_k,t}) \prod_{\ell+1}^{m} (a_{j_k} * \psi_{j_k,t}) \frac{m(t)}{t}\, dt .$$

La transformée de Fourier de $(f * \varphi_{0,t}) \prod_{j=1}^m (a_j * \theta_{j,t})$ est évidemment portée par la couronne $\left\{\frac{r}{2t} \le |\xi| \le \frac{2R}{t}\right\}$ car le spectre d'un produit de fonctions est contenu dans la somme algébrique des spectres.

Le premier terme de (21) peut donc être récrit sous la forme
$$\int_o^\infty \psi_t * \left[(f * \varphi_{0,t}) \prod_{j=1}^m (a_j * \theta_{j,t})\right] \frac{m(t)}{t}\, dt \quad \text{avec} \quad 0 \notin \text{support } \hat{\psi} \quad \text{et} \quad \hat{\psi} \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Pour estimer la norme L^2 de cette dernière fonction, on intègre contre $h \in L^2$, $\|h\|_2 \le 1$ et l'on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le corollaire du lemme 1.

Il reste à estimer les autres termes de (21).

Un terme typique de la somme (21) est
$$S(f) = \int_o^\infty (f * \varphi_{0,t}) \prod_{k=1}^{\ell} (a_k * \theta_{k,t}) \prod_{\ell+1}^{m} (a_k * \psi_{k,t}) \frac{m(t)}{t}\, dt$$

avec $\ell < m$. Le spectre de l'intégrant est contenu dans $|\xi| \le Ct$ pour une certaine constante $C > 0$.

On appelle $\varphi \in C_o^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction radiale, égale à 1 sur $|\xi| \leq C$ et l'on peut, sans changer l'intégrant, ajouter une convolution supplémentaire avec $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(t^{-1}x)$.

On évalue donc $\left|\int h(x)\, S(f)(x)\, dx\right| \leq$

$$C\left(\int |h * \varphi_t|^2\, a_m * \psi_{m,t}|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}\left(\int |f * \varphi_{0,t}|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}.$$

Puis on majore le second membre en utilisant les corollaires des lemmes 1 et 3.

b) Il faut maintenant examiner le cas où $0 \notin$ support $\hat{\varphi}_j$ pour un $j \neq 0$, disons $j = 1$.

Pour les autres valeurs de j, on écrit encore $\varphi_j = \psi_j + \theta_j$ comme ci-dessus et il vient

$$T(a_1, \ldots, a_m, f) = \int_o^\infty (f * \psi_{0,t}) \prod_{j=1}^m (a_j * \varphi_{j,t}) \frac{m(t)}{t}\, dt \tag{22}$$
$$+ \int_o^\infty (f * \theta_{0,t})(a_1 * \varphi_{1,t}) \prod_{j=2}^m (a_j * \theta_{j,t})$$
$$+ \Sigma \int (f * \theta_{0,t})(a_1 * \varphi_{1,t}) \prod_{k=2}^{\ell} (a_{j_k,t}) \prod_{\ell+1}^{m} (a_{j_k} * \psi_{j_k,t}) \frac{m(t)}{t}\, dt.$$

Le premier terme est du type de ceux traités dans (a). Le second peut être traité comme dans (a) en remarquant que le spectre du produit figurant dans l'intégrale est contenu dans $\frac{r}{2} \leq |\xi| \leq 2R$ $(0 < r \leq |\xi| \leq R)$ contenant le spectre de φ_1). On peut introduire une convolution supplémentaire par $\psi_t(x) = t^n \psi(t^{-1}x)$; $0 \notin$ support $\hat{\psi}$, $\hat{\psi} \in C_o^\infty(R^n)$. Alors, encore une fois on intègre contre $h \in L^2(\mathbf{R}^n)$ telle que $\|h\|_2 \leq 1$ et l'on utilise les corollaires des lemmes 1 et 3.

Les derniers termes de (22) se traitent comme ceux de (21). Le spectre de l'intégrant est contenu dans $|\xi| \leq Ct$; on peut donc introduire une convolution supplémentaire avec φ_t pour une certaine fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ telle que $\hat{\varphi} \in C_o^\infty(R^n)$. On fait le produit scalaire avec h telle que $\|h\|_2 \leq 1$ et l'on majore le module de l'intégrale obtenue par

$(\int |h * \varphi_t|^2 |a_m * \psi_{m,t}|^2 \frac{dt}{t})^{1/2} (\int |f * \theta_{0,t}|^2 |a_1 * \varphi_{1,t}|^2 \frac{dt}{t})^{1/2}$. On emploie, pour chacun des termes, le corollaire du lemme 3.

4. APPLICATIONS ET EXEMPLES DES THÉORÈMES 33 ET 34.

L'exemple le plus simple du théorème 33 s'obtient en prenant $\varphi_t = P_t$, le noyau de Poisson en $t > 0$ et $\psi_t = t \frac{\partial}{\partial t} P_t$.

Alors $\hat{\varphi}(\xi) = e^{-|\xi|}$, $\hat{\psi}(\xi) = |\xi| e^{-|\xi|}$ et l'opérateur $T(a,f) = \int_0^\infty (P_t * f) \frac{\partial}{\partial t} (P_t * a)\, dt$ vérifie les conclusions du théorème 33.

Supposons que $n = 1$ et que a et f soient les valeurs au bord $(t = 0)$ de deux fonctions holomorphes que l'on écrira encore $a(x + it)$ et $f(x + it)$. Alors $P_t * f = f(x + it)$, $P_t * a = a(x + it)$ et si nos deux fonctions holomorphes sont $O(|x+it|^{-1})$ à l'infini, on a $T(a,f)(x) = \int_{-\infty}^{x} a'(u) f(u)\, du$ comme on le vérifie par changement de contour d'intégration.

Le théorème 33 se réduit alors (quand a et f sont de "type analytique") au lemme de Pommerenke [49] qui a servi de point de départ à notre étude et qui s'écrit

$$\left\| \int_{-\infty}^{x} a'(u) f(u)\, du \right\|_2 \leq C \|a\|_{BMO} \|f\|_2. \tag{23}$$

L'idée d'utiliser les mesures de Carleson dans la preuve de (23) est due à Pommerenke.

Notre second exemple d'application est décrit dans la proposition suivante.

PROPOSITION 4. <u>Si</u> $A' = a \in L^\infty(R)$, <u>les opérateurs</u>

$$T(a,f) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(x+t) + A(x-t) - 2A(x)}{t^2} (\text{sign } t)\, f(x-t)\, dt$$

<u>et</u>

$$S(a,f) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(x+t) + A(x-t) - 2A(x)}{t^2} f(x-t)\, dt$$

<u>sont bornés sur</u> $L^2(\mathbf{R})$. <u>Les valeurs principales de Hadamard existent presque partout si</u> $A' = a \in L^\infty(\mathbf{R})$ <u>et</u> $f \in L^2(\mathbf{R})$.

L'existence des valeurs principales résulte de la théorie générale des noyaux de Calderón-Zygmund faite au chapitre IV.

En effet le noyau de S est $K(x,y) = \dfrac{A(2x-y) + A(y) - 2A(x)}{(x-y)^2}$ et celui de T est $\operatorname{sign}(x-y)\, K(x-y)$.

Si nous montrons que S et T sont bornés sur $L^2(\mathbf{R})$ quand $a \in L^\infty(\mathbf{R})$, le théorème du Chapitre IV permettra de conclure ; l'existence de la limite si $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ ne pose pas de problème car il suffit d'intégrer par parties en t.

Nous allons d'abord démontrer que $\|S(a,f)\|_2 \leq C \|a\|_\infty \|f\|_2$ quand simultanément a et f appartiennent à $C_0^\infty(\mathbf{R})$; C désignant une "constante absolue". En désignant par S_ε l'opérateur tronqué $\displaystyle\int_{|t| \geq \varepsilon} \frac{A(x+t) + A(x-t) - 2A(x)}{t^2} f(x-t)\, dt$, le théorème du chapitre IV donne $\|S_\varepsilon(a,f)\| \leq C' \|a\|_\infty \|f\|_2$ où C' est une autre constante absolue.

Si maintenant $a \in L^\infty(\mathbf{R})$, il existe une suite $a_j \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\|a_j\|_\infty \leq \|a\|_\infty$ et que $a_j(x) \to a(x)$ presque partout. Il en résulte que, si la primitive A_j de a_j est normalisée par $A_j(0) = A(0)$, $A_j(x) \longrightarrow A(x)$ uniformément sur tout compact. On a donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $S_\varepsilon(a_j,f)(x) \longrightarrow S_\varepsilon(a,f)(x)$ et le lemme de Fatou fournit $\|S_\varepsilon(a,f)\|_2 \leq C' \|a\|_\infty \|f\|_2$. On applique encore une fois le lemme de Fatou en laissant tendre ε vers 0.

Notre programme est d'écrire

$$S(a,f)(x) = \iint e^{ix(\xi+\alpha)} \sigma(\xi,\alpha)\, \hat{f}(\xi)\, \hat{a}(\alpha)\, d\xi\, d\alpha \tag{24}$$

et

$$\sigma(\xi,\alpha) = \sigma_1(\xi,\alpha) + \sigma_2(\xi,\alpha)$$

de sorte que la proposition 2 s'applique à $\sigma_2(\xi,\alpha)$ tandis que $\sigma_1(\xi,\alpha)$ se traite par des méthodes directes.

On commence par observer que

$$(25) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2}\, e^{itx}\, dx = \pi(1-t) + iD(t)$$

si $0 < t < 1$; $= iD(t)$ si $t > 1$ où $D(t) = (t+1)\log(t+1) + (t-1)\log|t-1| - 2t\log t$.

Naturellement changer t en $-t$ revient à changer i en $-i$.

En écrivant ensuite que $A(x_1) - A(x_2) =$

$\frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{i\alpha x_1} - e^{i\alpha x_2}}{i\alpha}\, \hat{a}(\alpha\, d\alpha$, on obtient (24) avec

$$\sigma(\xi,\alpha) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sin^2(\frac{\alpha t}{2})}{\alpha(\frac{t}{2})^2}\sin(\xi t)\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi^2\alpha}\left\{(\xi+\alpha)\log|\xi+\alpha| + (\xi-\alpha)\log|\xi-\alpha| - 2\xi\log|\xi|\right\}.$$

Ce symbole est homogène de degré 0 dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mais n'est pas indéfiniment dérivable. La proposition 2 ne s'applique pas directement à un tel symbole.

Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ une fonction homogène de degré 0, telle que $\varphi(0,1) = 0$ et $\varphi(-1,1) = 4\log 2$.

En posant $t = \dfrac{\xi}{\xi+\alpha}$, on a

$$\sigma(\xi,\alpha) = \frac{1}{1-t}\left\{(2t-1)\log|2t-1| - 2t\log|t|\right\}$$

et $\sigma(\xi,\alpha) + \varphi(\xi,\alpha) = \eta(t)$ où, comme dans la démonstration du théorème 17 du chapitre IV, la fonction $\eta(t)$ peut être représentée par

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{i\gamma}\, \frac{m_+(\gamma)}{1+\gamma^2}\, d\gamma \quad \text{si} \quad t > 0$$

et par

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{i\gamma}\, \frac{m_-(\gamma)}{1+\gamma^2}\, d\gamma \quad \text{si} \quad t < 0$$

avec $|m_\pm(\gamma)| \le C$.

Dès lors $T = T_1 + T_2$ où

$$(26)\qquad T_1(a,f)(x) = \frac{1}{2}\int \frac{m_+(\gamma)}{1+\gamma^2}\left\{\iint e^{ix(\xi+\alpha)}\left[1+\operatorname{sign}\xi\ \operatorname{sign}(\xi+\alpha)\right] |\xi+\alpha|^{-i\gamma}|\xi|^{i\gamma}\right.$$

$$\left.\hat{f}(\xi)\,\hat{a}(\alpha)\,d\xi\,d\alpha\right\}d\gamma +$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{m_-(\gamma)}{1+\gamma^2}\left\{\iint e^{ix(\xi+\alpha)}\left|1-\operatorname{sign}\xi\operatorname{sign}(\xi+\alpha)\right| |\xi+\alpha|^{-i\gamma}|\xi|^{i\gamma}\hat{f}(\xi)\right.$$

$$\left.\hat{a}(\alpha)\,d\xi\,d\alpha\right\}d\gamma$$

et $$T_2(a,f)(x) = \iint e^{ix(\xi+\alpha)}\,\varphi(\xi,\alpha)\,\hat{f}(\xi)\,\hat{a}(\alpha)\,d\xi\,d\alpha.$$

L'opérateur T_1 est réalisé comme une intégrale de Bochner d'opérateurs élémentaires bilinéaires ; le "symbole" $|\xi+\alpha|^{-i\gamma}|\xi|^{i\gamma}$ conduit, par exemple, à l'opérateur $M_{-\gamma}\left\{a(x)(M_\gamma f)(x)\right\}$ qui est manifestement borné sur $L^2(\mathbf{R})$ quand $a\in L^\infty$. Nous avons appelé M_γ l'opérateur défini par $(M_\gamma f)\hat{\ }(\xi) = |\xi|^{i\gamma}\hat{f}(\xi)$.

L'opérateur T_2 est borné en vertu de la proposition 2. Enfin l'opérateur S peut être étudié de façon analogue ([21]).

Le dernier exemple est de nature quelque peu différente. L'étude nous en a été proposée par A. P. Calderón.

Soit $A:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{C}$ une fonction d'une variable réelle dont la dérivée $A' = a\in L^\infty(\mathbf{R})$. Si $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$, $y=(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2$, $|x-y|^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ et l'on considère l'opérateur

$$(27)\qquad g(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\iint \frac{A(x_1)-A(y_1)}{|x-y|^2}\,f(y_1,y_2)\,dy_1dy_2$$

comme un opérateur sur $L^2(\mathbf{R}^2)$.

On commence par récrire

$$(28)\qquad g(x_1,x_2) = c\iiint e^{ix_1(\xi_1+\alpha_1)+ix_2\xi_2}\,\frac{\xi_2}{\alpha_1}\log\frac{(\xi_1+\alpha_1)^2+\xi_2^2}{\xi_1^2+\xi_2^2}\,\hat{a}(\alpha_1)\,\hat{f}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi\,d\alpha.$$

Notre but sera d'écrire cet opérateur comme une somme (finie) de termes auxquels la proposition 2 s'applique.

Nous allons d'abord paraphraser la proposition 2 sous la forme suivante.

LEMME 7. <u>Soient</u> $\theta(\xi_1,\xi_2,\alpha_1)\in C^\infty(\mathbf{R}^3\setminus\{0\})$ <u>une fonction homogène de</u>

degré 0 et m et a deux fonctions de $L^\infty(\mathbf{R})$. Alors l'opérateur

(29) $$S(a,f)(x) = \iiint e^{i(x_1(\xi_1+\alpha_1)+x_2\xi_2)} m(\xi_1+\alpha_1)\hat{f}(\xi_1,\xi_2)\hat{a}(\alpha_1)\,d\xi_1 d\xi_2\,d\alpha_1$$

est borné sur $L^2(\mathbf{R}^2)$. De plus, si $\theta(\xi_1,\xi_2,0)=0$, la conclusion subsiste quand $a\in BMO$.

La preuve est immédiate. On appelle $M : L^2(\mathbf{R}^2) \to L^2(\mathbf{R}^2)$ l'opérateur défini par $(Mg)\hat{}(\xi_1,\xi_2) = m(\xi_1)\hat{g}(\xi_1,\xi_2)$ et $\sigma(\xi_1,\xi_2,\alpha_1,\alpha_2)$ une fonction appartenant à $C^\infty(\mathbf{R}^4\setminus\{0\})$, homogène de degré 0 et telle que $\sigma(\xi_1,\xi_2,\alpha_1,0) = \theta(\xi_1,\xi_2,\alpha_1)$.

Alors $S(a,f) = M(\sigma(D))(\bar{a},f)$ où $\bar{a}(x_1,x_2) = a(x_1)$. Grâce à la proposition 2, $f \to \sigma(D)(\bar{a},f)$ est borné sur $L^2(\mathbf{R}^2)$.

Lorsque $\theta(\xi_1,\xi_2,0)=0$, on peut prendre $\sigma(\xi_1,\xi_2,0,0)=0$ et $\bar{a}\in BMO(\mathbf{R}^2)$ résulte de $a \in BMO(\mathbf{R})$.

PROPOSITION 5. L'opérateur défini par (27) est borné sur $L^2(\mathbf{R}^2)$ quand $A' = a \in L^\infty(R)$.

Naturellement la première question est de définir convenablement (27). On convient que la dérivée $\frac{\partial}{\partial x_2}$ est prise au sens des distributions (nous laisserons de côté le problème de l'existence presque-partout de cette dérivée). Si $f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, la dérivée existe au sens usuel.

Alors on montre facilement qu'il suffit, pour prouver la proposition 5, d'établir l'existence d'une constante C telle que

(30) $$\|g\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \le C\|a\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|f\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}$$

lorsque $a\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ et $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$.

Pour passer au cas général, on suppose toujours que $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ et l'on utilise une suite $a_j \in C_o^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\|a_j\|_\infty \leq \|a\|_\infty$ et $a_j(x) \longrightarrow a(x)$ presque partout.

Compte tenu de (28), nous sommes amenés à étudier le symbole

$$\frac{\xi_2}{\alpha_1} \log \frac{(\xi_1+\alpha_1)^2 + \xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} = \lambda(\xi_1, \xi_2, \alpha_1).$$

Pour préciser les singularités de ce symbole, on peut, puisque λ est homogène de degré 0, se placer sur la sphère $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \alpha_1^2 = 1$ et écrire

$$\lambda(\xi_1, \xi_2, \alpha_1) = \frac{\xi_2}{\alpha_1} \log(1 + 2\alpha_1 \xi_1) - \frac{\xi_2}{\alpha_1} \log(\xi_1^2 + \xi_2^2) = \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_1 \alpha_1} \log(1 + 2\alpha_1 \xi_1) - \frac{\xi_2 \alpha_1}{\alpha_1^2} \log(1 - \alpha_1^2).$$

Cette dernière expression montre que $\alpha_1 = 0$ n'est pas une singularité. Les singularités correspondent à l'annulation de l'un des logarithmes ; c'est-à-dire : soit $\left\{\xi_1 = \xi_2 = 0\right\} = E$ soit $\left\{\xi_1 + \alpha_1 = \xi_2 = 0\right\} = F$. Dans chacun des cas, la singularité vient de ce que $t \log |t|$ n'est pas C^∞ à l'origine.

Nous allons, puisque E et F définissent deux parties disjointes de $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, trouver deux cônes ouverts disjoints Ω_1 et Ω_2 tels que Ω_1 contienne E et Ω_2 contienne F.

Pour être plus précis, posons

$$\Omega_1 = \left\{|\xi_1| < \tfrac{1}{10}|\alpha_1|,\ |\xi_2| < \tfrac{1}{10}|\alpha_1|\right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{|\xi_1 + \alpha_1| < \tfrac{1}{10}|\xi_1|,\ |\xi_2| < \tfrac{1}{10}|\xi_1|\right\}$$

$$\Omega_3 = \Omega_3' \cap \Omega_3''$$

avec $\Omega_3' = \left\{|\alpha_1| < 20|\xi_1| \text{ ou } |\alpha_1| < 20|\xi_2|\right\}$

et $\Omega_3'' = \left\{|\xi_1| < 20|\xi_1 + \alpha_1| \text{ ou } |\xi_1| < 20|\xi_2|\right\}$.

Le lecteur remarquera que $\Omega_1 \cup \Omega_3' = \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ et qu'il en est de même pour $\Omega_2 \cup \Omega_3''$. Pour cette raison $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 = \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ et l'on peut trouver trois fonctions $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, homogènes de degré 0, appartenant à $C^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\})$ et telles que $1 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$, support $\theta_j \subset \Omega_j$.

On écrit donc $\lambda = \lambda\theta_1 + \lambda\theta_2 + \lambda\theta_3$.

De façon évidente $\lambda\theta_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$ et la proposition 2 s'applique au terme correspondant.

Pour étudier $\lambda\theta_1$, on écrit $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ avec

$$\lambda_1(\xi_1,\xi_2,\alpha_1) = \frac{-\xi_2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^{1/2}}\ \frac{(\xi_1^2+\xi_2^2)^{1/2}}{\alpha_1}\ \log\left(\frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{\alpha_1^2}\right)$$

et

$$\lambda_2(\xi_1,\xi_2,\alpha_2) = \frac{\xi_2}{\alpha_1}\log\left(\frac{(\xi_1+\alpha_1)^2+\xi_2^2}{\alpha_1^2}\right).$$

Là encore $\lambda_2\theta_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$ puisque, sur le support de θ_1, $|\alpha_1|$ est considérablement plus grand que $|\xi_1|$ et $|\xi_2|$. La proposition 2 s'applique à ce terme.

Le terme $\lambda_1\theta_1$ sera traité directement en observant que, sur le support de θ_1, $u = \left(\frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{\alpha_1^2}\right)^{1/2}$ vérifie $0 < u < \frac{1}{5}$ et que, sur cet intervalle

$$u\log u = \int_{-\infty}^{+\infty} u^{it}\,\omega(t)\,dt \quad \text{avec} \quad \omega\in\mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{31}$$

Ceci entraîne la formule de représentation intégrale

$$(\lambda_1\theta_1)(\xi_1,\xi_2,\alpha_1) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi_2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^{1/2}}(\xi_1^2+\xi_2^2)^{it/2}(\text{sign }\alpha_1)|\alpha_1|^{-it}\theta_1(\xi_1,\xi_2,\alpha)\,\omega(t)\,dt.$$

Pour simplifier l'écriture de $g_1(x) = \iiint e^{i[x_1(\xi_1+\alpha_1)+x_2\xi_2]}(\lambda_1\theta_1)(\xi_1,\xi_2,\alpha_1)\hat{f}(\xi_1,\xi_2)\hat{a}(\alpha_1)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\alpha_1$, on définit successivement $f_t\in L^2(\mathbb{R}^2)$ par

$$\hat{f}_t(\xi_1,\xi_2) = \frac{\xi_2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^{1/2}}(\xi_1^2+\xi_2^2)^{it/2}\hat{f}(\xi_1,\xi_2) \quad\text{et}\quad a_t\in L^2(\mathbb{R}) \text{ par}$$

$\hat{a}_t(\alpha_1) = (\text{sign }\alpha_1)|\alpha_1|^{-it}\hat{a}(\alpha_1)$. Alors $\|f_t\|_2 \le \|f\|_2$ tandis que $\|a_t\|_{BMO} \le C(1+|t|)\|a\|_\infty$.

On a dans ces conditions

$$g_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x;t)\,\omega(t)\,dt \tag{32}$$

avec

$$g_1(x;t) = \iiint e^{i\left[x_1(\xi_1+\alpha_1)+x_2\xi_2\right]} \theta_1(\xi_1,\xi_2,\alpha)\,\hat{f}_t(\xi_1,\xi_2)\,\hat{a}_t(\alpha_1)d\xi_1\,d\xi_2\,d\alpha_1.$$

Puisque $\theta_1(\xi_1,\xi_2,0)=0$, la proposition 2 s'applique et donne $\|g_1(x,t)\|_{L^2(dx)} \le C(1+|t|)\|a\|_\infty\|f\|_2$; estimation qu'il suffit de substituer dans (32) pour obtenir, compte tenu de la décroissance rapide de $\omega(t)$, $\|g_1\|_2 \le C\|a\|_\infty\|f\|_2$.

Nous allons étudier $\lambda\theta_2$ de façon analogue. Nous posons $u = \dfrac{\xi_1+\alpha_1}{\xi_1}$ et $v = \dfrac{\xi_2}{\xi_1}$; dans Ω_2, $|u| < \frac{1}{10}$ et $|v| < \frac{1}{10}$ et l'on a $\dfrac{\alpha_1}{\xi_1}\lambda(\xi_1,\xi_2,\alpha_1) =$ $v \log\dfrac{u^2+v^2}{v^2+1} = -v\log\left(\dfrac{v^2+1}{v^2}\right) + v\log\dfrac{u^2+v^2}{v^2}$.

Là encore, le premier terme s'écrit

$$-v\log\left(\frac{v^2+1}{v^2}\right) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sign} v\,|v|^{it}\,\omega_1(t)\,dt$$

pour une certaine fonction $\omega_1 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ tandis que

$$\frac{\log\left[1+\left(\frac{u}{v}\right)^2\right]}{\frac{u}{v}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sign} u\,\operatorname{sign} v\left|\frac{u}{v}\right|^{is}\omega_2(s)\,ds$$

et

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty}(\operatorname{sign} u)\,|u|^{it}\,\omega_3(t)\,dt \qquad \text{car} \qquad 0 \le |u| < \frac{1}{10}.$$

Remarquons enfin que $\theta_2'(\xi_1,\xi_2,\alpha_1) = \dfrac{\xi_1}{\alpha_1}\theta_2(\xi_1,\xi_2,\alpha_1)$ appartient à $C^\infty(\mathbf{R}^3\setminus\{0\})$.

Le symbole $\lambda\theta_2$ s'écrit donc comme une moyenne pondérée de symboles élémentaires de la forme $\operatorname{sign}\xi_1\,\operatorname{sign}\xi_2\,|\xi_1|^{-it}|\xi_2|^{it}\,\theta_2'(\xi_1,\xi_2,\alpha_1)$ ou $\operatorname{sign}\xi_1\,\operatorname{sign}\xi_2\,\operatorname{sign}(\xi_1+\alpha_1)\,|\xi_1|^{-it}|\xi_2|^{-is}|\xi_1+\alpha_1|^{i(t+s)}\,\theta_2'(\xi_1,\xi_2,\alpha_1)$.

Finalement $\theta_2'(\xi_1,\xi_2,\alpha_1)$ vérifie les hypothèses de la proposition 2 et définit un opérateur bilinéaire $\Theta(a,f)$ borné sur $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$ si $a \in L^\infty(\mathbf{R})$.

Lorsque m_1, m_2 et m_3 appartiennent à $L^\infty(\mathbf{R})$, le symbole $m_1(\xi_1+\alpha_1)\,m_2(\xi_1)\,m_3(\xi_2)\,\theta_2'(\xi_1,\xi_2,\alpha_1)$ conduit à l'opérateur

$m_1(-i\frac{\partial}{\partial x_1}) \circ \Theta \circ m_2(-i\frac{\partial}{\partial x_1}) \circ m_3(-i\frac{\partial}{\partial x_2})$.

Chacun de ces opérateurs étant bornés sur $L^2(\mathbb{R}^2)$, il en est de même de l'opérateur composé.

Pour finir ce paragraphe, nous examinerons une généralisation du problème précédent ; généralisation que A. P. Calderón nous a également demandé d'étudier.

On suppose que $A(x_1,x_2) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ a un gradient borné et l'on appelle D un champ de vecteurs à coefficients dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ tel que $DA = 0$.

On considère alors l'opérateur

$$S(f) = D\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{A(x)-A(y)}{|x-y|^2} f(y)\,dy.$$

L'exemple ci-dessus correspondait à $D = \frac{\partial}{\partial x_2}$ ce qui entraîne $A = A(x_1)$.

L'exemple suivant montre qu'en général de tels opérateurs ne sont pas bornés sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ même si A et D sont de classe C^∞.

On choisit $A(x_1,x_2) = \cos x_1 + x_2$ et $D = \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$. Le terme en $\frac{\partial}{\partial x_2}$ est borné car des deux termes de A, l'un ne dépend pas de x_2 et on peut lui appliquer la proposition et l'autre donne une intégrale singulière de Calderon-Zygmund du type le plus classique.

En revanche le terme en $\frac{\partial}{\partial x_1}$ conduit à une intégrale singulière $\int K(x,y)\,f(y)\,dy$ où

$$K(x,y) = \frac{(\sin x_1)\,|x-y|^2 + 2(\cos x_1 - \cos y_1)(x_1-y_1)}{|x-y|^4} = K_1(x,y) + K_2(x,y)$$ en appelant $K_1(x,y)$ le produit de $K(x,y)$ par la fonction caractéristique de $|x-y| \le 1$.

L'analyse de la singularité de $K_1(x,y)$ est très simple car

$$K_1(x,y) = \sin x_1 \frac{(x_1-y_1)^2 - (x_2-y_2)^2}{|x-y|^4} + O\left(\frac{1}{|x-y|}\right).$$

Là encore, le terme principal est une intégrale singulière de Calderón-Zygmund et le terme d'erreur est borné par la convolution avec une fonction de $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Nous allons démontrer que $K_2(x,y)$ ne conduit pas à un opérateur borné.

En effet si l'on désigne par $\chi(x)$ la fonction caractéristique de $|x| > 1$, il vient

$$K_2(x,y) = \frac{-\sin x_1}{|x-y|^2}\chi(x-y) + 2(\cos x_1 - \cos y_1)\frac{(x_1-y_1)}{|x-y|^4}\chi(x-y).$$

Le second terme est $O(|x-y|^{-3})$ et définit donc un opérateur borné sur $L^2(R^2)$ tandis que le premier terme n'est évidemment pas borné sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ car le noyau de convolution $\frac{\chi(x-y)}{|x-y|^2}$ ne l'est pas.

5. COMMUTATEURS ET SYMBOLES EXOTIQUES.

Nous allons montrer la souplesse des méthodes spectrales introduites aux chapitres I et II en étudiant le commutateur entre un champ de vecteurs à coefficients C^1 et un o. p. d. exotique dont la symbole appartient à $S^{-1/2}_{1/2,1/2}$; ce commutateur est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et ce résultat est évidemment à rapprocher du théorème 16 du chapitre III.

Nous rappelons que $m(x,\xi)$ est un symbole de la classe $S^{\eta}_{\rho,\delta}$ si $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et

$$(33) \qquad |\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x m_o(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

où $m_o(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{-\eta/2}\, m(x,\xi)$.

THÉORÈME 36. Soit $m(x,\xi)$ un symbole appartenant à $S^{-1/2}_{1/2,1/2}$ et soit $m(x,D)$ l'o.p.d. correspondant. Alors on a

$$\|\nabla\{m(x,D)(Af) - Am(x,D)f\}\|_2 \leq C\|\nabla A\|_\infty \|f\|_2.$$

En d'autres termes, le commutateur entre $m(x,D)$ et un champ de vecteurs dont les coefficients ont un gradient borné est continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

La démonstration que nous allons présenter conviendra pour le cas général de symboles dans $S^{\rho-1}_{\rho,\rho}$. Les modifications évidentes sont laissées au lecteur et supposerons toujours que $\rho = 1/2$.

Nous commencerons par un certain nombre d'observations et de réduction du problème.

Notre opérateur peut être écrit sous la forme

$$- \left[m(x,D),A\right]f = i \iint e^{ix.(\xi+\alpha)}(\xi+\alpha)\left[m(x,\xi+\alpha) - m(x,\xi)\right]\hat{f}(\xi)\,\hat{A}(\alpha)\,d\xi\,d\alpha +$$

$$\iint e^{ix.(\xi+\alpha)}\left[\nabla_x m(x,\xi+\alpha) - \nabla_x m(x,\xi)\right]\hat{f}(\xi)\,\hat{A}(\alpha)\,d\xi\,d\alpha =$$

$$- (\nabla A)\,m(x,D)\,f + \iint e^{ix.(\xi+\alpha)}\left\{M(x,\xi+\alpha) - M(x,\xi)\right\}\hat{f}(\xi)\,\hat{A}(\alpha)\,d\xi\,d\alpha$$

avec $M(x,\xi) = i\xi m(x,\xi) + \nabla_x m(x,\xi) = \sigma(x,\xi)(1+|\xi|^2)^{1/4}$ où $\sigma(x,\xi) \in S^0_{1/2,1/2}$.

Posons $\theta(x,\xi,\alpha) = \left[\sigma(x,\xi+\alpha) - \sigma(x,\xi)\right](1+|\xi|^2)^{1/4}$ et commençons par étudier l'opérateur

$$\iint e^{ix.(\xi+\alpha)}\,\theta(x,\xi,\alpha)\,\hat{f}(\xi)\,\hat{A}(\alpha)\,d\xi\,d\alpha. \tag{34}$$

Le "terme d'erreur" sera traité plus loin.

Nous écrivons $\theta(x,\xi,\alpha) = m(\xi)\,\theta + (1-m)\,\theta$ où $m(\xi) = 1$ pour $|\xi| \geq 10$ et $m(\xi) = 0$ pour $|\xi| \leq q$. Le second terme est le plus simple. Laissons le de côté pour nous concentrer sur le premier.

Là encore on utilise une "microlocalisation" mais dont la particularité est de comporter des ouverts non coniques en (ξ,α) ; les ouverts coniques correspondent aux symboles classiques.

On écrit $1 = \varphi_0(\alpha|\xi|^{-1/2}) + \varphi_1(\alpha|\xi|^{-1/2})\,\Phi_0(\alpha|\xi|^{-1}) + \Phi_1(\alpha|\xi|^{-1})$ où φ_0, $1-\varphi_1$, Φ_0 et $1-\Phi_1$ sont quatre fonctions radiales de $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Cette partition de l'unité permet de distinguer trois régions

(a) celle où $|\alpha| \leq C|\xi|^{1/2}$

(b) celle où $C_1|\xi|^{1/2} \leq |\alpha| \leq C_2|\xi|$

(c) celle où $C_3|\xi| \leq |\alpha|$.

Nous allons d'abord analyser l'opérateur bilinéaire

$$\iint e^{ix.(\xi+\alpha)}\theta(x,\xi,\alpha)\,m(\xi)\,\varphi_0(\alpha|\xi|^{-1/2})\,\hat{f}(\xi)\,\hat{A}(\alpha)\,d\xi\,d\alpha = g_0(x).$$

Pour cela, on pose $a_j = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, 0, \ldots 0)$ et l'on a évidemment $\sigma(x\,,\ \xi+\alpha) - \sigma(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n} \sigma(x,\xi+a_j+\alpha_j) - \sigma(x,\xi+a_j)$ en appelant, par abus de langage, α_j le vecteur $(0, \ldots, 0, \alpha_j, 0, \ldots, 0)$. On observe que $i\,\alpha_j \hat{A}(\alpha)$ est la transformée de Fourier de $\frac{\partial}{\partial x_j} A \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Toutes ces observations conduisent à s'intéresser au symbole

$$\pi_j(x,\xi,\alpha) = \frac{1}{\alpha_j}\left\{\sigma(x,\xi+a_j+\alpha_j) - \sigma(x,\xi+a_j)\right\}(1+|\xi|^2)^{1/4}\,\varphi_o\Big(\frac{\alpha}{|\xi|^{1/2}}\Big)\, m(\xi).$$

Ce symbole est porté par $10 \le |\xi|$, $|\alpha| \le C\,|\xi|^{1/2}$ et vérifie les estimations

$$\left|\partial_x^p\, \partial_\xi^q\, \partial_\alpha^r\, \pi_j(x,\xi,\alpha)\right| \le C_{p,q,r}(1+|\xi|)^{\frac{|p|}{2} - \frac{|q|}{2} - \frac{|r|}{2}}. \tag{35}$$

L'estimation relative à ce premier terme découlera de la proposition suivante.

PROPOSITION 6. Soit $\pi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ une fonction portée par $|\alpha| \le C\,|\xi|^{1/2}$, $10 \le |\xi|$ et telle que

$$\left|\partial_x^p\, \partial_\xi^q\, \partial_\alpha^r\, \pi(x,\xi,\alpha)\right| \le C_{p,q,r}(1+|\xi|)^{\frac{|p|}{2} - \frac{|q|}{2} - \frac{|r|}{2}}. \tag{36}$$

Alors

$$\pi(x,D)(a,f) = \iint e^{ix\cdot(\xi+\alpha)}\, \pi(x,\xi,\alpha)\, \hat{f}(\xi)\, \hat{a}(\alpha)\, d\xi\, d\alpha \tag{37}$$

est borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ quand $a \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Plus précisément

$$\|\pi(x,D)(a,f)\|_2 \le C\|a\|_\infty \|f\|_2. \tag{38}$$

La démonstration de la proposition 6 suit, de façon très remarquable, le preuve du théorème 7 du Chapitre II .

Nous allons, dans un premier temps, vérifier (38) si $\pi(x,\xi,\alpha)$ est porté par $\frac{1}{3}2^k \le |\xi| \le 2^k$, $k \in \mathbf{N}$.

Ensuite nous décomposerons l'opérateur $\pi(x,D)$ en deux sommes $\sum_{k\ge 0} \pi_k(x,\xi,\alpha) + \sum_{k\ge 0} \pi^k(x,\xi,\alpha)$ de sorte que les fonctions $\pi_k(x,D)(a,f)$ soient deux à deux orthogonales dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\pi_k(x,\xi,\alpha)$ étant porté par $\frac{1}{3}2^k \leq |\xi| \leq 2^k$; tandis que $\pi^k(x,\xi,\alpha)$ est tel que $\sum_{k\geq 0} \|\pi^k(x,D)(a,f)\|_2 < C\|a\|_\infty \|f\|_2$.

Les deux parties de ce programme seront maintenant précisées par une série de lemmes.

LEMME 8. Pour tout symbole π vérifiant (36) et pour toute fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \notin$ support ψ, il existe une constante $C > 0$ telle que, uniformément par rapport à $R \geq 1$,

$$\left\| \iint e^{ix.(\xi+\alpha)}\, \pi(x,\xi,\alpha)\, \psi\left(\frac{\xi}{R}\right) \hat{f}(\xi)\, \hat{a}(\alpha)\, d\xi\, d\alpha \right\|_2 \leq C\|a\|_\infty \|f\|_2. \tag{39}$$

La preuve du lemme 8 est tout à fait dans l'esprit des démonstrations du chapitre .

On observe que, pour tout couple (x,ξ) fixé, $u \longrightarrow \pi(x,\xi,R^{1/2}u)\,\psi(\xi/\mathbb{R})$ appartient à $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, est portée par un compact fixe (indépendant de R, x et ξ) et que toutes les dérivées par rapport à u sont majorées par des constantes fixes (indépendantes de R, x et ξ).

Cela permet d'écrire (en revenant à la variable $\alpha = R^{-1/2}u$)

$$\pi(x,\xi,\alpha)\,\psi\left(\frac{\xi}{R}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\alpha.vR^{-1/2}}\, m(x,\xi,v)\, \frac{dv}{(1+|v|^2)^N} \tag{40}$$

où $(x,\xi) \longrightarrow m(x,\xi,v)$ est un symbole appartenant à une partie bornée B de $S^0_{1/2,1/2}$.

On substitue (40) dans (39) et l'on obtient

$$g(x) = \iint e^{ix.(\xi+\alpha)}\, \pi(x,\xi,\alpha)\, \psi\left(\frac{\xi}{R}\right) \hat{f}(\xi)\, \hat{a}(\alpha)\, d\xi\, d\alpha =$$
$$(2\pi)^{2n} \int_{\mathbb{R}^n} a(x + R^{-1/2}v) \left[m(x,D,v)\, f\right](x)\, \frac{dv}{(1+|v|^2)^N}$$

dont la norme L^2 est bornée par $C\|a\|_\infty \|f\|_2$; ceci parce que les symboles appartenant à $S^0_{1/2,1/2}$ définissent des opérateurs continus sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Nous retournons alors à la proposition 6.

On commence par écrire $f = g_o + \sum_{k\geq 0} f_k$ où $\hat{g}_o(\xi)$ est portée par $|\xi| \leq 1$ et $\hat{f}_k$ par $2^k \leq |\xi| < 2^{k+1}$.

Posons $F(x) = \pi(x,D)(a,f)$ et $F_k(x) = \pi(x,D)(a,f_k)$. On a évidemment $\pi(x,D)(a,g_o) = 0$ car les supports en ξ de $\pi(x,\xi,\alpha)$ et de $\hat{g}_o(\xi)$ sont disjoints.

Pour étudier F_k, on appelle $\psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction égale à 1 si $1 \leq |\xi| \leq 2$ et dont le support est contenu dans $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 3$. On récrit

$$F_k(x) = \iint e^{ix.(\xi+\alpha)}\, \pi(x,\xi,\alpha)\, \psi(2^{-k}\xi)\, \hat{f}_k(\xi)\, \hat{a}(\alpha)\, d\xi\, d\alpha$$

et le lemme 8 fournit $\|F_k\|_2 \leq C \|f_k\|_2 \, \|a\|_\infty$.

Si les termes F_k étaient orthogonaux, tout serait fini (compte tenu de $\sum_o^\infty \|f_k\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$).

A cause de la dépendance en x du symbole, les fonctions $F_k(x)$ ne sont pas orthogonales dans $L^2(\mathbb{R}^n)$; mais elles sont presque-orthogonales au sens suivant :

(41) $\qquad F_k(x) = G_k(x) + R_k(x) \qquad$ où $\qquad \|G_k\|_2 \leq C' \|f_k\|_2 \|a\|_\infty$,

les G_k sont 3 à 3 orthogonales et $\|R_k\|_2 \leq C' 2^{-k/2} \|f\|_2 \, \|a\|_\infty$. Naturellement une telle décomposition fournit l'estimation cherchée de $F(x) = \sum_{k\geq 0} F_k(x)$.

Tout comme dans la preuve du théorème 7 du chapitre II , la décomposition (41) résulte d'une analyse du spectre de $x \longrightarrow \pi(x,\xi,\alpha)$; ξ et α étant fixés.

Cette analyse spectrale s'obtient à l'aide d'un lemme déjà utilisé au cours du chapitre .

LEMME 9. Soient $T \geq 1$ et $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tels que $\|\partial^\alpha \lambda(x)\|_\infty \leq C_\alpha T^{|\alpha|/2}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Alors $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ où
$\|\partial^\alpha \lambda_1(x)\|_\infty \leq C'_\alpha T^{|\alpha|/2}$ et support $\hat{\lambda}_1(\xi) \subset \left\{|\xi| \leq \frac{T}{10}\right\}$
tandis que

$$\|\partial^\alpha \lambda_2\|_\infty \le C''_\alpha T^{-1/2} T^{|\alpha|/2}.$$

<u>Enfin en désignant par</u> $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ <u>une fonction telle que</u> $\hat{\Phi}(\xi) = 1$ <u>pour</u> $|\xi| \le 1/20$ <u>et</u> support $\hat{\Phi} \subset \left\{ |\xi| \le \frac{1}{10} \right\}$, <u>on peut prendre</u> $\lambda_1(x) = \int \lambda(x - \frac{t}{T})\, \Phi(t)\, dt$.

Ce lemme est appliqué à $\lambda(x) = \pi(x,\xi,\alpha)\, \psi(\frac{\xi}{2^k})$ et donne $\pi(x,\xi,\alpha)\, \psi(\frac{\xi}{2^k}) = \pi_k(x,\xi,\alpha) + \pi^k(x,\xi,\alpha)$; la transformée de Fourier de $x \longrightarrow \pi_k(x,\xi,\alpha)$ étant portée par $|\eta| \le \frac{2^k}{10}$ pour tout (ξ,α) fixé.

On pose $G_k = \pi_k(x,D)(a,f_k)$ et $R_k = \pi^k(x,D)(a,f_k)$. Les fréquences de $x \longrightarrow G_k(x)$ sont de la forme $\xi' = \alpha + \xi + \eta$ où $2^k \le |\xi| \le 2^{k+1}$, $|\alpha| \le C2^{k/2} \le \frac{1}{10} 2^k$ (si $k \ge k_o$) et $|\eta| \le \frac{2^k}{10}$. Finalement le spectre de $G_k(x)$ est contenu dans la couronne élargie $\frac{4}{5} 2^k \le |\xi'| \le \frac{11}{5} 2^k$ (si $k \ge k_o$) et les fonctions $G_k(x)$ sont trois à trois orthogonales dans $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Enfin $\|G_k\|_2 \le C\|a\|_\infty \|f_k\|_2$ en vertu du lemme 8. En ce qui concerne R_k, on a directement par le lemme 8, $\|R_k\|_2 \le C2^{-k/2}\|a\|_\infty \|f_k\|_2 \le C2^{-k/2}\|a\|_\infty \|f\|_2$; l'amélioration en $2^{-k/2}$ venant de (42).

La proposition 6 est démontrée.

Nous allons nous occuper des termes où $C_1 |\xi|^{1/2} \le |\alpha| \le C_2 |\xi|$ correspondant au symbole $\theta(x,\xi,\alpha)\, \varphi_1(\alpha|\xi|^{-1/2})\, \Phi_o(\alpha|\xi|^{-1})$.

Dans ce cas α n'est pas assez petit pour qu'il vaille la peine de considérer $\sigma(x,\xi+\alpha) - \sigma(x,\xi)$ comme une différence et nous allons montrer le lemme suivant.

LEMME 10. <u>Les symboles</u>

$$\nu_1(x,\xi,\alpha) = (1+|\xi|^2)^{1/4}\, m(\xi)\, \varphi_1(\alpha|\xi|^{-1/2}) \Phi_o(\alpha|\xi|^{-1})\, \sigma(x,\xi+\alpha)$$

<u>et</u>

$$\nu_2(x,\xi,\alpha) = (1+|\xi|^2)^{1/4}\, m(\xi)\, \varphi_1(\alpha|\xi|^{-1/2})\, \Phi_o(\alpha|\xi|^{-1})\, \sigma(x,\xi)$$

<u>sont tels que</u>

$$g^j(x) = \iint e^{ix.(\xi+\alpha)}\, \nu_j(x,\xi,\alpha)\, \hat{f}(\xi)\, \hat{A}(\alpha)\, d\xi d\alpha$$

<u>vérifient</u> $\|g^j\|_2 \le C\|f\|_2 \|{}^{-}A\|_\infty$ pour $j = 1$ ou 2.

Là encore on écrit $f = g_o + \sum_o^\infty f_k$ avec $m\,\hat{g}_o = 0$.

Etudions $F_k = \nu_1(x,D)(A,f_k)$ ou $F_k = \nu_2(x,D)(A,f_k)$.

Pour estimer la norme L^2 de F_k, nous allons décomposer A en $A(x) = B(x) + \sum_o^\infty A_j(x) = B(x) + \sum_o^\infty 2^{-j} a_j(x)$; les conditions étant $\|a_j\|_\infty \le C\|\nabla A\|_\infty$, support $\hat{B} \subset |a| \le 1$ et support $\hat{a}_j \subset \{2^{j-2} \le |\alpha| \le 2^j\}$.

Puisque la présence de $\varphi_1(\alpha|\xi|^{-1/2})\,\Phi_o(\alpha|\xi|^{-1})$ entraîne que $c2^{k/2} \le |\alpha| \le C2^k$, $0 < c < C$, on a $F_k(x) = \sum_{j=\frac{k}{2}-C}^{k+C} 2^{-j} F_{k,j}(x)$.

Il y a trois sortes de termes.

Les termes "purs" où $\frac{k}{2} + R \le j \le k-R$. Par un choix judicieux de R, on a alors $\Phi_o(\alpha|\xi|^{-1}) = 1$ et $\varphi_1(\alpha|\xi|^{-1/2}) = 1$ quand $\hat{a}_j(\alpha) \ne 0$ et $2^k \le |\xi| \le 2^{k+1}$.

Dans ce cas $F_{k,j}$ est tout simplement $a_j(x)\,\sigma(x,D)(G_k)$ ou $\sigma(x,D)(a_jG_k)$; $\hat{G}_k(\xi) = (1+|\xi|^2)^{1/4}\,\hat{f}_k(\xi)$.

On a alors évidemment

$$\Big\| \sum_{j=\frac{k}{2}+R}^{k-R} 2^{-j} F_{k,j} \Big\|_2 \le C \sum_{k/2+R}^{\infty} 2^{-j} \|G_k\|_2 \|a_j\|_\infty \le$$

$$C' 2^{k/2} \Big(\sum_{\frac{k}{2}+R}^{\infty} 2^{-j} \Big) \|a\|_\infty \|f_k\|_2 \le C'' \|a\|_\infty \|f_k\|_2 .$$

Nous devons maintenant nous occuper des termes "brouillés". Ils sont de deux types.

Ceux pour lesquels $|j-k| \le T$. Alors $\varphi_1(\alpha|\xi|^{-1/2})\Phi_o(\alpha|\xi|^{-1}) = \Phi_o(\alpha|\xi|^{-1})\,\psi(\frac{\xi}{2^k})\,\psi(\frac{\alpha}{2^k})$ pour une certaine fonction $\psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $O \notin$ support $\hat{\psi}$.

Cette dernière fonction peut être écrite

$$\iint e^{i2^k(u.\alpha+v.\xi)} \frac{\eta(u,v)}{(1+|u|^2+|v|^2)^N}\, du\, dv$$

où $\eta(u,v) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et le terme correspondant est alors estimé comme ci-dessus.

De façon analogue si $\left|j - \frac{k}{2}\right| \leq T$,

$$\varphi_1(\alpha|\xi|^{-1/2})\Phi_o(\alpha|\xi|^{-1}) = \varphi_1(\alpha|\xi|^{-1/2})\,\psi(2^{-k}\xi).$$

Nous développons en transformée de Fourier la fonction $\varphi_1(\frac{t}{s^{1/2}})\,\psi(s)$, nous posons $s = 2^{-k}\xi$, $t = 2^{-k/2}\alpha$ et nous procédons comme ci-dessus.

Finalement, en réunissant les diverses estimations, il vient $\|g_k\|_2 \leq C\|a\|_\infty \|f_k\|_2$.

Pour majorer $\|\sum_o^\infty g_k\|_2$, nous opérons comme pour la proposition 6. Nous décomposons $\sigma(x,\xi) = \sigma_k(x,\xi) + \rho_k(x,\xi)$ où le support de $x \longrightarrow \sigma_k(x,\xi)$ est contenu dans $|\eta| \leq \frac{2^k}{10}$ et où $2^{k/2}\rho_k$ décrit une partie bornée de $S^0_{1/2,1/2}$.

Ceci conduit à une décomposition $g_k = h_k + r_k$ où, par les estimations précédentes (appliquées à $\sigma_k(x,D)$ et $\rho_k(x,D)$ au lieu de $\sigma(x,D)$), il vient $\|h_k\|_2 \leq C\|a\|_\infty\|f_k\|_2$ et $\|r_k\|_2 \leq C2^{-k/2}\|a\|_\infty\|f\|_2$.

Enfin les fonctions h_k sont orthogonales de trois en trois ce qui donne $\|\Sigma\, h_k\|_2 \leq 3C\|a\|_\infty\, (\Sigma\|f_k\|_2^2)^{1/2} \leq 3C\|a\|_\infty\|f\|_2$ tandis que $\|\Sigma\, r_k\|_2 \leq C'\|a\|_\infty\|f\|_2$. Ceci termine la démonstration du lemme 10.

LEMME 11. Les symboles

$$\tau_1(x,\xi,\alpha) = (1+|\xi|^2)^{1/4}\, m(\xi)\, \varphi_1(|\xi|^{-1})\, \sigma(x,\xi+\alpha)$$

et

$$\tau_2(x,\xi,\alpha) = (1+|\xi|^2)^{1/4}\, m(\xi)\, \varphi_1(\alpha|\xi|^{-1})\, \sigma(x,\xi)$$

vérifient $\|\tau_j(x,D)(A,f)\|_2 \leq C\|\nabla A\|_\infty\|f\|_2$.

Là encore, on écrit $f = g_o + \sum_{k\geq 0} f_k$, et pour $A(x)$ on écrit de même $A = B + \sum_{j\geq 0} 2^{-j} a_j = B + \sum_{j\geq 0} A_j$. Dans cette somme, seuls les termes $j \geq k-R$ vont intervenir parce que le support de $\varphi_1(\alpha|\xi|^{-1})$ force à avoir $|\alpha| \geq a|\xi|$ pour $c > 0$.

Comme ci-dessus, si $j \geq k+R$, $\tau_1(x,D)(A_j,f_k) = 2^{-j}\,\sigma(x,D)(a_jG_k)$ tandis que $\tau_2(x,D)(A_j,f_k) = 2^{-j}a_j\,\sigma(x,D)(G_k)$. Dans les deux situation, la norme L^2 ne dépasse pas $C2^{-j}2^{k/2}\|a\|_\infty\|f\|_2$ et l'on a évidemment $\sum_{j\geq k\geq 0}\sum 2^{-j}\,2^{k/2} < +\infty$.

Les quelques termes extrêmes $k-T \leq j \leq k+T$ sont traités comme ci-dessus.

Il ne nous reste plus qu'à examiner les diverses corrections introduites au début de la démonstration du théorème 35.

LEMME 12. <u>Le symbole</u> $\left\{(1+|\xi+\alpha|^2)^{1/4} - (1+|\xi|^2)^{1/4}\right\}\sigma(x,\xi+\alpha)$ $m(\xi)$ <u>définit un opérateur bilinéaire borné sur</u> $L^2(\mathbb{R}^n)$ <u>si</u> $\nabla A \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Il suffit de vérifier que $\left\{(1+|\xi+\alpha|^2)^{1/4} - (1+|\xi|^2)^{1/4}\right\}\sigma(x,\xi+\alpha)$ définit un opérateur bilinéaire borné ; on fait agir $\sigma(x,D)$ sur le résultat pour prouver le lemme 12.

Là encore, on décompose l'opérateur suivant les ordres de grandeur relatifs de $|\alpha|$ et de $|\xi|$.

Le premier terme est $\left[(1+|\xi+\alpha|^2)^{1/4}-(1+|\xi|^2)^{1/4}\right]\varphi_o(\alpha|\xi|^{-1/2})\Big]m(\xi)$.

On observe que $\dfrac{(1+|\xi+a_i+\alpha_i|^2)^{1/4} - (1+|\xi+a_i|^2)^{1/4}}{\alpha_i}\,\varphi_o\left(\dfrac{\alpha}{|\xi|^{1/2}}\right)$ est un symbole dans $S^{-1/2}_{1,1/2}$ auquel on peut appliquer le lemme 8. Les autres termes peuvent être traités comme ci-dessus.

Le dernier terme à estimer a la forme

$$\psi(x,\xi,\alpha) = \varphi_o(\xi)\left\{(1+|\xi+\alpha|^2)^{1/4}\sigma(x,\xi+\alpha) - (1+|\xi|^2)^{1/4}\,\sigma(x,\xi)\right\}$$

avec $\varphi_o \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Là encore on écrit $A(x) = B(x) + \sum_o^\infty 2^{-j}\,a_j(x)$ avec $\|a_j\|_\infty \leq C\|\nabla A\|_\infty$.

Les termes $2^{-j}a_j$ sont analysés comme au lemme 10. Pour $|\alpha| \leq 2$ et $|\xi| \leq 2$, on a

$$\psi(x,\xi,\alpha)\,\varphi_o(\alpha) = \sum_1^n \alpha_j\,\psi_j(x,\xi,\alpha) \quad \text{avec} \quad \psi_j \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Le terme $\iint e^{ix.(\xi+\alpha)}\,\psi_j(x,\xi,\alpha)\,\alpha_j\,\hat{A}(\alpha)\,\hat{f}(\xi)\,d\xi\,d\alpha$ s'analyse de façon simple en écrivant

$$\psi_j(x,\xi,\alpha)=\iint e^{i(\xi.u+\alpha.v)}\,\frac{\eta_j(x,u,v)}{(1+|u|^2+|v|^2)^N}\,du\,dv$$

avec $|\eta_j(x,u,v)|\leq C$.

CONCLUSION

L'objet de ces notes a été, en particulier, l'étude de certains des nouveaux opérateurs présentés par A. Calderón au congrès international des mathématiciens à Helsinki.

Ces nouveaux opérateurs ont ceci de remarquable que leur définition est très simple : ils sont donnés par les noyaux explicites $\frac{(A(x) - A(y))^k}{(x-y)^{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ avec la seule condition que $\left|\frac{d}{dx} A(x)\right| \leq 1$.

En revanche il est très difficile de montrer que les opérateurs en question sont bornés sur $L^2(\mathbb{R})$.

Ces opérateurs ne sont pas des opérateurs pseudo-différentiels. Pour donner à cette assertion le sens le plus précis possible, il était indispensable d'alléger au maximum les hypothèses de régularité portant sue les symboles des o. p. d. et entraînant la continuité sur l'espace L^2.

Nous avons consacré les Chapitres I et II à ces résultats optimaux sur les o. p. d.. Les nouvelles classes étudiées sont les meilleures possibles et ne contiennent cependant pas les opérateurs de Calderón.

Il n'existe donc pas encore de théorie satisfaisante permettant d'obtenir les inégalités L^2 à la fois pour les o. p. d. et les nouveaux opérateurs de Calderón.

Les "lemmes de presque-orthogonalités" de M. Cotlar ou les variantes que nous avons présentées aux chapitres I et II constituent l'outil le plus puissant pour montrer que les o. p. d. sont bornés sur L^2.

Personne à l'heure actuelle ne sait cependant adapter ces méthodes au cas des commutateurs de Calderón ; notre compréhension du sujet est donc encore très rudimentaire.

APPENDICE I

LE CALCUL PARADIFFÉRENTIEL DE J. M. BONY ET LA RÉGULARITÉ DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES.

1. ESPACES DE BESOV $\Lambda^s_{p,q}$.

Soient $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$ et $s \in]0,1[$. On définit l'espace de Besov $\Lambda^s_{p,q}$ comme suit.

DEFINITION 1. Une fonction (ou une classe de fonctions) f appartient à $\Lambda^s_{p,q}$ si et seulement si $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ et si $\omega(h) = \|f(x+h) - f(x)\|_{L^p(dx)}$, module de continuité de f en norme L^p, satisfait

(1) $$\int_{\mathbf{R}^n} \frac{\omega^q(h)}{|h|^{n+qs}} \, dh < +\infty.$$

Remarques. Il vaut mieux écrire que $\frac{\omega(h)}{|h|^s} \in L^q(\mathbf{R}^n, \frac{dh}{|h|^n})$ car cette formulation convient aussi quand $q = +\infty$ et montre le rôle joué par la mesure $\frac{dh}{|h|^n}$ invariante par rotations et homothéties. On voit d'ailleurs que cette condition est locale (c'est-à-dire que dans (1) le problème de la convergence n'existe pas à l'infini puisque $\omega(h) \leq 2\|f\|_p$). Si $p = q = +\infty$, alors $\Lambda^s_{p,q}$ est l'espace C^s des fonctions hölderiennes d'exposant s et si $p = q = 2$, $\Lambda^s_{p,q} = H^s$ espace de Sobolev caractérisé par $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ et $\iint_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dx\, dy < +\infty$.

Si $s = 1$, on remplace le module de continuité $\omega(h)$ par $\underline{\omega}(h) = \|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)\|_p$ sans modifier (1). C'est-à-dire que $f \in \Lambda^1_{p,q}$ signifie $f \in L^p$ et $\frac{\omega(h)}{|h|} \in L^q(\mathbf{R}^n, \frac{dh}{|h|^n})$.

Enfin si $s > 1$, on écrit $s = m+r$ où $m \in \mathbb{N}$ et $0 < r \leq 1$. Alors $f \in \Lambda^s_{p,q}$ signifie que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$, $\partial^\alpha f \in \Lambda^r_{p,q}$.

Remarques. L'espace $\Lambda^1_{\infty,+\infty}$ n'est pas l'espace des fonctions lipschitziennes ordinaires mais c'est la célèbre "classe de Zygmund" qui fut à l'origine de la définition des $\Lambda^1_{p,q}$.

En revanche l'espace $\Lambda^1_{2,2}$ est l'espace de Sobolev H^1 usuel. Enfin si $p \neq 2$ les espaces de Besov $\Lambda^s_{p,q}$ ne coïncident, pour aucune valeur de q, avec les espaces de Sobolev "généralisés" $W^p_s = (I - \Delta)^{-s/2} L^p$ $(1 < p < +\infty)$.

2. CARACTÉRISATIONS DES ESPACES DE BESOV PAR L'INTERPOLATION RÉELLE.

THÉORÈME 36. Soient p,q et s trois nombres réels tels que $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$ et $s > 0$. On appelle m un entier vérifiant $m > s$. Alors, pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(2)
$$f \in \Lambda^s_{p,q}.$$

(3) il existe une suite $\varepsilon_k \in \ell^q$ et une suite $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que, pour tout $k \geq 0$,

$$\|f - f_k\|_p \leq \varepsilon_k 2^{-ks}$$

et
$$\|\partial^\alpha f_k\|_p \leq \varepsilon_k 2^{k|\alpha|} 2^{-ks} \quad \text{lorsque} \quad |\alpha| = m.$$

Remarques. On peut introduire l'espace de Sobolev W^p_m des fonctions $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dont toutes les dérivées, jusqu'à l'ordre m, appartiennent à $L^p(\mathbb{R}^n)$, muni de sa norme canonique ; ici $1 \leq p \leq +\infty$. Alors les propriétés des f_k sont $\|f - f_k\|_p \leq \varepsilon_k 2^{-ks}$ et $\|f_k\|_{W^p_m} \leq \varepsilon_k 2^{k(m-s)}$. De sorte que $\Lambda^s_{p,q}$ apparaît comme l'interpolé réel :

(4)
$$\Lambda^s_{p,q} = (L^p(\mathbb{R}^n) , W^p_m(\mathbb{R}^n))_{\theta,q}$$

où $s = \theta m$.

Naturellement on peut paraphraser le théorème 36 en introduisant $\Delta_k f = f_{k+1} - f_k$. Alors f se présente sous la forme de la somme télescopique $f = f_o + \sum_o^\infty \Delta_k(f)$ dans laquelle $\|\partial^\alpha \Delta_k(f)\|_p \leq \bar{\varepsilon}_k 2^{k|\alpha|} 2^{-ks}$ et $\bar{\varepsilon}_k \in \ell^q$ pour $0 \leq |\alpha| \leq m$.

Une telle décomposition de f s'appelle "décomposition de Littlewood-Paley généralisée". La raison de cette terminologie est la suivante.

On désigne par $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction radiale, ≥ 0, égale à 1 si $|\xi| \leq 1/2$ et à 0 si $|\xi| \geq 1$. On pose alors $\psi_k(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{2^{k+1}}) - \varphi(\frac{\xi}{2^k})$, $k \in \mathbb{N}$, ce qui permet d'introduire les deux opérateurs $S_k : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\Delta_k : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ définis par

$$(S_k f)^\wedge(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{2^k}) \hat{f}(\xi)$$

et $(\Delta_k f)^\wedge(\xi) = \psi_k(\xi) \hat{f}(\xi)$.

On a alors

$$f = S_o(f) + \sum_o^\infty \Delta_k(f). \tag{5}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in \Lambda^s_{p,q}$ est alors que $\|\Delta_k(f)\|_p \leq \varepsilon_k 2^{-ks}$ où $\varepsilon_k \in \ell^q$ et $S_o(f) \in L^p$.

3. LES ESPACES DE BESOV ET LE THÉORÈME DE LINÉARISATION DE J. M. BONY.

Rappelons la définition du paraproduit $\pi : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Si u et v sont deux distributions tempérées, on définit $w = \pi(u,v)$ par

$$w = \sum_2^\infty S_{k-2}(u) \Delta_k(v).$$

On montre sans difficulté que, si $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, l'opérateur linéaire qui à v associe $\pi(u,v)$ est borné sur tous les espaces H^s, $s \in \mathbb{R}$, $\Lambda^s_{p,q}$, etc...

THÉORÈME 37. Soient $n \geq 1$ un entier, $s > \frac{n}{2}$ un nombre réel et $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction appartenant à $H^s(\mathbb{R}^n)$. Alors pour toute fonction $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, nulle en 0, on a

$$F(u) = \pi(F'(u)\,,\, u) + w \tag{6}$$

où $w \in \Lambda^{2s}_{1,1} \subset \Lambda^{2s-n/2}_{2,1} \subset H^{2s-n/2}$.

Remarques. Si F n'est pas nulle en 0, si, par exemple, F est une constante, (6) n'a pas lieu globalement car les constantes n'appartiennent pas à $\Lambda^{2s}_{1,1}$. Dans ce cas (6) devient un énoncé local : w appartient localement à $\Lambda^{2s}_{1,1}$.

On pose, pour alléger les notations, $u_k = S_k(u)$ et $v_k = \Delta_k(u) = u_{k+1} - u_k$.

Alors $F(u) = F(u_o) + (F(u_1) - F(u_o)) + \ldots + (F(u_{k+1}) - F(u_k)) + \ldots$ et $F(u_{k+1}) - F(u_k) = m_k v_k$ où $m_k(x) = \int_o^1 F'(u_k + tv_k)dt = S_k(F'(u)) + r_k = S_{k-2}(F'(u)) + r_k + \rho_k$.

Nous nous proposons de montrer l'existence d'une suite $\varepsilon_k \in \ell^2$ telle que l'on ait, si $0 \leq |\alpha| \leq m$ $(m > \frac{s}{2})$

$$\|\partial^\alpha r_k\|_2 \leq \varepsilon_k\, 2^{k|\alpha|} 2^{-ks} \tag{7}$$

et

$$\|\partial^\alpha \rho_k\|_2 \leq \varepsilon_k\, 2^{k|\alpha|} 2^{-ks}. \tag{8}$$

En appliquant le théorème 36 aux séries $\sum_o^\infty r_k v_k$ et $\sum_o^\infty \rho_k v_k$ on obtiendra le théorème 37.

Pour démontrer (7) et (8) nous suivons la méthode présentée dans [57]. Pour alléger les notations, écrivons $F'(t) = F'(0) + G(t)$ où $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ est nulle en 0. Posons, pour $t \in [0,1]$, $p_k = G(u_k + tv_k)$ et $q_k = S_k(G(u))$. Notre propos est donc d'examiner en quel sens l'opérateur linéaire S_k commute avec l'opérateur non linéaire : $u \longrightarrow G(u)$ de H^s dans lui-même.

PROPOSITION 1. Soient $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction nulle en 0 et $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$

<u>une fonction à valeur réelle où</u> $s > n/2$. <u>Il existe alors, si</u> $m \in \mathbb{N}$ <u>et</u> $m > s$, <u>une suite</u> $\varepsilon_k \in \ell^2(\mathbb{N})$ <u>telle que, si</u> $0 \le |\alpha| \le m$, <u>on ait</u>

$$\|\partial^\alpha\{S_k(G(u)) - G(S_k(u))\}\|_2 \le \varepsilon_k 2^{k|\alpha|} 2^{-ks}. \tag{9}$$

Pour démontrer la proposition 1, on commence par examiner le cas $\alpha = 0$. On observe alors que, puisque $G \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\|G(S_k(u)) - G(u)\|_2 \le C\|S_k(u) - u\|_2 \le \varepsilon_k 2^{-ks}$ et que, de même, $G(u) \in H^s$ car $G(0) = 0$ et donc $\|S_k(G(u)) - G(u)\|_2 \le \varepsilon_k 2^{-ks}$.

Si maintenant $|\alpha| = m$, nous allons vérifier (9) en démontrant l'inégalité correspondante pour $\|\partial^\alpha(S_k(G(u)))\|_2$ et $\|\partial^\alpha G(S_k(u))\|_2$. Là encore la première vérification est évidente puisque $G(u) \in H^s$. En ce qui concerne la seconde, on a (en posant $u_k = S_k(u)$)

$$\partial^\alpha G(u_k) = \sum_{q\ge 1} \sum_{\alpha=\alpha_1+\ldots+\alpha_q} D^q G(u_k)\, \partial^{\alpha_1} u_k \ldots \partial^{\alpha_q} u_k$$

où la somme est étendue à tous les entiers $q \ge 1$ et à toutes les décompositions, dans $\mathbb{N}^n$, de α en une somme $\alpha_1 + \ldots + \alpha_q$ $(\alpha_j \in \mathbb{N}^n)$; observons que $|\alpha| = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_q|$ et que seuls sont écrits les $\alpha_j \ne 0$ de sorte que $1 \le q \le |\alpha|$.

Cette formule (lorsqu'on explicite les coefficients qui interviennent grâce aux répétitions) s'appelle formule de Faa di Bruno.

Finalement on est ramené à majorer la norme L^2 d'un monôme $D^q G(u_k)\, \partial^{\alpha_1} u_k \ldots \partial^{\alpha_q} u_k$. On pose alors $\frac{2}{p_j} = \frac{|\alpha_j|}{m}$ et l'on a

$$\|D^q G(u_k)\, \partial^{\alpha_1} u_k \ldots \partial^{\alpha_q} u_k\|_2 \le \|D^q G\|_\infty \|\partial^{\alpha_1} u_1\|_{p_1} \ldots \|\partial^{\alpha_q} u_k\|_{p_q}. \tag{10}$$

On utilise alors l'inégalité suivante

$$\|\partial^{\alpha_j} u_k\|_{p_j} \le \varepsilon_k 2^{kt_j} \quad \text{où} \quad t_j = |\alpha_j|(1 - \tfrac{s}{m}). \tag{11}$$

La preuve de (11) n'est pas triviale et nous la renvoyons à la fin de la démonstration.

Les inégalités (11) impliquent (par l'inégalité de Hölder) l'inégalité (10) si $|\alpha| = m$.

Le cas où $1 \leq |\alpha| \leq m-1$ s'obtient par interpolation (ou bien en utilisant les inégalités évidentes portant sur les normes L^2 des dérivées successives d'une fonction). Le théorème 2 est alors démontré.

Revenons à (11). On doit distinguer trois cas : $|\alpha_j| + n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_j}) > s$; $|\alpha_j| + n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_j}) = s$ et $|\alpha_j| + n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_j}) < s$. Dans le premier cas, on écrit $u_k = u_o + v_o + \ldots + v_{k-1}$ et l'on utilise l'inégalité triangulaire pour majorer la norme L^{p_j} de $\partial^\alpha u_k$. De plus l'inégalité classique de S. Bernstein donne $\|\partial^{\alpha_j} v_k\|_p \leq C\, 2^{k|\alpha_j|} \|v_k\|_p$.

Dans le premier cas, on utilise finalement le lemme évident suivant.

LEMME. <u>Si</u> $\varepsilon_k \in \ell^2(\mathbf{N})$, <u>il en est de même pour</u> $\eta_k = \sum_o^k \varepsilon_j r^{k-j}$ <u>lorsque</u> $0 \leq r < 1$.

Les calculs sont alors immédiats et l'on doit, à la fin, observer que $|\alpha_j| - s + n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_j}) \leq |\alpha_j| - \frac{s}{m}|\alpha_j|$ parce que $s > \frac{n}{2}$.

Dans le second cas, on obtient $\|\partial^{\alpha_j} u_k\|_{p_j} = O(\log(1+k))$ ce qui rend (11) évident et dans le dernier on a une estimation en $O(1)$.

THÉORÈME 38. <u>Soient</u> $n \geq 1$ <u>et</u> $N \geq 1$ <u>deux entiers</u>, $F \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N)$, $F = F(x, u_1, \ldots, u_N)$; <u>supposons que</u> $f_1 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \ldots, f_N : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ <u>appartient à</u> H^s <u>où</u> $s > \frac{n}{2}$. <u>Alors on a</u>

$$F(x, f_1(x), \ldots, f_N(x)) = \sum_1^N \pi\left(\frac{\partial F}{\partial u_j}(x, f_1(x), \ldots, f_N(x)), f_j\right) + G(x) \tag{12}$$

<u>où</u> $G \in \Lambda^{2s}_{1,1}$ <u>localement</u>.

La preuve de ce résultat est semblable à celle du théorème 2 et laissée au

lecteur : on écrit la fonction composée comme une série télescopique
$\sum_{k\geq 0}\left\{F(x, S_{k+1}(f_1), \ldots, S_{k+1}(f_N)) - F(x, S_k(f_1), \ldots, S_k(f_N))\right\}$ et l'on utilise encore la formule de Taylor avec reste intégral.

4. LES OPÉRATEURS PARA-DIFFÉRENTIELS ADAPTÉS A LA LINÉARISATION PRÉCÉDENTE.

Supposons toujours $s > \frac{n}{2}$ et posons $s = \frac{n}{2} + r$.

Désignons par $B_r \subset C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des symboles $\sigma(x, \xi)$ tels que

(13) $$(1+|\xi|)^{|\alpha|} \|\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)\|_{H^s(dx)} \leq C_\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{N}^n$$

(14) pour tout ξ fixé, le spectre de $x \longrightarrow \sigma(x,\xi)$ soit contenu dans le boule $|\eta| \leq \frac{1}{10}|\xi|$ si $|\xi| \geq 1$ et $\sigma(x,\xi) = 0$ si $|\xi| \leq 1$.

Cet ensemble de symboles sert à traiter les termes principaux. Pour traiter les termes d'erreur, nous utiliserons une autre famille de symboles.

Pour tout $r > 0$, désignons par $\Gamma^{-r} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions vérifiant

(15) $$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \rho(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{|\beta|-|\alpha|}$$

et, plus précisément

(16) $$\int_{|\xi|\geq 1} (1+|\xi|)^{2|\alpha|-2|\beta|} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \rho(x,\xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi|^n} < +\infty.$$

Avec ces notations on a

THÉORÈME 39. <u>Soient</u> $\tau \in S^o_{1,1}$ et $\sigma \in B_r$. <u>Alors</u>
$$\tau(x,D) \circ \sigma(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq r} \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \tau \, \partial_x^\alpha \sigma + \rho(x\,,D) \quad \underline{\text{où}} \quad \rho(x,\xi) \in \Gamma^{-r}.$$

THÉORÈME 40. (E. Stein). <u>Si</u> $\rho(x,\xi) \in \Gamma^{-r}$ <u>et</u> $t > -r$, <u>alors</u>

$\rho(x\ ,\ D) : H^t(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Lambda^{s+t}_{1,1}(\mathbb{R}^n)$ est continu.

La preuve du théorème 39 est, en fait, une simple vérification puisque nous disposons d'une formule explicite pour $\rho(x,\xi)$ à savoir $\rho(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\{\tau(x,\xi+\eta) - \sum_{|\alpha|\le r} \frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi \tau(x,\xi)\} e^{i\eta.x}\hat{\sigma}(\eta,\xi)\,d\eta$.

Nous allons vérifier, dans un premier temps que, si $2^k \le |\xi| \le 2^{k+1}$, $|\rho(x,\xi)| \le \varepsilon_k 2^{-kr}$ où $\varepsilon_k \in \ell^2$. Les inégalités portant sur $|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \rho(x,\xi)|$ s'obtiendront de façon analogue.

On désigne par $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ des fonctions réelles, radiales, positives ou nulles et telles que $1 = \varphi^2(\eta) + \sum_{j\ge0} \psi^2(2^{-j}\eta)$ et que le support de ψ soit contenu dans $\frac{1}{3} \le |\eta| \le 1$. En introduisant cette décomposition de l'identité sous l'intégrale en $d\eta$ définissant $\rho(x,\xi)$, il vient $\rho(x,\xi) = a(x,\xi) + \sum_{j\ge0} \rho_j(x,\xi)$. De façon plus détaillée, on pose $p_j(x,\eta,\xi) = \psi(2^{-j}\eta)\,\hat{\sigma}(\eta,\xi)\,e^{i\eta.x}$ (et l'on a $p_j = 0$ si $2^j \ge \frac{3}{10}|\xi|$ car $\hat{\sigma}(\eta,\xi) = 0$ si $|\eta| \ge \frac{1}{10}|\xi|$) et $q_j(x,\eta,\xi) = \{\tau(x,\xi+\eta) - \sum_{|\alpha|\le r} \frac{1}{\alpha!}\eta^\alpha \partial^\alpha_\xi \tau(x,\xi)\}\,\psi(2^{-j}\eta)$ et l'on a, si $2^k \le |\xi| \le 2^{k+1}$ et $2^j < \frac{3}{10}|\xi|$, $\|q_j(x,\eta,\xi)\|_{L^2(d\eta)} \le C(\frac{2^j}{2^k})^{r+1} 2^{\frac{n}{2}j}$. De plus $\rho_j(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} p_j(x,\eta,\xi)\,q_j(x,\eta,\xi)\,d\eta$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit $|\rho_j(x,\xi)| \le C(\frac{2^j}{2^k})^{r+1} 2^{j\,n/2}\|p_j\|_{L^2(d\eta)}$. On majore cette dernière expression, grâce au fait que $x \longrightarrow \sigma(x\ ,\ \xi)$ appartienne à $H^s(dx)$, en $O(\varepsilon_j 2^{-js})$. Puisque $s = \frac{n}{2} + r$, on obtient $|\rho_j(x,\xi)| \le C\,2^{-k(r+1)}\,2^j\,\varepsilon_j$ et l'on obtiendrait de même

$$|\partial^\alpha_\xi \partial^\xi_x \rho_j(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}\, 2^{j+|\beta|}\, 2^{-k(r+1+|\alpha|)}\,\varepsilon_j\,.$$

Il ne reste plus qu'à additionner ces estimations en remarquant que $\rho_j = 0$ si $j \ge k$ et à se servir du lemme.

Le terme $a(x,\xi)$ est trivial (comme d'habitude).

La preuve du théorème 40 est une adaptation des méthodes du chapitre II. On se ramène aux symboles réduits de la forme $\sigma(x,\xi) = \sum_{0}^{\infty} a_k(x)\, b(2^{-k}\xi)$ où $b \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ est nulle au voisinage de 0 et où $\|\partial_x^{\alpha} a_k(x)\|_{\infty} \leq 2^{-kr}\, \varepsilon_k 2^{k|\alpha|}$ $\varepsilon_k \in \ell^2(\mathbf{N})$, $0 \leq |\alpha| \leq m$, m assez grand. Alors on utilise le théorème 36.

5. RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON-LINÉAIRES.

Soient $n \geq 1$ et $N \geq 1$ deux entiers, $F : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction indéfiniment dérivable et considérons l'équation aux dérivées partielles non linéaire

$$F(x\,;\, u(x), \ldots, \partial^{\alpha} u(x), \ldots) = 0 \tag{17}$$

où $|\alpha| \leq m$ (et m est effectivement une longueur d'un des multi-indices figurant dans (17)) et où $u : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ est la fonction inconnue.

Posons alors $p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha}}(x\,;\, u(x), \ldots, \partial^{\alpha}u(x), \ldots)(i\xi)^{\alpha}$.

Nous dirons que $(x_0\,,\,\xi_0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ est non-caractéristique pour la fonction u si $p_m(x_0\,,\,\xi_0) \neq 0$. Nous avons implicitement établi une bijection entre $\{1, \ldots, N\}$ et les $\alpha \in \mathbf{N}^n$ vérifiant $|\alpha| \leq m$ de sorte que nous utilisons, par abus de langage, la notation u_{α} pour désigner la "α-ième" coordonnée d'un point de $\mathbf{R}^N$.

THÉORÈME 41. Soient $s > \frac{n}{2} + m$ et $u \in H^s(\mathbf{R}^n)$ une solution de (17). Alors en tout point (x_0, ξ_0) non caractéristique relativement à u, u est micro-localement dans $\Lambda_{1,1}^{2s-m} \subset \Lambda_{2,1}^{2s-m-n/2} \subset H^{2s-m-n/2}$.

Le théorème 41 s'éclaire en posant $s = \frac{n}{2} + m + r$, $r > 0$, et en remarquant que le gain de régularité est r (et même légèrement mieux au sens que l'espace de Sobolev est remplacé par un espace de Besov plus petit).

La preuve du théorème 41 suit exactement l'algorithme donné par J.-M. Bony dans [55] et en y injectant les estimations améliorées que nous avons obtenues.

On applique d'abord le théorème 38 à (17). Il vient, si $s_o = s - m$,

(18) $$\sum_1^N \pi\left(\frac{\partial F}{\partial u_\alpha}(x \,;\, u(x),\dots)\,,\ \partial^\alpha u\right) = -g \in \Lambda_{1,1}^{2s_o}.$$

Ensuite on pose $f = (I - \Delta)^{m/2} u \in H^{s_o}$ et l'on appelle $\mathcal{L}$ l'opérateur para-différentiel défini par

(19) $$\mathcal{L}(f) = \sum_1^N \pi(c_\alpha(x)\,,\ \partial^\alpha(I - \Delta)^{-m/2} f)$$

où $c_\alpha(x) = \frac{\partial F}{\partial u_\alpha}(x \,;\, u(x),\ \dots,\ \partial^\alpha u(x),\dots)$.

Alors le symbole de $\mathcal{L}(f)$ est

(20) $$\sigma(x\,,\,\xi) = \sum_1^N (k_\xi * c_\alpha)(x)\,\frac{(i\xi)^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{m/2}}$$

où k_ξ est l'approximation de l'identité utilisée pour définir le paraproduit ($k_\xi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\|k_\xi\|_1 \le C$ et k_ξ tend vaguement vers la masse de Dirac en 0 quand $|\xi| \to +\infty$).

Ce symbole a la propriété remarquable que

(21) $$\lim_{|\xi| \to +\infty} \left\{\sigma(x,\ \xi) - \frac{p_m(x,\xi)}{|\xi|^m}\right\} = 0.$$

Il en résulte que si $p_m(x_o, \xi_o) \neq 0$, on a, pour $r \ge r_o$ $|\sigma(x_o, r\xi_o)| \ge \delta > 0$.

On peut donc utiliser le théorème 40 pour inverser $\mathcal{L}$.

Il existe donc $\mathcal{M} \in \mathrm{Op}\, S^0_{1,1}$ tel que

(22) $$\mathcal{M} \circ \mathcal{L} = P + R$$

où P est l'opérateur (de symbole classique, homogène de degré 0 en ξ) de microlocalisation et où $R \in \mathrm{Op}\, \Gamma^{-r}$.

Alors (18) s'écrit $\mathcal{L}(f) = -g \in \Lambda_{1,1}^{2s_o}$ et (22) entraîne $Pf = Rf = -\mathcal{M} g \in \Lambda_{1,1}^{2s_o}$ (utiliser le théorème de Stein). On a $Rf \in \Lambda_{1,1}^{2s_o}$ et finalement $Pf \in \Lambda_{1,1}^{2s_o}$ ce qui entraîne $Pu \in \Lambda_{1,1}^{2s_o+m}$ puisque $u = (I - \Delta)^{-m/2} f$.

6. OPÉRATEURS APPARENTÉS AU PARAPRODUIT.

Considérons le disque ouvert $D = \{|z|<1\}$ et l'anneau $\mathcal{O}$ des fonctions $f(z)$ holomorphes dans D. Le premier opérateur de paramultiplication qui a vu le jour a été inventé par A. Calderón en 1965 [3] et est un opérateur bilinéaire $\pi : \mathcal{O} \times \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ défini par $\pi(f,g) = h$ lorsque $h'(z) = f(z)\, g'(z)$ pour tout $z \in D$ avec $h(0) = 0$. Les espaces fonctionnels utilisés sont les espaces de Hardy du disque $H^p(D)$, $p > 0$: $f \in H^p(D)$ signifie $f \in \mathcal{O}$ et $\sup\limits_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta < +\infty$.

A. Calderón démontre que si $0 < p \le +\infty$ et $0 < q < +\infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors $\|h\|_r \le C(p,q) \|f\|_p \|g\|_q$ (on a noté $\|h\|_r$ la "norme" de h dans H^r qui est un espace de Banach si $r \ge 1$ et un espace métrique $0 < r < 1$.

De plus, dans ce cadre, le théorème 3 a la formulation très simple suivante. Si $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction entière alors, pour toute fonction holomorphe $f : D \to \mathbb{C}$, la fonction composée $F(f)$ est égale au paraproduit entre $F'(f)$ et f (à condition d'oublier la constante $F(f(0))$. En effet si $h(z) = F(f(z))$, on a $h'(z) = F'(f)f'$. La formule approchée de Bony est ici une formule exacte. Une autre généralisation du paraproduit est la notion d'intégrale stochastique que nous présenterons seulement dans le cas discret. La formule de Bony devient alors la célèbre formule d'Itô.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $\mathcal{A}_k$ une suite croissante de tribus de Ω telle que $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ soit la tribu triviale et que $\mathcal{A}$ soit engendrée par la réunion des $\mathcal{A}_k$. Une martingale est une suite $f_k \in L^1(\Omega)$ de fonctions $\mathcal{A}_k$-mesurables reliées entre elles par la relation de compatibilité : $f_k = \mathbb{E}\left[f_{k+1} \mid \mathcal{A}_k\right]$ (f_k est l'espérance conditionnelle de f_{k+1} par rapport à $\mathcal{A}_k$).

On écrit, le plus souvent, $d_{k+1} = f_{k+1} - f_k$ et la condition est alors que la moyenne de d_{k+1} par rapport à l'ensemble de "toutes les connaissances que l'on possède à l'instant k" est nulle.

Si $\|f_k\|_2 \leq C$, alors $f_k \xrightarrow[p\,s]{L^2} f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $f_k = \mathbb{E}(f\,|\mathcal{A}_k)$.

Dans ce cadre l'opération de paraproduit est particulièrement simple et consiste à associer au couple $(f,g) \in L^\infty(\Omega) \times L^2(\Omega)$ la fonction h définie, à l'aide des notations ci-dessus, par $h = \sum_0^\infty f_k\, d_{k+1}(g)$; $f_k = \mathbb{E}\,[f\,|\mathcal{A}_k]$, $g_k = \mathbb{E}\,[g\,|\mathcal{A}_k]$ et $d_{k+1}(g) = g_{k+1} - g_k$. On observera que la série définissant h est encore une martingale de carré intégrable.

7. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES ET HISTORIQUES.

Les espaces de Besov ont été introduits par Besov "On embedding and extension theorems for some function classes" Trudy Mat. Inst. Steklov 60 (1960), 42-81. Indépendamment Arne Beurling redécouvrait l'espace de Besov $\Lambda_{2,1}^{1/2}(\mathbb{R})$ comme l'algèbre des transformées de Fourier des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, mesurables et telles qu'il existe un poids $\omega : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$, pair, décroissant sur $[0,+\infty[$, tel que $\omega(0) = \lim_{x \downarrow 0} \omega(x) < +\infty$ et que $(\omega(0) + \int_{\mathbb{R}} \omega(x)\,dx)(\int_{\mathbb{R}} |f|^2\,dx/\omega(x)) < +\infty$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Les espaces de Besov $\Lambda_{p,1}^{n/p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$, sont en fait des algèbres, généralisant l'algèbre de Beurling et, plus généralement si $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$ et $s > n/p$, alors $\Lambda_{p,q}^s(R^n)$ est une algèbre.

APPENDICE II

LA SOLUTION DES CONJECTURES DE CALDERÓN.

Les conjectures de Calderón datent de 1965 et ont été à l'origine de beaucoup de progrès en "analyse dure".

Voici ce dont il s'agit.

Soit K une partie compacte du plan complexe. Une fonction $A : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est dite K-lipschitzienne si pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $y \neq x$, on a $\dfrac{A(x) - A(y)}{x - y} \in K$.

Soient donc K une partie compacte du plan complexe, U un ouvert contenant K, $A : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction K - lipschitzienne et $F : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe.

On forme alors le noyau singulier $N(x,y) = \dfrac{1}{x-y} F\left(\dfrac{A(x) - A(y)}{x - y}\right)$ et A. P. Calderón a conjecturé que ce noyau est un noyau de Calderón-Zygmund au sens de la définition 2 du chapitre IV. C'est-à-dire qu'il s'agit de prouver la continuité L^2 de l'opérateur T défini par $T f(x) = \text{v. p.} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} N(x,y) f(y)\, dy$.

Après des résultats partiels dus à A. Calderón et aux auteurs de cet ouvrage, les conjectures de Calderon ont été résolues pendant le printemps 1981 par R. R. Coifman, A. McIntosh et Y. Meyer (lorsque K est convexe) et au cours de l'été 1981, par Guy David, dans le cas général.

On sait maintenant que tout se ramène à l'estimation de base suivante ; si $A : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ vérifie $\|A'\|_\infty \leq 1$, alors le noyau $\dfrac{(A(x) - A(y))^n}{(x-y)^{n+1}}$ définit un opérateur borné $T_n : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ dont la norme ne dépasse pas $C(1+n)^4$ où C est une constante absolue.

Désignons par φ la fonction $\frac{1}{2} e^{-|x|}$ et par ψ la fonction $- i \operatorname{sign} x \, \varphi(x)$. Nous suivons les notations du Chapitre VI et désignons par P_t l'opérateur de convolution par φ_t ; $Q_t(f) = f * \psi_t$. Alors on a la formule explicite

$$T_n = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(P_t - iQ_t)M_a\right]^n (P_t - iQ_t) \frac{dt}{t}$$

dans laquelle M_a désigne l'opérateur de multiplication par $a(x) = A'(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Pour conclure, on est amené à introduire une fonction de Littlewood-Paley-Stein associée au problème :

$$G_n[f \, ; x] = \left(\int_0^\infty |Q_t(M_a P_t)^n f|^2(x) \frac{dt}{t}\right)^{1/2}.$$

La démonstration de $\|T_n(f)\|_2 \leq C(1+n)^4 \|f\|_2$ se ramène alors, grâce à des manipulations algébriques, à celle de $\|G_n(f)\|_2 \leq C(1+n) \|f\|_2$ et cette dernière est obtenue grâce aux techniques de mesures de Carleson du chapitre VI.

Les détails paraîtront dans [58].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEALS, R. Characterization of pseudo-differential operators and applications. Duke Math. J. 44 (1977), 45-57.

[2] BEURLING, A. Construction and analysis of some convolution algebras. Ann. Inst. Fourier 14 (1964), 1-32.

[3] CALDERÓN, A. P. Commutators of singular integral operators. Proc. Nat. Acad. Sc. USA 53 (1965), 1092-1099.

[4] __________ Algebras of singular integral operators. Proc. Symp. in Pure Math. 10 (1966), 18-55.

[5] __________ Singular integrals. Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 426-465.

[6] __________ Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators. Proc. Nat. Acad. Sc. USA 74 (1977), 1324-1327.

[7] CALDERÓN, A. P. and VAILLANCOURT, R. On the boundedness of pseudo-differential operators. J. Math. Soc. Japan 23 (1971), 374-378.

[8] __________ A class of bounded pseudo-differential operators. Proc. Nat. Acad. Sc. USA 69 (1972), 1185-1187.

[9] CALDERÓN, A. P. and ZYGMUND, A. On the existence of certain singular integrals. Acta Math. 88 (1952), 85-139.

[10] __________ Singular integrals and periodic functions. Studia Math. 14 (1953), 249-271.

[11] __________ On singular integrals. Amer. J. Math. 78 (1956), 289-309.

[12] __________ Algebras of certain singular integral operators. Amer. J. Math. 78 (1956), 310-320.

[13] CARLESON, L. Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem. Ann. Math. 76 (1962), 547-559.

[14] __________ The corona theorem. Proc. 15th Scandinavian Congress, Oslo, 1968. Lecture notes in Math. n° 118, Springer-Verlag.

[15] __________ On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. 116 (1966), 135-157.

[16] __________ Two remarks on H^1 and BMO. Advances in Math. 22 (1976), 269-277.

[17] COIFMAN, R. A real variables characterization of H^p. Studia Math. 24 (1974), 269-274.

[18] COIFMAN, R. and FEFFERMAN, C. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. Studia Math. (1974), 241-250.

[19] COIFMAN, R. and MEYER, Y. On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals. Trans. Amer. Math. Soc. 212 (1975), 315-331.

[20] ______________________ Le double commutateur. Analyse Harmonique d'Orsay 180 (1976), Univ. Paris-Sud.

[21] ______________________ Commutateurs d'intégrales singulières et opérateurs multilinéaires. Ann. Inst. Fourier Grenoble, (1978).

[22] COIFMAN, R. et WEISS, G. Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes. Lecture notes in Math. 242 (1971), Springer-Verlag, Berlin.

[23] ______________________ Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 569-645.

[24] CORDES, H. On compactness of commutators of multiplications and convolutions and boundedness of pseudo-differential operators. J. Funct. Anal. 18 (1975), 115-131.

[25] COTLAR, M. Some generalizations of the Hardy-Littlewood maximal theorem. Rev. Mat. Cuyana 1 (1955), 85-104.

[26] A unified theory of Hilbert transforms and ergodic theory. Rev. Mat. Cuyana 1 (1955), 105-167.

[27] DELEEUW, K. On L^p multipliers. Ann. Math. 81 (1965), 364-379.

[28] FEFFERMAN, C. L^p bounds for pseudo-differential operators. Israël J. Math. 14 (1973), 413-417.

[29] ______________ The multiplier problem for the ball. Ann. Math. 94 (1971), 330-336.

[30] ______________ Recent progress in classical Fourier analysis. ICM Vancouver (1974).

[31] FEFFERMAN, C. and STEIN, E. M. H^p spaces of several variables. Acta Math. 129 (1972), 137-193.

[32] GIBBONS, G. Opérateurs pseudo-différentiels et espaces de Besov. C. R. Acad. Sc. Paris 286 (1978), 895-897.

[33] GIRAUD, G. Equations à intégrales principales. Ann. Sc. ENS 51 (1934), 251-372.

[34] HÖRMANDER, L. Pseudo-différential operators. Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), 501-517.

[35] HÖRMANDER, L. Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations. Proc. Symp. Pure Math. 10 (1966), 138-183.

[36] HUNT, R. On the convergence of Fourier series, orthogonal expansions and their continuous analogues (Proc. Conf. Edwardsvill, Ill. 1967), Southern Illinois Univ. Press, Carbondalle, Ill. 1968.

[37] JOHN, F. and NIRENBERG, L. On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 415-426.

[38] KATO, T. Boundedness of some pseudo-differential operators. Osaka J. Math. 13 (1976), 1-9.

[39] KENIG, C. E. and TOMAS, P. E. Maximal operators defined by Fourier multipliers. Math. Dept., Univ. Chicago, Ill.

[40] KNAPP, A. W. and STEIN, E. M. Intertwining operators on semi-simple Lie groups. Ann. Math. 93 (1971), 489-578.

[41] KOHN, J. J. and NIRENBERG, L. An algebra of pseudo-differential operators. Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), 269-305.

[42] KUMANO-GO, H. Algebras of pseudo-differential operators in R^n. Proc. Japan Acad. 48 (1972), 402-407.

[43] KUMANO-GO, H. Algebras of pseudo-differential operators. J. Fac. Sc. Univ. Tokyo 17 (1970), 31-50.

[44] LITTLEWOOD, J. and PALEY, R. Theorems on Fourier series and power series (II). Proc. London Math. Soc. 42 (1937), 52-89.

[45] LORENTZ, G. G. Approximation of functions. Holt, Rinehart and Winston (1966).

[46] MARCINKIEWICZ, J. Multiplicateurs des séries de Fourier. Studia Math. 8 (1939), 78-91.

[47] MEYER, Y. L^p estimates for pseudo-differential operators. Report n° 1 (1977). Inst. Mittag-Leffler.

[48] MOSSAHEB, S. et OKADA, M. Une classe d'opérateurs pseudo-différentiels. C. R. Acad. Sc. Paris 285 (1977), 613-616.

[49] POMMERENKE, C. Shlichte Funktionen und B.M.O. A. Comm. Math. Helv., 1978.

[50] STEIN, E. M. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1970).

[51] UNTERBERGER, A. et BOKOBZA, J. Les opérateurs de Calderón-Zygmund précisés. C. R. Acad. Sc. Paris 259 (1964), 1612-1614.

[52] ——————————— Sur une généralisation des opérateurs de Calderón-Zygmund et des espaces H^s. C. R. Acad. Sc. Paris 260 (1965), 3265-3267.

[53] ZYGMUND, A. Intégrales singulières. Lecture Notes in Math. 204 (1971).

[54] ______________ Trigonometric series (2nd ed.). 2 vol., Cambridge (1959).

[55] BONY, J. M. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. Ann. Scient. E.N.S. 4ème série, 14 (1981), 209-246.

[56] MEYER, Y. Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires. Sém. Bourbaki 1979/1980, no. 560.

[57] MEYER, Y. Remarques sur un théorème de J. M. Bony. Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Atti del Seminario di Analisi Armonica, Pisa, 8-17 Aprile 1980, Serie II, no. 1, 1981.

[58] COIFMAN, R., McINTOSH, A. et MEYER, Y. L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes. Ann. of Math. (à paraître).

ENGLISH SUMMARY

Two classes of operators are studied that generalize pseudo-differential operators.

Firstly new classes of ψ d. o. with minimal smoothness assumptions are defined in Chapters I and II. The corresponding L^2 estimates are obtained by new and simple considerations.

Secondly following A. P. Calderón's program, commutators between C^1 vector fields and classical ψ d. o. are examined. This second class is of special significance. These operators do not belong to the first class and their study requires new methods such as those developed by A. P. Calderón, A. Zygmund and their school (Chap. III and IV).

In Chapter V a conjecture by E. Stein is proved ($S^{-n/2}_{0,0}$ is bounded on H^1) and in Chapter VI Carleson measures are used for obtaining L^2 estimates.