

Astérisque

MICHAEL SHUB

Stabilité globale des systèmes dynamiques

Astérisque, tome 56 (1978)

http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__56__1_0

© Société mathématique de France, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

to

Alex, Beth and Steve

P R E F A C E

These notes are the result of a course in Dynamical Systems given at Orsay during the 1976-77 academic year. I had given a similar course at the Graduate Center of the City University of New York the previous year and came to France equipped with the class notes of two of my students there, Carol Hurwitz and Michael Maller. My goal was to present Smale's Ω -stability theorem as completely and compactly as possible and in such a way that the students would have easy access to the literature. I was not confident that I could do all this in lectures, especially lectures in French, so I decided to distribute lecture notes. I wrote these notes in English and Remi Langevin translated them into French. His work involved much more than translation. He consistently corrected for style, clarity and accuracy. Albert Fathi got involved in reading the manuscript. His role quickly expanded to extensive rewriting and writing. Fathi wrote 5.1 and 5.2 and rewrote Theorem 7.8 when I was in despair of ever getting it right with all the details. He kept me honest at all points and played a large role in the final form of the manuscript. He also did the main work in getting the manuscript ready when I had left France and Langevin was unfortunately unavailable. I ran out of steam by the time it came to chapter 10. M. Yoccoz wrote this chapter based on a preliminary version of class notes by M. Lebasque.

Mrs B. Barbichon typed many versions of these notes with more forbearance than can reasonably be expected of anyone. She was very helpful in many ways and I am very grateful.

The notes are intended to be read in order except that Appendix 5.2 and chapter 9 may be omitted. There are chapter commentaries at the end which should be read together with or after each chapter.

I was "Professeur Associé" at Orsay while most of this work was done. The National Science Foundation supported this work and the Research Foundation of the City University of New York contributed to the preparation of the manuscript.

Queens College of
the City University of New York
February 14, 1978

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
<u>CHAPITRE 1 - GÉNÉRALITÉS</u>	1
Point errant, point non-errant. Ensemble non-errant $\Omega(f)$. Ensemble ω -limite, $\omega_f(x)$. Ensemble α -limite, $\alpha_f(x)$. Ensemble limite $L(f)$. α -pseudo-orbite, point α -pseudo périodique. Point de période par chaîne $R(f)$. Topologie C^r .	
<u>CHAPITRE 2 - FILTRATIONS</u>	8
Filtration adaptée à un homéomorphisme. Ensemble invariant d'une filtration. Ensemble stable $W^S(B)$. Ensemble instable $W^U(B)$. Préordre. Ordre de filtration.	
<u>CHAPITRE 3 - SUITES DE FILTRATIONS</u>	14
Raffinement de filtration. Suite de filtrations. Filtration fine. Suite fine de filtrations. Fonction décroissante sur les orbites. C^0 - Ω -explosion. Fonction de Lyapounov.	
<u>CHAPITRE 4 - ENSEMBLES HYPERBOLIQUES</u>	25
Ensemble invariant hyperbolique. Métrique adaptée. Point fixe hyperbolique. Difféomorphisme d'Anosov. Le fer à cheval de Smale. Shift. Le solénoïde.	
<u>CHAPITRE 5 - VARIÉTÉS STABLES</u>	41
Automorphisme hyperbolique. Application lipschitzienne. Théorème de la variété (in)stable locale pour un point. Transformation de graphe. Dérivabilité. Métrique admissible sur un fibré vectoriel. Théorème de la section invariante. Fibrés höldériens. Variété (in)stable globale pour un point.	
<u>Appendice 5.1.</u> Théorème d'inversion locale pour les applications lipschitziennes.	
<u>Appendice 5.2.</u> Théorème de la variété (in)stable. Démonstration d'Irwin.	

<u>CHAPITRE 6 - VARIÉTÉS STABLES ASSOCIÉES A DES</u>	
<u>ENSEMBLES HYPERBOLIQUES</u>	84
Disque stable, disque instable. Espace de section bornées (resp. continues) d'un fibré. Application exponentielle. Variété (in)stable globale & locale.	
<u>CHAPITRE 7 - ENCORE DES CONSÉQUENCES DE</u>	
<u>L'HYPERBOLICITÉ</u> !.....	96
Transversalité. Expansivité. Invariance par perturbation de l'hyperbolicité. Point fixe d'une perturbation d'un automorphisme hyperbolique. Théorème 7.8. Théorème de linéarisation de Grobman et Hartman.	
<u>CHAPITRE 8 - STABILITÉ</u>	115
Semi-conjugaison, conjugaison topologique. Stabilité structurelle, Ω -stabilité. Axiome A. Structure de produit local. Transitivité topologique, mélange topologique. Décomposition spectrale. Cycles d'une décomposition spectrale. Pistage d'une pseudo-orbite par un point. Théorème d' Ω -stabilité. Problème central.	
<u>CHAPITRE 9 - POT-POURRI DE RÉSULTATS DE STABILITÉ</u>	138
Axiome A. Transversalité forte. Difféomorphisme de Morse-Smale.	
<u>CHAPITRE 10 - PARTITIONS MARKOVIENNES</u>	144
Dynamique symbolique. Sous-shift de type fini. Points périodiques isolés. Fonction ζ . Rectangle, rectangle propre. Partition markovienne. Bande (in)stable. Finitude du codage associé à une partition markovienne. Rationalité de la fonction ζ .	
<u>COMMENTAIRES</u>	181
<u>INDEX</u>	208
<u>ABSTRACT</u>	211

STABILITÉ GLOBALE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

par M. SHUB

avec la collaboration de A. Fathi et R. Langevin

CHAPITRE 1 - GÉNÉRALITÉS

Soit M une variété différentiable compacte, et soit $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de M . Notre but est d'étudier la structure des orbites de f . Rappelons que l'orbite d'un point x de M est l'ensemble $\{f^n(x) \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

Un point fixe de f est un point x tel que $f(x) = x$; un point périodique de f est un point fixe pour un itéré de f : il existe un entier n strictement positif tel que $f^n(x) = x$.

Nous chercherons à décrire "l'histoire" des points de M , c'est-à-dire à suivre ces points lorsque l'on répète f un grand nombre de fois.

Commençons par étudier quelques notions de retour plus faibles que la périodicité. Les notions qui vont suivre, comme celle de point fixe ou périodique, ont un sens dans la catégorie plus générale des espaces topologiques et des applications continues.

DÉFINITION 1.0. Soit X un espace topologique et $f : X \rightarrow X$ une application continue. Un point x de X est errant (wandering) s'il existe un voisinage U de x tel que $f^k(U) \cap U$ soit vide pour tout entier positif k . Le point x est non-errant

si tel n n'est pas le cas, c'est-à-dire si, pour tout voisinage U de x , il existe un entier positif k tel que $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$. Notons $\Omega(f)$ l'ensemble des points non-errants ; lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, nous noterons cet ensemble Ω .

PROPOSITION 1.1. Ω est fermé et $f(\Omega)$ est contenu dans Ω . De plus, si f est un homéomorphisme, $f(\Omega) = \Omega$ et un point est non-errant pour f si et seulement s'il est non-errant pour f^{-1} .

Démonstration : Par définition, les points errants de f forment un ouvert ; Ω est donc fermé.

Si x appartient à Ω et si U est un voisinage de $f(x)$, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x . Il existe donc k tel que : $f^k(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$; l'image par f de cette intersection est contenue dans $f^k(U) \cap U$, qui ne peut alors être vide.

Si f est homéomorphisme et si x est un point de $\Omega(f)$, pour tout voisinage U de x , il existe un entier positif k tel que $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$. L'image par f^{-k} de cette dernière intersection est $U \cap f^{-k}(U)$ et ne peut donc être vide, ce qui implique que x appartient à $\Omega(f^{-1})$.

Enfin, si f est un homéomorphisme, on a :

$$\Omega = f(f^{-1}(\Omega)) \subset f(\Omega) \subset \Omega, \text{ et donc } f(\Omega) = \Omega. \quad \square$$

Un point périodique est non-errant. Notons $\text{Per}(f)$, ou Per si aucune confusion n'est possible, l'ensemble des points périodiques de f . Puisque Ω est fermé, nous savons que l'adhérence de l'ensemble des points périodiques est contenu dans l'ensemble des points non-errants : $\overline{\text{Per}(f)} \subset \Omega(f)$.

DÉFINITION 1.2. Soit $f : X \rightarrow X$ une application continue et soit $x \in X$. L'ensemble ω -limite de x , $\omega_f(x)$, est défini par :

$$\omega_f(x) = \{y \in X \mid \exists n_i \rightarrow \infty \mid f^{n_i}(x) \rightarrow y\}$$

Si f est un homéomorphisme, on définit de même l'ensemble α -limite de x : $\alpha_f(x)$ par :

$$\alpha_f(x) = \{y \in X \mid \exists n_i \rightarrow -\infty \mid f^{n_i}(x) \rightarrow y\}.$$

Posons : $L_+(f) = \bigcup_{x \in X} \omega_f(x)$; $L_-(f) = \bigcup_{x \in X} \alpha_f(x)$ et $L(f) = L_+(f) \cup L_-(f)$.

PROPOSITION 1.3. $L(f) \subset \Omega(f)$.

Démonstration : Soit y un point de $\omega_f(x)$ et U un voisinage de y . Il existe alors des entiers $n_1 > n_2 > 0$ tels que $f^{n_1}(x)$ et $f^{n_2}(x)$ appartiennent à U . Alors $f^{n_1-n_2}(U) \cap U$ n'est pas vide et donc y appartient à Ω . Le même raisonnement s'applique aux ensembles α -limites et à f^{-1} . \square

PROPOSITION 1.4. Si X est séquentiellement compact et si U est un voisinage de $\Omega(f)$, quel que soit x appartenant à X , il existe un $N > 0$ tel que, quel que soit $n \geq N$, $f^n(x)$ appartienne à U .

Démonstration : Sinon il existerait des points ω -limites de x non contenus dans U . \square

DÉFINITION 1.5. Soit X un espace muni de la métrique d . Soit $f : X \rightarrow X$ et α un réel positif. Une suite $\underline{x} = \{x_i ; p < i < q ; -\infty \leq p < q-2 \leq \infty\}$ est une α -pseudo-orbite pour f si $d(f(x_i), x_{i+1}) < \alpha$ pour $p < i < q-1$. Une α -pseudo-orbite est α -pseudo-périodique s'il existe $0 < n \leq q-p-2$ tel que $x_i = x_{i+n}$ pour tout x_i appartenant à \underline{x} tel que x_{i+n} appartienne à \underline{x} . Nous dirons qu'un point x de X est α -pseudo-périodique s'il est le premier terme d'une α -pseudo-orbite α -pseudo-périodique et finie : \underline{x} .

Les α -pseudo-orbites sont les suites de points que l'on pourrait prendre pour des orbites si le repérage des points se faisait avec une marge d'erreur α .

DÉFINITION 1.6. Soit X un espace muni de la métrique d et soit $f : X \rightarrow X$. Un point x de X est dit périodique par chaîne s'il est α -pseudo-périodique pour tout $\alpha > 0$. On note $R(f)$ (de : chain recurrent en anglais), ou simplement R s'il n'y a pas d'ambiguïté possible, l'ensemble des points périodiques par chaîne.

EXERCICE : $R(f)$ est fermé.

PROPOSITION 1.7. Soit X un espace métrique et $f : X \rightarrow X$ une application continue.

Alors $\Omega(f)$ est contenu dans $R(f)$.

Démonstration : Soit x un point de Ω et α un réel positif fixé. Montrons que x est α -pseudo-périodique. Choisissons $\delta < \alpha/2$ tel que :

$$d(x,y) < \delta \implies d(f(x),f(y)) < \frac{\alpha}{2} .$$

Soit U un voisinage de x contenu dans la boule de rayon δ de centre x . Il existe un entier n positif tel que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Soit y un point de U tel que $f^n(y)$ appartienne à U . Si $n = 1$, $\{x,x\}$ est une α -pseudo-orbite α -pseudo-périodique. Si $n > 1$, $\{x,f(y), \dots, f^{n-1}(y),x\}$ est une α -pseudo-orbite α -pseudo-périodique. \square

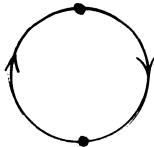
En résumé, nous avons :

$$\text{Per}(f) \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset R(f) .$$

On peut choisir f de sorte que chacune de ces inclusions soit stricte.

Exemples :

1)

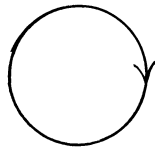


La flèche indique la direction $x, f(x)$.

Un point en gras est un point fixe.

Ici $\text{Per}(f) = L(f) = \Omega(f) =$ les deux points en gras, $R(f)$ est le cercle entier.

2)



Une rotation d'angle irrationnel.

$\text{Per}(f) = \emptyset$; $L(f) = \Omega(f) = R(f) =$ le cercle entier.

Exercice : Trouver des exemples où les autres inclusions strictes sont réalisées.

On peut se demander si ces inclusions sont des égalités pour une fonction f ordinaire, ou pour "la plupart" des fonctions. Une manière de rendre ces questions précises est de mettre une topologie sur l'ensemble des difféomorphismes ; on peut alors parler d'ensemble résiduel et de propriété générique.

Si X est un espace métrique compact, on peut mettre deux métriques sur $\text{Homeo}(X)$, l'ensemble des homéomorphismes de X dans X .

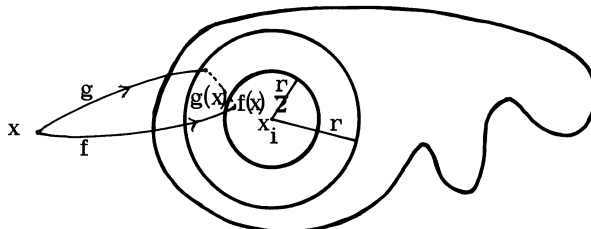
$$d_0(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

$$d_c(f, g) = \sup_{x \in X} [d(f(x), g(x)), d(f^{-1}(x), g^{-1}(x))].$$

Ces deux métriques engendrent la même topologie. On le voit en remarquant que toutes les applications considérées sont uniformément continues. La métrique d_c est complète sur $\text{Homeo}(X)$.

Si M est une variété différentiable compacte de classe C^r , $1 \leq r < \infty$, on munit l'espace des difféomorphismes C^r de M d'une topologie en définissant les suites convergentes : une suite f_n converge quand f_n et toutes les dérivées de f_n jusqu'à l'ordre r convergent uniformément. Cette définition s'étend pour $r = 0$ en posant $\text{Diff}^0(M) = \text{Homeo}(M)$.

La façon la plus naturelle de rendre cette définition précise serait d'utiliser le fibré des r -jets, mais il est peut-être plus simple de définir une base de voisinages du difféomorphisme f à l'aide de cartes. Choisissons un recouvrement fini de M par des cartes. Tout point x de M est contenu dans une boule de rayon r_x contenue dans une carte. Les boules $B(x, r_x/2)$ recouvrent M . On peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini $B(x_1, r_{x_1}/2), \dots, B(x_n, r_{x_n}/2)$. Soit $\delta = \inf r_{x_i}/2$. Nous pouvons maintenant être sûrs que, si deux fonctions f et g vérifient $d(f, g) < \delta$, pour tout point x de M , il existe une carte contenant les deux points $f(x)$ et $g(x)$.
 M. Nous pouvons maintenant calculer la distance C^r de f et g dans une carte : en calculant le maximum de la différence entre les dérivées correspondantes de f et g dans une même carte.



Rappelons que, dans un espace métrique complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense (propriété de Baire). On appelle résiduel ou générique un ensemble qui contient une intersection dénombrable d'ouverts denses ; une propriété vérifiée par tous les éléments d'un ensemble résiduel est dite générique.

Voici quelques problèmes ouverts de première importance :

- Est-ce que $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$ génériquement dans $\text{Diff}^r(M)$?
- Est-ce que $\Omega(f) = R(f)$ génériquement dans $\text{Diff}^r(M)$?

Une réponse dans cette voie est le théorème de Pugh (difficile) :

THÉORÈME (Pugh). $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$ génériquement dans $\text{Diff}^1(M)$.

On sait aussi que pour les homéomorphismes d'une variété différentielle compacte $\Omega(f) = \overline{\text{Per}(f)} = R(f)$ génériquement. Par contre, la théorie des perturbations est plus difficile dans le cas C^r , car il faut contrôler toutes les dérivées jusqu'à l'ordre r .

Jusqu'à présent, nous avons supposé que M est une variété différentiable compacte. Par homéomorphisme, resp difféomorphisme de M , nous entendons une application surjective admettant une application inverse, continue resp différentiable. Cette hypothèse de surjectivité n'est pas vraiment nécessaire. Toutes les définitions que nous avons données ont un sens même si f n'est pas surjective. Il suffit simplement de ne pas écrire $f^{-1}(x)$ si x n'appartient pas à l'image de f . Par exemple,

$\bigcap_{n \geq 0} f^n(M)$ est un fermé invariant contenu dans M et

$$\text{Per}(f) \subset L_+(f) \subset \Omega(f) \subset R(f) \subset \bigcap_{n \geq 0} f^n(M).$$

$L_-(f)$ est toujours l'ensemble des points limite d'une suite $f^{-n}(x)$ (tous les termes de la suite doivent être définis) ; $L_-(f) \subset \bigcap_{n \geq 0} f^n(M)$.

A partir de maintenant, par souci de simplicité, nous supposons que M est compacte, connexe et sans bord.

GÉNÉRALITÉS

Il est parfois utile de permettre à M d'avoir un bord. Par exemple, on peut avoir envie de considérer une région bornée de l'espace euclidien de bord lisse. Dans le cas où M a un bord, il faut supposer que f est un plongement de M dans son intérieur. Le lecteur qui n'est pas familier avec les variétés différentielles peut toujours se restreindre à ce cas ; cependant nous ne vérifierons pas la version à bord des théorèmes démontrés pour des variétés sans bord.

EXERCICE : Montrer que, si x appartient à Ω et si U est un voisinage de x , il existe une suite d'entiers n_i tendant vers l'infini tels que l'intersection $f^{n_i}(U) \cap U$ soit non vide.

CHAPITRE 2 - FILTRATIONS

Soit f un homéomorphisme de M . Une filtration \mathfrak{m} adaptée à f est une suite $\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = M$, où les M_i sont des sous-variétés C^∞ de M , compactes, à bord, telles que :

- a) $\dim M_i = \dim M$
- b) $f(M_i) \subset \text{int } M_i$.

La suite $\emptyset = \overline{M - M_k} \subset \overline{M - M_{k-1}} \subset \dots \subset \overline{M - M_0} = M$ est une filtration adaptée à f^{-1} , notée \mathfrak{m}^{-1} .

Etant donnée une filtration \mathfrak{m} adaptée à f , l'ensemble $K_\alpha^f(\mathfrak{m}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_\alpha - M_{\alpha-1})$ est le plus grand sous-ensemble de $M_\alpha - M_{\alpha-1}$ invariant par f , il est compact.

Définissons : $K^f(\mathfrak{m}) = \bigcup_{\alpha=1}^k K_\alpha^f(\mathfrak{m})$. Si \mathfrak{m} est une filtration adaptée à f , posons :

$$\Omega_\alpha = \Omega \cap (M_\alpha - M_{\alpha-1}) \quad ; \quad R_\alpha = R \cap (M_\alpha - M_{\alpha-1})$$

Ω_α et R_α sont contenus dans $K_\alpha^f(\mathfrak{m})$. Donc toute filtration \mathfrak{m} adaptée à f vérifie : $R(f) \subset K^f(\mathfrak{m})$ et par conséquent $L(f) \subset K^f(\mathfrak{m})$. Nous écrirons $K(\mathfrak{m})$ et $K_\alpha(\mathfrak{m})$ quand aucune confusion sur f ne sera à craindre.

Nous allons chercher à déterminer quels ensembles invariants fermés sont de la forme $K(\mathfrak{m})$ pour une filtration \mathfrak{m} adaptée à f .

DÉFINITION 2.1. Si B est une partie de M , on pose :

$$W^S(B) = \{y \in M \mid d(f^n(y), f^n(B)) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty\}$$

$$W^U(B) = \{y \in M \mid d(f^n(y), f^n(B)) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow -\infty\}$$

Soit f un homéomorphisme de M , soit $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_S$ une réunion disjointe de fermés invariants pour f telle que $L(f)$ soit contenu dans Λ .

LEMME 2.2. La variété M est la réunion disjointe des ensembles $W^S(\Lambda_i)$. Elle est aussi la réunion disjointe des ensembles $W^U(\Lambda_i)$.

Démonstration : On peut choisir des voisinages ouverts U_i des fermés invariants Λ_i tels que $f(U_i) \cap U_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Si x est un point de M , pour n assez grand, $f^n(x)$ appartient à la réunion $\bigcup_{i=1, \dots, s} U_i$, puisque la suite $f^n(x)$ ne peut avoir de point limite dans le complémentaire de $\bigcup_{i=1, \dots, s} U_i$, ni donc avoir une infinité de points contenus dans cet ensemble, qui est compact. Et comme $f(U_i) \cap U_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, à partir d'un certain rang tous les points de la suite $f^n(x)$ sont contenus dans l'un des U_i . Donc, comme les U_i peuvent être choisis arbitrairement proches des Λ_i , il existe un indice i tel que x appartienne à $W^S(\Lambda_i)$. Le même raisonnement s'applique aux ensembles W^U . \square

Si $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$ vérifie les mêmes propriétés que plus haut, nous définissons un préordre \succ par : $\Lambda_i \succ \Lambda_j$ si $(W^U(\Lambda_i) - \Lambda_i) \cap (W^S(\Lambda_j) - \Lambda_j) \neq \emptyset$. Nous dirons que le préordre \succ admet un r -cycle s'il existe une suite : $\Lambda_{i_1} \succ \dots \succ \Lambda_{i_{r+1}} = \Lambda_{i_1}$. Si le préordre \succ n'a pas de cycles, on peut le compléter en un ordre total compatible avec lui et noté $>$. L'une des trois propriétés suivantes est alors vérifiée :

$$\Lambda_i < \Lambda_j \quad ; \quad \Lambda_i = \Lambda_j \quad ; \quad \Lambda_i > \Lambda_j \quad .$$

La première inégalité implique qu'il n'existe pas de suite $\Lambda_i \succ \dots \succ \Lambda_j$. Si le préordre n'admet pas de cycle, il est possible de réindexer les Λ_i de sorte que l'ordre des indices coïncide avec l'ordre total $>$. Nous appellerons un tel ordre : ordre de filtration.

THÉORÈME 2.3. Soit f un homéomorphisme de M . Soit $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$ une réunion disjointe d'ensembles invariants pour f et fermés tels que $L(f) \subset \Lambda$. Une condition nécessaire et suffisante pour que les Λ_i soient de la forme $K_1(\mathfrak{m})$, $i = 1, \dots, s$ pour une filtration \mathfrak{m} adaptée à f est que les Λ_i ne contiennent pas de cycle et que l'ordre des indices soit un ordre de filtration.

Démonstration : Nous allons d'abord montrer que ces conditions sont nécessaires.

Si \mathfrak{m} est une filtration adaptée à f , comme $f(M_i)$ est contenu dans l'intérieur de M_i , $W^U(K_i(\mathfrak{m}))$ est contenu dans M_i et $W^S(K_i(\mathfrak{m}))$ est contenu dans $M - M_{i-1}$. Ceci montre qu'il ne peut exister de suite $K_j(\mathfrak{m}) \supset \dots \supset K_i(\mathfrak{m})$ si i est plus grand que j . Rappelons que, par définition, $K_i(\mathfrak{m}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i - M_{i-1})$. On a donc $W^U(K_i(\mathfrak{m})) \cap W^S(K_i(\mathfrak{m})) = K_i(\mathfrak{m})$ et donc $K_i(\mathfrak{m}) \not\subset K_j(\mathfrak{m})$. \square

Nous allons démontrer que ces conditions sont suffisantes à l'aide d'une suite de lemmes.

LEMME 1. $\overline{W^U(\Lambda_i)} \cap W^U(\Lambda_j) \neq \emptyset \implies \overline{W^U(\Lambda_i)} \cap \Lambda_j \neq \emptyset$.

Démonstration : $W^U(\Lambda_i)$ est invariant par f , $\overline{W^U(\Lambda_i)}$ est donc aussi invariant par f et de plus fermé. Si y est un point de $W^U(\Lambda_j) \cap \overline{W^U(\Lambda_i)}$, tout point limite de la suite $\{f^n(y)\}_{n \leq 0}$ est contenu dans $\overline{W^U(\Lambda_i)}$, mais les points limites de la suite $\{f^n(y)\}_{n \leq 0}$ appartiennent à Λ_j ; donc $\overline{W^U(\Lambda_i)} \cap \Lambda_j$ n'est pas vide. \square

LEMME 2. $(i \neq j ; \overline{W^U(\Lambda_i)} \cap \Lambda_j \neq \emptyset) \implies \overline{W^U(\Lambda_i)} \cap (W^S(\Lambda_j) - \Lambda_j) \neq \emptyset$.

Démonstration : Soit U_k un voisinage compact de Λ_k tel que $f(U_k) \cap U_\ell = \emptyset$ pour $k \neq \ell$. Posons $L_j = f^{-1}(U_j) - \text{int } U_j$. Comme $\overline{W^U(\Lambda_i)} \cap \Lambda_j$ n'est pas vide, il existe une suite de points x_n de $\overline{W^U(\Lambda_i)}$ convergeant vers un point de Λ_j . On peut choisir les points x_n dans l'intérieur de U_j . Comme $d(f^{-k}(x_n), \Lambda_i)$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini, que i est différent de j , que $f(U_i) \cap U_j = \emptyset$ et donc $\Lambda_i \cap U_j = \emptyset$, il existe un plus petit entier positif k_n tel que $f^{-k_n}(x_n)$ n'appartienne pas à $\text{int } U_j$, donc appartienne à L_j puisque $f(f^{-k_n}(x_n))$ appartient à $\text{int } U_j$. Soit x un point limite de la suite $f^{-k_n}(x_n)$. Le point x appartient à $\overline{W^U(\Lambda_i)}$ puisque chaque $f^{-k_n}(x_n)$ appartient à $W^U(\Lambda_i)$. Comme les x_n tendent vers un point de l'ensemble invariant Λ_j , la suite k_n tend vers l'infini avec n . Donc $f^\ell(x)$ appartient à U_j quel que soit ℓ positif, car s'il existait ℓ tel que $f^\ell(x)$ appartienne à $M - U_j$, il existerait un point x_n et un entier

k_n plus grand que ℓ tels que $f^\ell(x_n)$ appartienne à $M - U_j$, ce qui contredirait le choix des k_n . Le point x appartient bien à $\overline{W^U(\Lambda_i)} \cap (W^S(\Lambda_j) - \Lambda_j)$. \square

LEMME 3. $(i \neq j ; W^U(\Lambda_i) \cap \Lambda_j \neq \emptyset) \implies i > j$.

Démonstration : Le lemme 2 implique qu'il existe un point x appartenant à l'intersection $\overline{W^U(\Lambda_i)} \cap (W^S(\Lambda_j) - \Lambda_j)$. Mais M est la réunion $\bigcup_{k=1}^q W^U(\Lambda_k)$. Il existe donc un entier ℓ_1 tel que $x \in W^U(\Lambda_{\ell_1})$, ℓ_1 vérifiant $\Lambda_{\ell_1} > \Lambda_j$. Par le lemme 1, l'intersection $\overline{W^U(\Lambda_i)} \cap \Lambda_{\ell_1}$ n'est pas vide. En répétant ce raisonnement, nous obtenons une suite $\dots > \Lambda_{\ell_r} > \dots > \Lambda_{\ell_1} > \Lambda_j$, telle que $\overline{W^U(\Lambda_i)} \cap \Lambda_{\ell_1}$ ne soit pas vide. Tant que Λ_{ℓ_r} est différent de Λ_i , continuons le processus. Comme il n'existe qu'un nombre fini de Λ_ℓ et qu'il n'existe pas de cycle, il existe r tel que $\Lambda_{\ell_r} = \Lambda_i$. \square

LEMME 4. $\overline{W^U(\Lambda_i)} \subset \bigcup_{j \leq i} W^U(\Lambda_j)$, ce qui implique que $\bigcup_{j \leq i} W^U(\Lambda_j)$ est fermé.

Démonstration : Soit x un point de $\overline{W^U(\Lambda_i)}$. Il appartient à l'un des $W^U(\Lambda_j)$ par le lemme 2.1 ; les lemmes 1 et 3 impliquent alors que i est supérieur ou égal à j . \square

LEMME 5. $\bigcup_{j \leq i} W^S(\Lambda_j)$ est un voisinage ouvert de $\bigcup_{j \leq i} W^U(\Lambda_j)$.

Démonstration : En considérant f^{-1} , échangeons W^S et W^U , puis appliquons le lemme 4. \square

LEMME 6. Soit X un espace métrique compact et $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme $X \rightarrow \text{Im } f$. Soit P un ensemble invariant compact de la forme $P = \bigcap_{n \geq 0} f^n(Q)$, où Q est un voisinage compact de P ($P \subset \text{int}(Q)$). Supposons que f soit ouverte au voisinage de P ; il existe alors un voisinage compact V de P , contenu dans Q et tel que $f(V) \subset \text{int}(V)$.

Démonstration. Posons $A_r = Q \cap \dots \cap f^r Q$. Soit $U = f^{-1}(Q) \cap Q$; on a $P \subset \text{int } U \subset Q$. Par compacité de $X - \text{int } U$, pour r assez grand, A_r est contenu

dans $\text{int } U$. Donc $f(A_r) \subset f(U) \subset Q$, d'où $f(A_r) \subset A_r$. La suite $f^n(A_r)$ étant décroissante (r fixé), comme $P = \bigcap_{n \geq 0} f^n(A_r)$, il existe un entier n tel que $f^n(A_r) \subset \text{int } A_r$. Si $n = 1$, A_r convient ; supposons donc $n \geq 2$. Choisissons un ensemble ω tel que A_r soit contenu dans l'intérieur de ω et que $f^n(\omega)$ soit contenu dans l'intérieur de A_r . Posons $E = f^{n-1}(\omega) \cup A_r$. Alors $f(E)$ est contenu dans E et $f^{n-1}(E)$ est contenu dans l'intérieur de E , car on a :

$$\begin{aligned} f^{n-1}(A_r) &\subset \text{int } (f^{n-1}(\omega)) \subset \text{int } E \\ f^{n-1}(f^{n-1}(\omega)) &\subset f^{n-2}(f^n(\omega)) \subset f^{n-2}(\text{int } A_r) \subset \text{int } A_r \subset \text{int } E. \end{aligned}$$

Cet ensemble E est le voisinage qui permettra d'achever la récurrence. \square

Démonstration du théorème :

Nous voulons construire la suite de variétés emboîtées $\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = M$.

Remarquons d'abord que si K est un compact contenu dans la réunion

$$\bigcup_{j=1}^p W^S(\Lambda_{i_j}), \text{ on a l'inclusion } \bigcap_{n \geq 0} f^n(K) \subset \bigcup_{j=1}^p W^U(\Lambda_{i_j}). \text{ En effet, soit } x \in \bigcap_{n \geq 0} f^n K,$$

on a alors, pour tout entier n positif, $f^{-n}(x) \in K$; donc l'ensemble limite $L_-(x)$ est contenu dans K . On a alors : il existe un entier k tel que $L_-(x) \subset \Lambda_k$ et donc x appartient à $W^U(\Lambda_{i_j})$. Mais $L_-(x)$ est non vide et contenu dans l'intersection $\Lambda_k \cap (\bigcup_{j=1}^p W^S(\Lambda_{i_j}))$; donc il existe un indice i_j tel que $\Lambda_k = \Lambda_{i_j}$.

Construisons d'abord M_1 , puis continuons la construction par étapes jusqu'à M comme suit :

1) L'ensemble $W^S(\Lambda_1)$ est un voisinage de Λ_1 . Soit Q un voisinage compact de Λ_1 tel que $\Lambda_1 \subset Q \subset W^S(\Lambda_1)$. On a alors : $\bigcap_{n \geq 0} f^n(Q) = \Lambda_1$; il existe donc un voisinage compact V_1 de Λ_1 vérifiant $V_1 \subset Q$, $f(V_1) \subset \text{int}(V_1)$. On peut construire une variété à bord M_1 telle que V_1 soit contenu dans l'intérieur de M_1 . On peut pour cela choisir une fonction lisse positive g telle que $V_1 = \{x \in M \mid g(x) = 0\}$, puis prendre $M_1 = g^{-1}[-\infty, \epsilon]$ pour ϵ assez petit. On a alors $f(M_1) \subset \text{int}(M_1)$.

2) Nous savons que $W^U(\Lambda_2) \cup W^U(\Lambda_1)$ est contenu dans $W^S(\Lambda_2) \cup W^S(\Lambda_1)$.

Soit maintenant Q_2 un voisinage compact de $W^U(\Lambda_1) \cup W^U(\Lambda_2)$ contenu dans $W^S(\Lambda_1) \cup W^S(\Lambda_2)$. On a alors $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q_2) = W^U(\Lambda_2) \cup W^U(\Lambda_1)$. Il existe donc un voisinage V_2 de $W^U(\Lambda_2) \cup W^U(\Lambda_1)$ tel que $f(V_2) \subset \text{int}(V_2)$ et

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n(V_2) = W^U(\Lambda_2) \cup W^U(\Lambda_1).$$

Construisons ensuite M_2 contenant $V_2 \cup M_1$ de façon analogue, et ainsi de suite jusqu'à obtenir une filtration de M .

3) Nous affirmons que : $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_j - M_{j-1}) = \Lambda_j$.

En effet : $\bigcap_{n \geq 0} f^n(M_j) = \bigcup_{i \leq j} W^U(\Lambda_i)$. Mais M_{j-1} contient $\bigcup_{i < j} W^U(\Lambda_i)$ et donc :

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n(M_j - M_{j-1}) \subset W^U(\Lambda_j).$$

D'autre part, la suite $\emptyset = \overline{(M - M_S)} \subset \overline{(M - M_{S-1})} \subset \dots \subset \overline{(M - M_0)} = M$ est une filtration adaptée à f^{-1} , donc :

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n(M_j - M_{j-1}) = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}((M - M_{j-1}) - (M - M_j)) \subset W^S(\Lambda_j)$$

$$W^U(\Lambda_j) \cap W^S(\Lambda_j) = \Lambda_j \quad \text{et donc : } \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_j - M_{j-1}) = \Lambda_j. \quad \square$$

Les filtrations ont de fortes propriétés de stabilité.

PROPOSITION 2.4. Soit \mathfrak{m} une filtration adaptée à f et soit U un voisinage de $K^f(\mathfrak{m})$. Il existe alors un voisinage C^0 de $f : \mathcal{V} \subset \text{Homeo}(M)$ tel que \mathfrak{m} soit une filtration adaptée à tout g appartenant à \mathcal{V} et que $K^g(\mathfrak{m})$ soit contenu dans U . En fait, si l'on pose $U_\alpha = (M_\alpha - M_{\alpha-1}) \cap U$, le voisinage \mathcal{V} peut être choisi de sorte que $K_\alpha^g(\mathfrak{m})$ soit contenu dans U_α .

Démonstration : Puisque $f(M_\alpha)$ est contenu dans l'intérieur de M_α , la même propriété

est vraie pour toute application g C^0 -proche de f . Si U_α est un voisinage de

$K_\alpha^f(\mathfrak{m})$, il existe alors un entier N tel que $\bigcap_{i=-N}^N f^i(M_\alpha - \text{int } M_{\alpha-1}) \subset U_\alpha$. Mais si g

est assez proche de f , l'inclusion $\bigcap_{i=-N}^N g^i(M_\alpha - \text{int } M_{\alpha-1}) \subset U_\alpha$ est aussi vraie. \square

CHAPITRE 3 - SUITES DE FILTRATIONS

DÉFINITION 3.0. Soit $\mathfrak{m} : \emptyset = M_0 \subset \dots \subset M_k = M$ et $\mathfrak{n} : \emptyset = N_0 \subset \dots \subset N_\ell = M$ deux filtrations de M . On dira que \mathfrak{n} raffine \mathfrak{m} si, quel que soit i , $i = 0, \dots, \ell-1$, il existe j , $0 \leq j < k-1$ tel que : $(N_{i+1} - N_i) \subset (M_{j+1} - M_j)$.

Si \mathfrak{m} et \mathfrak{n} sont des filtrations adaptées au même homéomorphisme f de M et si \mathfrak{n} raffine \mathfrak{m} , il est clair que $K^f(\mathfrak{n})$ est contenu dans $K^f(\mathfrak{m})$. C'est pourquoi, s'il n'est pas toujours possible de trouver une filtration pour un ensemble invariant fermé donné, on peut parfois, dans ce cas, trouver une suite de filtrations $\{\mathfrak{m}_i\}$ telle que les ensembles $K^f(\mathfrak{m}_i)$ convergent vers Λ .

DÉFINITIONS 3.1. $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \dots$ est une suite de filtrations, si \mathfrak{m}_i raffine \mathfrak{m}_{i-1} quel que soit i . Posons $K\{\mathfrak{m}_i\} = \bigcap_i K(\mathfrak{m}_i)$. Si Λ est un fermé invariant pour f et si \mathfrak{m} est une filtration adaptée à f telle que $K(\mathfrak{m}) = \Lambda$, nous dirons que \mathfrak{m} est une filtration pour Λ . Si $\{\mathfrak{m}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de filtrations telle que $K\{\mathfrak{m}_i\} = \Lambda$, on dira que $\{\mathfrak{m}_i\}$ est une suite de filtrations pour Λ . Une filtration pour Ω est appelée filtration fine, une suite de filtrations pour Ω est appelée une fine suite de filtrations.

Nous allons démontrer qu'il existe toujours une suite de filtrations pour R . Donnons d'abord quelques propriétés techniques supplémentaires des filtrations.

Le résultat technique suivant améliore le théorème 2.3.

PROPOSITION 3.2. Supposons que $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k$ soit une réunion disjointe de fermés invariants pour f qui contienne $L(f)$ et supposons de plus que les Λ_i ne contiennent pas de cycles. Soit \mathfrak{n} une filtration adaptée à f telle que, pour tout i , il existe α tel que Λ_i soit contenu dans $K_\alpha^f(\mathfrak{n})$. Il existe alors une filtration pour Λ qui raffine \mathfrak{n} .

Démonstration : Comme dans la démonstration du théorème 2.3, si Λ_i est contenu dans $N_\alpha - N_{\alpha-1}$, on peut construire M_i contenant $N_{\alpha-1}$ et contenu dans N_α . On peut alors insérer les N_α dans la suite des M_i . La filtration ainsi construite raffine certainement h . \square

Soit Λ un fermé invariant pour f ($f \in \text{Homeo}(M)$). Soient W_1, \dots, W_k des ouverts deux à deux disjoints recouvrant Λ : $\Lambda \subset \bigcup_{i=1}^k W_i$. Soit $B(W_i) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_i)$ et $F(W_i) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_i)$, le "passé" et "l'avenir" de W_i (backwards et forwards en anglais). Soit $K_i = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(W_i)$, l'ensemble invariant pour f maximal contenu dans W_i . Le préordre \succ est défini par :

$$W_i \succ W_j \text{ si } \begin{cases} \text{soit } i \neq j \text{ et } F(W_i) \cap B(W_j) \neq \emptyset \\ \text{soit } i = j \text{ et } B(W_i) - W_i \cap (F(W_i) - W_i) \neq \emptyset . \end{cases}$$

L'ensemble des W_i contient un r -cycle s'il existe une suite $W_{i_1} \succ \dots \succ W_{i_{r+1}} = W_{i_1}$.

Si les W_i ne contiennent pas de cycles, nous dirons que l'ordre des indices est un ordre de filtration si, quand j est plus grand que i , il n'existe pas de suite $W_i \succ \dots \succ W_j$.

PROPOSITION 3.3. Soit Λ un fermé invariant pour un homéomorphisme f de M . Supposons de plus que Λ contienne $L(f)$. Soit W_1, \dots, W_k un recouvrement de Λ par des ouverts disjoints ne contenant pas de cycles. Les ensembles K_i définis plus haut sont alors des fermés disjoints invariants pour f et ne contiennent pas de cycles. De plus, $L(f)$ est contenu dans la réunion K des K_i .

Démonstration : Montrons d'abord que les K_i sont fermés. Soit x un point de l'adhérence de K_i . Comme $\omega(x) \subset L(f) \subset \Lambda \subset \bigcup_{i=1}^k W_i$, il existe un entier N tel que, pour tout n supérieur ou égal à N , $f^n(x)$ appartienne à $\bigcup_{i=1}^k W_i$. Comme les W_i ne contiennent pas de cycles, il existe j et N' tels que, pour tout n supérieur ou égal à N' , $f^n(x)$ appartienne à W_j . On doit alors avoir $j = i$. En effet W_j et donc $f^{-n}(W_j)$

sont des ouverts ; $f^{-n}(W_j)$ qui contient un point de $\overline{K_i}$ contiendrait aussi un point de K_i .

On démontre de même que $f^{-n}(x)$ appartient à W_i quand n est assez grand.

Comme enfin il n'existe pas de 1-cycle, quand x appartient à K_i , $f^n(x)$ appartient à W_i quel que soit n . Le même raisonnement montre aussi que $L(f)$ est contenu dans K . En effet, soit x un point de M , l'ensemble $\omega(x)$ est contenu dans Λ , donc $f^n(x)$ appartient à l'un des W , disons W_i quand n est assez grand, ce qui implique que les itérés des points ω -limites de $f^n(x)$ sont astreints à rester dans W_i . \square

THÉORÈME 3.4. Soit f un homéomorphisme de M . Il existe une suite de filtrations pour $R(f)$.

Démonstration : Soit ϵ un réel positif. Soit $\alpha < \epsilon/2$ tel que $d(x,y) < \alpha$ implique $d(f(x), f(y)) < \epsilon/2$. Recouvrons Ω par les boules ouvertes centrées sur Ω , $B(x, \alpha/2)$.

Soit $B_{x_i} = B(x_i, \alpha/2)$, $i = 1, \dots, k$, un sous-recouvrement fini extrait.

Définissons un préordre sur les B_{x_i} par $B_{x_i} \geq B_{x_j}$ s'il existe un entier n positif ou nul, tel que l'intersection $f^n(B_{x_i}) \cap B_{x_j}$ soit non vide. Nous dirons que deux boules B_{x_i} et B_{x_j} sont équivalentes si elles appartiennent à un même cycle pour le préordre que nous venons de définir. Regroupons les boules B_{x_i} équivalentes en des ouverts U_1, \dots, U_q (chacun des U_i est la réunion des boules d'une classe d'équivalence).

Soit $V_i = F(U_i) \cap B(U_i)$. Les V_i forment un recouvrement de Ω par des ouverts disjoints et ne contiennent pas de cycle.

Remarquons que deux points d'un même U_i appartiennent toujours à une même ϵ -pseudo-orbite. En effet, si x appartient à B_{x_i} et y à B_{x_j} , on peut supposer que, pour un entier n , l'intersection $f^n B_{x_i} \cap B_{x_j}$ n'est pas vide (car en mettant bout à bout deux ϵ -pseudo-orbites, on obtient encore une ϵ -pseudo-orbite). Distinguons deux cas :

1) $n > 0$. Choisissons z appartenant à B_{x_i} tel que $f^n(z)$ appartient à B_{x_j} . Par choix de α , la suite $x, f(z), \dots, f^{n-1}(z), y$ est une ϵ -pseudo-orbite.

2) $n = 0$. Comme x_i appartient à Ω , il existe un entier $n \geq 2$ tel que $f^n(B_{x_i})$ recoupe B_{x_i} (voir exercice du chapitre 1). Soit z un point de B_{x_i} tel que $f^n(z)$ appartienne aussi à B_{x_i} . La suite $x, f(z), \dots, f^{n-1}(z), y$ est alors une ϵ -pseudo-orbite.

On en conclut aisément que tout point de V_i est ϵ -pseudo-périodique.

Définissons comme plus haut des ensembles K_i par $K_i = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V_i)$. Les points de K_i sont tous ϵ -pseudo périodiques. Il existe une filtration pour $K = \bigcup_{i=1}^q K_i$, ce qui implique que $R(f)$ est contenu dans K . Quitte à rétrécir un peu les V_i , on peut supposer que, la réunion $\bigcup_i V_i$ restant un voisinage de Ω , leurs adhérences sont disjointes. Soit maintenant une suite décroissante ϵ_n de nombres positifs qui tendent vers 0 quand n tend vers l'infini, les ensembles V_i^n, K_i^n, K^n sont construits comme nous venons de le dire en posant $\epsilon = \epsilon_n$. Choisissons la suite ϵ_n de sorte que $(\bigcup_i V_i^{n+1})$ soit contenu dans $\bigcup_i V_i^n$ le voisinage de Ω construit à l'étape précédente. Tout fermé K_i^{n+1} est contenu dans un fermé K_j^n car tout V_i^{n+1} est contenu dans un V_j^n (sinon il existerait un cycle de ϵ_{n+1} -boules non contenu dans l'un des V_i^n et donc un cycle dans l'ensemble des V_i^n).

La proposition 3.2. permet maintenant de raffiner la filtration pour K^n déjà construite en une filtration pour K^{n+1} . Les K^n sont formés de points ϵ_n -pseudo-périodiques et contiennent chacun $R(f)$; on a donc : $\bigcap_{n \geq 0} K^n = R(f)$. \square

Soit une filtration $M = M_2 \supset M_1 \supset M_0 = \emptyset$ adaptée à un homéomorphisme f . On construit facilement une fonction continue non-négative φ telle que :

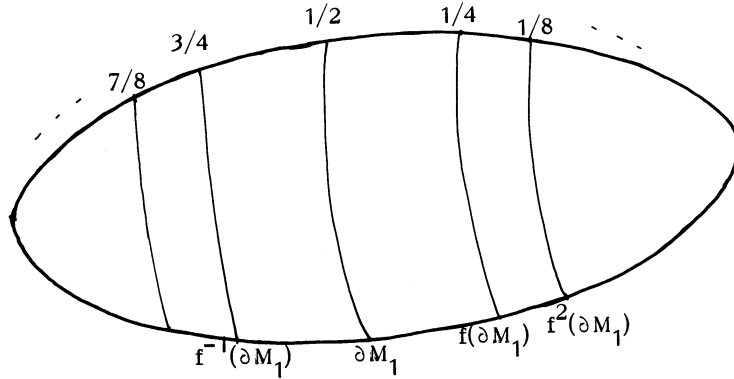
$$\varphi = 1 \text{ sur } K_2 \quad ; \quad \varphi = 0 \text{ sur } K_1$$

$$\varphi(f(x)) < \varphi(x) \text{ pour } x \notin K.$$

Pour cela, définissons φ sur $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\partial M_1)$ par :

$$\varphi(x) = 1/2 - \text{signe}(n) \sum_{i=1}^{|n|} 2^{-(i+1)} \quad \text{si } x \in f^n(\partial M_1).$$

Le théorème de Tietze permet ensuite de prolonger φ en une fonction continue positive sur M , telle que, pour $x \in \text{int}(f^{n-1}(M_1) - f^n(M_1))$, on ait :



Soit maintenant une filtration \mathfrak{m} qui comprend plus de deux termes, trois par exemple : $M = M_3 \supset M_2 \supset M_1 \supset M_0 = \emptyset$. Alors, $M = M_3 \supset M_2 \supset M_0 = \emptyset$ et $M = M_3 \supset M_1 \supset M_0 = \emptyset$ sont aussi des filtrations et nous pouvons appliquer à chacune le résultat précédent. En ajoutant les deux fonctions obtenues, on construit une fonction φ qui vaut 2 sur K_2 , 1 sur K_1 , 0 sur K_0 et qui vérifie $\varphi f(x) < \varphi(x)$ quand x n'appartient pas à K . Par le même procédé, on peut construire une fonction étagée suivant une filtration finie. En prenant une nouvelle fois une moyenne idoine, on peut construire une fonction continue décroissante sur les orbites de f hors de $K \setminus \{m_i\}$ quand $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de filtration adaptée à f .

En fait, on pourrait dans ce qui précède trouver des fonctions φ lisses, mais nous ne le démontrerons pas.

De la construction que nous venons de terminer, nous pouvons cependant déduire la proposition :

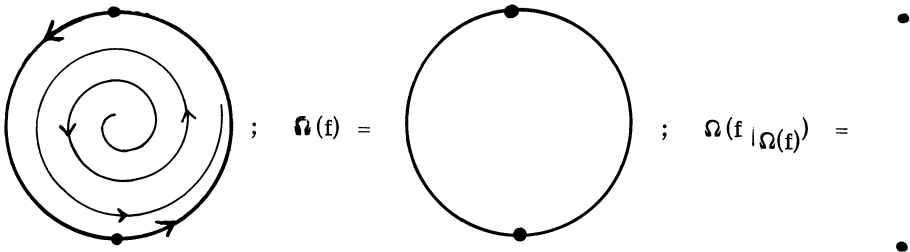
PROPOSITION 3.5. Soit \mathfrak{m} une filtration adaptée à f , resp $\{m_i\}$ une suite de filtrations adaptée à f . Il existe alors une fonction continue $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ décroissante sur les orbites de f non contenues dans $K(\mathfrak{m})$, resp $K \setminus \{m_i\}$ $x \notin K(\mathfrak{m})$, resp $K \setminus \{m_i\} \Rightarrow \varphi f(x) < \varphi(x)$. En particulier, il existe une telle fonction φ décroissante sur les orbites de f non contenues dans $R(f)$.

PROPOSITION 3.6. Soit f un homéomorphisme de M . On a alors :

$$R(f|_{R(f)}) = R(f) .$$

Cette proposition n'est pas aussi ridicule qu'elle paraît. La restriction $f|_{R(f)}$ envoie $R(f)$ dans $R(f)$, mais il n'est pas évident que toutes les pseudo-orbites qui partent des points de $R(f)$ soient contenues dans $R(f)$.

Remarquons aussi que l'on peut avoir $\Omega(f|_{\Omega(f)})$ différent de $\Omega(f)$.



Démontrons la proposition. L'existence d'une suite de filtrations, ou celle de la fonction φ montrent que pour α assez petit, les orbites α -pseudo-périodiques commençant en un point de R sont astreintes à rester près de R . Pour trouver une ϵ -pseudo-orbite ϵ -pseudo-périodique contenue dans R , on peut commencer par chercher une α -pseudo-orbite α -pseudo-périodique pour un α beaucoup plus petit que ϵ , α assez petit pour que cette α -pseudo-orbite reste dans un petit $(\epsilon/2)$ voisinage de R , puis pousser cette dernière dans R . Nous laissons les détails au lecteur. \square

PROPOSITION 3.7. Si U est un voisinage de $R(f)$, il existe un voisinage V de f dans $\text{Homeo}(M)$ tel que $R(g)$ soit contenu dans U quel que soit g appartenant à V .

Démonstration : Soit $\{m_j\}$ une suite de filtrations pour $R(f)$. Pour j assez grand, $K(m_j)$ est contenu dans U et nous pouvons construire V à l'aide de la proposition 2.4. \square

PROPOSITION 3.8. Un homéomorphisme f de M admet une fine suite de filtrations si et seulement si $\Omega(f) = R(f)$.

Démonstration : Si $\Omega(f) = R(f)$, il existe une suite de filtrations pour $\Omega(f)$. S'il existe une suite de filtrations $\{\mathfrak{m}_i\}$ pour $\Omega(f)$, on a : $R(f) \subset K\{\mathfrak{m}_i\} = \Omega(f)$, mais $\Omega(f)$ est toujours contenu dans $R(f)$. \square

DÉFINITION 3.9. On dira qu'un homéomorphisme f de M n'a pas de C^0 - Ω -explosion si, étant donné un voisinage U de $\Omega(f)$, il existe un voisinage V de f dans $\text{Homeo}(M)$ tel que, pour tout g appartenant à V , $\Omega(g)$ soit contenu dans U .

PROPOSITION 3.10. Si f admet une filtration fine ou une fine suite de filtrations, f n'a pas de C^0 - Ω -explosion.

Démonstration : Il suffit de relire la proposition 2.4 ou les propositions 3.7 et 3.8. \square

La réciproque est vraie et donc aussi le théorème :

THÉORÈME 3.11. Soit f un homéomorphisme de M ; les propositions suivantes sont alors équivalentes :

- 1) f admet une fine suite de filtrations.
- 2) f n'a pas de C^0 - Ω -explosion.
- 3) $\Omega(f) = R(f)$.

Il nous suffit de démontrer que 2) implique 3). Nous donnons la démonstration pour une variété M de dimension supérieure ou égale à 2. Elle repose sur le résultat de topologie différentielle suivant :

PROPOSITION 3.12. Soit ϵ un réel positif et M une variété lisse de dimension supérieure ou égale à 2. Soit (x_i, y_i) des couples de points de M vérifiant : $d(x_i, y_i) < \epsilon$. Supposons aussi que les x_i soient deux à deux distincts, de même que les y_i . Il existe alors un difféomorphisme lisse de M , g , tel que $g(x_i) = y_i$ et qui soit C^0 -distant de l'identité de moins de 7ϵ .

Démonstration du théorème quand la dimension de M est supérieure ou égale à 2.

Si $\Omega(f)$ est différent de $R(f)$, il existe un voisinage U de $\Omega(f)$ qui ne contient pas $R(f)$ et donc un point x appartenant à $R(f)$, mais non au voisinage U . Soit ϵ un réel positif. Le point x est $\epsilon/7$ -pseudo-périodique. Il existe donc une suite $\underline{x} = \{x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = x\}$ de longueur k , telle que $d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon/7$. On peut supposer de plus que les points x_i sont deux à deux distincts, et donc aussi leurs images par le difféomorphisme f .

Soit g un homéomorphisme tel que $g(f(x_i)) = x_{i+1}$; $0 \leq i \leq k-1$; et tel que $d_0(g, id_M) < \epsilon$. Le point x est maintenant un point périodique de $(g \circ f)$ et $d_0(g \circ f, f) < \epsilon$. Donc x appartient à $\Omega(g \circ f)$, et comme le choix de ϵ était arbitraire, à $\Omega(f)$. \square

Le théorème est vrai aussi pour les homéomorphismes du cercle (la seule variété compacte sans bord de dimension 1) et se démontre directement dans ce cas.

On peut démontrer que l'ensemble des homéomorphismes sans C^0 - Ω -explosion est résiduel dans $\text{Homeo}(M)$, ce qui démontre que, génériquement, $\Omega(f) = R(f)$.

Le cas des champs de vecteurs est semblable et l'énoncé des propriétés est plus simple. Énonçons rapidement quelques unes de ces propriétés. Sans redéfinir Ω , énonçons les définitions et théorèmes correspondants :

DÉFINITION 3.13. Si X est un champ de vecteurs sur M et $\Lambda \subset M$ un ensemble invariant pour le flot Φ_t induit par X , la fonction différentiable $L : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapounov pour (X, Λ) , si Λ est l'ensemble des points critiques de L et si la dérivée $X(L)$ de L suivant X est négative sur $M - \Lambda$.

Soient δ et T deux réels positifs. On dira que le point m de M est (δ, T) -récurrent, ou que le point m appartient à $R_{\delta, T}$, s'il existe des points y_j et des réels s_j vérifiant :

$$s_j > T \quad ; \quad d(x_j, y_j) < \delta \quad ; \quad x_0 = m \quad ; \quad x_{j+1} = \Phi_{s_j}(y_j) \quad ; \quad y_k = m \quad .$$

Définissons l'ensemble des points X -récurrents par chaîne :

$$R_X = \bigcap_{\delta, T} R_{\delta, T} \quad .$$

Les fonctions de Lyapounov pour R_X correspondent aux fines suites de filtrations pour $R(f)$.

THÉORÈME 3.14. Si X est un champ de vecteurs C^0 tel que l'équation différentielle correspondante ait toujours une solution unique, il existe une fonction de Lyapounov C^∞ pour (X, R_X) .

Etant donné une variété N et une application $\varphi : N \rightarrow \mathbb{R}^T(M)$, on peut espérer trouver une application $\alpha : N \rightarrow C^\infty(M)$, telle que, pour chaque point n de N , $\alpha(n)$ soit une fonction de Lyapounov pour $(\varphi(n), R_{\varphi(n)})$ et que, au moins localement, la fonction α soit continue ou lisse.

Personne n'a encore tenté d'étudier une théorie générale des bifurcations ou des catastrophes restreinte aux applications α qui sont de Lyapounov pour l'ensemble des points récurrents par chaîne d'un champ de vecteurs.

EXERCICE.

Soit f un homéomorphisme de la variété compacte M , et $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k$ une réunion disjointe d'ensembles fermés Λ_i invariants par f . Le théorème 2.3 nous donne une condition nécessaire et suffisante pour que les Λ_i soient de la forme $K_\alpha^f(m)$ pour une filtration adéquate \mathfrak{m} adaptée à f . Cette condition est que Λ contienne $L(f)$ et qu'il n'y ait pas de cycles entre les Λ_i . Parfois Λ ne contient qu'une des deux parties $L_+(f)$ ou $L_-(f)$ de $L(f)$. On veut généraliser 2.3 à ce cas; bien sûr, on ne

peut pas espérer trouver une filtration \mathfrak{m} telle que $K^f(\mathfrak{m}) = \Lambda$, car l'ensemble $K^f(\mathfrak{m})$ contient $L(f)$ tout entier.

Nous allons examiner le cas où $L_-(f) \subset \Lambda$; le cas $L_+(f) \subset \Lambda$ s'obtient en remplaçant f par f^{-1} .

Remarquons que la démonstration du lemme 2.1 montre tout de suite que M est la réunion disjointe des $W^U(\Lambda_i)$. Par contre, puisque nous n'avons pas supposé $L_+(f) \subset \Lambda$, nous ne pouvons pas dire que M est la réunion des $W^S(\Lambda_i)$.

Définissons un préordre \succ_1 par : $\Lambda_i \succ_1 \Lambda_j$ si i est différent de j et $W^U(\Lambda_i) \cap W^U(\Lambda_j) \neq \emptyset$.

Remarque, par le lemme 1 utilisé dans la démonstration de 2.3, que l'on a :

$$\overline{W^U(\Lambda_i)} \cap W^U(\Lambda_j) \neq \emptyset \iff \overline{W^U(\Lambda_i)} \cap \Lambda_j \neq \emptyset .$$

Nous supposons que le préordre \succ_1 n'a pas de cycle. Nous pouvons alors l'étendre en un ordre total sur les Λ_i ; quitte à permuter les indices des Λ_i , nous pouvons supposer que cet ordre total est le même que celui donné par les indices. Dans ce cas aussi, nous dirons que l'ordre des indices est un ordre de filtration.

1) Montrer que $\bigcup_{j \leq i} W^U(\Lambda_j)$ est fermé .

2) Soit F un fermé qui n'intersecte pas $\bigcup_{k \geq i+1} \Lambda_k$, démontrer que :

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n(F) \subset \bigcup_{j \leq i} W^U(\Lambda_j) .$$

3) Montrer qu'il existe un voisinage fermé Q de $\bigcup_{j \leq i} W^U(\Lambda_j)$ tel que :

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n(Q) = \bigcup_{j \leq i} W^U(\Lambda_j) .$$

4) Démontrer le théorème : Théorème 2.3 bis. Soit $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k$ une réunion disjointe d'ensembles fermés invariants pour l'homéomorphisme f . Supposons que $L_-(f) \subset \Lambda$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une filtration $\mathfrak{m} : \emptyset = M_0 \subset \dots \subset M_k = M$, adaptée à f , telle que

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n(M_i) = \bigcup_{j \leq i} W^U(\Lambda_j) \text{ pour tout } i = 1, \dots, k .$$

ii) Les Λ_i ne contiennent pas de cycle pour le préordre \succ_1 défini plus haut, et l'ordre des indices des Λ_i est un ordre de filtration.

CHAPITRE 4 - ENSEMBLES HYPERBOLIQUES

DÉFINITION 4.1. Soit Λ un ensemble invariant pour un difféomorphisme de classe C^r de la variété M . On dira que Λ est un ensemble hyperbolique pour f s'il existe une décomposition en somme directe de la restriction $TM|_{\Lambda}$ à Λ du fibré tangent à M dont chaque facteur soit stable par Tf :

$$TM|_{\Lambda} = E^S \oplus E^U \quad ; \quad Tf(E^S) \subset E^S \quad ; \quad Tf(E^U) \subset E^U$$

et telle qu'il existe deux constantes c et λ , $c > 0$, $0 < \lambda < 1$, pour que l'on ait :

$$\|Tf^n|_{E^S}\| < c\lambda^n \quad n \geq 0$$

$$\|Tf^{-n}|_{E^U}\| < c\lambda^n \quad n \geq 0$$

Remarque : Cette condition ne dépend pas du choix de la métrique de M , car si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont deux normes sur TM_x , il existe des constantes strictement positives c'_1 et c'_2 telles que :

$$c'_1 \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq c'_2 \|\cdot\|_2 .$$

Si M est compacte, une inégalité analogue reste vraie sur TM :

$$c_1 \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq c_2 \|\cdot\|_2 \quad ; \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0 \quad ;$$

la notion d'hyperbolicité est donc indépendante du choix de la métrique de M , car

$$\|Tf^n(v)\|_1 \leq c\lambda^n \|v\|_1, \quad v \in E^S, \quad n \geq 0$$

donc, on a :

$$c_1 \|Tf^n(v)\|_2 \leq c_2 c\lambda^n \|v\|_2, \quad v \in E^S, \quad n \geq 0$$

et donc :

$$\|Tf^n(v)\|_2 < \frac{c_2}{c_1} c\lambda^n \|v\|_2, \quad v \in E^S, \quad n \geq 0$$

soit finalement :

$$\|Tf^n|_{E^S}\|_2 < \left(\frac{c_2}{c_1} c\right) \lambda^n .$$

PROPOSITION 4.2. Supposons que $\Lambda \subset M$ soit un ensemble invariant hyperbolique pour un difféomorphisme de classe C^r de $M : f$. Il existe alors une métrique C^∞ sur M et une constante σ , $0 < \sigma < 1$ vérifiant :

$$\|Tf|_{E^S}\| < \sigma \quad \text{et} \quad \|(Tf)^{-1}|_{E^U}\| < \sigma .$$

Démonstration : Soit $v \rightarrow |v|$, $v \in TM$, une métrique quelconque sur M . Nous venons de voir qu'il existe des constantes c et λ , $0 < c$, $0 < \lambda < 1$, telles que :

$$|Tf^k|_{E^S}| < c\lambda^k ; \quad |Tf^{-k}|_{E^U}| < c\lambda^k, \quad k \geq 0 .$$

Choisissons n assez grand pour que $(c\lambda^n)$ soit plus petit que 1, et définissons une nouvelle métrique sur E^S par :

$$\|v\|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} |(Tf)^j(v)|^2, \quad v \in E^S .$$

On construit de manière analogue une métrique sur E^U en remplaçant Tf par Tf^{-1} . Sur $TM|_\Lambda$, prenons la métrique somme orthogonale. Etendons-la en une métrique sur TM . Ce n'est pas nécessairement une métrique C^∞ , car la fonction $\|\cdot\|^2 : TM \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas nécessairement C^∞ , puisque les sous-fibrés E^S et E^U ne sont en général que des sous-fibrés continus. Toutefois $\|\cdot\|$ est une norme sur chaque fibre de TM et la fonction $\|\cdot\|^2 : TM \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Pour tout v appartenant à E^S , on a :

$$\begin{aligned} \|Tf(v)\|^2 &= \sum_{j=0}^{n-1} |Tf^j(Tf(v))|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} |Tf^{j+1}(v)|^2 = \sum_{j=1}^n |Tf^j(v)|^2 \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} |Tf^j(v)|^2 + |Tf^n(v)|^2 - |v|^2 . \end{aligned}$$

Mais, comme $|Tf^n(v)|$ est inférieur ou égal à $c\lambda^n|v|$, on a :

$$\|Tf(v)\|^2 \leq \|v\|^2 - |v|^2 (1 - (c\lambda^n)^2) .$$

On peut supposer que c est supérieur ou égal à 1 (il ne reste autrement rien à prouver). On a alors :

$$\|v\|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} |\text{Tf}^j(v)|^2 \leq |v|^2 + c^2 \lambda^2 |v|^2 + \dots + c^2 \lambda^{2n-2} |v|^2$$

et donc :

$$\|v\|^2 \leq c^{2n} |v|^2 \quad \text{soit} \quad \frac{\|v\|^2}{c^{2n}} \leq |v|^2 .$$

On en déduit les inégalités :

$$\|\text{Tf}(v)\|^2 \leq \|v\|^2 - \frac{\|v\|^2}{c^{2n}} (1 - (c\lambda^n)^2)$$

et donc :

$$\|\text{Tf}(v)\|^2 \leq \left(1 - \frac{1 - (c\lambda^n)^2}{c^{2n}}\right) \|v\|^2 .$$

Donc, en posant $\sigma = \sqrt{1 - \frac{1 - c^2 \lambda^{2n}}{c^{2n}}}$, on a :

$$\|\text{Tf}|_{E^S}\| < \sigma, \quad \text{où } 0 < \sigma < 1 .$$

La même démonstration s'applique à $\text{Tf}^{-1}|_{E^U}$. Il suffit pour conclure d'approcher la métrique que nous venons de construire par une métrique C^∞ sur TM . En effet, si deux métriques définies sur TM ou $TM|_\Lambda$ sont suffisamment proches, les normes de $\text{Tf}|_{E^S}$ et $\text{Tf}^{-1}|_{E^U}$ seront proches. \square

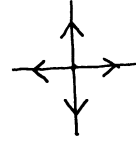
EXEMPLE 4.3. Point fixe hyperbolique. Supposons que Λ soit réduit à un point : $\Lambda = \{p\}$; nous aurons $f(p) = p$ et $T_p f$ sera un isomorphisme linéaire de $T_p M$ sur lui-même. Il existera dans ce cas une décomposition hyperbolique de $T_p M$ si et seulement si les valeurs propres de $T_p f$ sont de module différent de 1.

Démonstration : Exercice : Poser $E^S =$ espace propre généralisé associé aux valeurs propres de module plus petit que 1, E^U espace propre généralisé associé aux valeurs propres de module plus grand que 1. \square

Quand la dimension de M est 2, on retrouve les trois figures familières :

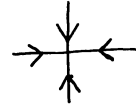
Source : Toutes les valeurs propres sont de module plus grand que 1 ;

$$E^U = \mathbb{R}^2 ; \quad E^S = \{0\}$$



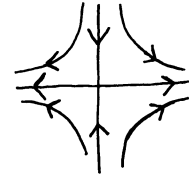
Puits : Le module de toutes les valeurs propres est plus petit que 1 ;

$$E^S = \mathbb{R}^2 ; \quad E^U = \{0\}$$



Selle : Une valeur propre de module supérieur à 1 et une de module inférieur à 1.

$$E^S = \text{l'axe des } y ; \quad E^U = \text{l'axe des } x.$$



Remarquons que toutes les orbites non contenues dans E^S sont asymptotiques à E^U .

Dans ce dernier cas, les orbites sont effectivement "hyperboliques".

EXEMPLE 4.4. Orbite périodique hyperbolique. Supposons que Λ soit une orbite périodique ; $\Lambda = (p_1, \dots, p_k)$; $f(p_i) = p_{i+1} \pmod k$. On a alors :

$$TM|_{\Lambda} = (T_{p_1} M \cup \dots \cup T_{p_k} M).$$

Une décomposition hyperbolique de $TM|_{\Lambda}$ est une décomposition invariante par Tf de chacun des espaces tangents à M aux points de l'orbite Λ :

$$T_{p_i} M = E_{p_i}^S \oplus E_{p_i}^U$$

$$\text{Tf}(E_{p_i}^S) = E_{p_{i+1} \pmod k}^S ; \quad \text{Tf}(E_{p_i}^U) = E_{p_{i+1} \pmod k}^U .$$

Remarques : 1) Tf^k est un automorphisme de chacun des espaces $T_{p_i} M$.

2) Il existe une décomposition hyperbolique de $TM|_{\Lambda}$ si et seulement si chacun des p_i est un point fixe hyperbolique de f^k .

DÉFINITION 4.5. Soit f un difféomorphisme de classe C^r de M . On dira que f est un difféomorphisme d'Anosov si M est un ensemble hyperbolique pour f .

EXEMPLE 4.6. Soit A la matrice à coefficients entiers $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est 1, ce qui implique que A est un automorphisme du réseau $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$. La matrice A opère donc sur le quotient $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$; le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^2 \equiv \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\bar{A}} & \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \equiv T^2 \end{array}$$

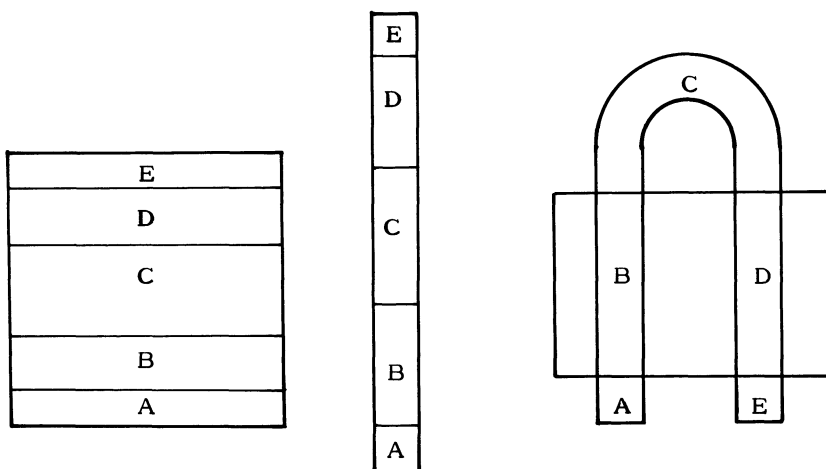
Enfin, comme les valeurs propres de A sont $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, T^2 est hyperbolique pour f .

Plus généralement, une matrice A appartenant à $SL(n, \mathbb{Z})$ détermine un automorphisme \bar{A} du tore $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Le tore T^n est un ensemble invariant hyperbolique pour \bar{A} si et seulement si A n'a pas de valeur propre de module 1. Dans ce cas, on dira que \bar{A} est un difféomorphisme d'Anosov de T^n .

4.7. Le fer à cheval de Smale.

Pour construire un difféomorphisme de la sphère S^2 (ou de n'importe quelle variété de dimension 2) ayant un ensemble non trivial de points non-errants, construisons d'abord une application du carré $I \times I$ dans le plan dont nous déterminerons l'ensemble des points non errants.

Commençons par étirer verticalement le carré R pour le transformer en une allumette, en utilisant une application linéaire, puis courbons cette allumette, heureusement souple, en fer à cheval, pour la poser, toujours à cheval, sur l'emplacement de R .



On peut supposer de plus que les restrictions de f à B et D sont des applications linéaires contractant les horizontales et étirant les verticales.

Etendons ensuite cette application en une application du disque D^2 dans lui-même en ajoutant deux demi-lunes au haut et au bas de R :



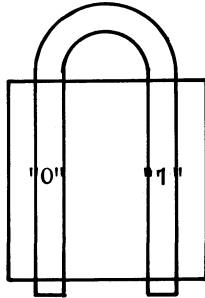
L'image par f de la demi-lune du bas est contenue dans celle-ci et la restriction de f à Δ peut être choisie contractante. La restriction de f à Δ aura donc un point fixe unique p_1 qui est le seul point non-errant de la demi-lune du bas et est un puits. En ajoutant une source au point antipode de S^2 : p_2 , nous pouvons étendre f en un difféomorphisme de S^2 que nous continuerons à appeler f . Nous négligerons le fait stupide que Δ soit une variété à coins. Nous avons une filtration \mathfrak{m} adaptée à

$f, \emptyset = M_0 \subset \Delta = M_1 \subset D_2 = M_2 \subset S^2 = M_3$. Comme la restriction de f à Δ est une contraction, on a : $K_1(\mathfrak{m}) = p_1$. De même, comme la restriction de f à $S^2 - D^2$ est une dilatation, on a : $K_2(\mathfrak{m}) = p_2$. Par définition, $K_2(\mathfrak{m}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(R)$. Posons $\Lambda = K_2(\mathfrak{m})$, nous avons :

$$\Omega(f) = p_1 \cup p_2 \cup (\Omega(f) \cap R) \text{ et } \Omega(f) \cap R \subset \Lambda.$$

Nous allons montrer l'égalité : $\Lambda = (\Omega(f) \cap R)$, qui implique que \mathfrak{m} est une filtration fine adaptée à f et analyser Λ .

L'ensemble $R \cap f(R)$ a deux composantes connexes que nous appellerons "0" et "1".



Puisque f est linéaire sur B et D , y contracte les horizontales et y étire les verticales. L'ensemble Λ est hyperbolique pour f . Les verticales seront donc les fibres de E^U , tandis que les horizontales seront les fibres de E^S .

A chaque point x de Λ , faisons correspondre la suite infinie de "0" et de "1" : $\{a_n\}$ définie par :

$$a_n(x) = 0, \quad \text{si } f^n(x) \in \text{"0"}$$

$$a_n(x) = 1, \quad \text{si } f^n(x) \in \text{"1"}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ceci définit une application $\Phi : \Lambda \rightarrow \prod_{-\infty}^{+\infty} \{0,1\}$

$$x \mapsto \{a_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

Notons $\Sigma(2)$ l'espace topologique $\prod_{-\infty}^{+\infty} \{0,1\}$ muni de la topologie produit. L'ensemble $\Sigma(2)$ est compact, parfait et totalement discontinu, c'est-à-dire est un ensemble de

Cantor. Une base d'ouverts pour la topologie de $\Sigma(2)$ est formée par les ensembles $\{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k; i_1, \dots, i_k); \epsilon_i \in \{0, 1\}\}$ constitués par les suites $\{a_n\}$ telles que $a_{i_1} = \epsilon_1; \dots; a_{i_k} = \epsilon_k$. Le shift (décalage en bon français), $\sigma : \Sigma(2) \rightarrow \Sigma(2)$, défini par $(\sigma\{a_i\})_k = a_{k+1}$ est l'automorphisme naturel de $\Sigma(2)$.

L'application Φ définie plus haut fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{f|_{\Lambda}} & \Lambda \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \Sigma(2) & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma(2) \end{array}$$

THÉORÈME 4.8. L'application $f|_{\Omega(f) \cap \mathbb{R}}$ est topologiquement conjuguée au shift σ ; plus précisément Φ est un homéomorphisme et $\Lambda = \Omega(f) \cap \mathbb{R}$.

Démonstration : Nous savons déjà que $\Omega(f) \cap \mathbb{R}$ est contenu dans Λ . L'inclusion inverse, exprimant que tous les points de Λ sont non-errants, sera une conséquence du reste de la proposition puisque tous les points de $\Sigma(2)$ sont non-errants pour le décalage σ (cf. exercice 4.2).

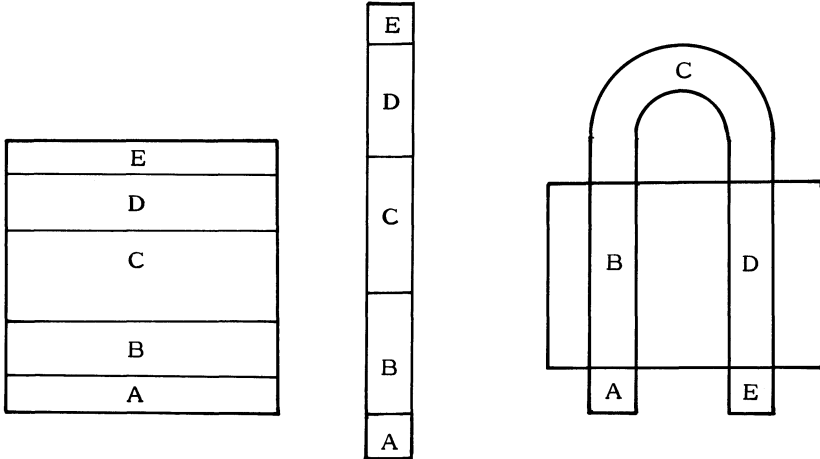
1) **L'application Φ est continue.** Soit x un point de Λ et $U \subset \Sigma(2)$ un voisinage de $\Phi(x)$. Choisissons un ouvert cylindrique : $\text{Cyl}(\Phi(x), N) = \{y_n \mid y_i = (\Phi(x))_i \text{ pour } i \leq N\}$, contenu dans U . Pour tout i de module inférieur ou égal à N , choisissons une boule de rayon δ_i positif : $B_{\delta_i}(f^i(x))$, centrée en $f^i(x)$ qui ne coupe pas la composante de $f(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R}$ qui ne contient pas $f^i(x)$. Pour tout i compris entre $-N$ et N , $(\Lambda \cap f^{-i}(B_{\delta_i}(f^i(x))))$ est un voisinage du point x de Λ . Il en est de même d'une intersection finie de tels voisinages, donc de :

$$B_N(x) = \bigcap_{|i| \leq N} (\Lambda \cap f^{-i}(B_{\delta_i}(f^i(x)))) .$$

Par construction, $\Phi(B_N(x))$ est contenu dans le cylindre $\text{Cyl}(\Phi(x), N)$, ce qui implique que Φ est continue.

2) L'application Φ est injective.

Rappelons la construction de f :



L'ensemble $f^{-1}(R) \cap R$ est la réunion de deux bandes horizontales B et D.

Soient x et y deux points de $\Lambda = (\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^k R)$, tels que $\Phi(x) = \Phi(y)$. Montrons d'abord que si les parties positives des suites coïncident : $(\Phi(x))_i = (\Phi(y))_i, \forall i \geq 0$, les ordonnées de x et y sont égales. En effet $f^i(x)$ et $f^i(y)$ devront appartenir à la même composante (bande verticale) de $f(R) \cap R$, "0" ou "1", et aussi à la même composante horizontale de $f^{-1}(R) \cap R$, puisque $f^{i+1}(x)$ et $f^{i+1}(y)$ appartiendront à la même composante verticale. Mais tant que $f^i(x)$ et $f^i(y)$ appartiendront à la même composante horizontale de $f^{-1}(R) \cap R$, nous aurons :

$$|\text{ordonnée}(f^{i+1}(y)) - \text{ordonnée}(f^{i+1}(x))| = \lambda |\text{ord}(f^i(x)) - \text{ord}(f^i(y))|$$

où λ est strictement plus grand que 1. Nous avons donc, pour tout n :

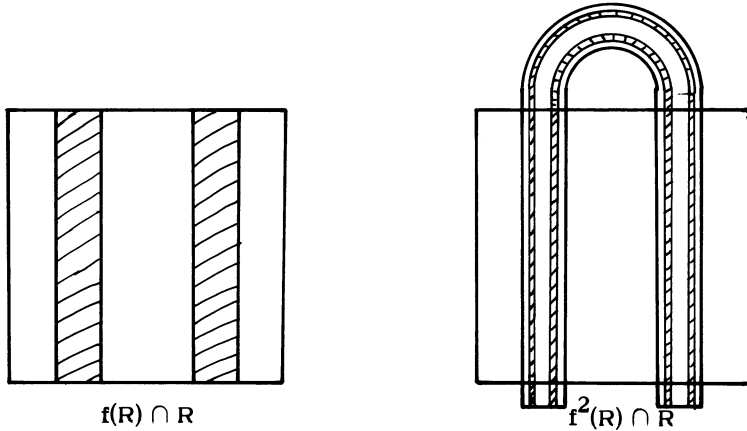
$$|\text{ord}(f^n(x)) - \text{ord}(f^n(y))| = \lambda^n |\text{ord}(x) - \text{ord}(y)|$$

ce qui, puisque $f^n(x)$ et $f^n(y)$ restent dans le carré R , n'est possible que si x et y ont même ordonnée.

En analysant le passé des points x et y , on démontre de même que si les parties négatives des suites $(\Phi(x))_i$ et $(\Phi(y))_i$ coïncident, les deux points ont même

abscisse.

3) L'application Φ est surjective. Nous noterons I_0 et I_1 les composantes de $f(R) \cap R$: "0" et "1".



L'image de chaque composante de $f(R) \cap R$ est un fer à cheval plus fin qui traverse les deux composantes de $f(R) \cap R$.

On obtient ainsi quatre bandes verticales :

$$(0,0) = I_0 \cap f(I_0) ; (0,1) = I_0 \cap f(I_1) ; (1,0) = I_1 \cap f(I_0) ; (1,1) = I_1 \cap f(I_1).$$

Soit $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_N)$ une suite finie de 0 et de 1, et supposons que $I_\alpha = I_{a_0} \cap f(I_{a_1}) \cap \dots \cap f^N(I_{a_N})$ soit une bande verticale non vide nécessairement contenue soit dans I_0 , soit dans I_1 . L'image $f(I_\alpha)$ est alors un fer à cheval très étroit qui rencontre à la fois I_0 et I_1 . Nous venons de démontrer que :

$$I_0 \cap f(I_\alpha) = I_0 \cap f(I_{a_0}) \cap \dots \cap f^{N+1}(I_{a_N})$$

et
$$I_1 \cap f(I_\alpha) = I_1 \cap f(I_0) \cap \dots \cap f^{N+1}(I_{a_N})$$

sont deux bandes verticales non vides, qui traversent R .

Par récurrence, à toute suite finie a_0, \dots, a_n correspond une telle bande verticale non vide :

$$I_{a_0} \cap f(I_{a_1}) \cap \dots \cap f^n(I_{a_n}) \neq \emptyset .$$

Soit maintenant $\alpha = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Nous voulons montrer que l'intersection $I_\alpha = \bigcap_{i=-\infty}^{+\infty} f^{-i}(I_{a_i})$ n'est pas vide. En effet, si x appartient à I_α , $f^i(x)$ appartient à I_{a_i} , quel que soit i et $\Phi(x) = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Il suffit pour cela de montrer que toute intersection correspondant à une suite finie est non vide. En effet, si tous les ensembles $I_{\alpha_N} = \bigcap_{i=-N}^{+N} f^{-i}(I_{a_i})$ sont non vides, ils forment une suite décroissante de fermés non vides du compact Λ , ce qui implique que l'intersection $I_\alpha = \bigcap_N I_{\alpha_N}$ est aussi non vide.

Nous venons de voir qu'à toute suite finie b_0, \dots, b_N de "0" et "1", $I_{b_0} \cap f(I_{b_1}) \cap \dots \cap f^N(I_{b_N})$ est une bande verticale non vide. Donc, étant donnée une suite finie $(a_{-N}, \dots, a_0, \dots, a_N)$, l'intersection $I_{a_N} \cap f(I_{a_{N-1}}) \cap \dots \cap I_{a_0} \cap \dots \cap f^{2N}(I_{a_{-N}})$ est non vide.

L'image inverse f^{-N} de ce dernier ensemble :

$$f^{-N}(I_{a_N}) \cap f^{-N+1}(I_{a_{N-1}}) \cap \dots \cap I_{a_0} \cap \dots \cap f^N(I_{a_{-N}})$$

est donc aussi non vide, ce qui termine la démonstration du théorème. \square

4.9. Le solénoïde. Commençons avec un tore plein P contenu dans \mathbb{R}^3 l'espace euclidien de dimension 3.

$e_1 \in Q \cap (\text{plan âme du tore})$
 e_1 pointe vers l'extérieur

Si T est le vecteur tangent à l'âme du tore et orienté dans le sens du parcours (T, e_1, e_2) est direct.

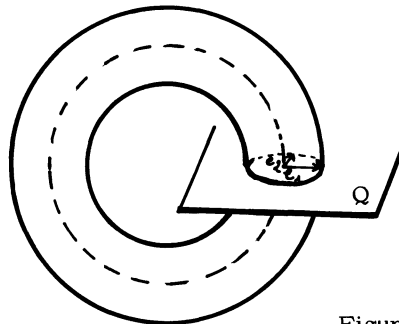


Figure 4.9.1.

Repérons un point de P à l'aide des coordonnées (θ, \bar{r}, s) ; θ est un angle, $\theta \in S^1$, \bar{r} et s sont des réels compris entre -1 et $+1$, tels que $\bar{r}^2 + s^2 \leq 1$. Le point x de coordonnées θ, \bar{r}, s appartient au plan orthogonal à l'âme du tore P (qui est un cercle de centre 0 , de rayon 2 que nous identifions à S^1) au point θ et a pour coordonnées dans le repère (θ, e_1, e_2) de ce plan (cf. figure) les nombres \bar{r} et s . Remarquons que les points $(\theta, \bar{r}, 0)$ sont les points d'un anneau de largeur 2 du plan qui contient l'âme du tore P .

Définissons une application $f : P \rightarrow P$ par :

$$f(\theta, \bar{r}, s) = (2\theta, \epsilon_1 \cos\theta + \epsilon_2 \bar{r}, \epsilon_1 \sin\theta + \epsilon_2 s)$$

où ϵ_1 et ϵ_2 sont deux constantes positives petites.

L'image $f(P)$ est contenue dans P . Le disque perpendiculaire à l'âme de P au point θ est envoyé par f dans le disque perpendiculaire à l'âme du tore au point 2θ .

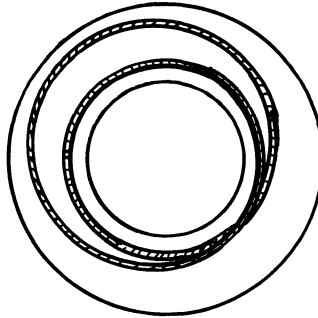


Figure 4.9.2.

Il est facile de voir que les conditions $\bar{r}^2 + s^2 \leq 1$, $\epsilon_2 < \epsilon_1 < 1/2$ impliquent que l'application $f : P \rightarrow P$ est un plongement.

En effet, appelons D_θ la section de P par le plan perpendiculaire en θ à l'âme du tore P . Les images $f(D(\frac{\theta}{2}))$ et $f(D(\frac{\theta}{2} + \pi))$ sont toutes deux contenues dans $D(\theta)$, et se déduisent du disque $D(\theta)$ par une homothétie de rapport ϵ_2 . Les centres de ces disques ont pour coordonnées dans le plan de $D(\theta)$:

$$(\epsilon_1 \cos \frac{\theta}{2}, \epsilon_1 \sin \frac{\theta}{2})$$

et $(\epsilon_1 \cos (\frac{\theta}{2} + \pi), \epsilon_1 \sin (\frac{\theta}{2} + \pi)) = -(\epsilon_1 \cos \frac{\theta}{2}, \epsilon_1 \sin \frac{\theta}{2})$.

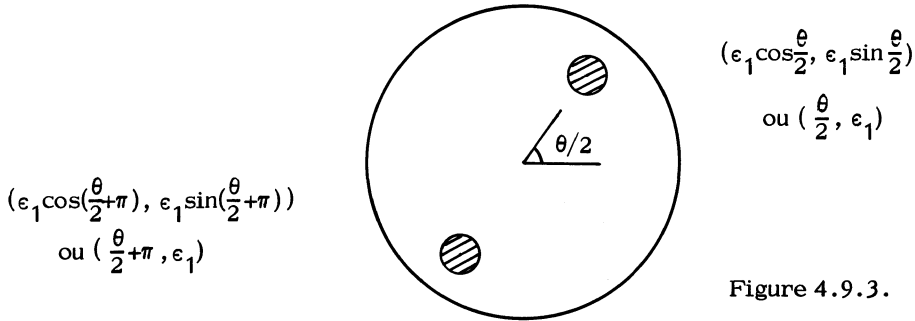


Figure 4.9.3.

Ces deux centres sont à la distance $2\epsilon_1$ l'un de l'autre et les disques images par f de $D(\theta)$ ont pour rayon ϵ_2 . L'application f est donc bien un plongement.

Voici l'allure de l'intersection de $f^2(P)$ et de $D(\theta)$:

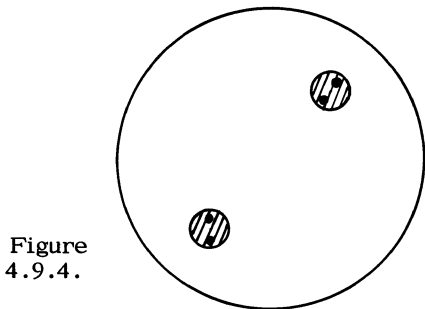


Figure 4.9.4.

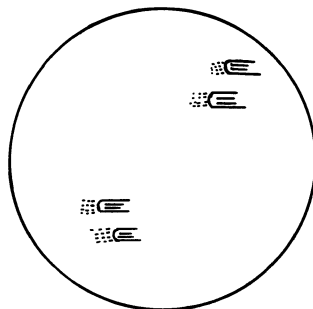


Figure 4.9.5.

Par chaque point de $f^2(P) \cap D(\theta)$, de coordonnée \bar{r}_0, s_0 , passe une courbe $f(\bar{r}'_0, s'_0, \theta \text{ variable})$ qui est un revêtement d'ordre 2 de l'aîne du tore P .

Ces courbes sont transverses à tous les disques $D(\theta)$.

La figure 4.9.5 représente l'image par f^2 de P .

Revenons aux disques $D(\theta) = \{\theta, \bar{r}, s \mid \bar{r}^2 + s^2 \leq 1\}$. Nous pouvons, dans ces disques, choisir des coordonnées polaires (φ, ρ) . L'intersection $f(P) \cap D(\theta)$ est

la réunion des deux disques de centre $(\varphi = \frac{\theta}{2}, \epsilon_1)$, $(\varphi = \frac{\theta}{2} + \pi, \epsilon_1)$.

Déterminons $f^2(P) \cap D(\theta)$. Commençons par déterminer l'intersection $f(P) \cap D(\frac{\theta}{2})$ [resp $f(P) \cap D(\frac{\theta}{2} + \pi)$]. Dans chacun de ces deux disques, la trace de $f(P)$ est la réunion de deux disques centrés respectivement aux points :

$$(\varphi = \frac{\theta}{4}, \epsilon_1), (\varphi = \frac{\theta}{4} + \pi, \epsilon_1), [\text{resp } (\varphi = \frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{2}, \epsilon_1), (\varphi = \frac{\theta}{4} + \frac{3\pi}{2}, \epsilon_1)].$$

Par f , ces quatre disques s'envoient sur quatre disques de $D(\theta)$ de rayon $(\epsilon_2)^2$ centrés en :

$$(\varphi = \frac{\theta}{2}, \epsilon_1) + \epsilon_2(\varphi = \frac{\theta}{4}, \epsilon_1) ; (\varphi = \frac{\theta}{2}, \epsilon_1) + \epsilon_2(\varphi = \frac{\theta}{4} + \pi, \epsilon_1)$$

$$(\varphi = \frac{\theta}{2} + \pi, \epsilon_1) + \epsilon_2(\varphi = \frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{2}, \epsilon_1) ; (\varphi = \frac{\theta}{2} + \pi, \epsilon_1) + \epsilon_2(\varphi = \frac{\theta}{4} + \frac{3\pi}{2}, \epsilon_1) .$$

(Le signe $+$ désigne la somme vectorielle dans le disque D_θ).

En ne retenant que les angles, nous pouvons repérer un disque de $f(P) \cap D_{\theta_1}$ par deux angles $(\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S^1$ tels que $2\theta_2 = \theta_1$. Nous pouvons de même repérer le centre d'un disque de $f^2(P) \cap D_{\theta_1}$ par trois angles $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in S^1 \times S^1 \times S^1$, tels que $2\theta_3 = \theta_2$ et $2\theta_2 = \theta_1$. C'est-à-dire que, si nous fixons θ_1 , nous avons dans $D(\theta_1)$ deux disques de centre $(\theta_1, \frac{\theta_1}{2})$ et $(\theta_1, \frac{\theta_1}{2} + \pi)$ et de rayon ϵ_2 et quatre disques de centre $(\theta_1, \frac{\theta_1}{2}, \frac{\theta_1}{4})$, $(\theta_1, \frac{\theta_1}{2}, \frac{\theta_1}{4} + \pi)$, $(\theta_1, \frac{\theta_1}{2} + \pi, \frac{\theta_1}{4} + \frac{\pi}{2})$, $(\theta_1, \frac{\theta_1}{2} + \pi, \frac{\theta_1}{4} + \frac{3\pi}{2})$ et de rayon $(\epsilon_2)^2$. Chaque disque de $f^n(P) \cap D(\theta)$ contient donc deux disques de $f^{n+1}(P) \cap P$ de rayon ϵ_2 fois plus petits.

Continuons le processus. Nous obtenons une suite infinie :

$$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \theta_{k+1}) \in S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 \times S^1 \times \dots$$

vérifiant, pour tout entier strictement supérieur à 1 : $2\theta_{k+1} = \theta_k$. Cette suite correspond à une suite infinie de disques fermés emboîtés dont le rayon tend vers 0 ; elle détermine donc un point de l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(P)$.

Nous pouvons maintenant identifier les points de l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(P)$ aux suites infinies définies plus haut. Ces deux ensembles sont appelés solénoïdes. Chaque disque $D(\theta)$ coupe le solénoïde en un ensemble de Cantor et donc le solénoïde est

localement le produit d'un ensemble de Cantor et d'un intervalle (cf. figure 4.9.5).

L'ensemble des suites infinies $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \theta_{k+1}, \dots) \in S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 \times S^1 \times \dots$ telles que $\theta_k = 2\theta_{k+1}$, est aussi la limite projective de la suite $S^1 \xleftarrow{\times 2} S^1 \xleftarrow{\times 2} \dots \xleftarrow{\times 2} S^1 \xleftarrow{\times 2} 2\theta \xleftarrow{\times 2} \theta$

La restriction de f au solénoïde, qui est stable par f , s'écrit alors à l'aide de cette identification :

$$f : (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \theta_{k+1}, \dots) \rightarrow (2\theta_1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \theta_{k+1}, \dots) .$$

f est donc un homéomorphisme du solénoïde qui est compact pour la topologie limite projective.

Le solénoïde est un ensemble invariant hyperbolique. En effet, le fibré tangent TP est scindé en $TP = E^S \oplus F^U$ où E^S est tangent aux disques méridiens et F^U est tangent aux parallèles ($S^1 \times \{x\} \subset S^1 \times D^2$). L'image par f d'un disque méridien est un disque méridien, le sous-fibré E^S est invariant pour Tf , et on a :

$$|Tf|_{E^S} < \epsilon_2 .$$

D'autre part, l'image par f d'une parallèle coupe les disques transverses faisant un angle α voisin de $\frac{\pi}{2}$.

Soit p la projection TP sur F^U . On vérifie que, pour tout vecteur v de F^U , on a :

$$\|p \circ Tf(v)\| = 2\|v\| .$$

Comme F^U est presque invariant, on verra dans les exercices qui suivent le chapitre 7 qu'il existe un scindage hyperbolique de la restriction de TP au solénoïde.

EXERCICE 4.1. Dans la définition 4.1, on a supposé implicitement que E^S et E^U sont des sous-fibrés (localement triviaux) de $TM|_{\Lambda}$. Montrer que si l'on suppose seulement qu'il existe en chaque point x de Λ une décomposition $T_x M = E_x^S \oplus E_x^U$ vérifiant les propriétés de la définition 4.1, la collection des sous-espaces E_x^S resp E_x^U forme un sous-fibré de $TM|_{\Lambda}$.

Indication : Montrer que E_x^S dépend continument du point x .

EXERCICE 4.2. σ est le shift rencontré plus haut : $\Sigma(2) \rightarrow \Sigma(2)$.

Montrer que :

1) $\overline{\text{Per}(\sigma)} = \Sigma(2)$

2) $\Omega(\sigma) = \Sigma(2)$

3) Soit $N_n(\sigma)$ le nombre de points périodiques de période n de σ ; montrer que $N_n(\sigma) = 2^n$.

CHAPITRE 5 - VARIÉTÉS STABLES

Nous avons commencé par étudier les ensembles hyperboliques invariants. S'il y a un point fixe, il est plus commode de travailler dans un espace de Banach.

DÉFINITION 5.1. Soit $T : E \rightarrow E$ un endomorphisme (application linéaire continue) de l'espace de Banach E . L'endomorphisme T est hyperbolique s'il existe une décomposition en somme directe de E , $E = E_1 \oplus E_2$ invariante par T , et des constantes c et λ , $c > 0$, $\lambda < 1$ vérifiant :

1) la restriction T_1 de T à E_1 est une expansion :

$$\forall n \leq 0, \quad \|T_1^n\| \leq c \lambda^{-n}$$

2) La restriction T_2 de T à E_2 est une contraction :

$$\forall n \geq 0, \quad \|T_2^n\| \leq c \lambda^n .$$

La proposition 4.2 permet de remplacer la norme donnée sur E par une nouvelle, adaptée, c'est-à-dire telle que l'on puisse prendre $c = 1$.

Rappelons qu'une application g entre deux espaces métriques est dite Lipschitzienne s'il existe une constante k telle que :

$$\forall x, \forall y, \quad d(g(x), g(y)) \leq k d(x, y) .$$

La constante k minimale vérifiant l'inégalité ci-dessus est appelée constante de Lipschitz associée à g ; on la note $\text{Lip}(g)$. Nous noterons $E_1(r)$, resp $E_2(r)$, la boule fermée de rayon r centrée en l'origine de E_1 , resp de E_2 .

THÉORÈME 5.2. : Théorème de la variété (in)stable locale pour un point.

Soit $T : E \rightarrow E$ un automorphisme hyperbolique de l'espace de Banach E ,

espace qui est scindé en $E_1 \oplus E_2 = E_1 \times E_2$; $E_1 = E^U$, $E_2 = E^S$. Supposons que la norme $\| \cdot \|$ soit une norme adaptée et donc que l'on ait :

$$\exists \lambda ; 0 < \lambda < 1 ; \|T|_{E_2}\| < \lambda ; \|T^{-1}|_{E_1}\| < \lambda .$$

Il existe un réel $\epsilon > 0$ qui ne dépend que de λ et pour tout rayon r positif, il existe une constante positive δ qui permet d'associer à toute application lipschitzienne, $f : E_1(r) \times E_2(r) \rightarrow E$ vérifiant $\|f(0)\| < \delta$ et $\text{Lip}(f-T) < \epsilon$, une application $g : E_1(r) \rightarrow E_2(r)$ qui vérifie les six conditions suivantes :

1) L'application g est lipschitzienne et sa constante de Lipschitz vérifie : $\text{Lip}(g) \leq 1$. De plus, la restriction de f^{-1} au graphe de g est contractante et donc admet un point fixe p sur le graphe de g .

2) $\text{Graphe}(g) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(E_1(r) \times E_2(r))$ (on appellera dans la suite cette intersection : variété instable locale au point p et on la notera $W_{\text{loc}}^U(p)$).

3) L'application g a le même ordre de différentiabilité que f .

4) Si f est de classe C^1 et si $f(0) = 0$ et $Df(0) = T$, le graphe de g est tangent à E_1 en 0 .

5) Si $f(0) = 0$, le point x appartient au graphe de g si et seulement s'il existe une suite de points x_n tendant vers l'origine, appartenant à $E_1(r) \times E_2(r)$ et tels que $f^n(x_n) = x$.

6) Si $f(0) = 0$ et si f est inversible, le graphe de g est l'ensemble des points de $E_1(r) \times E_2(r)$ dont les images inverses tendent vers 0 : $\text{graphe}(g) = W_r^U(0)$.

La variété stable s'obtient en changeant T en T^{-1} .

La démonstration de ce théorème est longue. Elle occupe le reste du chapitre.

Donnons quelques notations :

$$T_1 = T|_{E_1} ; T_2 = T|_{E_2}$$

p_i est la projection de E sur E_i , $i = 1, 2$

$$f_i = p_i \circ f \quad ; \quad i = 1, 2$$

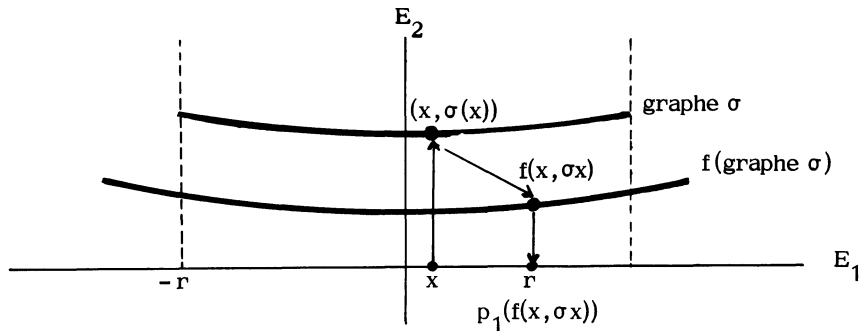
On utilisera sur $E = E_1 \oplus E_2$, la norme $\| \cdot \|_E = \sup (\| \cdot \|_{E_1}, \| \cdot \|_{E_2})$, i.e.
 $\|x\| = \sup (\|p_1(x)\|, \|p_2(x)\|)$.

I. Cas lipschitzien.

Transformation de graphe.

DÉFINITION 5.3. Supposons maintenant que $f_1 \circ (\text{id}, \sigma)$ soit injective et que l'image $f_1 \circ (\text{id}, \sigma)(E_1(r))$ contienne $E_1(r)$. Définissons la fonction $\Gamma_f(\sigma) : E_1(r) \rightarrow E_1(r)$ par :

$$\Gamma_f(\sigma) = f_2 \circ (\text{id}, \sigma) \circ [f_1 \circ (\text{id}, \sigma)]^{-1} |_{E_1(r)} .$$



Notons que le graphe de $\Gamma_f(\sigma)$ est l'intersection de l'image $f(\text{graphe}(\sigma))$ avec $E_1(r) \times E_2$. C'est pour cela que nous appelons Γ_f transformation de graphe.

Remarque : La variété instable associée à T est E_1 qui est le seul graphe continu laissé invariant par Γ_T . Cela nous encourage à chercher la variété instable comme point fixe de Γ_f .

Soit $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de constante de Lipschitz de module inférieur ou égal à 1. Nous allons montrer que Γ_f est défini sur $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$. Nous montrerons ensuite que Γ_f est une contraction de $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$ pour la topologie C^0 . Nous trouverons alors g en appliquant le théorème du point fixe.

LEMME 5.4. Si σ appartient à $\text{Lip}_1[E_1(r), E_2(r)]$, on a la majoration :

$$\text{Lip}[f_1 \circ (\text{id}, \sigma) - T_1] \leq \text{Lip}(f - T) .$$

Démonstration : On a : $f_1 \circ (\text{id}, \sigma) - T_1 = p_1 \circ (f - T) \circ (\text{id}, \sigma)$

on a donc :

$$\text{Lip}(f_1 \circ (\text{id}, \sigma) - T_1) \leq \text{Lip } p_1 \cdot \text{Lip}(f - T) \cdot \text{Lip}(\text{id}, \sigma)$$

soit :

$$\text{Lip}(f_1 \circ (\text{id}, \sigma) - T_1) \leq \text{Lip}(f - T) \quad \square$$

LEMME 5.5. Si $\epsilon > 0$ est plus petit que $\frac{1}{\lambda}$ et si $\text{Lip}(f - T)$ est majoré par ϵ , alors pour tout σ appartenant à $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$, l'application $f_1 \circ (\text{id}, \sigma)$ est inversible. De plus la constante de Lipschitz de cette inverse vérifie

$$\text{Lip}[f_1 \circ (\text{id}, \sigma)]^{-1} \leq \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \epsilon} .$$

Démonstration : On a : $\text{Lip}(f_1 \circ (\text{id}, \sigma) - T_1) \leq \text{Lip}(f - T) \leq \epsilon$. Par conséquent, si ϵ est inférieur à $\frac{1}{\lambda}$ (qui est plus petit que $\|T_1^{-1}\|^{-1}$), on peut appliquer le théorème d'inversion des fonctions lipschitziennes (voir l'appendice 5.1 de ce chapitre).

L'application $f_1 \circ (\text{id}, \sigma)$ est inversible et la constante de Lipschitz de l'inverse vérifie :

$$\text{Lip}[f_1 \circ (\text{id}, \sigma)]^{-1} \leq \frac{1}{\|T_1^{-1}\|^{-1} - \text{Lip}(f_1 \circ (\text{id}, \sigma) - T_1)} \leq \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \epsilon} \quad \square$$

LEMME 5.6. Soit $\epsilon < \frac{1}{\lambda} - 1$. Supposons que l'on ait : $\text{Lip}(f - T) < \epsilon$ et $\|f(0)\| < r(\frac{1}{\lambda} - 1 - 2\epsilon)$. Alors, pour tout σ appartenant à $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$, l'image $f_1 \circ (\text{id}, \sigma)(E_1(r))$ contient $E_1(r)$.

Démonstration : L'image $f_1 \circ (\text{id}, \sigma)(E_1(r))$ contient la boule de centre $f_1(0, \sigma(0))$ et de rayon $r(\frac{1}{\lambda} - \epsilon)$, car, comme $\text{Lip}[f_1 \circ (\text{id}, \sigma)]^{-1}$ est inférieur à $\frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \epsilon}$, on peut appliquer le complément de l'appendice 5.1. Par conséquent, $f_1 \circ (\text{id}, \sigma)(E_1(r))$ contient la boule de centre 0 et de rayon $\rho = r(\frac{1}{\lambda} - \epsilon) - \|f_1(0, \sigma(0))\|$.

Or on a :

$$\begin{aligned} \|f_1(0, \sigma(0))\| &\leq \|f_1(0, 0)\| + \|f_1(0, \sigma(0)) - f_1(0, 0)\| \\ &\leq \|f(0, 0)\| + \|(f - T)(0, \sigma(0)) - (f - T)(0, 0)\| \leq \|f(0)\| + \epsilon r . \end{aligned}$$

On en conclut que :

$$\rho \geq r\left(\frac{1}{\lambda} - 2\epsilon\right) - \|f(0)\| \text{ qui est supérieur à } r. \quad \square$$

LEMME 5.7. Soit $\epsilon < \frac{1}{\lambda} - 1$ et $\delta < r\left(\frac{1}{\lambda} - 1 - 2\epsilon\right)$. Si f vérifie $\text{Lip}(f - T) < \epsilon$ et $\|f(0)\| < \delta$, pour tout σ appartenant à $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$, l'application $\Gamma_f(\sigma)$ est définie sur $E_1(r)$.

Si on a de plus : $\epsilon < 1 - \lambda$, $\Gamma_f(\sigma)$ appartient à $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$.

Démonstration : La première partie de ce lemme résulte du lemme précédent. La définition de $\Gamma_f(\sigma)$ permet d'écrire les majorations :

$$\begin{aligned} \text{Lip} \Gamma_f(\sigma) &\leq \text{Lip}(f_2 \circ (\text{id}, \sigma)) \text{Lip}[f_1 \circ (\text{id}, \sigma)]^{-1} \\ &\leq \text{Lip}(f_2 \circ (\text{id}, \sigma)) \\ &\leq \text{Lip} f_2 \leq \text{Lip} T_2 + \text{Lip}[p_2 \circ (f - T)] \\ &\leq \lambda + \epsilon \leq 1 . \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\Gamma_f(\sigma)(E_1(r))$ est contenu dans $E_2(r)$.

L'inclusion :

$$[f_1 \circ (\text{id}, \sigma)]^{-1}(E_1(r)) \subset E_1(r)$$

implique l'inclusion :

$$\Gamma_f(\sigma)(E_1(r)) \subset f_2 \circ (\text{id}, \sigma)(E_1(r)) .$$

Or, si x appartient à $E_1(r)$, on peut écrire les majorations :

$$\begin{aligned} \|f_2(x, \sigma(x))\| &\leq \|f_2(x, \sigma(x)) - p_2 T(x, \sigma(x))\| + \|p_2 T(x, \sigma(x))\| \\ &\leq \epsilon r + \|T_2\| \|\sigma(x)\| \\ &\leq \epsilon r + \lambda r \leq r(\lambda + \epsilon) \leq r . \quad \square \end{aligned}$$

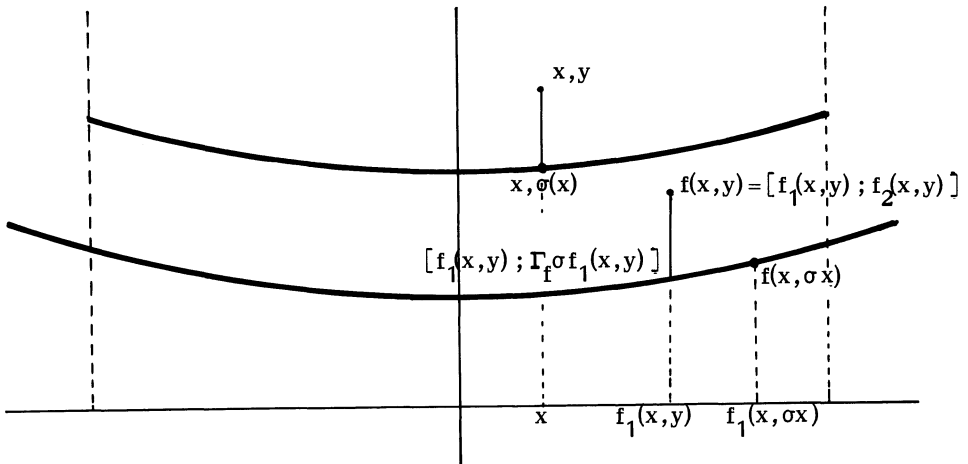
Dans la suite nous supposerons, pour pouvoir appliquer les lemmes précédents, que les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\text{Lip}(f - T) < \epsilon < 1 - \lambda \quad ; \quad \|f(0)\| < \delta < r\left(\frac{1}{\lambda} - 1 - 2\epsilon\right).$$

Nous allons démontrer que Γ_f est une contraction de l'espace $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$ dans lui-même. Rappelons que $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$ est un sous-espace fermé de $C^0(E_1(r), E_2(r))$ muni de la norme sup.

Montrons d'abord que f diminue la distance verticale entre un point et le graphe d'une fonction σ de $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$.

LEMME 5.8. Soit (x, y) un point de $E_1(r) \times E_2(r)$, tel que $f_1(x, y)$ appartienne à $E_1(r)$. Soit σ une fonction appartenant à $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$. La majoration suivante sera alors vraie : $\|f_2(x, y) - \Gamma_f \sigma(f_1(x, y))\| \leq (\lambda + 2\epsilon) \|y - \sigma(x)\|$.



Démonstration :

$$\|f_2(x, y) - \Gamma_f \sigma(f_1(x, y))\| \leq \|f_2(x, y) - f_2(x, \sigma(x))\| + \|f_2(x, \sigma(x)) - \Gamma_f \sigma(f_1(x, y))\|$$

D'où, par définition de Γ_f :

$$\begin{aligned} \|f_2(x,y) - \Gamma_f \sigma f_1(x,y)\| &\leq \|f_2(x,y) - f_2(x,\sigma(x))\| + \|\Gamma_f \sigma f_1(x,\sigma(x)) - \Gamma_f \sigma f_1(x,y)\| \\ &\leq \text{Lip } f_2 \|x,y) - (x,\sigma(x))\| + \text{Lip } \Gamma_f \sigma \|f_1(x,\sigma(x)) - f_1(x,y)\| \end{aligned}$$

Or : $\text{Lip } f_2 = \text{Lip}(f_2 - p_2 T + p_2 T) \leq \epsilon + \lambda$;

mais, nous avons supposé que $\text{Lip } \Gamma_f \sigma$ est inférieure ou égale à 1.

On a donc :

$$\begin{aligned} \|f_2(x,y) - \Gamma_f \sigma f_1(x,y)\| &\leq (\lambda + \epsilon) \|y - \sigma(x)\| + \|f_1(x,\sigma(x)) - f_1(x,y)\| \\ &\leq (\lambda + \epsilon) \|y - \sigma(x)\| + \|(f_1 - p_1 T)(x,\sigma(x)) - (f_1 - p_1 T)(x,y)\| \\ &\quad + \|p_1 T(x,\sigma(x)) - p_1 T(x,y)\| . \end{aligned}$$

Comme $\text{Lip}(f_1 - p_1 T)$ est inférieure ou égale à ϵ , on a :

$$\|f_2(x,y) - \Gamma_f \sigma f_1(x,y)\| \leq (\lambda + \epsilon) \|y - \sigma(x)\| + \epsilon \|y - \sigma(x)\| + 0 . \quad \square$$

LEMME 5.9. Si $\lambda + 2\epsilon$ est strictement inférieur à 1, Γ_f est une contraction de $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$ munie de la norme sup ; la constante de contraction de Γ_f est inférieure ou égale à $\lambda + 2\epsilon$.

Démonstration : Soient σ_1 et σ_2 deux applications appartenant à $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$ et x un point de $E_1(r)$. On a la majoration :

$$\|\Gamma_f \sigma_1(x) - \Gamma_f \sigma_2(x)\| \leq (\lambda + 2\epsilon) \|\sigma_1 [f_1 \circ (\text{id}, \sigma_1)]^{-1}(x) - \sigma_2 [f_1 \circ (\text{id}, \sigma_1)]^{-1}(x)\| .$$

On a donc :

$$\sup_{x \in E_1(r)} \|\Gamma_f \sigma_1(x) - \Gamma_f \sigma_2(x)\| \leq (\lambda + 2\epsilon) \sup_{x \in E_1(r)} \|\sigma_1(x) - \sigma_2(x)\| \quad \square$$

Regroupons les conditions des lemmes précédents.

PROPOSITION 5.10. Si on a :

$$\text{Lip}(f - T) < \epsilon < \frac{1-\lambda}{2}$$

$$\text{et} \quad \|f(0)\| \leq \delta < r\left(\frac{1}{\lambda} - 1 - 2\epsilon\right)$$

la transformation de graphe Γ_f a un unique point fixe g appartenant à $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$.

L'application g vérifie donc :

$$(E_1(r) \times E_2(r)) \cap f(\text{graphe}(g)) = \text{graphe}(g) .$$

Démonstration : La transformation de graphe Γ_f est une contraction de $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$ qui est complet pour la norme de la convergence uniforme. \square

Fin de la démonstration du théorème 5.2 dans le cas lipschitzien.

Montrons que l'application g vérifie les conditions 1), 2), 5) et 6) du théorème 5.2.

Vérification de la condition 1) : Par construction de g , on a : $\text{Lip } g \leq 1$. Montrons que $f^{-1}|_{\text{graphe}(g)}$ est une contraction. Ecrivons :

$$(x, g(x)) = f(y, g(y))$$

on a : $x = f_1(y, g(y)) = f_1 \circ (\text{id}, g)(y)$.

Donc, la restriction de f au graphe de g est inversible et on a :

$$p_1 \circ f^{-1}(x, g(x)) = [f_1 \circ (\text{id}, g)]^{-1}(x).$$

La projection $p_1|_{\text{graphe}(g)}$ est une isométrie. (Rappelons que la norme sur $E = E_1 \oplus E_2$ est le sup d'une norme sur E_1 et d'une norme sur E_2).

Soient x et x' deux points de $E_1(r)$, on a :

$$\begin{aligned} \|f^{-1}(x, g(x)) - f^{-1}(x', g(x'))\| &= \|p_1 \circ f^{-1}(x, g(x)) - p_1 \circ f^{-1}(x', g(x'))\| = \\ &= \|[f_1 \circ (\text{id}, g)]^{-1}(x) - [f_1 \circ (\text{id}, g)]^{-1}(x')\| \\ &\leq \text{Lip}[f_1 \circ (\text{id}, g)]^{-1} \|x - x'\| = \text{Lip}[f_1 \circ (\text{id}, g)]^{-1} \|(x, g(x)) - (x', g(x'))\| . \end{aligned}$$

Or, $\text{Lip}[f_1 \circ (\text{id}, g)]^{-1}$ est strictement inférieur à 1. Donc la restriction de f^{-1} au graphe de g est contractante et a un point fixe.

Vérification de la condition 2) : Soit (x', y') un point de $E_1(r) \times E_2(r)$ tel que $f(x', y')$ appartienne à $E_1(r) \times E_2(r)$. Le lemme 5.8 permet d'écrire la majoration :

$$\|f_2(x', y') - g(f_1(x', y'))\| \leq (\lambda + 2\epsilon) \|y' - g(x')\| .$$

Par récurrence, on déduit que, si (x', y') est un point vérifiant :

$$(x', y') \in E_1(r) \times E_2(r) \quad ; \quad f(x', y') \in E_1(r) \times E_2(r); \dots f^n(x', y') \in E_1(r) \times E_2(r),$$

$$(ce\ que\ l'on\ écrit : (x, y) = f^n(x', y') \in f^n[E_1(r) \times E_2(r)])$$

on a :

$$\|p_2 f^n(x', y') - g p_1 f^n(x', y')\| \leq (\lambda + 2\epsilon)^n \|y' - g(x')\| \leq (\lambda + 2\epsilon)^n 2r .$$

Si le point (x, y) appartient à l'intersection $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n[E_1(r) \times E_2(r)]$, on a, pour tout n : $\|y - g(x)\| \leq (\lambda + 2\epsilon)^n 2r$, c'est-à-dire : $y = g(x)$. Ce qui montre

$$l'inclusion : \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n[E_1(r) \times E_2(r)] \subset \text{graphe } g .$$

L'inclusion réciproque : $\text{graphe}(g) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n[E_1(r) \times E_2(r)]$ se déduit trivialement de l'égalité : $\text{graphe}(g) = f(\text{graphe}(g)) \cap E_1(r) \times E_2(r)$.

Vérification des conditions 5) et 6) : Si $f(0) = 0$, 0 est le seul point fixe de f contenu dans le graphe de g . L'application $f|_{\text{graphe}(g)}$ est inversible et son inverse est contractante. Donc, si z appartient à $\text{graphe}(g)$, la suite $(f|_{\text{graphe}(g)})^{-n}(z)$ converge vers 0 . Les propriétés 5) et 6) en résultent aisément.

II. Cas différentiable.

Courage pour la seconde partie de la démonstration !

Commençons l'étude de la différentiabilité de la variété instable en montrant qu'elle est C^1 si f est C^1 . L'idée de la démonstration est la suivante : s'il existe une fonction $g \in C^1$ dont le graphe est invariant par f , on a :

$$Df_{(x, g(x))} (T_{(x, g(x))}(\text{graphe } g)) = T_{f(x, g(x))}(\text{graphe } g)$$

où $T_{(x, g(x))}(\text{graphe}(g)) \subset TE = E \times E$ est l'ensemble des points $(x, g(x), y)$ où y appartient au graphe de Dg_x ; l'égalité précédente peut donc s'interpréter comme :

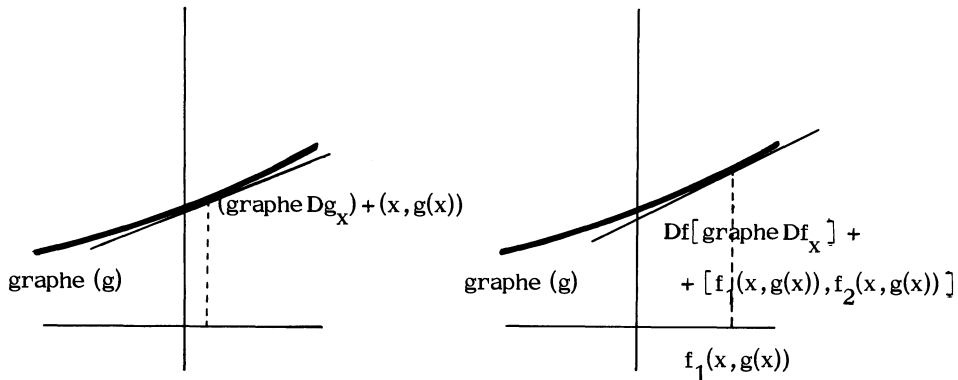
$$Df_{(x, g(x))}(\text{graphe } Dg_x) = \text{graphe}(Dg_{f_1(x, g(x))}) .$$

Cette dernière expression est à nouveau une transformation de graphe. Le théorème du point fixe nous permettra de trouver une fonction $\sigma : E_1(r) \rightarrow L_1(E_1, E_2)$, où $L_1(E_1, E_2)$

est l'espace des applications linéaires continues de E_1 dans E_2 de norme inférieure ou égale à 1 qui vérifient :

$$\Gamma_{Df_{(x,g(x))}} \sigma(x) = \sigma(f_1(x,g(x))) .$$

Nous vérifierons enfin que σ est la dérivée de g .



Commençons par démontrer quelques propriétés que vérifie la transformation de graphe associée à une application linéaire proche de l'application hyperbolique T .

LEMME 5.11. Il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que si on a : $\|S - T\| < \epsilon$, la transformation de graphe Γ_S est définie sur $L_1(E_1, E_2)$ et l'envoie dans lui-même.

De plus, on a, si K et L sont deux éléments de $L_1(E_1, E_2)$, la majoration :

$$\|\Gamma_S(K) - \Gamma_S(L)\| \leq (\lambda + 2\epsilon) \|K - L\|$$

Démonstration : Reprenons le ϵ du lemme 5.7 qui est indépendant de r . En effet, puisque $S(0) = 0$, la deuxième condition du lemme 5.7 est vérifiée et Γ_S est défini sur $\text{Lip}_1[E_1(r), E_2(r)]$ pour tout r , donc à fortiori sur $L_1(E_1, E_2)$ (Rappelons que la constante de Lipschitz d'une application linéaire sur toute boule est égale à sa norme).

La transformation du graphe Γ_S envoie $L_1(E_1, E_2)$ dans lui-même, car si le

graphe d'une application est un sous-espace vectoriel, cette application est linéaire.

La majoration annoncée résulte du lemme 5.9. \square

Dans la suite, ϵ sera toujours choisi assez petit pour pouvoir appliquer le lemme 5.11.

LEMME 5.12. L'application $\Gamma : U_\epsilon \times L_1(E_1, E_2) \rightarrow L_1(E_1, E_2)$
 $(S, K) \longrightarrow \Gamma_S(K)$ est continue.

Démonstration : Posons $S_1 = p_1 \circ S$. On a : $\Gamma_S(K) : S_2 \circ (\text{id}, K) \circ [S_1 \circ (\text{id}, K)]^{-1}$.

Or la composition et l'inversion sont continues sur l'espace des applications linéaires. \square

Supposons que f soit une application C^1 -proche de T :

$$d_{C^1}(f, T) < \epsilon \text{ sur } E_1(r) \times E_2(r).$$

(On aura alors $\text{Lip}(f - T) < \epsilon$ et, pour tout point z de $E_1(r) \times E_2(r)$,

$$\|Df(z) - T\| < \epsilon).$$

Soit g l'application de $E_1(r)$ dans $E_2(r)$ dont le graphe est la variété instable associée à f . Exhibons ce qui sera le graphe de la dérivée de g .

Posons $h = f_1 \circ (\text{id}, g) : E_1(r) \rightarrow E_1$.

Le lemme 5.11 permet de définir l'application :

$$F : E_1(r) \times L_1(E_1, E_2) \rightarrow E_1 \times L_1(E_1, E_2)$$

$$(x, L) \longmapsto (h(x), \Gamma_{Df_{(x, g(x))}} L).$$

Le lemme 5.12 montre que F est continue.

L'application F fait commuter le diagramme suivant :

$$(I) \quad \begin{array}{ccc} E_1(r) \times L_1(E_1, E_2) & \xrightarrow{F} & E_1 \times L_1(E_1, E_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_1(r) & \xrightarrow{h} & E_1 \end{array}$$

où les flèches verticales désignent la projection du produit sur le premier de ses

facteurs ; toutes les applications du diagramme sont continues.

LEMME 5.13. On a la majoration : $\|F(x,L) - F(x,K)\| \leq (\lambda + 2\varepsilon) \|L - K\|$ pour tout x appartenant à $E_1(r)$ et , de plus, on a : $h[E_1(r)] \supset E_1(r)$ et $\text{Lip } h^{-1} < 1$.

Démonstration : La majoration résulte du lemme 5.12 et le reste de la définition de h . \square

Soit $\Gamma^0(E_1(r), E_2(r) \times L_1(E_1, E_2))$ l'espace des sections continues du fibré trivial $E_1(r) \times L_1(E_1, E_2) \rightarrow E_1(r)$, muni de la topologie de la convergence uniforme ; soient σ_1, σ_2 deux telles sections :

$$d(\sigma_1, \sigma_2) = \sup_{x \in E_1(r)} \|\pi_2 \sigma_1(x) - \pi_2 \sigma_2(x)\|$$

où π_2 est la projection du produit $E_1(r) \times L_1(E_1, E_2)$ sur le second facteur. La projection π_2 permet d'identifier les sections continues du fibré trivial $E_1(r) \times L_1(E_1, E_2) \rightarrow E_1$ et les fonctions continues de $E_1(r)$ dans $L_1(E_1, E_2)$; les normes aussi se correspondent et donc l'espace $\Gamma^0(E_1(r), E_1(r) \times L_1(E_1, E_2))$ est aussi complet. (Remarquons encore que par cette identification l'image d'une section correspond à un graphe.)

Définissons l'automorphisme Γ_F de $\Gamma^0(E_1(r), E_1(r) \times L_1(E_1, E_2))$ par $\Gamma_F(\tau) = F \tau h^{-1}$. L'automorphisme $\Gamma_F(\tau)$ est la section dont l'image est l'intersection $F(\tau) \cap E_1(r) \times L_1(E_1, E_2)$.

LEMME 5.14. La transformation Γ_F a un point fixe unique ; donc cette section vérifie la propriété :

$$\Gamma_{\text{Df}}(x, g(x)) [\pi_2 \sigma(x)] = \pi_2 \sigma h(x) = \pi_2 \sigma f_1(x, g(x)) .$$

Démonstration : Soient τ_1 et τ_2 deux sections continues. Le lemme 5.13 fournit la majoration :

$$d(\Gamma_F(\tau_1), \Gamma_F(\tau_2)) \leq (\lambda + 2\varepsilon) d(\tau_1, \tau_2) .$$

Ce qui prouve que Γ_F est une contraction. \square

L'application $\pi_2\sigma$ est maintenant un bon candidat au rôle de Dg . Nous savons déjà que $\pi_2\sigma$ est une fonction continue. Il ne nous reste plus qu'à démontrer l'égalité $\pi_2\sigma(x) = Df(x)$, c'est-à-dire à démontrer que les deux fonctions $y \mapsto g(x+y)$ et $y \mapsto g(x) + \pi_2\sigma(x)(y)$ sont tangentes en 0.

DÉFINITION 5.15. Soient Y et Z deux espaces métriques. Soient V un voisinage du point x de Y et h_1, h_2 deux fonctions de V dans Z . Supposons que h_1 et h_2 aient même valeur au point x . Posons :

$$\text{Lip}_x(h_1, h_2) = \limsup_{y \rightarrow x} [d(h_1(y), h_2(y)) / d(x, y)]$$

On dira que h_1 et h_2 sont tangentes en x si $\text{Lip}_x(h_1, h_2) = 0$.

Exemples :

1) Si E_1 et E_2 sont des espaces vectoriels normés et si L_1 et L_2 sont deux applications linéaires continues de E_1 dans E_2 , on a :

$$\text{Lip}_x(L_1, L_2) = \|L_1 - L_2\| .$$

2) Si U est un ouvert d'un espace de Banach E_1 et si f est une application continue de U dans un espace de Banach E_2 et L une application linéaire continue de E_1 dans E_2 , L est la dérivée de f en x si et seulement si les deux applications $f(x+y)$ et $(f(x) + L(y))$ sont tangentes en 0, ce qui s'écrit :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\|f(x) - f(x+y) - L(y)\|}{\|y\|} = 0 .$$

PROPOSITION 5.16. Le point fixe g de Γ_f est de classe C^1 . Sa dérivée est $\pi_2\sigma$ où σ est le point fixe de Γ_F .

Démonstration : Supposons établie la majoration suivante (les fonctions dépendent de la variable y) :

$$\begin{aligned}
 (*) \quad & \text{Lip}_O[(\Gamma_f g)(h(x) + y), gh(x) + \Gamma_{\text{Df}(x, g(x))}[\pi_2 \sigma(x)](y)] \leq \\
 & \leq (\lambda + 2\varepsilon) \text{Lip}_O(g(x + y), g(x) + \pi_2 \sigma(x)(y)) .
 \end{aligned}$$

Cette majoration montre que par Γ_F le graphe de g et le candidat à être la tangente à ce graphe deviennent de plus en plus tangents. (Rappelons que nous avons posé $h = f_1 \circ (\text{id}, g)$.)

Réécrivons (*) sous la forme :

$$(**) \quad \text{Lip}_O[g(h(x) + y), gh(x) + \pi_2 \sigma(h(x))(y)] \leq (\lambda + 2\varepsilon) \text{Lip}_O[g(x+y), g(x) + \pi_2 \sigma(x)(y)]$$

quand $h(x)$ appartient à $E_1(r)$.

Donc, quand x appartient à $E_1(r)$, on a :

$$\text{Lip}_O[g(h^{-n}(x)+y), g(h^{-n}(x)) + \pi_2 \sigma(h^{-n}(x))(y)] \leq \left(\frac{1}{\lambda+2\varepsilon}\right)^n \text{Lip}_O[g(x+y), g(x) + \pi_2 \sigma(x)(y)] .$$

Si la distance lipschitzienne suivante était non nulle

$$\text{Lip}_O[g(x+y), g(x) + \pi_2 \sigma(x)(y)] = \delta > 0 ,$$

il existerait une suite de points x_n de $E_1(r)$ vérifiant :

$$\text{Lip}_O[g(x_n+y), g(x_n) + \pi_2 \sigma(x_n)(y)] \rightarrow \infty .$$

Mais les constantes de Lipschitz de g et $\pi_2 \sigma(x_n)$ sont inférieures ou égales à 1, donc :

$$\text{Lip}_O[g(x_n+y), g(x_n) + \pi_2 \sigma(x_n)(y)] \leq 2 .$$

On doit donc avoir l'égalité :

$$\text{Lip}_O[g(x+y), g(x) + \pi_2 \sigma(x)(y)] = 0$$

pour tous les points x de $E_1(r)$; $\pi_2 \sigma(x)$ est donc la dérivée de g en x .

Il ne reste plus qu'à établir la majoration (*). Calculons :

$$\begin{aligned}
 & (\Gamma_f g)(h(x)+y) - gh(x) - \Gamma_{\text{Df}(x, g(x))}[\pi_2 \sigma(x)](y) = (\Gamma_f g)(h(x)+y) - gh(x) \\
 & - \Gamma_{\text{Df}(x, g(x))}[g(x+\text{id})-g(x)](y) + \Gamma_{\text{Df}(x, g(x))}[g(x+\text{id})-g(x)](y) - \Gamma_{\text{Df}(x, g(x))}[\pi_2 \sigma(x)](y) .
 \end{aligned}$$

Donc, nous avons la majoration :

$$\begin{aligned} & \text{Lip}_0 [(\Gamma_f g)(h(x)+y), gh(x) + \Gamma_{\text{Df}_{(x,g(x))}} [\pi_2 \sigma(x)](y)] \leq \\ & \leq \text{Lip}_0 [(\Gamma_f g)(h(x)+y) - gh(x), \Gamma_{\text{Df}_{(x,g(x))}} [g(x+id)-g(x)](y)] + \\ & + \text{Lip}_0 [\Gamma_{\text{Df}_{(x,g(x))}} [\pi_2 \sigma(x)](y), \Gamma_{\text{Df}_{(x,g(x))}} [g(x+id)-g(x)](y)]. \end{aligned}$$

Posons $k = p_1 \text{Df}_{(x,g(x))}(id, g(x+id)-g(x))$. Comme Df est proche de T , k est surjective. Choisissons un point w' tel que $k(w') = y$. Comme k^{-1} est une contraction, on a : $\|w'\| < \|y\|$. Appliquons le lemme 5.8 en remplaçant f par $\text{Df}_{(x,g(x))}$, on a la majoration :

$$\begin{aligned} & \|\Gamma_{\text{Df}_{(x,g(x))}} [\pi_2 \sigma(x)](y) - \Gamma_{\text{Df}_{(x,g(x))}} [g(x+id) - g(x)](y)\| \leq \\ & \leq (\lambda+2\epsilon) \|\pi_2 \sigma(x)(w') - g(x+w') + g(x)\| = (\lambda+2\epsilon) \|g(x+w') - g(x) - \pi_2 \sigma(x)(w')\| \end{aligned}$$

ce qui implique la majoration :

$$\frac{\|\Gamma_{\text{Df}_{(x,g(x))}} [\pi_2 \sigma(x)](y) - \Gamma_{\text{Df}_{(x,g(x))}} [g(x+id)-g(x)](y)\|}{\|y\|} \leq (\lambda+2\epsilon) \frac{\|g(x+w') - g(x) - \pi_2 \sigma(x)(w')\|}{\|w'\|}$$

et

$$\begin{aligned} & \text{Lip}_0 \{ \Gamma_{\text{Df}_{(x,g(x))}} [\pi_2 \sigma(x)], \Gamma_{\text{Df}_{(x,g(x))}} [g(x+id) - g(x)] \} \leq \\ & \leq (\lambda+2\epsilon) \text{Lip}_0 [\pi_2 \sigma(x), g(x+id) - g(x)] \end{aligned}$$

Il reste à montrer l'égalité :

$$\text{Lip}_0 [(\Gamma_f g)(h(x)+y) - gh(x), \Gamma_{\text{Df}_{(x,g(x))}} [g(x+id) - g(x)](y)] = 0 .$$

Choisissons un point w tel que : $h(x+w) = h(x)+y$; on aura alors :

$$(\Gamma_f g)(h(x)+y) = f_2(x+w, g(x+w)) ; gh(x) = f_2(x, g(x)) ;$$

et, par le choix de w' :

$$\Gamma_{\text{Df}_{(x,g(x))}} [g(x+id) - g(x)](y) = p_2 \text{Df}_{(x,g(x))}(w', g(x+w') - g(x))$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \|(\Gamma_f g)(h(x)+y) - gh(x) - \Gamma_{Df_{(x,g(x))}}[g(x+id) - g(x)](y)\| \\ = & \frac{\|p_2 f(x+w, g(x+w)) - p_2 f(x, g(x)) - p_2 Df_{(x,g(x))}(w', g(x+w') - g(x))\|}{\|y\|} \\ = & \frac{\|p_2 Df_{(x,g(x))}(w, g(x+w)-g(x)) + R(w, g(x+w)-g(x)) - p_2 Df_{(x,g(x))}(w', g(x+w')-g(x))\|}{\|y\|} \\ & \text{(R pour reste de la formule de Taylor)} \\ = & \frac{\|p_2 Df_{(x,g(x))}(w-w', g(x+w)-g(x+w')) + R(w, g(x+w)-g(x))\|}{\|y\|} \\ \leq & \frac{\|p_2 Df_{(x,g(x))}\| \|w-w'\| + \|R(w, g(x+w) - g(x))\|}{\|y\|} \quad \text{car } \text{Lip}(g) \leq 1 . \end{aligned}$$

Comme $\text{Lip}(h^{-1})$ est inférieur à 1, le module de w est inférieur ou égal à celui de y : donc $\frac{\|R(w, g(x+w) - g(x))\|}{\|y\|}$ tend vers 0 quand le module de y tend vers 0.

Il nous reste pour finir à montrer que $\frac{\|w - w'\|}{\|y\|}$ tend vers 0 avec le module de y .

Rappelons les définitions de w et w' :

$$p_1 Df_{(x,g(x))}(w', g(x+w') - g(x)) = y$$

et

$$p_1 f(x+w, g(x+w)) = h(x)+y = p_1 f(x, g(x)) + y$$

ou encore

$$p_1 f(x+w, g(x+w)) - p_1 f(x, g(x)) = y .$$

La formule de Taylor donne :

$$p_1 f(x+w', g(x+w')) - p_1 f(x, g(x)) = p_1 Df_{(x,g(x))}(w', g(x+w')-g(x)) + R[w', g(x+w') - g(x)] .$$

Ce qui donne, par définition de w' :

$$p_1 f(x+w', g(x+w')) - p_1 f(x, g(x)) = y + R(w', g(x+w') - g(x)) .$$

Comme h^{-1} est lipschitzienne de constante de Lipschitz inférieure à 1, nous avons : $\|w - w'\| \leq \|R(w', g(x+w') - g(x))\| \leq o(\|w'\|)$ et donc $\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\|w - w'\|}{\|y\|} = 0$.

Ceci termine la démonstration de la proposition 5.16. \square

Vérifions la condition 4). La section invariante σ , qui donne la dérivée de g , vérifie :

$$\Gamma_{\text{Df}(x, g(x))} [\pi_2(\sigma(x))] = \pi_2 \sigma f_1(x, g(x)) .$$

En particulier, pour $x = 0$, on a :

$$\Gamma_T [\pi_2 \sigma(0)] = \pi_2 \sigma(0)$$

Or, nous avons remarqué que E_1 est le graphe invariant par T .

Ceci exécute la démonstration du théorème 5.2 (et le lecteur) dans le cas C^1 .

Pour montrer que g est de classe C^Γ quand f l'est, revenons au diagramme (I) de notre démonstration. Il nous faut simplement montrer que la section invariante σ est de classe $C^{\Gamma-1}$. Cette situation sera un cas particulier du théorème de la section invariante que nous allons démontrer.

DÉFINITION 5.17. Soit $p : E \rightarrow X$ un fibré vectoriel de base un espace métrique X .

Une métrique d sur E est admissible si :

- 1) Elle induit une norme sur chaque fibre ;
- 2) Il existe un fibré E' sur X , complémentaire de E et un isomorphisme de fibré entre $E \oplus E'$ et un fibré produit $X \times A$, où A est un espace de Banach et où d est induite par la métrique produit de $X \times A$;
- 3) La projection $(X \times A) \rightarrow E$ est de norme 1.

$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & E \oplus E' & \xrightarrow{p} & X \times A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\text{id}} & X & \xrightarrow{\text{id}} & X \end{array}$$

THÉORÈME 5.18. Soit $\pi : E \rightarrow X$ un fibré vectoriel de base l'espace X , le fibré E est muni d'une métrique admissible. Soit X_0 une partie de X et soit D le fibré en

disque unitaire contenu dans E . Soit D_0 la restriction de D à X_0 : $D_0 = D \cap \pi^{-1}(X_0)$.

Soit h un homéomorphisme de X_0 dans X dont l'image $h(X_0)$ contient X_0 .

Soit $F : D_0 \rightarrow D$ une application qui relève l'homéomorphisme $h : X_0 \rightarrow X$. Supposons qu'il existe une constante k , $0 \leq k < 1$, telle que, pour tout point x appartenant à X_0 , la restriction de F à la fibre au-dessus de x : $F_x : D_x \rightarrow D_{h(x)}$ soit lipschitzienne de constante de Lipschitz inférieure ou égale à k . Alors :

a) Il existe une unique section $\sigma : X_0 \rightarrow D_0$ telle que $F(\sigma) \cap D_0 = \sigma$.

b) Si F est continue, σ est continue.

c) Si, de plus, h^{-1} est lipschitzienne de constante de Lipschitz $\text{Lip}(h^{-1}) = \mu$, si F est Höldérienne d'exposant α , $0 < \alpha \leq 1$ et si $(k\mu^\alpha)$ est strictement inférieure à 1, σ satisfait une condition de Hölder d'exposant α . En particulier, si $\alpha = 1$, σ est lipschitzienne.

d) Si X , X_0 et E sont des variétés de classe C^r , si les fonctions h et F sont de classe C^r , si h et F sont lipschitziennes et si la constante de Lipschitz $\mu = \text{Lip}(h^{-1})$ vérifie l'inégalité $k\mu^r < 1$, la section invariante σ est de classe C^r .

Rappel : Condition de Hölder d'ordre α : Soient Y_1 et Y_2 deux espaces métriques ; soit φ une application de Y_1 dans Y_2 . On dira que φ vérifie une condition de Hölder d'ordre α , $0 < \alpha \leq 1$, si, $\exists k \geq 0$, $\forall x, y \in Y_1$, $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq K(d(x, y))^\alpha$. α est appelé exposant de Hölder et k constante de Hölder.

Montrons que le théorème 5.18 permet de terminer la démonstration du théorème de la variété instable.

Démontrons par récurrence que g est de classe C^r si tel est le cas pour f . Nous avons déjà démontré ce résultat quand $r = 1$. Supposons que nous sachions que g est de classe C^{r-1} si tel est le cas pour f . Revenons au diagramme (I). Nous avons : $\text{Lip}(h^{-1}) < 1$; $\text{Lip}(F_x) \leq (\lambda + 2\epsilon) < 1$. Supposons maintenant que f soit de classe C^r ; notre hypothèse de récurrence dit que g et F sont de classe C^{r-1} . En appliquant

le théorème 5.18, nous trouvons une section invariante σ de classe C^{r-1} , ce qui implique que g est de classe C^r , puisque σ est la dérivée de g . \square

En fait, ce raisonnement servira à démontrer la partie d) du théorème 5.18.

Démonstration du théorème 5.18. On peut supposer que E est un fibré trivial. En effet, la définition d'une métrique admissible sur E contient l'existence d'un fibré E' sur X tel que la somme de Whitney $E \oplus E'$ soit triviale. Soit ρ la projection de la somme $E \oplus E'$ sur le facteur E et soit i l'inclusion : $E \rightarrow E \oplus E'$. Posons $F' = i \circ F \circ \rho$.

$$E \oplus E' \xrightarrow{\rho} E \xrightarrow{F} E \xrightarrow{i} E \oplus E' .$$

L'application F' relève F et vérifie : $\text{Lip}(F'_X) = \text{Lip}(F_X)$. De plus, on voit que toute section laissée invariante par $\Gamma_{F'}$, a son image contenue dans E , car c'est le cas de l'image de F' . En supposant que E soit trivial, $E = X \times A$, on peut écrire les coordonnées de l'image d'un point de x par la section σ : $\sigma(x) = (x, \sigma_2(x))$.

a) L'espace des sections du fibré $E : \Gamma(X_0, D_0)$ est complet pour la topologie uniforme. L'application $\Gamma_{F'}$ définie par $\Gamma_{F'}(\sigma) = F \circ \sigma \circ h^{-1}$ est une contraction et admet donc un point fixe unique.

b) Si F est continue, $\Gamma_{F'}$ envoie l'espace des sections continues de $D_0 : \Gamma^0(X_0, D_0)$ dans lui-même, ce qui implique que la section invariante σ est continue.

c) Soit $H(F)$ la constante de Hölder de F (définie par l'inégalité : $d(F(e_1), F(e_2)) \leq H(F) [d(e_1, e_2)]^\alpha, \forall e_1, e_2 \in E$).

Soit $\sigma : \sigma(x) = (x, \sigma_2(x))$ la section invariante dont l'existence est garantie par b). Sa coordonnée verticale σ_2 vérifie (π_2 est la projection de $X \times A$ sur A ; $F_2 = \pi_2 \circ F$) :

$$\begin{aligned} d[\sigma_2(x), \sigma_2(y)] &= d[F_2(h^{-1}(x), \sigma_2 h^{-1}(x)), F_2(h^{-1}(y), \sigma_2 h^{-1}(y))] \\ &\leq d[F_2(h^{-1}(x), \sigma_2 h^{-1}(x)), F_2(h^{-1}(x), \sigma_2 h^{-1}(y))] \\ &\quad + d[F_2(h^{-1}(x), \sigma_2 h^{-1}(y)), F_2(h^{-1}(y), \sigma_2 h^{-1}(y))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq k d[\sigma_2 h^{-1}(x), \sigma_2 h^{-1}(y)] + H(F) d[h^{-1}(x), h^{-1}(y)]^\alpha \\ &\leq k d[\sigma_2 h^{-1}(x), \sigma_2 h^{-1}(y)] + H(F) (\mu d(x, y))^\alpha \end{aligned}$$

et donc :

$$(i) \quad d[\sigma_2(x), \sigma_2(y)] \leq k d[\sigma_2(h^{-1}(x), \sigma_2 h^{-1}(y))] + H(F) \mu^\alpha d(x, y)^\alpha$$

Notre hypothèse de récurrence sera l'inégalité :

$$(ii) \quad d[\sigma_2(x), \sigma_2(y)] \leq k^n d[\sigma_2 h^{-n}(x), \sigma_2 h^{-n}(y)] + H(F) \sum_{j=1}^n (\mu^\alpha)^j k^{j-1} d(x, y)^\alpha .$$

Nous savons que cette inégalité est vraie quand $n = 1$. Supposons que l'inégalité (ii) soit vraie pour n et démontrons-la pour $n + 1$.

$$\begin{aligned} k^n d[\sigma_2 h^{-n}(x), \sigma_2 h^{-n}(y)] &\leq k^n \{k d[\sigma_2 h^{-n-1}(x), \sigma_2 h^{-n-1}(y)] + H(F) \mu^\alpha d[h^{-n}(x), h^{-n}(y)]\} \\ &\leq k^{n+1} d[\sigma_2 h^{-n-1}(x), \sigma_2 h^{-n-1}(y)] + H(F) k^n \mu^\alpha (\mu^n d(x, y))^\alpha \\ &\leq k^{n+1} d[\sigma_2 h^{-n-1}(x), \sigma_2 h^{-n-1}(y)] + H(F) k^n (\mu^\alpha)^{n+1} d(x, y)^\alpha . \end{aligned}$$

En remplaçant $k^n d[\sigma_2 h^{-n}(x), \sigma_2 h^{-n}(y)]$ par ces deux derniers termes, nous démontrons l'inégalité (ii) au cran $n + 1$.

On déduit de (ii) l'inégalité :

$$d(\sigma_2(x), \sigma_2(y)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{ k^n d[\sigma_2 h^{-n}(x), \sigma_2 h^{-n}(y)] + H(F) [\sum_{j=1}^{\infty} (\mu^\alpha)^j k^{j-1} d(x, y)^\alpha] \}$$

Comme k^n tend vers 0 et $d[\sigma_2 h^{-n}(x), \sigma_2 h^{-n}(y)] \leq 2$, on a :

$$d[\sigma_2(x), \sigma_2(y)] \leq H(F) \left(\frac{\mu^\alpha}{1 - k \mu^\alpha} \right) d(x, y)^\alpha ,$$

ce qui signifie que σ_2 est höldérienne d'exposant de Hölder α .

d) Procédons comme nous l'avons fait pour démontrer le théorème de la variété instable. Nous savons que notre section invariante est lipschitzienne. Regardons le fibré tangent à son graphe comme section invariante pour une application auxiliaire. Par récurrence, nous allons démontrer que ce fibré tangent est de classe C^{r-1} .

Soit $E^1 \rightarrow X$ le fibré vectoriel dont la fibre au-dessus du point x est $L(T_x X, A)$

espace vectoriel des applications linéaires continues de l'espace tangent en x à X dans A . C'est là que la dérivée de σ_2 devra se trouver. Soit maintenant D^1 le fibré en disque unité associé à E^1 dont la fibre au-dessus du point x sera :

$D_x^1 = L_1(T_x X, A)$, espace des applications linéaires continues de $T_x X$ dans A de norme inférieure ou égale à 1. Montrons d'abord que ce fibré admet un complémentaire E'^1 , i.e. $E^1 \oplus E'^1$ est trivial. Le fibré TX admet un fibré complémentaire V , i.e. $TX \oplus V$ est trivial. Munissons $TX \oplus V$ d'une métrique produit. Soit E'^1 le fibré dont la fibre au-dessus du point x est $L_x(V, A)$. Le fibré $E^1 \oplus E'^1$ est alors un fibré trivial donc E^1 est admissible.

Définissons maintenant une application $\Gamma_{DF} : D_o^1 \rightarrow D^1$ qui relève l'homéomorphisme $h : X_o \rightarrow X$.

Soit L une application linéaire de $T_x X$ dans A . $\Gamma_{DF}(L)$ sera l'application linéaire de $T_{h(x)} X$ dans A définie par :

$$\Gamma_{DF}(L) = (\pi_2 D_2 F_{x, \sigma(x)}) L Dh_{h(x)}^{-1}$$

où $D_2 F(x, y)$ désigne la dérivée par rapport à la variable y , et où $\pi_2 : X \times A \rightarrow A$ est la projection du produit $X \times A$ sur son second facteur.

Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} D_o & \xrightarrow{\Gamma_{DF}} & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_o & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

Comme dans le théorème de la variété instable, si σ est différentiable, la dérivée de σ_2 fournit un point fixe de Γ_{DF} . Calculons la constante de contraction de Γ_{DF} sur chaque fibre. Nous avons déjà les majorations :

$$\|\pi_2 D_2 F_{(x, \sigma(x))}\| \leq k \quad \text{et} \quad \|Dh^{-1}\| < \mu .$$

La norme de L est inférieure ou égale à 1, ce qui implique la majoration :

$$\|\pi_2 D_2 F_{(x, \sigma(x))} \circ L \circ Dh^{-1}\| \leq \mu k < 1$$

La transformation Γ_F est donc définie, linéaire sur les fibres et le rapport de contraction vérifie :

$$(\Gamma_{DF})_x \leq \mu k < 1 .$$

Nous pouvons presque appliquer l'hypothèse de récurrence. Supposons que nous sachions que la section laissée invariante par la transformation Γ_{DF} soit la dérivée de σ_2 . Alors le fait que σ soit de classe C^1 impliquerait que Γ_{DF} serait aussi de classe C^1 . Mais dans notre cas, $\mu(\mu k)$ est strictement inférieur à 1, donc en appliquant le théorème dans le cas C^1 , nous en déduisons que la section laissée invariante par Γ_{DF} est de classe C^1 et donc que σ est de classe C^2 . Construisons comme suit la récurrence. Supposons que nous ayons démontré le théorème quand F et h sont de classe C^{r-1} et quand les constantes k et μ vérifient $k\mu^{r-1} < 1$. Par récurrence, F admet une section invariante σ de classe C^{r-1} . Mais le rapport de contraction de Γ_{DF} est maintenant (μk) ; comme $\mu^{r-1}(\mu k)$ est strictement inférieur à 1 et comme Γ_{DF} est de classe C^{r-1} , la transformation Γ_{DF} admet une section invariante de classe C^{r-1} ; ceci implique que la dérivée de σ_2 est de classe C^{r-1} et donc que σ_2 est de classe C^r .

Il ne reste plus qu'à montrer que la section τ laissée fixe par Γ_{DF} , que nous savons être continue, est la dérivée de σ_2 . En travaillant dans des cartes d'origine respectivement x et $h(x)$, en recopiant presque le calcul fait pour démontrer le cas C^1 du théorème de la variété instable, on arrive à l'inégalité :

$$\text{Lip}_0 [\sigma_2(h(x)+y), \sigma_2 h(x) + \tau(h(x))(y)] \leq \mu k \text{Lip}_0 [\sigma_2(x+y), \sigma_2(x) + \tau(x)(y)]$$

(les fonctions dépendent de la variable y).

De nouveau, puisque σ et $\tau(x)$ sont lipschitziennes de constante de Lipschitz bornée, la distance de Lipschitz $\text{Lip}_0(\sigma_2(x+y), \sigma_2(x)(y))$ est bornée ; on a donc : $\text{Lip}_0(\sigma_2(x+y), \sigma_2(x) + \tau(x)(y)) = 0$, ce qui signifie que $\tau(x)$ est la dérivée de σ au point x .

Ceci termine la démonstration du théorème 5.18. \square

La démonstration du théorème de la variété instable est donc achevée. \square

COROLLAIRE 5.19. Supposons que f soit un difféomorphisme de classe C^2 d'une variété M de classe C^2 et que Λ soit un fermé hyperbolique invariant.

Soit $TM|_{\Lambda} = E^S \oplus E^U$ un scindage (splitting) hyperbolique pour Tf . Les fibrés E^S et E^U sont alors höldériens. (Un fibré est dit höldérien, si les applications de transition peuvent être astreintes à vérifier une condition de Hölder.)

Démonstration : Choisissons sur M une métrique C^1 adaptée. On aura :

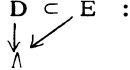
$$\begin{aligned} \|Tf|_{E^S}\| &< \lambda < 1 \\ \|Tf^{-1}|_{E^U}\| &< \lambda < 1 . \end{aligned}$$

La restriction de f^{-1} à Λ est lipschitzienne, soit μ sa constante de Lipschitz.

Soient F^S et F^U des approximations C^1 de E^S et E^U choisies pour que l'application $Df_x : F_x^S \oplus F_x^U \rightarrow F_{f(x)}^S \oplus F_{f(x)}^U$, tangente à f en x , puisse être représentée par une matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ dont les coefficients vérifient les inégalités :

$$\|A\| < \lambda < 1 \quad ; \quad \|D^{-1}\| < \lambda < 1 \quad ; \quad \|B\| < \epsilon \quad ; \quad \|C\| < \epsilon .$$

Soit E le fibré dont la fibre au-dessus du point x est $L(F_x^U, F_x^S)$. Ce fibré est C^1 . Si ϵ est assez petit, on peut définir une transformation de graphe sur le fibré unitaire en disques $D \subset E$:



$$F(x, \sigma) = (f(x), \Gamma_{Df_x} \sigma) \quad \text{où} \quad \Gamma_{Df_x} \sigma(x) = [B_x + A_x \sigma(x)] \circ [C_x + D_x \sigma(x)]^{-1} .$$

Les considérations précédentes donnent un sens à cette construction. L'application de matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est proche de l'application hyperbolique $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Il existe un réel $0 < \alpha \leq 1$ tel que $(\lambda + 2\epsilon)\mu^\alpha$ soit strictement inférieur à 1. Nous savons alors que F est une contraction sur les fibres du fibré en disque D de rapport de contraction $(\lambda + 2\epsilon) < 1$ (voir lemme 5.13). D'autre part, F est lipschitzienne, en fait C^1 , puisque f est de classe C^2 . Comme l'inégalité $(\lambda + 2\epsilon)\mu^\alpha < 1$ est

vérifiée, la section invariante est höldérienne d'exposant α . Cette section invariante est le fibré instable E^U . Le même raisonnement s'applique à E^S et f^{-1} . \square

Terminons ce chapitre en énonçant un cas particulier du théorème 5.2.

THÉORÈME 5.20. Si f est un difféomorphisme de classe C^r et p un point fixe hyperbolique de f , il existe une variété stable locale $W_{loc}^S(p)$ et une variété instable locale $W_{loc}^U(p)$. Ces variétés sont tangentes à E^S , resp E^U , en p et sont de classe C^r si tel est le cas pour f .

$$\text{Les variétés } W^U(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_{loc}^U(p))$$

$$W^S(p) = \bigcup_{n \leq 0} f^n(W_{loc}^S(p))$$

sont, dans ce cas, de classe C^r et sont appelées variété globale instable, resp stable au point p . Elles sont l'image d'un disque par une immersion injective.

Si p est un point périodique de période n , on définit de façon analogue :

$$W_f^U(p) = W_{f^n}^U(p) \text{ etc...}$$

EXERCICE 5.1. Les conditions globales de 5.18 peuvent être remplacées par des conditions ponctuelles. Posons $k_x = \text{Lip}(F_x)$. Le lecteur pourra essayer de déterminer si 5.18 d. reste vrai quand on a l'inégalité : $\text{Lip}_{h(x)}(h^{-1})^r \cdot k_x \leq c' < 1$.

APPENDICE 5.1

Théorème d'inversion locale pour les applications lipschitziennes

Commençons par un lemme :

LEMME. Soit F un espace de Banach, X un espace métrique et f, g deux applications continues de X dans F . Supposons que f soit injective et f^{-1} lipschitzienne. Si g vérifie $\text{Lip}(f - g) < [\text{Lip}(f^{-1})]^{-1}$, g est aussi injective. On a de plus :

$$\text{Lip}(g^{-1}) \leq \{[\text{Lip}(f^{-1})]^{-1} - \text{Lip}(f - g)\}^{-1} = \frac{\text{Lip}(f^{-1})}{1 - \text{Lip}(g-f)\text{Lip}(f^{-1})}$$

Démonstration : Il suffit de calculer :

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(y)\| &\geq \|f(x) - f(y)\| - \|(g-f)(x) - (g-f)(y)\| \\ &\geq \{[\text{Lip}(f^{-1})]^{-1} - \text{Lip}(f-g)\}d(x,y) \quad . \quad \square \end{aligned}$$

Théorème d'inversion locale. Soient E et F deux espaces de Banach, soient U un ouvert de E et V un ouvert de F et soit f un homéomorphisme de U sur V dont l'inverse est lipschitzien. Soit encore h une application continue lipschitzienne de U dans F vérifiant $\text{Lip}(h)\text{Lip}(f^{-1}) < 1$. Posons $g = f + h$. L'application g est alors un homéomorphisme de U sur un ouvert de F ; de plus, son inverse g^{-1} est lipschitzienne.

Démonstration : Pour compléter le résultat du lemme, il suffit de montrer que g est ouverte, ou encore, puisque f^{-1} est un homéomorphisme de V dans U , que l'application $gf^{-1} = (f+h)f^{-1} = \text{Id} + hf^{-1}$ est ouverte.

Posons $v = hf^{-1}$. On a les majorations :

$$\lambda = \text{Lip } v \leq \text{Lip } h \text{Lip } f^{-1} < 1 \quad .$$

Soit x un point de V , montrons que, si la boule $\bar{B}_r(x)$ est contenue dans V ,

on a l'inclusion :

$$(\text{Id} + v) \bar{B}_r(x) \supset \bar{B}_{(1-\lambda)r}[(\text{Id} + v)(x)],$$

ce qui montrera que $\text{Id} + v$ est ouverte.

Quitte à composer par des translations, on peut supposer $x = 0$ et $v(x) = 0$.

Posons $s = (1 - \lambda)r$. Cherchons une inverse locale à $\text{Id} + v$, ou ce qui revient au même, une application $w : \bar{B}_s(0) \rightarrow F$ vérifiant les deux conditions :

$$(\text{Id} + w) [\bar{B}_s(0)] \subset \bar{B}_r(0) \quad \text{et} \quad (\text{Id} + v)(\text{Id} + w) = \text{Id}.$$

Cette dernière équation s'écrit aussi $w = -v(\text{Id} + w)$, forme qui nous conduit à chercher w comme point fixe. Soit $Z = \{w \in C^0(\bar{B}_s(0), F) \mid w(0) = 0 \text{ et } \text{Lip } w \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}\}$. L'espace Z , muni de la métrique uniforme, est complet.

De plus, un calcul simple montre que, si w appartient à Z , l'image $(\text{Id} + w)(\bar{B}_s(0))$ est contenue dans la boule $\bar{B}_r(0)$ et l'application $-v(\text{Id} + w)$ appartient à Z .

Définissons la transformation $\Phi : Z \rightarrow Z$ par $\Phi(w) = -v(\text{Id} + w)$. Montrons que Φ est une contraction. On a :

$$\| -v(\text{Id} + w) + v(\text{Id} + w') \| \leq \lambda \| \text{Id} + w - (\text{Id} + w') \| = \lambda \| w - w' \|.$$

Le point fixe de Φ est l'application w que l'on cherche. \square

COMPLÉMENT. Soit U un ouvert d'un espace de Banach E et g un homéomorphisme de U sur un ouvert de l'espace de Banach F . Supposons que l'homéomorphisme g^{-1} soit lipschitzien. Si λ est supérieur à $\text{Lip}(g^{-1})$, on a l'inclusion :

$$g[\bar{B}_r(x)] \supset \bar{B}_{\frac{r}{\lambda}}(gx).$$

Démonstration : On peut supposer avoir $x = g(x) = 0$. Soit $v \neq 0$ un point de la boule $\bar{B}_{\frac{r}{\lambda}}(0)$. Posons : $t_\infty = \sup \{t \geq 0 \mid [0, t]v \subset g[\bar{B}_r(0)]\}$. Comme l'image $g[\bar{B}_r(0)]$ contient un voisinage de 0, le nombre t_∞ est strictement positif. De plus, par définition de t_∞ , on a :

$$[0, t_\infty[v \subset g[\bar{B}_r(0)].$$

D'autre part, on a la majoration :

$$\|g^{-1}(tv) - g^{-1}(t'v)\| \leq \lambda |t - t'| \|v\| .$$

Ceci implique que la limite $\lim_{t \rightarrow t_\infty} g^{-1}(tv)$ existe et appartient à la boule fermée $\overline{B}_r(0)$; le point $t_\infty v$ appartient donc à $g(\overline{B}_r(0))$. Pour montrer qu'il en va de même du point v , il suffit de voir que t_∞ est supérieur ou égal à 1. Si t_∞ était strictement inférieur à 1, on aurait :

$$\|g^{-1}(t_\infty v)\| = \|g^{-1}(t_\infty v) - g^{-1}(0)\| \leq \lambda t_\infty \|v\| < \lambda \|v\| \leq r .$$

Le point $t_\infty v$ appartiendrait à l'image $g(\overset{\circ}{B}_r(0))$. Comme g est ouverte, on pourrait alors trouver un réel $\epsilon > 0$ tel que le segment $[t_\infty, t_\infty + \epsilon]v$ soit contenu dans l'ouvert $g(\overset{\circ}{B}_r(0))$, ce qui contredit la définition de t_∞ . \square

Remarque : La version C^r ($r \geq 1$) du théorème d'inversion locale est bien connue. Nous l'utiliserons occasionnellement dans la suite.

APPENDICE 5.2.

Théorème de la variété (in)stable. Démonstration d'Irwin.

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ un espace de Banach et T un automorphisme de $E = E_1 \oplus E_2$ préservant cette décomposition. On suppose que T est hyperbolique avec E_1 comme espace contractant et E_2 comme espace dilatant. Donc, il existe un réel λ , $0 < \lambda < 1$, tel que $\|T_1\| < \lambda$ et $\|T_2^{-1}\| < \lambda$, où $T_i = T|_{E_i}$.

Remarque : Au chapitre 5, nous notons E_1 le sous-espace dilatant et E_2 le sous-espace contractant. Comme nous voulons ici démontrer l'existence de la variété stable, nous échangeons les deux sous-espaces et nous notons E_1 le sous-espace contractant et E_2 le sous-espace dilatant.

Dans la suite, nous munissons E de la norme $\| \cdot \| = \max(\| \cdot \|_{E_1}, \| \cdot \|_{E_2})$. Nous notons p_i la projection de E sur E_i . Si f est une application à valeurs dans E , nous posons $f_i = p_i f$, $i = 1, 2$. Nous désignons par $E_i(r)$, $i = 1, 2$, la boule fermée dans E_i de centre 0 et de rayon r , c'est-à-dire $E_i(r) = \{x \in E_i \mid \|x\| \leq r\}$.

LEMME 5.2.1. Soit $f : E_1(r) \times E_2(r) \rightarrow E$ une perturbation lipschitzienne de T , telle que $\text{Lip}(f-T) \leq \epsilon < \inf(\lambda^{-1} - 1, 1 - \lambda)$. Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux points dans $E_1(r) \times E_2(r)$ qui vérifient :

$$\|x_1 - y_1\| < \|x_2 - y_2\| .$$

On a alors :

$$\|f_2(x) - f_2(y)\| \geq (\lambda^{-1} - \epsilon)\|x_2 - y_2\| > (\lambda + \epsilon)\|x_2 - y_2\| \geq \|f_1(x) - f_1(y)\| .$$

Démonstration : Nous pouvons écrire la suite d'inégalités :

$$\begin{aligned}
 \|f_1(x) - f_1(y)\| &\leq \|p_1(f-T)(x) - p_1(f-T)(y)\| + \|T_1x_1 - T_1y_1\| \\
 &\leq \epsilon \|x - y\| + \lambda \|x_1 - y_1\| \\
 &\leq (\lambda + \epsilon) \|x_2 - y_2\| .
 \end{aligned}$$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \|f_2(x) - f_2(y)\| &\geq \|T_2x_2 - T_2y_2\| - \|p_2(f-T)(x) - p_2(f-T)(y)\| \\
 &\geq \lambda^{-1} \|x_2 - y_2\| - \epsilon \|x - y\| \\
 &= (\lambda^{-1} - \epsilon) \|x_2 - y_2\| .
 \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration puisque :

$$\lambda^{-1} - \epsilon > 1 > \lambda + \epsilon \quad \square$$

Remarque stupide : On a $1 - \lambda = \inf(1 - \lambda, \lambda^{-1} - 1)$, car les deux inégalités $1 < \frac{1}{\lambda}$ et $0 < (1 - \lambda)$ impliquent $(1 - \lambda) < \frac{1}{\lambda} (1 - \lambda) = \frac{1}{\lambda} - 1$.

DÉFINITION 5.2.2. Soit $f : E_1(r) \times E_2(r) \rightarrow E$, et soit r' un nombre positif inférieur ou égal à r . Nous définissons l'ensemble $W_{r'}^S(f)$ par :

$$W_{r'}^S(f) = \{x \in E_1(r') \times E_2(r') \mid \forall n \geq 0, f^n(x) \text{ est défini et } \|f^n(x)\| \leq r'\}$$

COROLLAIRE 5.2.3. Soit $f : E_1(r) \times E_2(r) \rightarrow E$, $r < +\infty$, tel que $\text{Lip}(f-T) < \epsilon < 1 - \lambda$. L'ensemble $W_r^S(f)$ est le graphe d'une fonction $g : A \rightarrow E_2(r)$, où A est la projection de $W_r^S(f)$ dans $E_1(r)$. De plus, g est lipschitzienne avec $\text{Lip } g \leq 1$, et $f|_{W_r^S(f)}$ est une contraction.

Démonstration : Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2) \in W_r^S(f)$. Nous allons montrer que $\|x_2 - y_2\| \leq \|x_1 - y_1\|$. Supposons que $\|x_2 - y_2\| > \|x_1 - y_1\|$, par application du lemme 5.2.1, nous obtenons : $\|f_2(x) - f_2(y)\| \geq (\lambda^{-1} - \epsilon) \|x_2 - y_2\| > \|f_1(x) - f_1(y)\|$.

Par induction, il en résulte que pour tout $n \geq 1$:

$$\|f_2^n(x) - f_2^n(y)\| > \|f_1^n(x) - f_1^n(y)\| \quad \text{et} \quad \|f_2^n(x) - f_2^n(y)\| > (\lambda^{-1} - \epsilon)^n \|x_2 - y_2\|.$$

Comme $\|f_2^n(x) - f_2^n(y)\| \leq 2r$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda^{-1} - \epsilon)^n = +\infty$ (car $\lambda^{-1} - \epsilon > 1$), nous obtenons $\|x_2 - y_2\| = 0$, ce qui est absurde puisque nous avons supposé $\|x_2 - y_2\| > \|x_1 - y_1\| \geq 0$.

Nous avons donc montré que, si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2) \in W_r^S(f)$, on a $\|x_2 - y_2\| \leq \|x_1 - y_1\|$.

Il en résulte aisément que $W_r^S(f)$ est le graphe d'une fonction $g : A \rightarrow E_2(r)$, où $A = p_1(W_r^S(f))$ et que g est lipschitzienne avec $\text{Lip } g \leq 1$.

Il reste à vérifier que $f|_{W_r^S(f)}$ est une contraction.

Par ce qui précède, si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ sont deux points de $W_r^S(f)$, nous avons $\|x - y\| = \|x_1 - y_1\|$. Bien sûr, puisque $f(W_r^S(f)) \subset W_r^S(f)$, nous avons aussi : $\|f(x) - f(y)\| = \|f_1(x) - f_1(y)\|$.

Ceci nous donne :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|f_1(x) - f_1(y)\| \leq \|(f_1 - T_1)(x) - (f_1 - T_1)(y)\| + \|T_1 x_1 - T_1 y_1\| \\ &\leq \epsilon \|x - y\| + \lambda \|x_1 - y_1\| = (\lambda + \epsilon) \|x - y\|. \end{aligned}$$

Comme $\lambda + \epsilon < 1$, la restriction de f à $W_r^S(f)$ est une contraction. \square

COROLLAIRE 5.2.4. Avec les mêmes hypothèses que plus haut, l'application f a, au plus, un point fixe et, de plus, si $x \in W_r^S(f)$, la suite $f^n(x)$ converge vers le point fixe. En particulier, si $f(0) = 0$ et $x \in W_r^S(f)$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 0$.

Démonstration : C'est une conséquence triviale de 5.2.3. \square

THÉORÈME 5.2.5. (Théorème de la variété stable).

Soit $T : E \rightarrow E$ l'opérateur hyperbolique introduit plus haut. Il existe un nombre $\epsilon > 0$ (qui ne dépend que de λ) et pour tout $r > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$,

tels que : si $f : E_1(r) \times E_2(r) \rightarrow E$ vérifie $\text{Lip}(f-T) < \epsilon$ et $\|f(0)\| < \epsilon$, alors $W_r^S(f)$ est le graphe d'une fonction $g : E_1(r) \rightarrow E_2(r)$; cette fonction est lipschitzienne de constante de Lipschitz inférieure ou égale à 1.

De plus, si f est de classe C^k , la fonction g est aussi de classe C^k .

Motivation de la démonstration.

Supposons que $x = (x_1, x_2) \in W_r^S(f)$. Définissons une suite $(\gamma(n))_{n \geq 1}$, par $\gamma(n) = f^n(x)$. Cette suite vérifie : $\|\gamma(n)\| \leq r$, $f(\gamma(n)) - \gamma(n+1) = 0$, $\forall n \geq 1$ et $f(x) - \gamma(1) = 0$.

Réciproquement, si x et $(\gamma(n))_{n \geq 1}$ vérifient $\|\gamma(n)\| \leq r$, $f(x) - \gamma(1) = 0$ et $f(\gamma(n)) - \gamma(n+1) = 0$, le point x appartient à $W_r^S(f)$ et $\gamma(n) = f^n(x)$.

Démonstration du théorème 5.2.5.

Posons $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathbb{N}^*, E) = \{\gamma \mid \gamma = (\gamma(n))_{n \geq 1}, \gamma(n) \in E \ \& \ \sup_{n \geq 1} \|\gamma(n)\| < +\infty\}$.

L'espace \mathfrak{B} est muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|\gamma\| = \sup_{n \geq 1} \|\gamma(n)\|$; c'est un espace de Banach.

Posons $\mathfrak{B}(r) = \{\gamma \in \mathfrak{B} \mid \|\gamma\| \leq r\}$.

Munissons $E \times \mathfrak{B}$ (resp $E_1 \times \mathfrak{B}$) de la norme $\|\cdot\| = \max(\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_{\mathfrak{B}})$ (resp $\|\cdot\| = \max(\|\cdot\|_{E_1}, \|\cdot\|_{\mathfrak{B}})$).

Définissons $\mathfrak{F} : E_1(r) \times E_2(r) \times \mathfrak{B}(r) \rightarrow E_1 \times \mathfrak{B}$

$$(x_1, x_2, \gamma) \longmapsto (x_1, \mathfrak{F}_{x_1}(\gamma)), \quad n \geq 2$$

où $\mathfrak{F}_{x_1} : E_2(r) \times \mathfrak{B}(r) \rightarrow \mathfrak{B}$ est défini par : $\mathfrak{F}_{x_1}(\gamma)(1) = f(x_1, x_2) - \gamma(1)$

$$\mathfrak{F}_{x_1}(\gamma)(n) = f[\gamma(n-1)] - \gamma(n)$$

Remarquons que si nous montrons que \mathfrak{F} est inversible et que son image contient $E_1(r) \times 0$, nous pourrons définir g par $g = \pi_2 \mathfrak{F}^{-1} |_{E_1(r) \times 0}$, où π_2 est la projection $E_1 \times E_2 \times \mathfrak{B} \rightarrow E_2$.

Nous allons montrer ce qui précède en appliquant le théorème d'inversion donné dans le premier appendice de ce chapitre.

Définissons \mathfrak{J} de la même manière que \mathfrak{F} , avec T à la place de f . Il est clair que \mathfrak{J} est un opérateur linéaire continu ($\|\mathfrak{J}\| \leq 1 + \|T\|$) et que $\text{Lip}(\mathfrak{F} - \mathfrak{J}) \leq \text{Lip}(f - T)$. Par conséquent, si \mathfrak{J} est inversible et si $\text{Lip}(f - T) < \frac{1}{\|\mathfrak{J}^{-1}\|}$, alors \mathfrak{F} est aussi inversible.

Calcul de l'inverse de \mathfrak{J} .

$$\begin{aligned} \text{L'opérateur } \mathfrak{J} : E_1 \times E_2 \times \mathbb{G} &\longrightarrow E_1 \times \mathbb{G} \\ (x_1, x_2, \gamma) &\longrightarrow (x_1, \nu) \end{aligned}$$

est défini par :

$$\begin{aligned} (*) \quad \nu(1) &= \mathfrak{J}_{x_1}(\gamma)(1) = T(x_1, x_2) - \gamma(1) \\ \nu(n) &= \mathfrak{J}_{x_1}(\gamma)(n) = T[\gamma(n-1)] - \gamma(n) \quad n \geq 2 . \end{aligned}$$

Essayons d'exprimer x_2 et γ en fonction de x_1 et ν .

Pour cela, posons $\gamma(n) = (\gamma_1(n), \gamma_2(n)) \in E_1 \times E_2$ & $\nu(n) = (\nu_1(n), \nu_2(n)) \in E_1 \times E_2$.

Les équations (*) deviennent :

$$\begin{aligned} \nu_1(1) &= T_1(x_1) - \gamma_1(1) \\ \nu_2(1) &= T_2(x_2) - \gamma_2(1) \\ \nu_1(n) &= T_1[\gamma_1(n-1)] - \gamma_1(n) \quad n \geq 2 \\ \nu_2(n) &= T_2[\gamma_2(n-1)] - \gamma_2(n) \quad n \geq 2 . \end{aligned}$$

Les 1ère et 3e équations se réécrivent :

$$\begin{aligned} \gamma_1(1) &= -\nu_1(1) + T_1(x_1) \\ \gamma_1(n) &= T_1[\gamma_1(n-1)] - \nu_1(n) . \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\gamma_1(n) = -\sum_{j=1}^n T_1^{n-j}[\nu_1(j)] + T_1^n(x_1) .$$

La quatrième équation donne :

$$\gamma_2(n-1) = T_2^{-1} [\nu_2(n) + \gamma_2(n)] .$$

D'où par récurrence et passage à la limite :

$$\gamma_2(n) = \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j} [\nu_2(n+j)] .$$

Finalement la 2e équation donne :

$$x_2 = \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j} [\nu(j)] .$$

Remarquons que ces sommes infinies ont un sens, car on a :

$$\|T_2^{-1}\| < 1 \quad \text{et} \quad \sup_{n \geq 1} \|\gamma(n)\| < +\infty .$$

Une vérification facile montre alors que \mathfrak{F} est inversible et que son inverse est :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{-1} : E_1 \times \mathbb{C} &\longrightarrow E_1 \times E_2 \times \mathbb{C} \\ (x_1, \nu) &\longmapsto (x_1, x_2, \gamma) \end{aligned}$$

avec :

$$x_2 = \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j} [\nu_2(j)]$$

$$\gamma_1(n) = - \sum_{j=1}^n T_1^{n-j} [\nu_1(j)] + T_1^n(x_1)$$

$$\gamma_2(n) = \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j} [\nu_2(n+j)] .$$

On vérifie facilement que : $\|\mathfrak{F}^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\lambda}$.

Si $\text{Lip}(f - T) < \epsilon < 1 - \lambda$, l'application \mathfrak{F} est inversible.

Ceci résulte du théorème d'inversion de l'appendice 1 puisque \mathfrak{F} est inversible et que :

$$\text{Lip}(\mathfrak{F} - \mathfrak{F}) \leq \text{Lip}(f - T) < \epsilon < 1 - \lambda \leq \|\mathfrak{F}^{-1}\|^{-1} .$$

L'image de \mathfrak{F} contient $E_1(r) \times 0$, si ϵ est assez petit et si $f(0)$ est petit.

Remarquons que l'image de \mathfrak{F} contient $(x_1, 0)$ si et seulement si l'image de

$$\mathfrak{F}_{x_1} : E_2(r) \times \mathbb{C}(r) \rightarrow \mathbb{C}(r) \text{ contient } 0 .$$

Remarquons aussi que \mathfrak{F}_{x_1} est une perturbation lipschitzienne de $\mathfrak{F}_{x_1} : E_2 \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$, et que l'on a $\text{Lip}(\mathfrak{F}_{x_1} - \mathfrak{F}_{x_1}) \leq \text{Lip}(f - T)$. Comme \mathfrak{F}_{x_1} ne diffère de $\mathfrak{F}_0 : E_2 \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ que par une constante additive, on a, en fait : $\text{Lip}(\mathfrak{F}_{x_1} - \mathfrak{F}_0) \leq \text{Lip}(f - T)$.

Par définition $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F} |_{0 \times E_2 \times \mathfrak{B}}$, et, par conséquent, est donné par :

$$\mathfrak{F}_0(x_2, \gamma)(1) = T(0, x_2) - \gamma(1)$$

$$\mathfrak{F}_0(x_2, \gamma)(n) = T[\gamma(n-1)] - \gamma(n) \quad n \geq 2 .$$

L'opérateur linéaire \mathfrak{F}_0 est inversible et a pour inverse :

$$\mathfrak{F}_0^{-1} : \mathfrak{B} \rightarrow E_2 \times \mathfrak{B}$$

$$\nu \mapsto (x_2, \gamma)$$

$$\text{où : } x_2 = \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j} [\nu_2(j)]$$

$$\gamma_1(n) = \sum_{j=1}^n T_1^{n-j} [\nu_1(j)]$$

$$\gamma_2(n) = \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j} [\nu_2(n+j)] .$$

Remarquons que $\|\mathfrak{F}_0^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\lambda}$.

Si $\text{Lip}(f - T) < \epsilon (< 1 - \lambda)$, on a : $\text{Lip}(\mathfrak{F}_0^{-1} \mathfrak{F}_{x_1} - \text{Id}) < \frac{\epsilon}{1-\lambda}$.

On en déduit, en utilisant l'appendice 1, l'inégalité :

$$\text{Lip}[(\mathfrak{F}_0^{-1} \mathfrak{F}_{x_1})^{-1}] < \frac{1}{1 - \frac{\epsilon}{1-\lambda}} .$$

Ce qui, d'après le complément de l'appendice 1, nous donne :

$$\mathfrak{F}_0^{-1} \mathfrak{F}_{x_1} [E_2(r) \times \mathfrak{B}(r)] \supset \mathfrak{F}_0^{-1} \mathfrak{F}_{x_1}(0) + E_2(s) \times \mathfrak{B}(s), \quad \text{où } s = r(1 - \frac{\epsilon}{1-\lambda})$$

Calculons maintenant $\|\mathfrak{F}_0^{-1} \mathfrak{F}_{x_1}(0)\|$. D'abord $\mathfrak{F}_{x_1}(0) = \nu \in \mathfrak{B}$, avec :

$\nu(1) = f(x_1, 0)$ et $\nu(n) = f(0, 0)$, $n \geq 2$. Par conséquent $\mathfrak{F}_0^{-1} \mathfrak{F}_{x_1}(0) = (x_2, \gamma)$ avec

$$x_2 = T_2^{-1} [f_2(x_1, 0)] + \sum_{j=2}^{\infty} T_2^{-j} [f_2(0, 0)]$$

$$\gamma_1(n) = -T_1^{n-1}[f_1(x_1, 0)] - \sum_{j=2}^n T_1^{n-j}[f_1(0, 0)]$$

$$\gamma_2(n) = \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j}[f_2(0, 0)].$$

Remarquons alors que :

$$\|f_1(x_1, 0)\| \leq \|p_1(f-T)(x_1, 0)\| + \|T_1 x_1\| \leq \|(f-T)(x_1, 0)\| + \lambda \|x_1\|$$

$$\|f_2(x_1, 0)\| = \|p_2(f-T)(x_1, 0)\| \leq \|(f-T)(x_1, 0)\|.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \|(f-T)(x_1, 0)\| &\leq \|(f-T)(0)\| + \|(f-T)(x_1, 0) - (f-T)(0)\| \\ &\leq \|f(0)\| + \epsilon \|x_1\|. \end{aligned}$$

Ceci nous donne :

$$\|x_2\| \leq \epsilon \lambda \|x_1\| + \frac{\lambda}{1-\lambda} \|f(0)\|$$

$$\begin{aligned} \|\gamma_1(n)\| &\leq \lambda^n \|x_1\| + \epsilon \lambda^{n-1} \|x_1\| + \lambda^{n-1} \|f(0)\| + \sum_{j=2}^n \lambda^{n-j} \|f(0)\| \\ &\leq \|x_1\| (\lambda + \epsilon) + \frac{1}{1-\lambda} \|f(0)\| \end{aligned}$$

$$\|\gamma_2(n)\| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \|f(0)\|.$$

Ceci implique la majoration :

$$\|\mathfrak{F}_0^{-1} \mathfrak{F}_{x_1}(0)\| \leq (\lambda + \epsilon)r + \frac{1}{1-\lambda} \|f(0)\|.$$

Comme l'image de $\mathfrak{F}_0^{-1} \mathfrak{F}_{x_1}$ contient la boule de centre $\mathfrak{F}_0^{-1} \mathfrak{F}_{x_1}(0)$ et de rayon $s = r(1 - \frac{\epsilon}{1-\lambda})$, elle contiendra 0 dès que : $(\lambda + \epsilon)r + \frac{1}{1-\lambda} \|f(0)\| < r(1 - \frac{\epsilon}{1-\lambda})$.

Cette inégalité se réécrit :

$$\begin{aligned} \|f(0)\| &< (1-\lambda)r(1-\lambda - \epsilon - \frac{\epsilon}{1-\lambda}) \\ &= r[(1-\lambda)^2 - \epsilon(2-\lambda)]. \end{aligned}$$

Supposons alors $\epsilon < \frac{(1-\lambda)^2}{2-\lambda} (< 1-\lambda)$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $\delta < r[(1-\lambda)^2 - \epsilon(2-\lambda)]$. Par ce qui précède, si $\text{Lip}(f-T) < \epsilon$ et si $\|f(0)\| < \delta$,

l'image de $\mathfrak{F}_0^{-1} \mathfrak{F}_{x_1}$ contient 0. Comme \mathfrak{F}_0 est linéaire, l'image de \mathfrak{F}_{x_1} contient aussi 0, ce qui implique que l'image de \mathfrak{F} contient $(x_1, 0)$, ceci pour tout x_1 dans $E_1(r)$.

Si l'on a $\text{Lip}(f - T) < \epsilon < \frac{(1-\lambda)^2}{2-\lambda}$ et $\|f(0)\| < \delta < r[(1-\lambda)^2 - \epsilon(2-\lambda)]$, alors $W_r^S(f)$ est le graphe d'une application $g : E_1(r) \rightarrow E_2(r)$. De plus, g est lipschitzienne et $\text{Lip } g \leq 1$.

En effet, avec ces hypothèses, \mathfrak{F} est inversible et son image contient $E_1(r) \times 0$. On sait que g est définie par $\pi_2 \mathfrak{F}^{-1} | E_1(r) \times 0$, où π_2 est la projection $E_1 \times E_2 \times \mathfrak{B} \rightarrow E_2$. Comme on l'a vu plus haut (5.2.3), g est obligatoirement lipschitzienne et $\text{Lip } g \leq 1$.

Si f est C^k , la fonction g est de classe C^k .

On suppose bien sûr que $\text{Lip}(f - T) \leq \epsilon$ et $\|f(0)\| < \delta$, où ϵ et δ sont donnés par ce qui précède. La fonction g est donnée par $g = \pi_2 \mathfrak{F}^{-1} | E_1(r) \times 0$; par conséquent, elle est C^k dès que \mathfrak{F}^{-1} l'est. Comme on a $\text{Lip}(\mathfrak{F} - \mathfrak{T}) < \|\mathfrak{F}^{-1}\|^{-1}$, si \mathfrak{F} est C^1 on obtient, en tout point $(x, \gamma) \in E(r) \times \mathfrak{B}(r)$, l'inégalité :

$$\|D\mathfrak{F}_{(x, \gamma)} - \mathfrak{T}\| < \|\mathfrak{F}^{-1}\|^{-1}.$$

Par conséquent, l'application linéaire $D\mathfrak{F}_{(x, \gamma)}$ est un isomorphisme en tout point $(x, \gamma) \in E(r) \times \mathfrak{B}(r)$. La version C^k du théorème d'inversion montre alors que \mathfrak{F}^{-1} est C^k dès que \mathfrak{F} l'est.

Nous sommes ramenés à montrer que \mathfrak{F} est C^r , si l'application f est C^r . Ceci n'est pas nécessairement vrai, mais on va voir que l'on peut contourner aisément cette difficulté.

Remarquons que la dérivée probable de \mathfrak{F} au point $(x, \gamma) = (x_1, x_2, \gamma) \in E_1(r) \times E_2(r) \times \mathfrak{B}(r)$ est donnée par l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} : E_1 \times E_2 \times \mathfrak{B} &\rightarrow E_1 \times \mathfrak{B} \\ (y_1, y_2, \nu) &\longmapsto (y_1, \xi), \end{aligned}$$

où $\xi(1) = Df_x(y) - \nu(1)$ avec $y = (y_1, y_2)$

$\xi(n) = Df_{\gamma(n-1)}[\nu(n-1)] - \nu(n)$ pour $n \geq 2$.

On a :

$$\mathfrak{F}(x+y, \gamma + \nu) - \mathfrak{F}(x, \gamma) - \mathfrak{L}(y, \nu) = (0, \varphi) \in E_1 \times \mathfrak{B},$$

où $\varphi(1) = f(x+y) - f(y) - Df_x(y) = \int_0^1 (Df_{x+ty} - Df_x)(y) dt$

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= f[\gamma(n-1) + \nu(n-1)] - f(\gamma(n-1)) - Df_{\gamma(n-1)}(\nu(n-1)) \\ &= \int_0^1 (Df_{\gamma(n-1) + t\nu(n-1)} - Df_{\gamma(n-1)})(\nu(n-1)) dt, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Ceci nous fournit l'inégalité :

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathfrak{F}(x+y, \gamma + \nu) - \mathfrak{F}(x, \gamma) - \mathfrak{L}(y, \nu)\|}{\|y, \nu\|} &\leq \\ &\leq \max \left(\int_0^1 \|Df_{x+ty} - Df_x\| dt, \sup_{n \geq 1} \int_0^1 \|Df_{\gamma(n) + t\nu(n)} - Df_{\gamma(n)}\| dt \right) \end{aligned}$$

Le second membre de cette inégalité ne tend pas obligatoirement vers zéro avec $\|y, \nu\|$. Il tend vers zéro avec $\|y, \nu\|$ quand Df est uniformément continue, mais aussi quand l'ensemble $\{\gamma(n) \mid n \geq 1\}$ est contenu dans un compact de $E(r)$, donc en particulier si la suite $(\gamma(n))_{n \geq 1}$ est convergente. Ceci nous amène à introduire le sous-espace \mathcal{C} de \mathfrak{B} formé des suites convergentes :

$$\mathcal{C} = \{\gamma \in \mathfrak{B} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) \text{ existe}\}.$$

L'espace E étant complet, il est facile de voir en utilisant la condition de Cauchy que \mathcal{C} est fermé dans \mathfrak{B} ; c'est donc un espace de Banach.

Remarquons l'inclusion $\mathfrak{F}(E_1(r) \times E_2(r) \times \mathcal{C}(r)) \subset E_1(r) \times \mathcal{C}$. Désignons alors par $\tilde{\mathfrak{F}}$ la restriction : $\tilde{\mathfrak{F}}|_{E_1(r) \times E_2(r) \times \mathcal{C}(r)} : E_1(r) \times E_2(r) \times \mathcal{C}(r) \rightarrow E_1(r) \times \mathcal{C}$.

Nous définissons $\tilde{\mathfrak{F}}$ comme $\tilde{\mathfrak{F}}$ en remplaçant \mathfrak{F} par \mathfrak{J} .

Nous avons essentiellement montré plus haut que $\tilde{\mathfrak{F}}$ est C^1 , dès que f est C^1 . Plus généralement, nous laissons au lecteur le soin de démontrer que $\tilde{\mathfrak{F}}$ est C^k dès que f est C^k .

On refait alors le même raisonnement avec $\tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{\mathfrak{J}}, \mathcal{C}$ à la place de $\mathfrak{F}, \mathfrak{J}, \mathcal{C}$.
la seule chose que l'on doit vérifier pour pouvoir l'appliquer, c'est que $\tilde{\mathfrak{J}}$ est inversible, ou encore que $\tilde{\mathfrak{J}}^{-1}(E_1 \times \mathcal{C}) \subset E_1 \times E_2 \times \mathcal{C}$. Nous vérifions cela maintenant.

Soit $x_1 \in E_1$ et $\nu \in \mathcal{C}$; rappelons que $\tilde{\mathfrak{J}}^{-1}(x_1, \nu) = (x_1, x_2, \gamma)$ est donné par :

$$\begin{aligned} x_2 &= \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j}[\nu_2(j)] \\ \gamma_1(n) &= -\sum_{j=1}^n T_1^{n-j}[\nu_1(j)] + T_1^n(x_1) \\ \gamma_2(n) &= \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j}[\nu_2(n+j)] . \end{aligned}$$

Vérifions que γ appartient à \mathcal{C} en montrant que γ_1 et γ_2 sont des suites de Cauchy. Commençons par γ_1 ; nous avons :

$$\|\gamma_1(n) - \gamma_1(m)\| \leq \left\| \sum_{j=1}^n T_1^{n-j}[\nu_1(j)] - \sum_{j=1}^m T_1^{m-j}[\nu_1(j)] \right\| + \|T_1^n(x_1) - T_1^m(x_1)\|$$

Puisque $\|T_1\| < \lambda < 1$, le terme $\|T_1^n(x_1) - T_1^m(x_1)\|$ tend vers zéro quand m et n tendent vers l'infini.

Majorons l'autre terme :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n T_1^{n-j}[\nu_1(j)] - \sum_{j=1}^m T_1^{m-j}[\nu_1(j)] \right\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} T_1^k[\nu_1(n-k)] - \sum_{k=0}^{m-1} T_1^k[\nu_1(m-k)] \right\| \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \right) \sup_{\substack{h \geq n-N \\ \ell \geq m-N}} \|\nu_1(h) - \nu_1(\ell)\| + 2 \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda^k \right) \|\nu_1\| . \end{aligned}$$

Soit alors $\epsilon > 0$; on peut trouver N_0 assez grand pour que $\sup_{\substack{h \geq N_0 \\ \ell \geq N_0}} \|\nu_1(h) - \nu_1(\ell)\| \leq \frac{1-\lambda}{2} \epsilon$

et que l'on ait $\sum_{k=N_0+1}^{\infty} \lambda^k < \frac{\epsilon}{4\|\nu_1\|}$. Ceci nous donne, pour n et $m \geq 2N_0$:

$$\left\| \sum_{j=1}^n T_1^{n-j}[\nu_1(j)] - \sum_{j=1}^m T_1^{m-j}[\nu_1(j)] \right\| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \right) \frac{1-\lambda}{2} \epsilon + \frac{2\epsilon\|\nu_1\|}{4\|\nu_1\|} = \epsilon .$$

Nous avons donc montré que γ_1 est une suite de Cauchy.

Passons au cas de γ_2 qui est plus facile :

$$\|\gamma_2(n) - \gamma_2(m)\| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \right) \sup_{j \geq 1} \|\nu_2(n+j) - \nu_2(m+j)\| .$$

Comme ν_2 est une suite de Cauchy, le terme $\sup_{j \geq 1} \|\nu_2(n+j) - \nu_2(m+j)\|$ tend vers zéro quand m et n tendent vers l'infini. Il en résulte que γ_2 est aussi une suite de Cauchy.

Donc g peut être aussi définie par $g = \tilde{\pi}_2 \tilde{\mathfrak{F}}^{-1} | E_1(r) \times 0$, où $\tilde{\pi}_2$ est la projection $E_1 \times E_2 \times \mathcal{C} \rightarrow E_2$. Comme $\tilde{\mathfrak{F}}$ est C^k dès que f est C^k , tel est aussi le cas de g .

Ceci achève la démonstration du théorème de la variété stable. \square

COMPLÉMENTS 5.2.6.

i) Si, de plus, f est C^1 et vérifie $f(0) = 0$ & $Df_0 = T$, alors $g(0) = 0$ et $Dg_0 = 0$. Par conséquent, E_1 est l'espace tangent à $W_r^S(f)$ en 0 .

ii) Soit $\eta_{\epsilon, \delta}^k = \{f : E_1(r) \times E_2(r) \rightarrow E \mid \text{Lip}(f-T) < \epsilon, \|f(0)\| < \delta, f \text{ est } C^k \text{ et } D^k f \text{ est uniformément continue et bornée}\}$. Cet ensemble est muni de la topologie C^k . De même, $C^k(E_1(r), E_2(r))$ est muni de la topologie C^k .

L'application $\eta_{\epsilon, \delta}^k \longrightarrow C^k(E_1(r), E_2(r))$ est continue .
 $f \longmapsto g$

Démonstration : i) Bien sûr $g(0) = 0$, car $0 \in W_r^S(f)$. De plus $Dg_0 = \tilde{\pi}_2 (D\tilde{\mathfrak{F}}_0)^{-1} | E_1 \times 0$; or $(D\tilde{\mathfrak{F}}_0)^{-1} = D\tilde{\mathfrak{F}}_0^{-1} = \tilde{\mathfrak{F}}^{-1}$, par conséquent, si $v_1 \in E_1$, on a :

$$Dg_0(v_1) = \tilde{\pi}_2 \tilde{\mathfrak{F}}^{-1}(v_1, 0) = \sum_{j=1}^{\infty} T_2^{-j}(0) = 0 .$$

ii) C'est une conséquence immédiate des deux faits suivants, que le lecteur démontrera :

1° Si $f \in \eta_{\epsilon, \delta}^k$, alors $D^k \tilde{\mathfrak{F}}$ est uniformément continue et bornée, et l'applica-

tion $f \mapsto \tilde{\mathcal{F}}$ est continue pour la topologie C^k .

2° L'application $\tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}^{-1}$ est continue pour la topologie C^k sur l'ensemble des $\tilde{\mathcal{F}}$ dont la k -ième dérivée $D^{k\tilde{\mathcal{F}}}$ est uniformément continue et bornée. \square

Nous esquissons maintenant une autre variante de la démonstration d'Irwin.

Énonçons et démontrons d'abord 2 lemmes.

LEMME 5.2.7. Soit $\theta : X \times Y \rightarrow Y$ une application continue. Supposons que Y soit un espace métrique complet et que θ soit une contraction uniforme de facteur k , i.e.

$$\exists k < 1 \mid \forall x \in X, \forall y, y' \in Y, d(\theta(x, y), \theta(x, y')) \leq kd(y, y') .$$

Désignons par θ_x l'application $Y \rightarrow Y$.
 $x \mapsto \theta(x, y)$

Notons φ l'application de X dans Y qui, à $x \in X$, fait correspondre le point fixe de θ_x . Cette application φ est continue. De plus, si X est métrique et θ lipschitzienne, l'application φ est lipschitzienne.

Démonstration : Soient x et x' deux points de X ; nous avons :

$$\begin{aligned} d[\varphi(x), \varphi(x')] &= d[\theta(x, \varphi(x)), \theta(x', \varphi(x'))] \\ &\leq d[\theta(x, \varphi(x)), \theta(x', \varphi(x))] + d[\theta(x', \varphi(x)), \theta(x', \varphi(x'))] \\ &\leq d[\theta(x, \varphi(x)), \theta(x', \varphi(x))] + kd[\varphi(x), \varphi(x')] . \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons l'inégalité :

$$d[\varphi(x), \varphi(x')] \leq \frac{1}{1-k} d[\theta(x, \varphi(x)), \theta(x', \varphi(x))] .$$

Le lemme en résulte. \square

LEMME 5.2.8. Si, de plus, X et Y sont des boules dans des espaces de Banach et si θ est de classe C^k , alors φ est de classe C^k et l'on a :

$$D\varphi_x = [\text{Id} - D_2\theta(x, \varphi(x))]^{-1} D_1\theta(x, \varphi(x)) .$$

Démonstration : Remarquons d'abord que l'on a $\|D_2\theta(x,y)\| \leq k < 1$, puisque $\|\theta(x,y) - \theta(x,y')\| \leq k\|y - y'\|$. Par conséquent, $\text{Id} - D_2\theta(x,y)$ est inversible et son inverse est donné par :

$$[\text{Id} - D_2\theta(x,y)]^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} [D_2\theta(x,y)]^i .$$

Pour montrer que φ est C^1 et a pour dérivée en x :

$[\text{Id} - D_2\theta(x,\varphi(x))]^{-1} D_1\theta(x,\varphi(x))$, nous devons montrer que :

$\|\varphi(x+v) - \varphi(x) - [\text{Id} - D_2\theta(x,\varphi(x))]^{-1} D_1\theta(x,\varphi(x))(v)\|$ est $o(\|v\|)$.

$$\begin{aligned} & \|\varphi(x+v) - \varphi(x) - [\text{Id} - D_2\theta(x,\varphi(x))]^{-1} D_1\theta(x,\varphi(x))(v)\| \leq \\ & \leq \|[\text{Id} - D_2\theta(x,\varphi(x))]^{-1}\| \|\varphi(x+v) - \varphi(x) - D_2\theta(x,\varphi(x))[\varphi(x+v) - \varphi(x)] - D_1\theta(x,\varphi(x))(v)\| \\ & \leq \|[\text{Id} - D_2\theta(x,\varphi(x))]^{-1}\| \|\theta(x+v,\varphi(x+v)) - \theta(x,\varphi(x)) - D\theta(x,\varphi(x))[\varphi(x+v) - \varphi(x)]\| . \end{aligned}$$

Cette dernière expression est $o(\|(x+v,\varphi(x+v)) - (x,\varphi(x))\|)$ et est, par conséquent, $o(\|v\|)$ puisque φ est lipschitzienne.

Nous avons donc montré que φ est C^1 si θ est C^1 . Remarquons que $D\varphi$ est le composé

$$X \xrightarrow{(\text{Id}, \varphi)} X \times Y \xrightarrow{(D_1\theta, D_2\theta)} L(E,F) \times U \xrightarrow{(\text{id}, \rho)} L(E,F) \times L(F,F) \xrightarrow{\text{comp}} L(E,F)$$

où E (resp F) est l'espace de Banach qui contient X (resp Y), et :

$$\begin{aligned} U &= \{P \in L(F,F) \mid \|P\| < 1\} \\ U &\xrightarrow{\rho} L(F,F) \\ P &\longmapsto [\text{Id} - P]^{-1} \\ L(E,F) \times L(F,F) &\longrightarrow L(E,F) \\ Q, P &\longmapsto P \circ Q . \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate montre alors que φ est C^k dès que θ l'est. \square

Variante de la démonstration de 5.2.5.

Nous introduisons l'application $\zeta : E_1(r) \times \mathbb{B}(r) \rightarrow \mathbb{B}$
 $x_1, \gamma \mapsto \zeta(x_1, \gamma) = \nu$ avec

$$\nu_1(1) = f_1[x_1, \gamma_2(1)]$$

$$\nu_1(n) = f_1[\gamma_1(n-1), \gamma_2(n)], \quad n \geq 2$$

$$\nu_2(1) = T_2^{-1}[T_2 \gamma_2(1) + \gamma_2(2) - f_2(x_1, \gamma_2(1))]$$

$$\nu_2(n) = T_2^{-1}[T_2(\gamma_2(n)) + \gamma_2(n+1) - f_2(\gamma_1(n-1), \gamma_2(n))] .$$

Supposons que $\text{Lip}(f-T) < \epsilon$, ; un calcul facile montre que

$\text{Lip } \zeta \leq \max[\lambda + \epsilon, \lambda(\epsilon + 1)] = \lambda + \epsilon$. Donc, si $\epsilon < 1 - \lambda$, l'application ζ est une contraction uniforme sur le second facteur. Supposons que $\|f(0)\| < \delta$, un autre calcul montre que $\|\zeta(0)\| < \max(\delta, \lambda \delta) = \delta$. Par conséquent $\zeta(E_1(r) \times \mathbb{B}(r)) \subset \mathbb{B}(r)$ dès que $\delta + (\lambda + \epsilon)r \leq r$, c'est-à-dire dès que $\delta \leq r(1 - \lambda - \epsilon)$.

Donc, si on a $\text{Lip}(f-T) < \epsilon < 1 - \lambda$, et $\|f(0)\| < \delta < r(1 - \lambda - \epsilon)$, nous pouvons appliquer le lemme 5.2.7. à ζ . Il existe une application $\Phi : E_1(r) \rightarrow \mathbb{B}(r)$ continue (et même lipschitzienne), telle que $\Phi(x_1)$ soit l'unique point fixe de ζ_{x_1} .

Remarquons alors que, si γ est un point fixe de ζ_{x_1} et si nous posons $x_2 = \gamma_2(1)$, on a $f_1(x_1, x_2) = \gamma_1(1)$, et aussi

$$\gamma_2(1) = T_2^{-1}[T_2(\gamma_2(1)) + \gamma_2(2) - f_2(x_1, \gamma_2(1))],$$

c'est-à-dire $\gamma_2(2) = f_2(x_1, \gamma_2(1)) = f_2(x_1, x_2)$.

Par induction, nous obtenons : $f^n(x_1, x_2) = (f_1^n(x_1, x_2), f_2^n(x_1, x_2)) \in E_1(r) \times E_2(r)$,
 $\gamma_1(n) = f_1^n(x_1, x_2)$ et $\gamma_2(n+1) = f_2^n(x_1, x_2)$.

Par conséquent, si nous définissons l'application $g : E_1(r) \rightarrow E_2(r)$ par $g = \pi \Phi$,
 où $\pi : B \rightarrow E_2$, la variété stable $W_r^S(f)$ est exactement le graphe de g .
 $\gamma \mapsto \gamma_2(1)$

Ceci démontre le théorème de la variété stable dans le cas lipschitzien.

Il reste à montrer que g est C^k , si f l'est.

Si ζ est C^k , le lemme 5.2.8 montre alors que g est C^k . Comme dans la première démonstration ζ n'est pas obligatoirement C^k , si f l'est. Nous évitons ce piège stupide en remplaçant l'espace \mathcal{B} des suites bornées par l'espace \mathcal{C} des suites convergentes comme dans la première démonstration. Nous laissons les détails au lecteur. \square

CHAPITRE 6 - VARIÉTÉS STABLES ASSOCIÉES A DES
ENSEMBLES HYPERBOLIQUES

Nous allons généraliser aux ensembles hyperboliques plus complexes, le fer à cheval ou le solénoïde par exemple, la théorie que nous avons faite pour un point périodique.

DÉFINITION 6.1. Soit f un difféomorphisme de M et x un point de M . Posons :

$$W_{\epsilon}^S(x, f) = \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty \\ \text{et } d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon \ \forall n \geq 0\}$$

$$W^S(x, f) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n} W_{\epsilon}^S(f^n(x))$$

$$W_{\epsilon}^U(x, f) = \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow -\infty \\ \text{et } d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon \ \forall n \leq 0\}$$

$$W^U(x, f) = \bigcup_{n \geq 0} f^n W_{\epsilon}^U(f^{-n}(x)) .$$

La définition de $W^S(x, f)$ (resp. $W^U(x, f)$) que nous donnons ici est équivalente à celle que nous avons donnée dans le chapitre 2.

THÉORÈME 6.2. Soit Λ un sous-ensemble fermé hyperbolique invariant pour f .

Munissons Λ d'une métrique adaptée. Il existe alors un réel positif ϵ tel que $W_{\epsilon}^S(x, f)$ soit un disque plongé de dimension égale à celle de l'espace de E_x^S , quel que soit le point x de Λ ; on a, de plus, $T_x W_{\epsilon}^S(x) = E_x^S$; le lecteur écrira l'énoncé instable correspondant.

Les disques stables et instables vérifient de plus les propriétés :

$$2) \quad d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y) \quad \forall y \in W_\epsilon^S(x) \quad \forall n \geq 0$$

$$d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \lambda^n d(x, y) \quad \forall y \in W_\epsilon^U(x) \quad \forall n \geq 0$$

où $\lambda < 1$ vérifie $\|Df|_{E^S}\| < \lambda$ et $\|(Df|_{E^U})^{-1}\| < \lambda$.

3) Le plongement de $W_\epsilon^S(x, f)$ varie continûment avec le point x .

$$4) \quad W_\epsilon^S(x, f) = \{y \mid d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon \quad \forall n \geq 0\}$$

$$W_\epsilon^U(x, f) = \{y \mid d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon \quad \forall n \leq 0\}$$

5) La variété $W_\epsilon^S(x, f)$ est aussi lisse que f .

Explicitons 3) : Si f est de classe C^r et si l'on pose $n = \dim E^S$, il existe alors un voisinage $U(x)$ du point x et une application continue θ :

$$\theta : U(x) \rightarrow \text{Plon}^r(D^n, M)$$

tel que : $\theta(x)(0) = x$ et $\theta(y)(D^n) = W_\epsilon^S(y, f)$, $\forall y \in U(x)$.

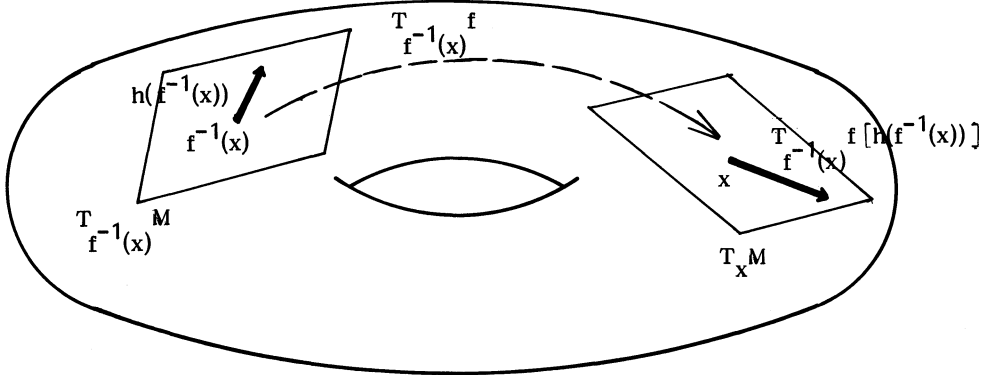
Nous allons ramener la démonstration de ce théorème à l'application du théorème de la variété stable dans un espace de Banach convenablement choisi. Commençons par quelques préliminaires concernant les espaces de dimension infinie dont nous nous servirons.

Soit Λ un fermé de M et E un fibré vectoriel sur Λ . Notons $\Gamma^0(\Lambda, E)$ l'espace des sections continues de E et $\Gamma^b(\Lambda, E)$ l'espace des sections bornées de E . Ces deux espaces ont une structure naturelle d'espace vectoriel. L'espace $\Gamma^0(\Lambda, E)$ est contenu dans $\Gamma^b(\Lambda, E)$ puisque M est compacte donc aussi le fermé $\Lambda \subset M$. La norme sup de $\Gamma^b(\Lambda, E)$ est définie par : $\|h\| = \sup_{x \in \Lambda} \|h(x)\|$. Cette norme munit Γ^b d'une structure d'espace de Banach. L'ensemble Γ^0 est un fermé de Γ^b , puisqu'une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Soit f un homéomorphisme de M et Λ un fermé invariant pour f . Définissons l'automorphisme $f_\#$ de $\Gamma^b(\Lambda, T_\Lambda M)$ par :

$$\begin{aligned} f_{\#} &: \Gamma^b(\Lambda; T_{\Lambda} M) \rightarrow \Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda} M) \\ h &\longmapsto Df \circ h \circ f^{-1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire : $(f_{\#}(h))(x) = Df_{f^{-1}(x)}(h(f^{-1}(x)))$.



Si f est de classe C^1 , l'automorphisme Df de TM est de classe C^0 ;
 $f_{\#}(\Gamma^0(\Lambda, T_{\Lambda} M))$ est donc contenu dans $\Gamma^0(\Lambda, T_{\Lambda} M)$.

Remarquons que f est une application linéaire continue de l'espace de Banach $\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda} M)$ dans lui-même, de norme $\|f_{\#}\| = \|Df\|$.

LEMME 6.3. Soit Λ un fermé invariant associé à un difféomorphisme f de classe C^1 de M . L'ensemble invariant Λ est hyperbolique si et seulement si l'automorphisme $f_{\#}$ de $\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda} M)$ est une application linéaire hyperbolique.

Démonstration : Si Λ est un ensemble hyperbolique invariant, l'espace vectoriel $\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda} M)$ admet un scindage hyperbolique pour $f_{\#}$:

$$\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda} M) = \Gamma^b(\Lambda, E^S) \oplus \Gamma^b(\Lambda, E^U) .$$

D'autre part, si $\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda} M) = \mathcal{E}^S \oplus \mathcal{E}^U$ est un scindage hyperbolique invariant pour $f_{\#}$, il permet de retrouver le scindage hyperbolique de $T_{\Lambda} M$, car :

$$E_x^S = \mathcal{E}^S(x) = \{g(x) \mid g \in \mathcal{E}^S\}$$

$$E_x^U = \mathcal{E}^U(x) = \{g(x) \mid g \in \mathcal{E}^U\}$$

Nous laissons les détails au lecteur. \square

Soit $B(\Lambda, M)$ l'espace des fonctions bornées, non nécessairement continues, de Λ dans M . L'espace $B(\Lambda, M)$ est une variété banachique de modèle l'espace des champs de vecteur bornés (section du fibré tangent) $\Gamma^b(\Lambda, TM)$. Rappelons la définition de l'application \exp_x et celle d'une carte exponentielle de $B(\Lambda, M)$.

L'application \exp_x est l'application de $T_x M$ dans M qui :

- 1) est tangente à l'identité en l'origine de $T_x M$,
- 2) envoie les droites de $T_x M$ passant par l'origine sur les géodésiques de M passant par x ,
- 3) envoie les boules de centre l'origine sur les boules de centre x ,
- 4) $d(\exp_x \xi, x) = \|\xi\|$ pour $\xi \in T_x M$ de module assez petit.

On sait que lorsque δ est assez petit $\exp_x : B(0, \delta) \rightarrow B(x, \delta)$ est un difféomorphisme surjectif. Si M est compacte, le choix de δ peut ne plus dépendre du point. Dans ce cas, l'exponentielle est un difféomorphisme du δ -voisinage de la section nulle du fibré tangent sur un voisinage de la diagonale de $M \times M$:

$$u \mapsto (m, \exp_m(u)) \quad \text{où } u \in T_m(M) \\ TM \rightarrow M \times M .$$

Cartes de $B(\Lambda, M)$. Soit $\text{inc}(\Lambda)$ l'inclusion de Λ dans M . Soit U_δ le voisinage de $\text{inc}(\Lambda) \subset B(\Lambda, M)$, ensemble des applications g vérifiant pour tous les points de Λ : $d(g(x), x) \leq \delta$. La carte Φ sera définie par :

$$U_\delta(\text{inc}(\Lambda)) \xrightarrow{\Phi} \Gamma_\delta^b(\Lambda, TM) \subset \Gamma^b(\Lambda, TM)$$

$$h \xleftarrow{\Phi} \exp^{-1}(\text{graphe}(h))$$

$\Phi(h)$ est donc la section définie par $\Phi(h)(x) = \exp_x^{-1}(h(x))$, soit encore $\Phi(h)(x) = \exp^{-1}(x, h(x))$.

Remarquons que $\Phi(\text{inc}(\Lambda))$ est la section nulle de TM que nous noterons $\tilde{0}$.

Les applications \hat{F} et \tilde{F} . Associons à f l'automorphisme \hat{F} de $B(\Lambda, M)$ défini par $\hat{F}(h) = fhf^{-1}$. L'inclusion $\text{inc}(\Lambda)$ est alors un point fixe de \hat{F} . Montrons que $\text{inc}(\Lambda)$ est un point fixe hyperbolique de \hat{F} . En utilisant la carte exponentielle, il suffit d'étudier l'application \tilde{F} qui est définie au voisinage de la section nulle par $\tilde{F} = \Phi \hat{F} \Phi^{-1}$:

$$\Gamma_{\eta}^b(\Lambda, TM) \xrightarrow{\Phi} U(\text{inc}(\Lambda)) \xrightarrow{\hat{F}} B(\Lambda, M) \xrightarrow{\Phi^{-1}} \Gamma_{\eta}^b(\Lambda, TM) .$$

L'image de la section σ de $\Gamma_{\eta}^b(\Lambda, TM)$, pour $\eta < \delta$ assez petit, sera la section :

$$\tilde{F}(\sigma)(x) = \exp_x^{-1}(f(\exp_{f^{-1}(x)}^{-1}(\sigma(f^{-1}(x)))))) .$$

L'application \tilde{F} est différentiable (C^r si tel est le cas pour f) et admet pour dérivée en $\tilde{0}$ l'automorphisme $f_{\#} = D_{\tilde{0}}\tilde{F}$ de $\Gamma^b(\Lambda, TM)$ défini par :

$$f_{\#}(\sigma) = Df \circ \sigma \circ f^{-1} .$$

Le lemme 6.3 nous permet d'affirmer que l'application $f_{\#}$ est linéaire hyperbolique, donc que la section nulle $\tilde{0}$ est un point fixe hyperbolique de \tilde{F} , ce qui revient à dire que $\text{inc}(\Lambda)$ est un point fixe hyperbolique de \hat{F} . Le fibré $\Gamma^b(\Lambda, TM)$ admet, pour $f_{\#} = D_{\tilde{0}}\tilde{F}$, le scindage hyperbolique suivant :

$$\Gamma^b(\Lambda, TM) = \Gamma^b(\Lambda, E^S) \oplus \Gamma^b(\Lambda, E^U)$$

où $TM|_{\Lambda} = E^S \oplus E^U$ est le scindage hyperbolique pour f de TM .

Variété stable de $\tilde{0}$. Appliquons au point hyperbolique $\tilde{0}$ le théorème de la variété stable : il existe une variété laissée stable par $\tilde{F} : \tilde{W}_{\eta}^S(\tilde{0}, \tilde{F})$ qui est le graphe d'une fonction de classe C^r :

$$\psi : \Gamma_{\eta}^b(\Lambda, E^S) \rightarrow \Gamma_{\eta}^b(\Lambda, E^U) .$$

La variété stable \tilde{W}_{ϵ}^S que nous trouvons utilise la norme $\| \cdot \|'$ sur $\Gamma_b(\Lambda, E) = \Gamma_b(\Lambda, E^S) \oplus \Gamma_b(\Lambda, E^U)$ définie par : $\|(x^S, x^U)\|' = \max(\|x^S\|, \|x^U\|)$.

La variété stable $\tilde{W}_\eta^S(\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\mathcal{F}})$ vérifie :

$$\tilde{W}_\eta^S(\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\mathcal{F}}) = \{ \sigma \in \Gamma_\eta^b(\Lambda, TM) \mid (\tilde{\mathcal{F}})^n(\sigma) \in \Gamma_\eta^b(\Lambda, TM) \quad \forall n \geq 0 \}$$

ou encore, si $\tau \in \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^S)$, $\psi(\tau) \in \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^U)$ est la seule section du fibré instable qui vérifie :

$$\forall n \geq 0, \quad (\tilde{\mathcal{F}})^n(\tau, \psi(\tau)) \in B_\eta^i(\tilde{\mathcal{O}}) \quad \text{où } B_\eta^i(\tilde{\mathcal{O}}) = \{ \sigma \in \Gamma^b(\Lambda, TM) \mid \|\sigma\|^i \leq \eta \}.$$

Revenons à la norme $\| \cdot \|$ sur $\Gamma^b(\Lambda, TM)$ donnée par la métrique riemannienne de M . Posons :

$$W_\epsilon^S(\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\mathcal{F}}) = \{ \sigma \in \Gamma^b(\Lambda, TM) \mid \|\tilde{\mathcal{F}}^n(\sigma)\| \leq \epsilon \}.$$

Puisque les normes $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|'$ sont équivalentes, on a, si ϵ est assez petit :

$$W_\epsilon^S(\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\mathcal{F}}) \subset \tilde{W}_\eta^S(\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\mathcal{F}}).$$

LEMME 6.4.

$$W_\epsilon^S(x, f) = \{ \exp_x(\eta(x)) \mid \eta \in W_\epsilon^S(\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\mathcal{F}}) \} = \{ h(x) \mid h \in W_\epsilon^S(\text{inc}(\Lambda), \hat{\mathcal{F}}) \}$$

$$[W_\epsilon^S(\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\mathcal{F}}) \subset \Gamma^b(\Lambda, TM) ; W_\epsilon^S(\text{inc}(\Lambda), \hat{\mathcal{F}}) \subset \{ \text{fonctions bornées } \Lambda \rightarrow M \}].$$

Démonstration : Soit h un élément de la variété stable $W_\epsilon^S(\text{inc}(\Lambda), \hat{\mathcal{F}})$; la suite $(\hat{\mathcal{F}})^n(h)$ tend vers $\text{inc}(\Lambda)$ et donc :

$$\sup_{z \in \Lambda} d[(\hat{\mathcal{F}})^n(h)(z), (\hat{\mathcal{F}})^n(\text{inc}(\Lambda))(z)] \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

On a donc, puisque $\text{inc}(\Lambda)$ est un point fixe de $\hat{\mathcal{F}}$:

$$\sup_{z \in \Lambda} d[(\hat{\mathcal{F}})^n(h)(z), z] \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

soit :

$$\sup_{z \in \Lambda} d[f^n h f^{-n}(z), z] \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

Donc :

$$\sup_{z \in \Lambda} d[f^n(h(z)), f^n z] \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

Soit encore :

$$h(z) \in W_\epsilon^S(z, f).$$

Réciproquement, supposons que y soit un point de $W_\epsilon^S(x, f)$, on aura :

$$d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Définissons la fonction bornée $\delta_x^y \in B(\Lambda, M)$ par :

$$\delta_x^y(x) = y \quad ; \quad \delta_x^y(z) = z, \quad \forall z \neq x .$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \hat{F}(\delta_x^y)(z) &= f \circ \delta_x^y \circ f^{-1}(z) . \\ &= z \quad \text{si } z \neq f(x) \\ &= f(y) \quad \text{si } z = f(x) . \end{aligned}$$

soit : $\hat{F}(\delta_x^y) = \delta_{f(x)}^{f(y)}$ et donc : $(\hat{F})^n(\delta_x^y) = \delta_{f^n(x)}^{f^n(y)}$.

Montrons que, si y appartient à $W_\epsilon^S(x, f)$, l'application δ_x^y appartient à $W_\epsilon^S(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})$. En effet :

$$\begin{aligned} d[(\hat{F})^n(\delta_x^y), \text{inc}(\Lambda)] &= \sup_{z \in \Lambda} d[\hat{F}^n(\delta_x^y)(z), \text{inc}(\Lambda)(z)] \\ &= \sup_{z \in \Lambda} d[\delta_{f^n(x)}^{f^n(y)}(z), z] \\ &= d[f^n(y), f^n(x)] . \end{aligned}$$

Or $d[f^n(y), f^n(x)]$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc, si y appartient à $W_\epsilon^S(x, f)$, l'application δ_x^y appartient à $W_\epsilon^S(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})$ et $y = \delta_x^y(x)$.

On a donc :

$$W_\epsilon^S(x, f) = \{h(x) \mid h \in W_\epsilon^S(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})\}$$

ou aussi, en utilisant la carte \exp :

$$W_\epsilon^S(x, f) = \{\exp_x \gamma(x) \mid \gamma \in W_\epsilon^S(\tilde{0}, \tilde{F})\} . \quad \square$$

LEMME 6.5. Il existe un morphisme de fibré μ continu, de classe C^r sur chaque fibre et tel que l'image d'une section $\sigma \in \Gamma_\eta^b(\Lambda; E^S)$ par l'application ψ qui définit $\tilde{W}_\eta^S(\tilde{0}, \tilde{F})$ s'écrive : $\psi(\sigma) = \mu \circ \sigma$.

(Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_\eta^S & \xrightarrow{\mu} & E_\eta^U \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda & \xrightarrow{\text{id}} & \Lambda \end{array} \text{ commute})$$

De plus, la restriction de μ à la fibre au-dessus du point x , ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre r , varient continument avec le point x .

Démonstration : La condition $\psi(\sigma) = \mu \circ \sigma$ implique en particulier que la valeur $\psi(\sigma)(x)$ ne doit dépendre que du point $\sigma(x)$ et non des valeurs de σ ailleurs qu'au point x .

Soit donc x un point de Λ , σ_1 et σ_2 deux sections appartenant à $\Gamma_\eta^b(\Lambda, E^S)$ ayant même valeur au point x : $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$; montrons l'égalité : $\psi(\sigma_1)(x) = \psi(\sigma_2)(x)$.

Supposons que cette égalité ne soit pas vérifiée : $\psi(\sigma_1)(x) \neq \psi(\sigma_2)(x)$. Mais

$$\begin{aligned} \text{on sait que : } & (\tilde{F})^n(\sigma_1, \psi(\sigma_1)) \rightarrow \check{\sigma} \\ & (\tilde{F})^n(\sigma_2, \psi(\sigma_2)) \rightarrow \check{\sigma} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

puisque $[\sigma_1, \psi(\sigma_1)]$ et $[\sigma_2, \psi(\sigma_2)]$ appartiennent à $\tilde{W}_\eta^S(\check{\sigma}, \check{F})$.

Définissons maintenant la fonction bornée : $\tau \in \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^U)$:

$$\begin{aligned} \tau(y) &= \psi(\sigma_1)(y) \quad y \neq x \\ \tau(x) &= \psi(\sigma_2)(x) . \end{aligned}$$

Nous affirmons que $(\tilde{F})^n(\sigma_1, \tau) \rightarrow \check{\sigma}$ quand $n \rightarrow +\infty$, ce qui serait absurde si on avait $\psi(\sigma_1)(x) \neq \psi(\sigma_2)(x)$ car cela contredirait le fait que ψ soit bien définie par :

$$\psi(\sigma_1) \text{ est la seule section de } E_\eta^U \text{ telle que } (\tilde{F})^n(\sigma_1, \psi(\sigma_1)) \rightarrow \check{\sigma} .$$

On a, en effet :

$$\begin{aligned} d[(\tilde{F})^n(\sigma_1, \tau), \check{\sigma}] &= \sup_{z \in \Lambda} d[(\tilde{F})^n(\sigma_1, \tau)(z), 0_z] \\ &= \sup_{z \in \Lambda} \|\exp_z^{-1} [f^n(\exp_{f^{-n}(z)}(\sigma_1, \tau)f^{-n}(z))]\| \\ &= \sup_{\substack{z \in \Lambda \\ z \neq f^n(x)}} \{ \|\exp_z^{-1} [f^n(\exp_{f^{-n}(z)}(\sigma_1, \psi(\sigma_1))f^{-n}(z))]\| , \\ & \quad , \|\exp_{f^n(x)}^{-1} [f^n \exp_x(\sigma_2, \psi(\sigma_2)(x))]\| \} \\ &\leq \max \{ d[(\tilde{F})^n(\sigma_1, \psi(\sigma_1)), \check{\sigma}], d[(\tilde{F})^n(\sigma_2, \psi(\sigma_2)), \check{\sigma}] \} . \end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$, ce qui montrerait que remplacer $\psi(\sigma_1)(x)$ par $\psi(\sigma_2)(x)$ n'empêche pas $(\tilde{F})^n(\sigma_1, \tau)$ de converger

uniformément vers la section nulle.

On a donc : $\psi(\sigma_1)(x) = \psi(\sigma_2)(x)$, ce qui démontre que $\psi(\sigma)(x)$ ne dépend que de la valeur $\sigma(x)$.

Nous pouvons donc définir une application

$$\mu : E_\eta^S \rightarrow E_\eta^U \text{ par } \mu(v) = \psi(\delta_x^v)(x)$$

Rappelons que δ_x^v est la section définie par : $\delta_x^v(x) = v$, $\delta_x^v(z) = 0_z$, $\forall z \neq x$.

Résumons la construction de μ par le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} E_x^S & \longrightarrow & \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^S) & \xrightarrow{\psi} & \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^U) & \xrightarrow{\text{ev}_x} & E_x^U \\ v & \longmapsto & \delta_x^v & \longmapsto & \psi(\delta_x^v) & \longmapsto & \psi(\delta_x^v)(x) = \mu(v) \end{array}$$

La définition de μ implique que μ préserve les fibres de E_η^S . On note $(E_\eta^S)_x$ la fibre de E_η^S au-dessus du point x .

La composition par μ induit l'application $\psi : \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^S) \rightarrow \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^U)$ qui est de classe C^Γ . On voit facilement que la restriction μ_x de μ à chaque fibre $(E_\eta^S)_x$ est de classe C^Γ .

Il reste à montrer que μ_x dépend continument de x pour la topologie C^Γ , ce qui n'est pas évident puisque considérer les sections bornées ne fait pas intervenir la topologie de Λ .

Pour le voir, il suffit de constater que μ induit une application C^Γ de l'espace des sections continues $\Gamma_\eta^o(\Lambda, E^S)$ dans l'espace des sections continues $\Gamma_\eta^o(\Lambda, E^U)$.

Rappelons que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} C^o(\Lambda, M) & \xrightarrow{\hat{F}} & C^o(\Lambda, M) \\ \text{inclusion} \downarrow & & \downarrow \text{inclusion} \\ B(\Lambda, M) & \xrightarrow{\hat{F}} & B(\Lambda, M) \end{array}$$

On pourrait écrire dans des cartes le diagramme commutatif correspondant.

L'inclusion $\text{inc}(\Lambda)$ est un point fixe hyperbolique de l'application $\hat{F} : C^o(\Lambda, M) \rightarrow C^o(\Lambda, M)$. On peut, en prenant des cartes, voir la variété stable de $\text{inc}(\Lambda)$

comme le graphe d'une application

$$\psi' : \Gamma_{\eta}^0(\Lambda, E^S) \rightarrow \Gamma_{\eta}^0(\Lambda, E^U) .$$

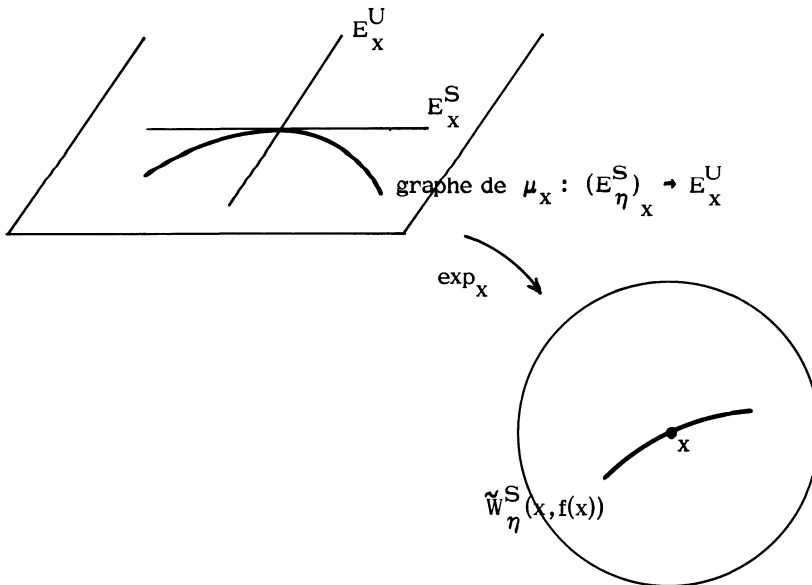
Cette application ψ' est de classe C^r et doit être la restriction de ψ à $\Gamma_{\eta}^0(\Lambda, E^S)$ puisque la variété stable de 0 dans $\Gamma_{\eta}^b(\Lambda, TM)$ est un graphe. Donc : $\psi'(\sigma) = \mu \circ \sigma$. Les applications μ_x et leurs dérivées jusqu'à l'ordre r dépendent continument du point x . \square

Fin de la démonstration du théorème 6.2.

$$W_e^S(x, f) = \{ \exp_x(\gamma(x)) \mid \gamma \in W_e^S(\check{\mathcal{O}}, \check{F}) \} \subset \check{W}_{\eta}^S(x, f)$$

où $\check{W}_{\eta}^S(x, f) = \{ \exp_x[v, \mu(v)] \mid v \in E_{x, \eta}^S \}$ ou encore $\check{W}_{\eta}^S(x, f) = \{ \exp_x(\text{graphe } \mu_x \subset T_x M) \}$.

Comme la restriction de μ à chaque fibre est de classe C^r et comme \exp_x est un difféomorphisme local, $\check{W}_{\eta}^S(x, f)$ est un disque plongé passant par x dont la dimension est celle de E_x^S .



Comme $\psi(\tilde{0}) = \tilde{0}$, on a : $\mu \circ \tilde{0} = \psi(\tilde{0}) = \tilde{0}$, donc : $\mu(0_{E_x^S}) = 0_{E_x^U}$.

Comme le graphe de $\psi : \{(\sigma, \psi(\sigma)) \mid \sigma \in \Gamma_\epsilon^b(\Lambda, E^S)\}$ est tangent à $\Gamma^b(\Lambda, E^S)$ au point $\tilde{0}$, le graphe de la restriction de μ à la fibre au-dessus du point $x : \{(v, \mu(v)) \mid v \in (E_\eta^S)_x\}$ est tangent à E_x^S en l'origine de l'espace tangent à M en $x : 0_{T_x M}$. On a donc :

$$T_x(\tilde{W}_\eta^S(x, f)) = E_x^S .$$

Considérons l'application (graphe μ) : $\Lambda \rightarrow \text{Plong}(D^{\dim E_x^S}, M)$

$$x \mapsto \exp_x[\text{graphe } \mu_x] .$$

Elle est localement définie à l'aide d'une carte du fibré E^S et continue.

Décomposons cette application. Soit $C_x : D_\eta^S \rightarrow (E_\eta^S)_x$ une carte trivialisante du fibré au voisinage du point x , D_η^S est le disque de rayon η et de dimension $\dim E^S$.

Soit $p_x : D_\eta^S \rightarrow M$ définie par $p_x(y) = \exp_x[C_x(y), \mu \circ C_x(y)]$. Les puristes n'oublieront pas le changement d'échelle : $sc : D_1^S \rightarrow D_\eta^S$. L'application (graphe μ) est définie localement par : (graphe μ)(x) = $p_x \circ sc$, et est clairement continue.

Par conséquent, $\tilde{W}_\eta^S(x, f)$ est un disque C^r qui, pour la topologie C^r , dépend continument de x .

Montrons maintenant que $W_\epsilon^S(x, f)$ est un disque de même dimension que $\tilde{W}_\eta^S(x, f)$ et dépend continument de x pour la topologie C^r .

Remarquons d'abord que la norme $\|T_x^f(\tilde{W}_\eta^S(x, f))\|$ est strictement inférieure à λ puisque l'espace tangent à $\tilde{W}_\eta^S(x, f)$ est E_x^S . On a donc, si ϵ est assez petit, l'implication :

$$[y \in \tilde{W}_\eta^S(x, f) \text{ et } d(x, y) \leq \epsilon] \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) .$$

(On peut choisir ϵ indépendamment de x puisque Λ est compact et puisque $\tilde{W}_\eta^S(x, f)$ varie continument avec x).

Ceci implique alors l'égalité :

$$W_\epsilon^S(x, f) = \{y \in \tilde{W}_\eta^S(x, f) \mid d(y, x) \leq \epsilon\} = \tilde{W}_\eta^S(x, f) \cap B_\epsilon(x) .$$

Or, si ϵ est assez petit, $\tilde{W}_\eta^S(x, f) \cap B_\epsilon(x)$ est un disque. Le théorème d'isotopie de Thom montre que ce disque dépend continument de x pour la topologie C^r . \square

COROLLAIRE & DÉFINITION 6.6. Sous les hypothèses de 6.2, si $x \in \Lambda$, l'ensemble $W^S(x, f) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}[W_\epsilon^S(x, f)]$ est une sous-variété (immergée) de M . On appelle cette sous-variété, la variété stable globale de f au point x . Par opposition, $W_\epsilon^S(x, f)$ est appelé variété stable locale au point x .

On a des définitions analogues pour les variétés instables globales $W^U(x, f)$ et locales $W_\epsilon^U(x, f)$.

CHAPITRE 7 - ENCORE DES CONSÉQUENCES DE L'HYPERBOLICITÉ !

Rappelons la définition et quelques propriétés de la transversalité.

DÉFINITION 7.1. Soient V et W deux sous-variétés de M et p un point de leur intersection. Nous dirons que V et W sont transverses en p (ou que p est un point d'intersection transverse de V et W), si :

$$T_p V + T_p W = T_p M .$$

Nous écrirons alors : $V \pitchfork_p W$.

Plus généralement, si f est une application différentiable d'une variété V dans M , et si W est une sous-variété de M , on dira que f est transverse à W au point p de V , et on notera $f \pitchfork_p W$, si :

$$\text{Soit } f(p) \notin W, \text{ soit } f(p) \in W \text{ et } Df_p(T_p V) + T_{f(p)} W = T_{f(p)} M .$$

On dira que V et W sont transverses ($V \pitchfork W$), si tout point d'intersection de V et W est un point d'intersection transverse ; que $f : V \rightarrow M$ est transverse à W sur $K \subset V$, si f est transverse à W en tout point de K .

Si f est une application d'une variété V de dimension j dans une variété M de dimension m , transverse au point p à la sous-variété W de dimension k et que de plus le point $f(p)$ appartient à W , il existe une carte (U, Φ) de M au voisinage du point $f(p)$ telle que :

1) $\Phi(W) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$;

2) Si π est la projection sur l'autre facteur \mathbb{R}^{m-k} (π envoie $U \cap W$ sur 0), la composée $\pi \circ \Phi \circ f$ est définie sur un voisinage du point p de V et a une dérivée surjective au point p .

Le théorème des fonctions implicites permet d'affirmer que, dans un voisinage de p , $[\pi \circ \Phi \circ f]^{-1}(0) = f^{-1}(W)$ est une sous-variété de dimension $\dim V + \dim W - \dim M$

de V , en d'autres termes $\text{cod}_V f^{-1}(W) = \text{cod}_M(W)$.

Si, de plus, V est compacte et W une sous-variété fermée de M , l'image inverse $f^{-1}(W)$ est une sous-variété de V quand f est transverse à W .

Si, de plus, V et W sont deux variétés sans bord, une application g suffisamment proche de f dans la topologie C^1 est transverse à W et la variété $g^{-1}(W)$ est difféomorphe à la variété $f^{-1}(W)$.

Si les bords ∂V et ∂W ne sont pas vides, ce qui précède reste vrai à condition qu'il existe un voisinage de $f(\partial V) \cup \partial W$ qui ne contienne pas de point d'intersection de $f(V)$ et W . Deux disques de dimension complémentaire se coupant transversalement en un seul point contenu dans leur intérieur respectif sont dans ce cas. Le lecteur vérifiera que ce cas est celui du théorème d'inversion locale.

PROPOSITION 7.2. Soit Λ un fermé invariant et hyperbolique pour un difféomorphisme f de classe C^r , $r \geq 1$ de M . Alors, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in \Lambda \mid d(x, y) < \delta, \quad W_\epsilon^S(x) \cap W_\epsilon^U(y) = p$$

où p est un point d'intersection transverse des deux variétés $W_\epsilon^S(x)$ et $W_\epsilon^U(y)$.

Démonstration : Le nombre ϵ_1 est le ϵ de la démonstration du théorème de la variété (in)stable appliqué à Λ . L'intersection $W_{\epsilon_1}^S(x) \cap W_{\epsilon_1}^U(x)$ est réduite à un point et $W_{\epsilon_1}^S(x)$ et $W_{\epsilon_1}^U(x)$ sont transverses en x car $T_x W_{\epsilon_1}^U(x) = E_x^S$ et $T_x W_{\epsilon_1}^S(x) = E_x^U$. La proposition résulte alors de la continuité, pour la topologie C^1 , de $W_{\epsilon_1}^U(x)$ et $W_{\epsilon_1}^S(x)$ dans un voisinage de x et de la compacité de Λ . □

DÉFINITION 7.3. Soit X un espace métrique et f un homéomorphisme de X dans lui-même. Nous dirons que f est expansif (expansive en anglais) en le sous-ensemble Y de X , s'il existe un réel ϵ positif tel que, pour tout couple de points distincts,

x appartenant à X , y à Y :

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} d[f^n(x), f^n(y)] > \epsilon .$$

Si $Y = X$, nous dirons que f est expansif.

PROPOSITION 7.4. Soit Λ un fermé invariant et hyperbolique pour un difféomorphisme f de classe C^r de M , $r \geq 1$, le difféomorphisme f est alors expansif en Λ .

Démonstration : Utilisons le nombre $\epsilon > 0$ fourni par la démonstration du théorème de la variété (in)stable pour Λ . Supposons que l'on ait :

$$x \in M, y \in \Lambda, \quad \sup_n d[f^n(x), f^n(y)] \leq \epsilon .$$

Le point x appartiendrait alors aux deux variétés $W_\epsilon^S(y)$ et $W_\epsilon^U(y)$. Comme l'intersection de ces variétés est réduite au point y , on doit donc avoir $x = y$. \square

Les ensembles hyperboliques invariants ont de très fortes propriétés de stabilité. Enonçons-en d'abord quelques unes dans le cas linéaire. Nous répèterons un raisonnement que nous avons déjà souvent fait de façon chaque fois un peu plus sophistiquée.

Démontrons d'abord que les automorphismes linéaires hyperboliques d'un espace de Banach forment un ouvert.

PROPOSITION 7.5. Donnons-nous trois réels τ , ϵ et k ; $0 < \tau < 1$, $\epsilon > 0$, $k > 0$. Il existe un réel positif δ tel que, si E est un espace de Banach, T un automorphisme hyperbolique de E , où $E = E_1 \times E_2$ est le scindage de E adapté à T , si L est un automorphisme linéaire continu et si l'on a :

$$\|T^{-1}\| < k ; \|T^{-1}|_{E_1}\| \leq \tau ; \|T|_{E_2}\| \leq \tau ; \|T - L\| < \delta ,$$

L est aussi un automorphisme hyperbolique de E pour un scindage $E = F_1 \times F_2$ et l'on a :

$$\|L^{-1}|_{F_1}\| < \tau + \epsilon ; \|L|_{F_2}\| < \tau + \epsilon .$$

Remarque. Les estimations faites pour démontrer cette proposition utiliseront la norme

$\| \cdot \|_E$ de E définie par $\| \cdot \|_E = \max [\| \cdot \|_{E_1}, \| \cdot \|_{E_2}]$.

Démonstration : Soit $L_1(E_1, E_2)$ l'espace des applications linéaires continues de E_1 dans E_2 de norme inférieure ou égale à 1. La transformation de graphe :

$$\Gamma_L : L_1(E_1, E_2) \rightarrow L_1(E_1, E_2)$$

associée à L est définie sur cet espace dès que $\|T - L\| < \frac{1}{\tau} - 1$, et a un point fixe σ quand $\|T - L\| < \frac{1-\tau}{2}$. L'application σ définit alors une variété instable graphe(σ) qui est un sous-espace linéaire de F_1 de E . On a, par le lemme 5.5,

$$\|L^{-1}|_{F_1}\| < \frac{1}{\frac{1}{\tau} - \|T - L\|}$$

et donc, si $\frac{1}{\frac{1}{\tau} - \delta} < \tau + \epsilon$, la première condition est remplie.

Il faut, pour trouver F_2 , inverser T et L . On peut le faire si $\|T - L\| < \frac{1}{k}$.

En effet; si $L = T - (T - L)$, on a $T^{-1}L = \text{Id} - T^{-1}(T - L)$ et comme

$$\|T^{-1}(T - L)\| \leq k\|T - L\| < 1$$

l'inverse de $(T^{-1}L)$ existe et est la somme de la série $\sum_{j=0}^{\infty} [T^{-1}(T - L)]^j$.

Comparons $(T^{-1}L)^{-1}$ à l'identité, on a :

$$\|\text{Id} - (T^{-1}L)^{-1}\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} [k\|T - L\|]^j = \frac{k\|T - L\|}{1 - k\|T - L\|} \leq \frac{k\delta}{1 - k\delta}.$$

On a donc :

$$\|T^{-1} - L^{-1}\| = \|[\text{Id} - (T^{-1}L)^{-1}]T^{-1}\| \leq \frac{k^2\delta}{1 - k\delta}.$$

Pour pouvoir appliquer à L^{-1} l'argument précédent, il faut avoir :

$$\frac{k^2\delta}{1 - k\delta} < \frac{1 - \tau}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\frac{1}{\tau} - \frac{k^2\delta}{1 - k\delta}} < \tau + \epsilon$$

ce qui est possible si l'on choisit δ assez petit. \square

PROPOSITION 7.6. Soit Λ un ensemble hyperbolique invariant pour un difféomorphisme de classe C^r , $r \geq 1$, de la variété M . Il existe un voisinage U de Λ dans M et un voisinage ν de f pour la topologie C^1 , tels que, si g appartient à ν et si K

est un ensemble invariant pour g , c 'est un ensemble hyperbolique pour g .

Démonstration : Considérons le scindage hyperbolique de la restriction de TM à Λ :

$$TM|_{\Lambda} = E^S \oplus E^U ; \|Df|_{E^S}\| < \lambda < 1 ; \|Df^{-1}|_{E^U}\| < \lambda < 1 .$$

Commençons par étendre les fibrés E^S et E^U sur un voisinage U_1 de Λ en des fibrés \tilde{E}^S et \tilde{E}^U . (Il existe toujours un voisinage de Λ tel que ceci soit possible.)

Comme les isomorphismes de fibrés forment un ouvert, il existera un voisinage U_2 de Λ , contenu dans U_1 tel que :

$$TM|_{U_2} = \tilde{E}^S \oplus \tilde{E}^U .$$

Si x est un point de l'intersection $U_2 \cap f^{-1}(U_2)$, on peut associer à l'application linéaire $Df_x = \tilde{E}_x^S \oplus \tilde{E}_x^U \rightarrow \tilde{E}_x^S \oplus \tilde{E}_x^U$ une matrice de blocs : $\begin{pmatrix} A'_x & B'_x \\ C'_x & D'_x \end{pmatrix}$.

Si x appartient à un voisinage U_3 de Λ suffisamment petit, on aura :

$$\|A'_x\| < \lambda + \frac{\delta}{2} ; \|B'_x\| < \frac{\delta}{2} ; \|C'_x\| < \frac{\delta}{2} ; \|D_x^{-1}\| \leq \lambda + \frac{\delta}{2} .$$

Soit U_4 un voisinage compact de Λ tel que $\overline{U_4} \cup f(\overline{U_4})$ soit contenu dans U_3 . Si g est assez proche de f dans la topologie C^1 , le voisinage U_2 contiendra $g(U_4)$ et, pour tout x appartenant à U_4 , l'application linéaire $Dg_x : \tilde{E}_x^S \oplus \tilde{E}_x^U \rightarrow \tilde{E}_{g(x)}^S \oplus \tilde{E}_{g(x)}^U$ aura pour matrice $\begin{pmatrix} A_x & B_x \\ C_x & D_x \end{pmatrix}$ où

$$\|A_x\| < \lambda + \delta < 1 ; \|B_x\| < \delta ; \|C_x\| < \delta ; \|D_x^{-1}\| < \lambda + \delta .$$

Enfin, il est clair que les matrice $\begin{pmatrix} A_x & B_x \\ C_x & D_x \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A_x & 0 \\ 0 & D_x \end{pmatrix}$ sont δ -proches.

Si K est un fermé invariant pour g contenu dans U_4 , la variété instable est le point fixe d'une transformation de graphe. Soit $E \rightarrow K$ le fibré dont la fibre au-dessus du point x de K est $L(\tilde{E}_x^U, \tilde{E}_x^S)$, et $D \rightarrow K$ le fibré en disque unité associé dont la fibre au-dessus du point x sera donc $D_x = L_1(\tilde{E}_x^S, \tilde{E}_x^U)$.

Définissons l'application $F : D \rightarrow D$ (qui envoie fibres sur fibres) par :

$$\forall x \in K, \quad F|_{D_x} = F_x = \Gamma_{Dg_x} : L_1(\tilde{E}_x^U, \tilde{E}_x^S) \rightarrow L_1(\tilde{E}_{g(x)}^U, \tilde{E}_{g(x)}^S).$$

F est continue et, pour tout point x de K , F_x est une contraction. La transformation Γ_F a, dans ce cas, un point fixe unique, comme c'était le cas pour la transformation de graphe utilisée pour démontrer le théorème de la section invariante. Le lecteur vérifiera que le point fixe de Γ_F donne le fibré instable $E^U \rightarrow K$. Le fibré stable $E^S \rightarrow K$ se détermine en considérant g^{-1} . \square

Remarque. On aurait pu démontrer différemment l'existence d'un point fixe unique de

Γ_F . Définissons l'application $G : D \rightarrow D$ par :

$$G_x = \begin{pmatrix} \Gamma_{A_x} & 0 \\ 0 & D_x \end{pmatrix} : L_1(\tilde{E}_x^U, \tilde{E}_x^S) \rightarrow L_1(\tilde{E}_{g(x)}^U, \tilde{E}_{g(x)}^S).$$

Γ_G est alors un opérateur linéaire contractant ; Γ_F est obtenu à partir de Γ_G par une petite perturbation et possède donc une variété instable qui est le point fixe cherché.

L'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} A_x & 0 \\ 0 & D_x \end{pmatrix}$ n'est pas la dérivée d'une application,

mais permet de manière artificielle de démontrer que Γ_F admet un point fixe unique.

Nous utiliserons cette dernière idée pour démontrer un théorème assez puissant : le théorème 7.8.

La proposition suivante est une conséquence du théorème de la variété (in)stable, mais nous allons en donner une démonstration directe qui permet d'obtenir des estimations précises dont nous nous servirons dans la démonstration du prochain théorème.

PROPOSITION 7.7. Soit E un espace de Banach. Supposons que E soit scindé en deux sous-espaces fermés : $E = E_1 \oplus E_2$ et que la norme sur E soit le max d'une norme sur E_1 et d'une norme sur E_2 . Soit $p_i : E \rightarrow E_i$ la projection de E sur le facteur E_i .

Soit T un automorphisme linéaire hyperbolique admettant la décomposition hyperbolique $E = E_1 \oplus E_2$. On a donc $T(E_i) = E_i$. Posons $T_i = T|_{E_i}$. Il existe

une constante $\lambda < 1$ telle que $\|T_1^{-1}\| < \lambda$ et $\|T_2\| < \lambda$.

Soit $f : E(r) \rightarrow E$ une application proche de T vérifiant $\text{Lip}(f - T) < \epsilon$ et $\|f(0)\| \leq \delta$.

Si les inégalités $\lambda + \epsilon < 1$ et $\delta < r(1 - \lambda - \epsilon)$ sont vérifiées, f a un point fixe unique p_f contenu dans $E(r)$. De plus, la norme de ce point fixe est majorée :

$$\|p_f\| < \frac{1}{1 - \lambda - \epsilon} \|f(0)\|$$

et ce point fixe p_f dépend continument de f .

Démonstration : Définissons une application $\bar{f} : E(r) \rightarrow E$ par :

$$\bar{f}(x) = T_1^{-1}[x_1 + T_1 x_1 - f_1(x_1, x_2)] + f_2(x_1, x_2)$$

où $x_i = p_i(x)$ et $f_i = p_i \circ f$. L'application \bar{f} a les mêmes points fixes que f . On va montrer que \bar{f} est une contraction et vérifie $\bar{f}[E(r)] \subset E(r)$. Le théorème du point fixe appliqué à une application contractante permettra alors de conclure.

Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$.

$$\begin{aligned} \|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)\| &= \max \{ \|T_1^{-1}[(x_1 - y_1) + (T_1 - f_1)(x_1, x_2) - (T_1 - f_1)(y_1, y_2)]\|, \\ &\quad \|f_2(x_1, x_2) - f_2(y_1, y_2)\| \} \\ &\leq \max \{ \lambda(1 + \epsilon)\|x - y\|, (\lambda + \epsilon)\|x - y\| \} \leq (\lambda + \epsilon)\|x - y\| \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)\| \leq (\lambda + \epsilon)\|x - y\|$$

ce qui, puisque l'on a supposé que $(\lambda + \epsilon)$ est strictement inférieur à 1, montre que \bar{f} est une contraction.

Montrons maintenant que $\bar{f}[E(r)]$ est contenu dans $E(r)$. Ce qui précède implique l'inégalité :

$$\|\bar{f}(x)\| \leq (\lambda + \epsilon)\|x\| + \|\bar{f}(0)\|$$

Or :

$$\|\bar{f}(0)\| = \max [\|T_1^{-1}f_1(0)\|, \|f_2(0)\|] \leq \|f(0)\|$$

On a donc, quand x appartient à $E(r)$:

$$\|\bar{f}(x)\| \leq (\lambda + \epsilon)\|x\| + \|f(0)\| \leq (\lambda + \epsilon)r + \delta$$

ce qui est inférieur à r puisque, par hypothèse, on a : $\delta < r(1 - \lambda - \epsilon)$. Comme le point fixe p_f est la limite de la suite $\bar{f}^n(0)$, on vérifie facilement la majoration :

$$\|p_f\| \leq \frac{\|\bar{f}(0)\|}{1 - (\lambda + \epsilon)} \leq \frac{1}{1 - (\lambda + \epsilon)} \|f(0)\|.$$

Il reste à montrer que p_f dépend continument de f . On a, en définissant \bar{g} comme \bar{f} :

$$\|\bar{f}(x) - \bar{g}(x)\| \leq \|f(x) - g(x)\| \leq d(f, g)$$

d'où

$$\begin{aligned} \|p_f - p_g\| &= \|\bar{f}(p_f) - \bar{g}(p_g)\| \leq \|\bar{f}(p_f) - \bar{g}(p_f)\| + \|\bar{g}(p_f) - \bar{g}(p_g)\| \\ &\leq d(f, g) + (\lambda + \epsilon)\|p_f - p_g\|. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\|p_f - p_g\| \leq \frac{d(f, g)}{1 - \lambda - \epsilon}. \quad \square$$

Nous allons maintenant démontrer le théorème qui nous permettra ensuite de déduire sans trop d'effort une bonne partie des théorèmes de stabilité énoncés dans ce cours.

THÉORÈME 7.8. Soit Λ un ensemble hyperbolique invariant pour un difféomorphisme f de classe C^k de M . Il existe des nombres $\alpha > 0$, $K > 0$, $r > 0$, un voisinage U_Λ de Λ ($\Lambda \subset U_\Lambda \subset M$) et un voisinage \mathcal{V} de f ($f \in \mathcal{V} \subset \text{Diff}^1(M)$) pour la topologie C^1 vérifiant la propriété suivante :

Quel que soit l'espace topologique X , l'homéomorphisme $h : X \rightarrow X$, l'application continue $i : X \rightarrow U_\Lambda$, si g est un difféomorphisme appartenant à \mathcal{V} et si l'on a $d(ih, gi) < \alpha$, il existe une unique application continue $j : X \rightarrow M$ vérifiant $jh = gj$ et $d(i, j) \leq r$ (j est une pseudo-conjugaison).

On a même un résultat plus fort : $d(i, j) \leq K d(ih, gi)$. De plus, si i et h sont fixés, j dépend continument (pour la topologie C^0) de g .

Ce théorème peut se résumer à l'aide de deux diagrammes :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & U \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{i} & M \end{array} & \begin{array}{c} \text{commute à } \alpha \text{ près} \\ \text{et } g \text{ assez} \\ \text{proche de } f \end{array} & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists ! j \\ d(i, j) \leq r \end{array} \right. \text{ et } \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & M \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{j} & M \end{array} \text{ commute.}
 \end{array}$$

Stratégie de la démonstration :

On veut montrer que l'application $G : C^0(X, M) \rightarrow C^0(X, M)$ admet,

$$k \longmapsto gkh^{-1}$$

au voisinage de i , un unique point fixe. Pour cela, nous allons montrer que G est une perturbation lipschitzienne d'un opérateur hyperbolique construit à partir de f , puis appliquer la proposition 7.7.

Mise en route : "Linéarisation" de $C^0(X, M)$.

Supposons que l'on se soit donné une métrique riemannienne sur M .

Il existe un nombre $\epsilon' > 0$ tel que l'exponentielle $\exp_x : T_x(M) \rightarrow M$ restreinte à la boule de rayon ϵ' soit un difféomorphisme. Choisissons un réel ϵ tel que $0 < \epsilon < \epsilon'$. La boule $\bar{B}_\epsilon(i) = \{k : X \rightarrow M \mid d(i, k) \leq \epsilon\} \subset C^0(X, M)$ s'identifie au voisinage de la zéro-section du fibré $i^*TM : \Gamma_\epsilon^0(X, i^*TM)$ par l'homéomorphisme $\Phi :$

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{B}_\epsilon(i) & \xrightarrow{\Phi} & \Gamma_\epsilon^0(X, i^*TM) \\
 k & \longmapsto & \Phi(k) \quad \text{où } \Phi(k(x)) = \exp_{i(x)}^{-1} [k(x)].
 \end{array}$$

Remarquons que l'image par Φ de i est la zéro section du fibré de base $X : i^*TM$.

Nous supposons que la métrique riemannienne choisie sur M est adaptée à (Λ, f) de façon uniforme sur $\Lambda :$

$$\exists \lambda < 1, \quad \forall x \in \Lambda, \quad \|Df_x|_{E^S}\| < \lambda \quad \text{et} \quad \|Df_x^{-1}|_{E^U}\| < \lambda.$$

Etendons le scindage $E^S \oplus E^U = TM|_\Lambda$ sur un voisinage compact de W de $\Lambda : TM|_W = \tilde{E}^S \oplus \tilde{E}^U$.

Si z et x sont deux points de M qui vérifient $d(f(x), z) \leq \epsilon$, définissons l'application $F_{z,x} : T_x M \rightarrow T_z M$ par $F_{z,x} = D(\exp_z^{-1})_{f(x)} Df_x$. Si les deux points

z et x appartiennent à W , le scindage de l'espace tangent permet d'écrire l'application

$$F_{z,x} : \tilde{E}_x^S \oplus \tilde{E}_x^U \rightarrow \tilde{E}_z^S \oplus \tilde{E}_z^U$$

sous la forme d'une matrice par blocs $\begin{pmatrix} A_{z,x} & B_{z,x} \\ C_{z,x} & D_{z,x} \end{pmatrix}$

où $A_{z,x} \in L(\tilde{E}_x^S, \tilde{E}_z^S)$, $B_{z,x} \in L(\tilde{E}_x^U, \tilde{E}_z^S)$, $C_{z,x} \in L(\tilde{E}_x^S, \tilde{E}_z^U)$ et $D_{z,x} \in L(\tilde{E}_x^U, \tilde{E}_z^U)$.

Soit $\tilde{F}_{z,x}$ l'application linéaire de matrice diagonale par blocs :

$$\tilde{F}_{z,x} = \begin{pmatrix} A_{z,x} & 0 \\ 0 & D_{z,x} \end{pmatrix} \quad (\text{on a } \tilde{F}_{z,x}(\tilde{E}_x^S) = \tilde{E}_z^S \text{ et } \tilde{F}_{z,x}(\tilde{E}_x^U) = \tilde{E}_z^U).$$

Après cette mise en train, démontrons encore deux lemmes avant d'entamer la démonstration du théorème 7.8.

LEMME 1. A tout nombre $\eta > 0$, on peut associer un voisinage $U(\eta)$ de Λ et un nombre $\delta(\eta) > 0$ vérifiant :

$$\forall x \in U(\eta), \quad \forall z \mid d(f(x), z) < \delta(\eta)$$

$$\|F_{z,x} - \tilde{F}_{z,x}\| < \eta, \quad \|\tilde{F}_{z,x}|_{\tilde{E}_x^S}\| < \lambda \quad \text{et} \quad \|\tilde{F}_{z,x}^{-1}|_{\tilde{E}_x^U}\| < \lambda.$$

Démonstration : Si x appartient à Λ et si les points z et $f(x)$ coïncident, on a $F_{z,x} = \tilde{F}_{z,x} = Df_x$. Il suffit pour conclure de remarquer que $F_{z,x}$ et $\tilde{F}_{z,x}$ dépendent continument des points z et x . \square

LEMME 2. Quels que soient les nombres $\eta' > 0$ et δ , $0 < \delta < \epsilon$, il existe un nombre $r = r(\delta, \eta') > 0$ et un voisinage $\nu = \nu(\delta, \eta')$ de f pour la topologie C^1 tels que, si la distance $d(z, f(y))$ est inférieure ou égale à δ et si g appartient à ν , on ait :

- 1) $g(B_r(y)) \subset \exp_z(B_\epsilon(0))$
- 2) $\text{Lip}[(F_{z,y} - \exp_z^{-1} \cdot g \cdot \exp_y)|_{B_r(0)}] < \eta'.$

Démonstration : Choisissons d'abord $r_1 = r_1(\delta)$ de sorte que, si la distance $d(z, f(y))$ est inférieur à δ , on ait l'inclusion : $\exp_z(\dot{B}_{r_1}(0)) \supset f(\bar{B}_{r_1}(y))$, ce qui est possible puisque δ est inférieur à ϵ et f (uniformément) continue. La condition 1) sera alors vérifiée si g est assez proche de f pour la topologie C^0 .

L'application $\exp_z^{-1} f \exp_y$ est définie sur la boule $B_{r_1}(0)$; si l'application $\exp_z^{-1} g \exp_y$ est aussi définie au voisinage d'un point v de cette boule, on a :

$$\begin{aligned} & D[(D \exp_z^{-1})_{f(y)} Df_y - \exp_z^{-1} g \exp_y]_v = \\ & = D(\exp_z^{-1})_{f(y)} Df_y - D(\exp_z^{-1})_{g(\exp_y(v))} Dg_{\exp_y(v)} D(\exp_y)_v . \end{aligned}$$

Cette dernière expression est définie et nulle si $g = f$ et $v = 0$. Comme la dérivée écrite plus haut est une fonction continue de v et de g (qui appartient à $\text{Diff}^1(M)$ muni de la topologie C^1), on trouve en appliquant le théorème de la moyenne, le voisinage ν de f et nombre $r > 0$ cherchés. \square

Démonstration du théorème 7.8.

Première étape : Nous construisons un opérateur linéaire hyperbolique \mathfrak{F} sur $\Gamma(X, i^* TM)$, qui ne dépend que de f , i et h . L'opérateur \mathfrak{F} sera défini si $i(X)$ est contenu dans un voisinage assez petit de Λ et si la distance $d(f, f i h^{-1})$ est assez petite.

Nous voulons définir \mathfrak{F} par la formule :

$$\mathfrak{F}(\sigma)(x) = \tilde{F}_{i(x), i h^{-1}(x)} \sigma(h^{-1}(x)) \quad \text{où } \sigma \in \Gamma(X, i^* TM).$$

Comme $\tilde{F}_{z,x}$ n'est défini que si x et z appartiennent à un voisinage assez petit de Λ et si la distance $d(f(x), z)$ est assez petite, l'opérateur \mathfrak{F} est défini si $i(X)$ est contenu dans un voisinage assez petit de Λ et si la distance $d(i, f i h^{-1})$ est assez petite. Remarquons que, par construction, l'opérateur \mathfrak{F} préserve le scindage $\Gamma(X, i^* TM) = \Gamma(X, i^* \tilde{E}^U) \oplus \Gamma(X, i^* \tilde{E}^S)$.

Le lemme 1 implique en particulier que, quitte à supposer le voisinage de Λ et la distance $d(i, f i h^{-1})$ encore plus petits, \mathfrak{F} est hyperbolique, plus précisément,

on a :

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{F} |_{\Gamma(X, i^* \tilde{E}S)}\| &< \lambda < 1 \\ \|\mathfrak{F}^{-1} |_{\Gamma(X, i^* E^U)}\| &< \lambda < 1 . \end{aligned}$$

Le lemme 1 permet aussi d'associer à tout réel $\eta > 0$ un voisinage $U(\eta)$ de Λ et un nombre $\delta(\eta)$ tels que les deux conditions :

$$d(i, fih^{-1}) < \delta(\eta) \quad \text{et} \quad i(X) \subset U(\eta)$$

impliquent la majoration :

$$\sup_{x \in X} \left\| \mathbb{F} \begin{matrix} i(x), ih^{-1}(x) \\ - \tilde{\mathbb{F}} \\ i(x), ih^{-1}(x) \end{matrix} \right\| < \eta .$$

Deuxième étape : Définition de G et $\hat{\zeta}$.

Considérons l'application $G : C^0(X, M) \rightarrow C^0(X, M)$

$$k \longmapsto gkh^{-1} .$$

Ecrivons l'inégalité triangulaire :

$$d(gkh^{-1}, i) \leq d(gkh^{-1}, ghi^{-1}) + d(ghi^{-1}, i) .$$

Il existe donc des nombres $\alpha_1 > 0$, $r_1 > 0$ et un voisinage ν_1 de f dans la topologie C^0 (indépendants de X , i et h), tels que, si g appartient à ν_1 et si l'on a : $d(gi, ih) < \alpha_1$, l'image $G(B_{r_1}(i))$ de la boule $B_{r_1}(i)$ par G est contenue dans la boule $B_{\epsilon}(i)$.

Donc, si ces deux conditions sont vérifiées, l'application $\hat{\zeta}$:

$$\hat{\zeta} : \Phi G \Phi^{-1} : \Gamma_{r_1}(X, i^* TM) \rightarrow \Gamma(X, i^* TM)$$

est bien définie. Rappelons que Φ était la carte au voisinage de i de $C^0(X, M)$

suivante :

$$\begin{aligned} \Phi : B_{\epsilon}(i) &\longrightarrow \Gamma_{\epsilon}(X, i^* TM) \\ k &\longmapsto \Phi(k) \quad \text{où} \quad \Phi(k)(x) = \exp_{i(x)}^{-1} k(x) . \end{aligned}$$

Explicitons $\hat{\zeta}$:

$$\hat{\zeta}(\sigma)(x) = \left[\exp_{i(x)}^{-1} \right] g \left(\exp_{i(h^{-1}(x))} \sigma(h^{-1}(x)) \right) .$$

Troisième étape : $\hat{\zeta}$ est lipschitz-proche de \mathfrak{F} .

Nous utilisons maintenant la norme sur $\Gamma(X, i^*TM)$ obtenue à partir de la métrique riemannienne de M . Calculons la distance lipschitzienne de $\hat{\zeta}$ et \mathfrak{F} sur la boule $B(r')$. On a :

$$\begin{aligned} \text{Lip} \left[(\hat{\zeta} - \mathfrak{F})|_{B(r')} \right] &\leq \sup_{x \in X} \left\| \tilde{F}_{ix, ih^{-1}(x)} - F_{i(x), ih^{-1}(x)} \right\| \\ &\quad + \sup_{x \in X} \text{Lip} \left[\left(F_{ix, ih^{-1}(x)} - \exp_{ix}^{-1} g \exp_{ih^{-1}(x)} \right) \Big|_{B_{r'}(0_{ih^{-1}(x)})} \right] \end{aligned}$$

Soit η un nombre positif. Il existe un nombre $\delta(\eta) > 0$ et un voisinage $U(\eta)$ tels que, si $i(X)$ est contenu dans $U(\eta)$ et si la distance $d(i, fih^{-1})$ est inférieure à δ , l'inégalité suivante est vraie :

$$\sup_{x \in X} \left\| \tilde{F}_{i(x), ih^{-1}(x)} - F_{i(x), ih^{-1}(x)} \right\| < \eta \quad (\text{voir fin de l'étape 1})$$

On peut alors trouver un nombre $\alpha_2(\eta)$ et un voisinage $\nu_2(\eta)$ de f dans la topologie C^0 tels que, si la distance $d(gi, ih)$ est inférieure à $\alpha_2(\eta)$ et si g appartient au voisinage $\nu_2(\eta)$, on ait l'inégalité :

$$d(i, fih^{-1}) < \delta(\eta) \quad .$$

Soit maintenant un nombre $\eta' > 0$. Le lemme 2 permet de trouver un nombre $r(\eta', \delta(\eta))$ et un voisinage $\nu_3(\eta', \delta(\eta))$ de f tels que, si g appartient à $\nu_3(\eta', \delta(\eta))$ et si l'on a $d(i, fih^{-1}) < \delta(\eta)$ (ce qui est le cas si g appartient de plus au voisinage $\nu_2(\eta)$ de f et si on a les inégalités $d(gi, ih) < \alpha_2(\eta)$ et $r' \leq r(\eta', \delta(\eta))$), on ait l'inégalité :

$$\sup_{x \in X} \text{Lip} \left[\left(F_{i(x), ih^{-1}(x)} - \exp_{i(x)}^{-1} g \exp_{ih^{-1}(x)} \right) \Big|_{B_{r'}(0_{ih^{-1}(x)})} \right] < \eta' \quad .$$

En intersectant toutes les conditions que nous avons imposées, si α , ν et U_Δ vérifient :

- $\alpha < \inf(\alpha_1, \alpha_2(\eta))$
- $r' \leq r(\eta', \delta(\eta))$
- $\nu \subset \nu_1 \cap \nu_2(\eta) \cap \nu_3(\eta', \delta(\eta))$

$$- U_{\Lambda} \subset U(\eta) ,$$

alors, dès que $d(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est inférieure à α , que \mathfrak{g} appartient à \mathfrak{v} et que $i(X)$ est contenu dans U_{Λ} , on a :

$$\begin{aligned} - \text{Lip}[(\hat{\mathfrak{C}} - \mathfrak{F})|_{B(r^1)}] &\leq \eta + \eta' \\ - \|\hat{\mathfrak{C}}(0)\| &= d(\mathfrak{g} \mathfrak{h}^{-1}, i) < \alpha \\ - \|\mathfrak{F}|_{\Gamma(X, i^* E^S)}\| &< \lambda < 1 \text{ et } \|\mathfrak{F}^{-1}|_{\Gamma(X, i^* E^S)}\| < \lambda < 1 . \end{aligned}$$

Quatrième étape : Le point fixe de $\hat{\mathfrak{C}}$.

Nous voulons pouvoir appliquer la proposition 7.7. Pour cela, il faut utiliser la norme max sur $\Gamma(X, i^* TM) = \Gamma(X, i^* E^S) \oplus \Gamma(X, i^* E^U)$. Il existe une constante c qui ne dépend que de l'extension de E^S et E^U en deux fibrés E^S et E^U définis sur le voisinage W de Λ , qui permet de comparer les deux normes compact

$\|\cdot\|_{\max}$ et $\|\cdot\|_{\text{riem}}$ sur $E^U \oplus E^S$:

$$\frac{1}{c} \|\cdot\|_{\max} \leq \|\cdot\|_{\text{riem}} \leq c \|\cdot\|_{\max} .$$

Les deux normes associées sur $\Gamma(X, i^* TM) = \Gamma(X, i^* E^U) \oplus \Gamma(X, i^* E^S)$ vérifient la même relation.

Réécrivons en utilisant la norme $\|\cdot\|_{\max}$ les majorations obtenues à l'étape 3.

$$\text{Lip}_{\max}[(\hat{\mathfrak{C}} - \mathfrak{F})|_{B(r^1)}] \leq c^2(\eta + \eta') \text{ et } \|\hat{\mathfrak{C}}(0)\|_{\max} < c \alpha .$$

Si r'' est inférieur à $\frac{r^1}{c}$, la boule carrée $E_1(r'') \times E_2(r'')$ est contenue dans la boule riemannienne $B(r^1)$. On a donc :

$$\text{Lip}_{\max}[(\hat{\mathfrak{C}} - \mathfrak{F})|_{E_1(r'') \times E_2(r'')}] \leq \text{Lip}_{\max}[(\hat{\mathfrak{C}} - \mathfrak{F})|_{B(r^1)}] \leq c^2(\eta + \eta')$$

Pour appliquer la proposition 7.7, il faut avoir les inégalités :

$$(*) \quad \lambda + c^2(\eta + \eta') < 1$$

$$\text{et } (**) \quad c \alpha < r'' [1 - \lambda - c^2(\eta + \eta')] .$$

Il suffit maintenant de commencer par choisir η et η' vérifiant (*).

On détermine ensuite les voisinages U_Λ de Λ et v de f , les nombres r' , puis $r'' < \frac{r'}{c}$; enfin, on choisit $\alpha < \inf(\alpha_1, \alpha_2(\eta))$ assez petit pour satisfaire la condition (**).

Le théorème 7.7 implique alors l'existence d'une unique application j pseudo-conjuguant g et h ($gj = jh$) et vérifiant $\|\Phi(j)\|_{\max} \leq r''$. On a alors, par 7.7, une majoration plus précise :

$$\|\Phi(j)\|_{\max} \leq \frac{1}{1 - \lambda - c^2(\eta + \eta')} \|\hat{\zeta}(0)\|_{\max}$$

Prenons r inférieur à $\frac{r''}{c}$. L'inégalité $d(i, k) \leq r$ implique l'inégalité $\|\Phi(k)\|_{\max} \leq r''$. Donc, si j est une solution vérifiant $d(i, j) \leq r$, elle est la seule vérifiant cette condition.

D'autre part, comme on a :

$$d(i, j) \leq \frac{c^2}{1 - \lambda - c^2(\eta + \eta')} d(gi, ih) ,$$

si α est assez petit, la solution j vérifie la condition $d(i, j) \leq r$.

De plus, si i et h sont fixés, j dépend continument de $\hat{\zeta}$, mais $\hat{\zeta}$ dépend continument de g puisque :

$$\|\hat{\zeta}_1 - \hat{\zeta}_2\|_{\max} \leq c \|\hat{\zeta}_1 - \hat{\zeta}_2\|_{\text{riem}} \leq c d(G_1, G_2) \leq c d(g_1, g_2) \quad \square$$

Remords final : Essayons de donner une démonstration heuristiquement plus compréhensible.

$$\begin{aligned} \text{Reprenons l'application } \hat{\zeta} : \Gamma_{\Gamma}^0(X, i^*TM) &\rightarrow \Gamma^0(X, i^*TM) \\ \sigma &\longmapsto \hat{\zeta}(\sigma) \end{aligned}$$

$$\text{où } \hat{\zeta}(\sigma)(x) = (\exp_{i(x)}^{-1}) g \exp_{ih^{-1}(x)} \sigma h^{-1}(x).$$

Elle a pour dérivée en 0 :

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}' : \Gamma^0(X, i^*TM) &\rightarrow \Gamma^0(X, i^*TM) \\ \sigma &\longmapsto \hat{\zeta}'(\sigma) \end{aligned}$$

où $\hat{\zeta}'(\sigma)(x) = D(\exp_{i(x)}^{-1})_{gih^{-1}(x)} Dg_{ih^{-1}(x)} \sigma h^{-1}(x)$.

Si g est assez proche de f , on voit que $\hat{\zeta}'$ est proche de \mathfrak{F} (c'est le calcul fait dans la partie 2 du lemme 2), $\hat{\zeta}'$ est donc hyperbolique. Au voisinage de 0 , $\hat{\zeta}$ est une perturbation lipschitzienne de sa dérivée en 0 , si $\hat{\zeta}(0)$ est proche de 0 .

Dans ce cas, $\hat{\zeta}$ a un point fixe au voisinage de 0 . Or la norme $\|\hat{\zeta}(0)\|$ vaut :

$$\|\hat{\zeta}(0)\| = d(\zeta(0), i) = d(gih^{-1}, i) = d(gi, ih) .$$

Pour conclure ce chapitre, démontrons le théorème de "linéarisation" de Grobman et Hartman qui compare au voisinage d'un point fixe hyperbolique un difféomorphisme et sa dérivée en ce point.

Soit E un espace de Banach, $C_b^0(E)$ est l'espace des fonctions continues bornées :

$$C_b^0(E, E) = \{\varphi \mid \varphi : E \rightarrow E \text{ continue bornée}\} .$$

C_b^0 muni de la norme sup : $\|\varphi\| = \sup_{x \in E} \|\varphi(x)\|$ est un espace de Banach.

THÉORÈME 7.9. Soit $L : E \rightarrow E$ un opérateur hyperbolique ; une petite perturbation lipschitzienne de L sera topologiquement conjuguée à L . Plus précisément, il existe un nombre $\epsilon > 0$ tel que, quelle que soit l'application $\Phi \in C_b^0(E, E)$ de norme de Lipschitz inférieure ou égale à ϵ , il existe un homéomorphisme H conjuguant $L + \Phi$ et $L : L + \Phi = H L H^{-1}$.

Démonstration : Supposons que l'espace E soit scindé en $E = E^U \oplus E^S$. E^U et E^S ont pour norme $\|\cdot\|_U$ et $\|\cdot\|_S$. La norme $\|\cdot\|$ de E est

$$\|x\| = \max [\|p_U(x)\|, \|p_S(x)\|] .$$

où p_U et p_S sont les projections de E sur chacun de ses facteurs. Puisque L est hyperbolique, on a :

$$\|L^{-1}|_{E^U}\| < \lambda < 1 \quad \text{et} \quad \|L|_{E^S}\| < \lambda < 1 .$$

L'homéomorphisme H , s'il existe, vérifie $(L + \Phi)H = HL$.

Nous allons démontrer un résultat apparemment plus fort : il existe un nombre $\epsilon > 0$, tel que, si deux applications $\Phi, \Phi' \in C_b^0(E, E)$ sont lipschitziennes et ϵ -petites pour la distance de Lipschitz ($\text{Lip } \Phi < \epsilon$ & $\text{Lip } \Phi' < \epsilon$), il existe une unique application $g \in C_b^0(E, E)$ qui vérifie :

$$(*) \quad (L + \Phi)(\text{Id} + g) = (\text{Id} + g)(L + \Phi') .$$

Le théorème des fonctions implicites implique que, si on a $\epsilon \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|}$, $L + \Phi$ et $L + \Phi'$ sont des homéomorphismes.

L'égalité $(*)$ est alors équivalente à la suivante :

$$(L + \Phi)(\text{Id} + g)(L + \Phi')^{-1} = \text{Id} + g$$

ou bien encore à :

$$Lg(L + \Phi)^{-1} + \Phi g(L + \Phi')^{-1} + (L + \Phi)(L + \Phi')^{-1} - \text{Id} = g .$$

Définissons l'application $L_{\Phi'}^*$ par : $C_b^0(E, E) \longrightarrow C_b^0(E, E)$

$$g \longmapsto Lg(L + \Phi')^{-1}$$

et l'application Φ^* par : $C_b^0(E, E) \longrightarrow C_b^0(E, E)$

$$g \longmapsto \Phi g(L + \Phi')^{-1} .$$

En posant $k = (L + \Phi)(L + \Phi')^{-1} - \text{Id}$ le problème se ramène à la recherche du point fixe de l'application $g \mapsto L_{\Phi'}^* g + \Phi^* g + k$.

Avant d'appliquer la proposition 7.7, nous allons en vérifier les hypothèses :

- k appartient à $C_b^0(E, E)$. Posons en effet $(L + \Phi')^{-1} = L^{-1} + w$, on a :

$(L^{-1} + w)(L + \Phi') = \text{Id}$ et donc $w = -L^{-1}\Phi'(L + \Phi')^{-1}$, w appartient donc à $C_b^0(E, E)$;

or, on a :

$$k = (L + \Phi)(L^{-1} + w) - \text{Id} = Lw + \Phi(L^{-1} + w) \in C_b^0(E, E) .$$

L'application $g \mapsto L_{\Phi'}^* g + \Phi^* g + k$ envoie $C_b^0(E, E)$ dans lui-même.

- L'application $L_{\Phi'}^*$ est hyperbolique. La restriction de $L_{\Phi'}^*$ à $C_b^0(E, E^U)$ est une dilatation et sa restriction à $C_b^0(E, E^S)$ une contraction. Le lecteur vérifiera les inégalités :

$$\|L_{\Phi'}^*{}^{-1} \mid C_b^0(E, E^U)\| < \lambda < 1 \quad \text{et} \quad \|L_{\Phi'}^* \mid C_b^0(E, E^S)\| < \lambda < 1 .$$

- L'application Φ^* est lipschitzienne et vérifie $\text{Lip } \Phi^* \leq \text{Lip } \Phi$. On a, en effet, la majoration :

$$\begin{aligned} \|\Phi^*(g) - \Phi^*(h)\| &= \sup_{x \in E} \|\Phi g(L + \Phi')^{-1}x - \Phi h(L + \Phi')^{-1}x\| \leq \\ &\leq \text{Lip } \Phi \sup_{x \in E} \|g(L + \Phi')^{-1}x - h(L + \Phi')^{-1}x\| \\ &= \text{Lip } \Phi \|g - h\| . \end{aligned}$$

La proposition 7.7 montre qu'il existe un nombre $\epsilon > 0$ (qui ne dépend que de λ), tel que, si on a $\text{Lip } \Phi < \epsilon$, l'application $L_{\Phi'}^* + \Phi^* + k$ a un point fixe unique. (La condition de la proposition 7.7 portant sur l'image de l'origine ne joue pas ici, car $r = +\infty$.)

On a donc démontré que, si les normes de Lipschitz $\text{Lip } \Phi$ et $\text{Lip } \Phi'$ sont inférieures à ϵ , il existe une application g appartenant à $C_b^0(E, E)$ unique telle que :

$$(L + \Phi)(\text{Id} + g) = (\text{Id} + g)(L + \Phi') .$$

En échangeant les rôles de Φ et Φ' et en se souvenant que l'application g est unique, on montre facilement que $(\text{Id} + g)$ est un homéomorphisme de E sur lui-même. \square

Remarquons que, si l'application $\Phi : E(r) \rightarrow E$ est lipschitzienne, on peut prolonger Φ en une application lipschitzienne $\tilde{\Phi} : E \rightarrow E$ de norme de Lipschitz

$\text{Lip } \tilde{\Phi} \leq 2 \text{Lip } \Phi$. La voici : $\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x)$ si $\|x\| \leq r$

$$\tilde{\Phi}(x) = \Phi\left(\frac{rx}{\|x\|}\right) \text{ si } \|x\| \geq r .$$

Nous en déduisons le corollaire.

COROLLAIRE 7.10. Soit L un isomorphisme hyperbolique de E . Il existe un réel $\epsilon > 0$, tel que, si l'application $f : E(r) \rightarrow E$ vérifie $\text{Lip}(f - L) < \epsilon$ et $f(0) = 0$, il existe un homéomorphisme local h défini au voisinage de l'origine vérifiant $h(0) = 0$

et conjuguant f et L (vérifiant $hf = Lh$ sur un voisinage de 0).

Comme une application différentiable est une petite perturbation lipschitzienne de sa dérivée en un point fixe, on obtient le

THÉORÈME 7.11 (Grobman-Hartman). Si p est un point fixe hyperbolique d'un difféomorphisme f de classe C^1 de M , f est topologiquement conjugué à sa dérivée, au voisinage du point p .

EXERCICE 7.1. Soit Λ un fermé hyperbolique invariant pour $f \in \text{Diff}^k(M)$, $k \geq 1$. Montrer directement à partir du théorème 7.8 que f est expansif en Λ . Plus précisément, montrer que la constante r donnée par ce théorème est une constante d'expansivité pour Λ .

EXERCICE 7.2. Si p est un point périodique hyperbolique de $f \in \text{Diff}^1(M)$, montrer que, si $g \in \text{Diff}^1(M)$ est suffisamment proche de f (dans la topologie C^1), g a un point périodique proche de p . (Indication : appliquer la proposition 7.7). En déduire une démonstration rapide de 7.8 dans le cas où Λ est fini.

EXERCICE 7.3. Démontrer en détail que, pour ϵ_1 et ϵ_2 assez petits, le solénoïde est un fermé invariant hyperbolique (cf. fin du chapitre 4).

CHAPITRE 8 - STABILITÉ

DÉFINITION 8.1. Soient X et Y deux espaces topologiques et soient $f : X \rightarrow X$ et $g : Y \rightarrow Y$ deux applications continues. Une application $h : X \rightarrow Y$ continue surjective sera appelée semi-conjugaison si $hf = gh$, c'est-à-dire si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

L'application h est appelée conjugaison topologique si h est de plus un homéomorphisme de X sur Y . On dira, dans ce cas, que f et g sont topologiquement conjuguées.

Remarquons que l'égalité $hf = gh$ implique l'égalité $hf^n = g^n h$. En effet, $hf^2 = (hf)f = g(hf) = g(gh) = g^2 h$, etc...

L'image d'une orbite de f par une semi-conjugaison est donc une orbite de g , tandis qu'une conjugaison topologique échange les orbites de f et g en conservant leurs propriétés topologiques.

L'application h peut être interprétée comme un changement continu de variables qui "identifie" f et g . On voit aisément que la conjugaison topologique est une relation d'équivalence.

DÉFINITION 8.2. Soit E une relation d'équivalence sur $\text{Diff}^r(M)$. Une application g de $\text{Diff}^r(M)$ sera E -stable, si la classe d'équivalence de g contient g dans son intérieur. Dans ce cas, il existera un voisinage U_g de g dans $\text{Diff}^r(M)$ tel que toutes les applications h de U_g seront E -équivalentes à g .

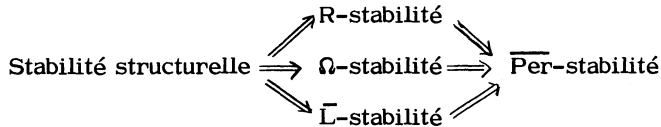
La notion de stabilité associée à la conjugaison topologique s'appelle stabilité structurelle.

Nous allons définir quatre notions de stabilité qui correspondent aux quatre ensembles invariants que nous avons définis au chapitre 1 :

$$\overline{\text{Per}}(f) \subset \overline{L}(f) \subset \Omega(f) \subset R(f) .$$

On dira que f et g sont $\overline{\text{Per}}$ -équivalentes si la restriction de f à $\overline{\text{Per}}(f)$ est topologiquement conjuguée à la restriction de g à $\overline{\text{Per}}(g)$. On définira de même les applications \overline{L} -, Ω -, R -équivalentes.

Une application stable pour la $\overline{\text{Per}}$ -équivalence (resp \overline{L}, Ω, R) est dite $\overline{\text{Per}}$ -stable (resp \overline{L} -stable...). Nous avons, correspondant aux inclusions, les implications :



Remarque : On sait que la R -stabilité n'implique pas en général la stabilité structurelle.

Soit f un difféomorphisme de classe C^r de la variété M . Soit $N_n(f)$ le cardinal de l'ensemble des points fixes de f^n : $N_n(f) = \{x \in M \mid f^n(x) = x\}$. Les homéomorphismes f et g seront ζ -équivalents si, pour tout entier n strictement positif, on a : $N_n(f) = N_n(g)$. La $\overline{\text{Per}}$ -stabilité implique clairement la ζ -stabilité ; on ne sait pas si la réciproque est vraie, ni a fortiori si la ζ -stabilité implique la \overline{L} -stabilité, l' Ω -stabilité ou la R -stabilité.

Nous allons étudier le cas où l'un des ensembles M , $R(f)$, $\Omega(f)$, $\overline{L}(f)$ ou $\overline{\text{Per}}(f)$ est un ensemble hyperbolique invariant pour f .

Commençons par démontrer un théorème plus général :

THÉORÈME 8.3. Soit Λ un ensemble hyperbolique invariant pour un difféomorphisme f de la variété M de classe C^k , $k \geq 1$. Il existe un voisinage ν_f de f dans $\text{Diff}^k(M)$ et une fonction continue $\Phi : \nu_f \rightarrow C^0(\Lambda, M)$ telle que

- 1) $\Phi(f) = \text{inc}_\Lambda$ (inclusion de Λ dans M) ;
- 2) $\Phi(g)(\Lambda)$ est un ensemble hyperbolique invariant pour g , quelle que soit

l'application g appartenant au voisinage \mathcal{U}_f ;

3) $\Phi(g)$ est un homéomorphisme de Λ sur $\Phi(g)(\Lambda)$ et conjugué topologiquement la restriction de f à Λ avec la restriction de g à $\Phi(g)(\Lambda)$:

Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\Phi(g)} & \Phi(g)(\Lambda) \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \Lambda & \xrightarrow{\Phi(g)} & \Phi(g)(\Lambda) \end{array}$$

4) Il existe une constante positive K telle que : $d_{C^0}[\Phi(g), \text{inc}(\Lambda)] < Kd_{C^0}(g, f)$.

Démonstration : Reprenons les voisinages et nombres U_Λ , ν , α , r et K que nous donne le théorème 7.8. Si g vérifie $d(f, g) < \alpha$, le diagramme suivant commute à α près :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\text{inc}_\Lambda} & U_\Lambda \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \Lambda & \xrightarrow{\text{inc}_\Lambda} & M \end{array}$$

Donc les deux conditions $g \in \nu$, $d(f, g) < \alpha$ assurent l'existence d'une application $\Phi(g) : \Lambda \rightarrow M$ unique vérifiant $d[\text{inc}_\Lambda, \Phi(g)] \leq r$ et $g\Phi(g) = \Phi(g)f$.

On sait que, de plus, $\Phi(g)$ dépend continument de g et vérifie :

$$d[\text{inc}_\Lambda, \Phi(g)] \leq Kd(f, g) .$$

Comme $\Phi(f)$ et inc_Λ font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\text{inc}_\Lambda} & U_\Lambda \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \Lambda & \xrightarrow{\text{inc}_\Lambda} & M \end{array}$$

on a : $\Phi(f) = \text{inc}_\Lambda$.

Le théorème 7.6 implique que, lorsque g est assez proche de f , l'ensemble $\Phi(g)(\Lambda)$ est hyperbolique.

Il nous reste à montrer que $\Phi(g)$ est injectif. On peut, pour cela, utiliser

l'expansivité de f , mais nous allons employer une autre méthode qui fait appel au théorème 7.8.

Supposons que g soit suffisamment proche de f pour que l'ensemble $\Lambda_g = \Phi(g)(\Lambda)$ soit contenu dans U_Λ . Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\text{id}} & U_\Lambda \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ \Lambda_g & \xrightarrow{\quad} & M \end{array}$$

commute à $d(f,g)$ près, il existe une application j telle que $fg = fj$ et $d(\text{id}|_{\Lambda_g}, j) \leq K d(f,g)$. On vérifie alors que :

$$d[\text{inc}_{\Lambda_g}, j\Phi(g)] \leq 2K d(f,g)$$

$$[j\Phi(g)]f = f[j\Phi(g)].$$

Si g est assez proche de f , plus précisément si $2K d(f,g) \leq r$, on aura $\text{inc}_{\Lambda_g} = j\Phi(g)$, ce qui implique que $\Phi(g)$ est injective. \square

COROLLAIRE 8.4. Les difféomorphismes d'Anosov (de classe C^k , $k \geq 1$) sont structurellement stables et forment un ouvert de $\text{Diff}^k(M)$.

Démonstration : Les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées avec $\Lambda = M$. Il reste à montrer que $\Phi(g)$ est surjectif. Il existe une démonstration utilisant l'homologie singulière (voir exercices). Donnons-en une autre.

Gardons les notations de la démonstration du théorème précédent. Commençons par remarquer que, si g est C^1 proche de f et si le diagramme suivant commute à r près

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{k} & M \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ \tilde{M} & \xrightarrow{k} & M \end{array}$$

la propriété d'unicité du théorème 7.8 implique que $k = \text{id}_M$.

Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\text{id}} & M \\
 \downarrow g & & \downarrow f \\
 M & \xrightarrow{\text{id}} & M
 \end{array}$$

commute à $d(f,g)$ près, il existe une application $j : M \rightarrow M$ vérifiant :

$$jg = fj \quad \text{et} \quad d(\text{id},j) \leq Kd(f,g) .$$

On vérifie aisément que $d(\text{id},\Phi(g)j) \leq 2Kd(f,g)$ et que $g[\Phi(g)j] = [\Phi(g)j]g$, ce qui, si $2Kd(f,g) \leq r$, implique que $\Phi(g)j = \text{id}_M$ et donc que $\Phi(g)$ est surjective.

Enfin, le théorème 7.6 implique que les difféomorphismes d'Anosov forment un ouvert. \square

PROPOSITION 8.5. Soit Λ un ensemble fermé invariant et hyperbolique pour une application f , $f \in \text{Diff}^k(M)$, $k \geq 1$. On peut choisir un voisinage U_Λ de Λ et des nombres $\alpha > 0$, $K > 0$, tels que si $\{x = x_0, x_1, \dots, x_n = x\}$ est une α_1 -pseudo orbite de f , $[d(f(x_i), x_{i+1}) < \alpha_1, i = 0, \dots, n-1]$ avec $\alpha_1 < \alpha$, contenue dans U_Λ , il existe une vraie orbite de période n contenue dans M qui est $K\alpha_1$ -proche de la pseudo-orbite donnée :

$$\exists x' \mid f^n(x') = x' \quad \text{et} \quad d(f^i(x'), x_i) \leq K\alpha_1, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Démonstration : Reprenons le voisinage U_Λ et les nombres K, α que nous fournit le théorème 7.8. Posons $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Soit h la bijection $X \rightarrow X$ définie par : $h(x_i) = x_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-2$,

$$h(x_{n-1}) = x_0 .$$

Si i est l'inclusion de X dans U_Λ , le diagramme suivant commute à α_1 -près :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i} & U_\Lambda \\
 \downarrow h & & \downarrow f \\
 X & \xrightarrow{i} & M
 \end{array}$$

Il existe donc une application $j : X \rightarrow M$ telle que $fj = jh$ et que $d(j,i) \leq K\alpha_1$.

On a donc, pour tout entier, k positif : $f^k_j = jh^k$. Nous en déduisons que :

$$f^k_j(x_0) = jh^k(x_0) = jx_k \quad \text{pour } k \leq n-1$$

$$f^n_j(x_0) = jh^n(x_0) = j(x_0).$$

L'orbite cherchée est celle du point $x^1 = j(x_0)$. \square

PROPOSITION 8.6. Si $R(f)$ est un ensemble hyperbolique pour f , on a : $R(f) = \overline{Per(f)}$.

Démonstration : Reprenons les nombres positifs α et K donnés en 8.5. Nous avons démontré (3.6) l'égalité $R(f)|_{R(f)} = R(f)$. Tout point x de $R(f)$ est donc α_1 -pseudo périodique pour tout α_1 , $0 < \alpha_1 < \alpha$, la pseudo-orbite étant contenue dans $R(f)$.

La proposition 8.5 permet d'affirmer qu'il existe un point périodique x^1 , tel que $d(x^1, x) \leq K\alpha_1$, le point x appartient donc à $\overline{Per(f)}$. On a donc $R(f) = \overline{Per(f)}$. \square

PROPOSITION 8.7. Si $\overline{L(f)}$ (resp $\overline{L_+(f)}$, $\overline{L_-(f)}$) est un ensemble hyperbolique pour f , on a : $\overline{Per f} = \overline{L(f)}$ (resp $\overline{Per(f)} = \overline{L_+(f)}$ ou $\overline{Per(f)} = \overline{L_-(f)}$).

Démonstration : Démontrons la proposition pour $\overline{L_+(f)}$; les autres cas se démontrent de façon analogue.

Remarquons d'abord que si U est un voisinage ouvert de $\overline{L_+(f)}$ et y un point de M , on a :

$$\exists n_0 \geq 0 \quad | \forall n \geq n_0, \quad f^n(y) \in U \quad (\text{cf. démonstration de la prop. 1.4})$$

La proposition 8.5 nous donne alors un voisinage $U_{\overline{L_+(f)}}$ et deux réels positifs α et K . Soit x un point de $\overline{L_+(f)}$, il existe un point y de M tel que x appartienne à $\omega(y)$. Soit maintenant $0 < \alpha_1 < \alpha$; ce qui précède montre qu'il existe des entiers n et k positifs tels que :

$$- \quad d(f^n(y), x) < \frac{\alpha_1}{2} \quad ; \quad d[f^{n+k}(y), x] < \frac{\alpha_1}{2}$$

$$- \quad f^{n+j}(y) \in U_{\overline{L_+(f)}} \quad \text{pour } 0 \leq j \leq k$$

$$- \quad \{f^n(y), f^{n+1}(y), \dots, f^{n+k-1}(y), f^n(y)\} \text{ est une } \alpha_1\text{-pseudo orbite}$$

contenue dans $U_{\overline{L_+(f)}}$.

La proposition 8.5 implique donc qu'il existe un point x' périodique vérifiant $d(x', f^n(y)) \leq K\alpha_1$. On aura alors $d(x', x) \leq (K + \frac{1}{2})\alpha_1$. Comme α_1 est arbitraire, x appartient à $\overline{\text{Per}(f)}$, ce qui démontre le résultat cherché :

$$L_+(f) \subset \overline{\text{Per}(f)}. \quad \square$$

Il semble que le résultat analogue concernant $\Omega(f)$ soit faux (cf. commentaires).

La proposition suivante se démontre comme la proposition 8.6.

PROPOSITION 8.8. Si $\Omega(f)$ est un ensemble hyperbolique pour f , on a :

$$\overline{\text{Per}(f)} = R(f|_{\Omega(f)}).$$

Rappelons qu'on n'a pas en général : $\Omega(f|_{\Omega(f)}) = \Omega(f)$ ou $R(f|_{\Omega(f)}) = \Omega(f)$.

Nous évitons ce piège à l'aide de la définition suivante :

DÉFINITION 8.9. Une application f de $\text{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$, satisfait l'axiome A, si

- a) $\Omega(f)$ est hyperbolique pour f ;
- b) $\Omega(f) = \overline{\text{Per}(f)}$.

Soit toujours Λ un ensemble hyperbolique pour f ; on sait que pour ϵ assez petit :

$$\exists \delta > 0 \mid x, y \in \Lambda, \quad d(x, y) < \delta \implies W_\epsilon^S(x) \cap W_\epsilon^U(y) = \{\text{un point}\}.$$

Cette intersection est de plus transverse. On note ce point $[x, y]_{\epsilon, \delta}$; dans la suite, quand il n'y a pas d'ambiguïté $[x, y]$. L'application $[\cdot, \cdot] : U_\delta(\Delta_\Lambda) \rightarrow M$ est continue ; où $U_\delta(\Delta_\Lambda)$ est le voisinage de la diagonale $\Lambda \times \Lambda$, défini par $U_\delta(\Delta_\Lambda) = \{(x, y) \mid x, y \in \Lambda, \quad d(x, y) < \delta\}$.

DÉFINITION 8.10. Un fermé invariant hyperbolique Λ est muni d'une structure de produit local si, pour ϵ et δ assez petits, le point $[x, y]$ appartient à Λ quand $d(x, y)$ est inférieur à δ .

PROPOSITION 8.11. Si $\overline{\text{Per}(f)}$ est un ensemble hyperbolique pour f , $\overline{\text{Per}(f)}$ a une structure de produit local.

Démonstration : Reprenons le voisinage $U = U_{\overline{\text{Per}(f)}}$ et les nombres $\alpha > 0$ et $K > 0$ donnés par la proposition 8.5. Choisissons $\epsilon > 0$ assez petit pour que, pour tout x appartenant à $\overline{\text{Per}(f)}$, on ait :

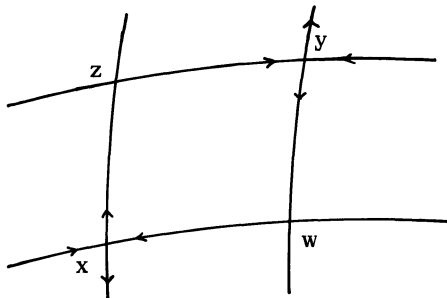
$$W_{\epsilon}^S(x) \cup W_{\epsilon}^U(x) \subset U .$$

Comme plus haut, nous associons à ϵ un nombre δ positif. Nous voulons montrer l'implication :

$$d(x,y) < \delta \ ; \ x \in \Lambda \ , \ y \in \Lambda \implies [x,y] \in \Lambda .$$

Comme l'application $(x,y) \rightarrow [x,y]$ est continue, on peut se contenter d'étudier le cas où x et y sont périodiques.

Posons $w = [x,y]$ et $z = [y,x]$. On va montrer que, pour tout $\alpha_1 > 0$, w est α_1 -pseudo-périodique et que la pseudo-orbite de w est contenue dans U . La proposition 8.5 impliquera alors que w appartient à $\overline{\text{Per}(f)}$.



Supposons que x soit de période n et que y soit de période m . On aura :

$$\forall j \geq 0, \quad f^j(w) \in W_{\epsilon}^S(f^j(x)) \subset U \ ; \ \lim_{k \rightarrow +\infty} f^{kn}(w) = x$$

$$\forall j \geq 0, \quad f^j(z) \in W_{\epsilon}^S(f^j(y)) \subset U \ ; \ \lim_{k \rightarrow +\infty} f^{km}(z) = y$$

$$\forall j \leq 0, \quad f^j(w) \in W_{\epsilon}^U(f^j(y)) \subset U \ ; \ \lim_{k \rightarrow -\infty} f^{km}(w) = y$$

$$\forall j \leq 0, \quad f^j(z) \in W_{\epsilon}^U(f^j(x)) \subset U \ ; \ \lim_{k \rightarrow -\infty} f^{kn}(z) = x .$$

Choisissons des entiers positifs k_1, k_2, k_3, k_4 tels que l'on ait :

$$d(f^{k_1 n}(w), x) < \frac{\alpha_1}{2} ; \quad d(f^{-k_2 n}(z), x) < \frac{\alpha_1}{2} ; \quad d(f^{k_3 m}(z), y) < \frac{\alpha_1}{2} ;$$

$$d(f^{-k_4 m}(w), y) < \frac{\alpha_1}{2} .$$

On vérifiera facilement que la suite :

$$\{w, f(w), \dots, f^{nk_1-1}(w), f^{-nk_2}(z), f^{-1}(z), z, f(z), f^{mk_3-1}(z), f^{-mk_4}(w), \dots, f^{-1}(w), w\}$$

est une α_1 -pseudo orbite contenue dans $U = \overline{U_{\text{Per } f}}$. \square

DÉFINITION 8.12. Soit X un espace compact métrique. Un homéomorphisme $f : X \rightarrow X$ sera dit topologiquement transitif si, pour tout couple U, V d'ouverts non vides, il existe un entier n appartenant à \mathbb{Z} tel que $f^n(U) \cap V$ soit non vide. On dira que f est topologiquement mélangeant (en anglais : mixing) si, pour tout couple U, V d'ouverts non vides, il existe un entier N tel que :

$$\forall n > N, \quad f^n(U) \cap \overline{V} \neq \emptyset .$$

Exercice : Démontrer que $f : X \rightarrow X$ est topologiquement transitif si et seulement si il existe un point z de X d'orbite dense.

THÉORÈME 8.13 (Décomposition spectrale). Soit f appartenant à $\text{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$. Supposons que $\overline{\text{Per}(f)}$ soit un ensemble hyperbolique pour f . Il existe une décomposition de $\overline{\text{Per}(f)}$ en fermés disjoints : $\text{Per}(f) = P_1 \cup \dots \cup P_s$ telle que :

a) Les P_i sont stables pour f et la restriction de f à chacun des P_i est topologiquement transitive.

b) Il existe une décomposition de chacun des P_i en fermés disjoints :

$P_i = X_{1,i} \cup \dots \cup X_{n_i,i}$ telle que $f(X_{j,i}) = X_{j+1,i}$ pour $1 \leq i \leq n_i-1$, $f(X_{n_i,i}) = X_{1,i}$ et telle que l'application $f^{n_i} : X_{j,i} \rightarrow X_{j,i}$ soit topologiquement mélangeante quel que soit j , $1 \leq j \leq n_i$.

Démonstration : Soit $\delta > 0$ petit. Soit p un point de $\text{Per}(f)$.

Posons : $X_p = \overline{W^U(p) \cap \overline{\text{Per}(f)}}$ et $B_\delta(X_p) = \{y \in \overline{\text{Per}(f)} \mid d(y, X_p) < \delta\}$

Si δ est assez petit (ce choix est indépendant de p) et si y appartient à $B_\delta(X_p) \cap \text{Per}(f)$, nous affirmons que y appartient à X_p . Supposons que y soit de période $k > 0$. Soit x un point de $W^U(p) \cap \overline{\text{Per}(f)}$ tel que $d(x, y) < \delta$. On voit facilement que les variétés instables $W^U(p)$ et $W^U(x)$ coïncident. Posons $z = [y, x]$; le point z appartient à $\overline{\text{Per}(f)}$ (proposition 8.11); par définition, le point z appartient à $W^S(y)$ et donc $f^{nk}(z)$ tend vers y quand n tend vers l'infini. Comme, d'autre part, z appartient à $W^U(x) = W^U(p)$, $f^{n\ell}(z)$ appartient à $W^U(p) \cap \overline{\text{Per}(f)}$ si p est de période ℓ , donc y appartient à $\overline{W^U(p) \cap \overline{\text{Per}(f)}}$.

Comme $B_\delta(X_p)$ est ouvert dans $\overline{\text{Per}(f)}$ on voit qu'un point z ne peut appartenir à $B_\delta(X_p)$ que s'il appartient à X_p .

Chaque X_p est à la fois ouvert et fermé dans $\overline{\text{Per}(f)}$. Montrons que si p et q sont deux points de $\overline{\text{Per}(f)}$, X_p et X_q sont, soit identiques, soit disjoints. Supposons d'abord que q appartienne à X_p . Posons :

$$\overline{W_\gamma^U(q)} = W_\gamma^U(q) \cap \overline{\text{Per}(f)}.$$

Comme X_p est ouvert dans $\overline{\text{Per}(f)}$, lorsque le nombre $\gamma > 0$ est choisi assez petit, X_p contient $\overline{W_\gamma^U(q)}$, on a donc :

$$X_q = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{n\ell m}(\overline{W_\gamma^U(q)})} \subset X_p$$

où ℓ est la période de p et m la période de q .

Comme X_q est un voisinage ouvert de q dans $\overline{\text{Per}(f)}$, il contient un point y de $W^U(p) \cap \overline{\text{Per}(f)}$; on a alors $p = \lim_{n \rightarrow -\infty} f^{nm\ell}(y) \in \overline{X_q} = X_q$. De manière analogue, X_p est contenu dans X_q et donc $X_p = X_q$.

Soient maintenant p et q des points arbitraires de $\text{Per}(f)$. Si l'ensemble $X_p \cap X_q$ n'est pas vide, il est ouvert et contient un point périodique q' . On a donc : $X_p = X_{q'} = X_q$.

La compacité de $\overline{\text{Per}(f)}$ implique que les X_p distincts sont en nombre fini ;
 enfin, comme $f(X_p) = X_{f(p)}$, l'application f permute ces ensembles.

Soit P_1, \dots, P_s les réunions de chacune des orbites par f de ces ensembles.

$$\begin{aligned} P_1 &= X_{1,1} \cup \dots \cup X_{n_1,1} \\ &\vdots \\ P_s &= X_{1,s} \cup \dots \cup X_{n_s,s} \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à montrer que, si $f^N(X_p) = X_p$, l'application f^N est mélangente. (Si les applications $f^{n_i} : X_{j,i} \rightarrow X_{j,i}$ sont mélangentes, la restriction de f à P_i est transitive.)

Si U et V sont des ouverts non vides de X_p , on veut montrer qu'il existe un entier positif T tel que, pour tout entier t supérieur à T , l'intersection $f^{tN}(V) \cap U$ soit non vide. Soit p_1 un point périodique contenu dans V . On a $X_{p_1} = X_p$; on peut donc trouver un point z appartenant à $W^U(p_1) \cap \overline{\text{Per}(f)}$ tel que z soit contenu dans U . Si p_1 est de période K pour f^N , on a $f^{KN}(p_1) = p_1$. Pour chaque i , $i = 0, \dots, K-1$, on peut de même trouver un point z_i appartenant à U et à $W^U(f^{iN}(p_1))$. La suite $f^{-NKt}(z_i)$ tend vers $f^{iN}(p_1)$, quand t tend vers l'infini. Il existe alors des nombres T_i , $i = 0, \dots, K-1$, tels que :

$$\forall t \geq T_i, \quad f^{-NKt}(z_i) \in f^{iN}(V)$$

ou encore, tels que :

$$\forall t \geq T_i, \quad f^{-NKt-iN}(z_i) \in V .$$

Posons $T = \max(T_i)$; si t est plus grand que KT , posons $t = Ks + i$ avec $0 \leq i < K$. L'entier s sera supérieur à T_i et donc : $f^{-tN}(z_i) = f^{-NKs-iN}(z_i)$ appartiendra à V ; on aura donc :

$$\forall t \geq KT, \quad f^{-tN}(U) \cap V \neq \emptyset$$

ou encore

$$\forall t \geq KT, \quad U \cap f^{tN}(V) \neq \emptyset . \quad \square$$

Remarque : Les ensembles P_i et $X_{i,j}$ du théorème de décomposition spectrale sont uniques à indexation près. Puisque chaque P_i a une orbite dense, il ne peut être une réunion disjointe d'un nombre fini d'ensembles fermés invariants non triviaux. Les ensembles P_i sont donc uniques à indexation près, car si Q_1, \dots, Q_r était une autre décomposition de $\overline{\text{Per}(f)}$ en ensembles fermés invariants disjoints, $Q_1 \cap P_i, \dots, Q_r \cap P_i$ serait une décomposition de P_i en fermés invariants disjoints. L'ensemble P_i est donc contenu dans l'un des ensembles $Q_1, \dots, Q_r : Q_j$. Mais, par hypothèse, $f|_{Q_\ell}$ est topologiquement transitif pour tout ℓ et donc Q_j est contenu dans P_i ; on a bien $Q_j = P_i$. L'unicité à indexation près de la décomposition $X_{i,j}$ se démontre de la même façon.

Le théorème 8.13 amène naturellement la

DÉFINITION 8.14. Soit X un espace métrique compact (séparable), f une application continue de X dans lui-même et $Y \subset X$ un ensemble fermé invariant pour f . La décomposition $Y = P_1 \cup \dots \cup P_s$ est une décomposition spectrale de Y , si :

a) Les P_i sont des fermés invariants pour f , deux à deux disjoints, et la restriction de f à P_i ($i = 1, \dots, s$) est un homéomorphisme topologiquement transitif ;

b) Chaque ensemble P_i se décompose en une réunion disjointe de fermés

$P_i = X_{1,i} \cup \dots \cup X_{n_i,i}$ telle que :

- On ait : $f(X_{j,i}) = X_{j+1,i}$ et $f(X_{n_i,i}) = X_{1,i}$, pour $1 \leq j < n_i$;
- $f|_{X_{j,i}}^{n_i} : X_{j,i} \rightarrow X_{j,i}$ soit topologiquement mélangeant pour tout j .

Le théorème suivant est maintenant évident :

THÉORÈME 8.15. Soit f un difféomorphisme de classe C^r , $r \geq 1$, de la variété M .

a) Si $\overline{\text{Per}(f)}$ est un ensemble hyperbolique, $\overline{\text{Per}(f)}$ admet une décomposition spectrale ;

b) Si $\overline{L}(f)$ (resp $\overline{L}_+(f), \overline{L}_-(f)$) est hyperbolique, $\overline{L}(f)$ (resp $\overline{L}_+(f), \overline{L}_-(f)$) admet une décomposition spectrale ;

c) Si f satisfait à l'axiome A, $\Omega(f)$ admet une décomposition spectrale ;

d) Si $R(f)$ est hyperbolique, $R(f)$ admet une décomposition spectrale.

En fait, dans chacun des cas b), c) et d), la décomposition spectrale est celle de $\overline{\text{Per}(f)}$.

Démonstration : Dans chacun des cas a), b), c) et d), l'ensemble hyperbolique en question est égal à $\overline{\text{Per}(f)}$. \square

Soit $P_1 \cup \dots \cup P_s$ la décomposition spectrale de $\overline{L}(f) = \overline{\text{Per}(f)}$. On dira qu'il n'y a pas de cycle si les P_i ne contiennent pas de cycle (cf. chapitre 2).

DÉFINITION 8.16. Soit f une application de X dans lui-même continue et soit $Y \supset L(f)$ un fermé invariant qui admet une décomposition spectrale $Y = P_1 \cup \dots \cup P_s$. On dit qu'il n'y a pas de cycle si les P_i ne contiennent pas de cycle.

Remarque : Si $R(f)$ admet une décomposition spectrale $Y = P_1 \cup \dots \cup P_s$, il n'y a pas de cycle car $R(f)$ admet une fine suite de filtrations qui est ici, en fait, une filtration (cf. exercice 8.6).

Dans l'une des hypothèses du théorème 8.14, s'il n'y a pas de cycles, il existe une filtration \mathfrak{m} telle que : $K(\mathfrak{m}) = \overline{\text{Per}(f)}$. Nous allons démontrer que, dans ce cas, f est \overline{L} , Ω et R -stable.

Comme nous savons que l'ensemble $\overline{\text{Per}(f)}$, quand il est hyperbolique, admet une structure de produit local, nous allons commencer par énoncer des généralités concernant les ensembles fermés hyperboliques qui admettent une structure de produit local.

Nous gagnons à priori un peu en généralités puisqu'il n'est pas évident que les points périodiques soient denses dans un ensemble invariant hyperbolique qui admet une structure de produit local. On sait que, si f est un difféomorphisme d'Anosov de la variété M , celle-ci admet une structure de produit local, mais on ne sait pas si les points périodiques sont denses dans M .

Problème. Soit f un difféomorphisme d'Anosov de la variété M , a-t-on $\overline{\text{Per}(f)} = M$?

Le meilleur résultat que nos techniques permette d'obtenir est :

PROPOSITION 8.17. Si $f : M \rightarrow M$ est un difféomorphisme d'Anosov, on a :

$$\overline{\text{Per}(f)} = R(f) .$$

Le problème précédent peut donc s'énoncer : Si $f : M \rightarrow M$ est un difféomorphisme d'Anosov, a-t-on $R(f) = M$?

Supposons que Λ soit un fermé hyperbolique invariant pour f . Une α_1 -pseudo orbite $\underline{x} = \{x_n, -\infty < n < +\infty\}$ peut être considérée comme une fonction i de \mathbb{Z} dans M ($i(n) = x_n$). Nous savons que lorsque U_Λ est un voisinage assez petit de Λ , si tous les points de la suite x_n appartiennent à U_Λ et si $\alpha_1 < \alpha$ est assez petit, il existe un nombre $K > 0$, indépendant de la suite \underline{x} , tel que l'on puisse trouver une application $j : \mathbb{Z} \rightarrow M$ vérifiant $d(i, j) \leq K\alpha_1$ et $j(n+1) = f(j(n))$. Posons $y_n = j(n)$; on a $y_n = f^n(y_0)$; $\{y_n\}$ est donc une orbite de f et vérifie $d(y_n, x_n) \leq K\alpha_1$.

DÉFINITION 8.18. Soit X un espace métrique et f une application de X dans lui-même. Soit $\underline{x} = \{x_i \mid a < i < b\}$ une α -pseudo orbite. Un point x' de X β -piste (en anglais : β -shadows) la pseudo orbite \underline{x} si $\forall i, a < i < b, d(f^i(x'), x_i) \leq \beta$.

Nous avons donc, avant de donner cette définition, démontré la :

PROPOSITION 8.19. Si Λ est un ensemble fermé hyperbolique, il existe un voisinage U_Λ de Λ et des réels $\alpha > 0$ et $K > 0$, tels que toute α_1 -pseudo orbite

$\underline{x} = \{x_i \mid -\infty < i < +\infty\}$ contenue dans U_Λ soit, si α_1 est inférieur à α , $K\alpha_1$ -pistée par un point x' de M .

On voudrait, quand la pseudo-orbite \underline{x} est contenue dans Λ , trouver un point x' appartenant aussi à Λ qui piste \underline{x} . Pour le trouver nous devons supposer que Λ admet une structure de produit local.

Notre démonstration part du théorème de la variété stable démontré pour les ensembles hyperboliques.

PROPOSITION 8.20. Soit Λ un ensemble fermé invariant hyperbolique pour un difféomorphisme f de classe C^r de la variété M . Supposons que Λ admette une structure de produit local. Alors, pour tout $\beta > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que toute α -pseudo-orbite \underline{x} contenue dans Λ soit β -pistée par un point y de Λ .

Démonstration : Supposons que M soit munie d'une métrique adaptée à f . On trouve un nombre ϵ en appliquant à Λ le théorème de la variété instable. Soit $\lambda \in]0, 1[$ une constante d'hyperbolicité pour Λ . Choisissons un nombre $\epsilon_1 > 0$ vérifiant :

$$\frac{\epsilon_1}{1-\lambda} < \epsilon \quad \text{et} \quad \frac{\epsilon_1}{1-\lambda} < \beta .$$

Soit $\delta > 0$ un nombre permettant de définir sur Λ une structure de produit local tel que : $[\cdot, \cdot] = [\cdot, \cdot]_{\epsilon_1, \delta} : U_\delta(\Delta_\Lambda) \rightarrow \Lambda$ soit défini. Rappelons que $U_\delta(\Delta_\Lambda)$ est le voisinage de la diagonale $\Lambda \times \Lambda$ défini par :

$$U_\delta(\Delta_\Lambda) = \{(x, y) \in \Lambda \times \Lambda \mid d(x, y) < \delta\} .$$

Supposons enfin que δ vérifie : $\frac{\epsilon_1}{1-\lambda} + \delta < \beta$.

Comme l'opération $[\cdot, \cdot]$ est continue et comme la variété stable dépend continument du point où on la définit, il existe un nombre $\alpha > 0$ assez petit pour que, quels que soient les points z et w de Λ vérifiant $d(z, w) < \alpha$, on ait l'inclusion :

$$[z, W_{\lambda, \delta}^S(w) \cap \Lambda] \subset W_\delta^S(z) .$$

Commençons par supposer que notre α -pseudo orbite soit de la forme

$\underline{x} = \{x_0, \dots, x_n\}$. Posons $y_0 = x_0$ et définissons de proche en proche les points y_k par $y_k = [x_k, f(y_{k-1})]$ pour $1 \leq k \leq n-1$. Il faut démontrer que les points y_k appartiennent à l'ensemble $W_\delta^S(x_k) \cap \Lambda$. Supposons par récurrence que y_{k-1} appartienne à $W_\delta^S(x_{k-1}) \cap \Lambda$, le point $f(y_{k-1})$ appartient à $W_{\lambda\delta}^S(f(x_{k-1})) \cap \Lambda$, et comme on a $d(x_k, f(x_{k-1})) < \alpha$, le point y_k appartient à l'ensemble $W_\delta^S(x_k) \cap \Lambda$, ce qui permet de continuer la récurrence. Comme sur $U_\delta(\Delta_\Lambda)$ on a : $[,] = [,]_{\epsilon_1, \delta}$, les points y_k appartiennent chacun à la plaque instable $W_{\epsilon_1}^U(f(y_{k-1}))$. On démontre donc par récurrence que les points $f^{-j}(y_k)$ appartiennent chacun à la plaque instable $W_{\theta_j}^U(y_{k-j})$ où $\theta_j = \sum_{i=1}^j \lambda^i \epsilon_1$. Comme θ_j est inférieur ou égal à $\frac{\epsilon_1}{1-\lambda}$, les points $f^{-j}(y_k)$ appartiennent chacun à la plaque instable $W_{\left(\frac{\epsilon_1}{1-\lambda}\right)}^U(y_{k-j})$. Posons $y = f^{-n}(y_n)$. $f^{-(n-j)}(y_n) = f^j(y)$ appartient donc à la plaque instable $W_{\left(\frac{\epsilon_1}{1-\lambda}\right)}^U(y_j)$ quel que soit $0 \leq j \leq n$.

On a donc :

$$d(f^j(y), x_j) \leq d(f^j(y), y_j) + d(y_j, x_j) \leq \frac{\epsilon_1}{1-\lambda} + \delta < \beta.$$

Si la α -pseudo-orbite \underline{x} est de la forme $\underline{x} = \{x_i \mid a < i < b\}$, où a et b sont des entiers finis, définissons x' par $x' = \{x'_0, \dots, x'_{b-a-2}\}$ où $x'_i = x_{i+a+1}$. Si y' β -piste \underline{x}' , il est clair que le point $y = f^{-a-1}(y')$ β -piste \underline{x} .

Enfin, si $\underline{x} = \{x_i \mid -\infty < i < +\infty\}$ est infinie, il existe un point y_m de Λ qui β -piste chaque pseudo-orbite $\underline{x}_m = \{x_i \mid -m < i < m\}$ et comme Λ est compact, il existe un point y , adhérent à la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$, qui β -piste \underline{x} . On peut de même β -pister une pseudo-orbite infinie d'un seul côté. \square

Précisons un peu ce dernier résultat.

PROPOSITION 8.21. Soit $\Lambda \subset M$ un fermé invariant hyperbolique pour le difféomorphisme f de classe C^r de la variété M . Supposons que Λ admette une structure de produit local. Soit ϵ une constante d'expansivité pour la restriction de f à Λ

et soit $0 < \gamma < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors :

a) Si une pseudo-orbite $\underline{x} = \{x_i \mid -\infty < i < +\infty\}$ est γ -pistée par deux points y_1 et y_2 de Λ , on a : $y_1 = y_2$.

b) Il existe un réel $\alpha > 0$ et un voisinage U_Λ de Λ tels que toute α -pseudo-orbite $\underline{x} = \{x_i \mid a < i < b\}$ contenue dans U_Λ soit γ -pistée par un point x de Λ .

Si, de plus, la pseudo-orbite \underline{x} est infinie des deux côtés : $\underline{x} = \{x_i \mid -\infty < i < +\infty\}$, le point est unique.

Démonstration :

a) Si y_1 et y_2 γ -pistent \underline{x} , on a :

$$d[f^n(y_1), f^n(y_2)] \leq 2\gamma < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Les deux points y_1 et y_2 coïncident donc.

b) Soit α_1 le nombre obtenu dans la proposition 8.20 quand on prend $\beta = \frac{\gamma}{2}$. Choisissons alors un voisinage U_Λ de Λ et un nombre $\alpha > 0$, tels que toute α -pseudo-orbite \underline{x} contenue dans U_Λ , puisse être $\frac{\gamma}{2}$ approchée par une α_1 -pseudo-orbite \underline{x}' contenue dans Λ ($d(x_i, x'_i) < \frac{\gamma}{2}$, $a < i < b$) ; on peut trouver un tel nombre α car f est uniformément continue. La pseudo-orbite \underline{x}' est $\frac{\gamma}{2}$ -pistée par un point x de Λ , x γ -piste donc la pseudo-orbite \underline{x} . Quand la pseudo-orbite \underline{x} est infinie des deux côtés, l'unicité du point x est donnée par a). \square

PROPOSITION 8.22. Soit Λ un fermé invariant hyperbolique pour f muni d'une structure de produit local. Λ est alors uniformément localement maximal. Plus précisément, il existe un voisinage $U_\Lambda \subset M$ de Λ et un voisinage $\eta_f \subset \text{Diff}^r(M)$ de f tels que :

1) $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U_\Lambda)$. Si de plus, U_Λ et η_f sont suffisamment petits pour que l'on puisse appliquer le théorème 8.3, l'ensemble $\Phi(g)\Lambda$, conjugué de Λ , est bien défini et

$$2) \Phi(g)\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(U_\Lambda), \quad \forall g \in \eta_f.$$

Démonstration : Prenons U_Λ assez petit pour qu'il soit contenu dans le voisinage de Λ donné par la proposition 8.21. Choisissons un voisinage η_f de f contenu dans le voisinage U_f du théorème 8.3 et tel que toute application g appartenant à η_f vérifie $\sup_{x \in M} d(g(x), f(x)) < \alpha$, où le nombre α est donné par la proposition 8.21.

Soit z un point de l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(U_\Lambda)$. L'orbite du point z pour g : $\underline{z} = \{g^n(z) \mid -\infty < n < +\infty\}$ est α -pseudo-orbite de f contenue dans U_Λ . L'orbite \underline{z} est γ -pistée par un unique point x de Λ . Mais alors, on a : $\Phi(g)x = z$. En effet, si η_f est suffisamment petit, on a :

$$d(f^n(x), g^n[\Phi(g)(x)]) = d(f^n(x), \Phi(g)f^n(x)) \leq d(\text{Id}, \Phi(g)) < \delta.$$

Par ailleurs, considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{i} & \Lambda \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{i} & \Lambda \end{array} \quad \text{où } i(n) = f^n(x) \text{ et } h(n) = n + 1.$$

Si δ est assez petit, le théorème 7.8 implique qu'il existe un unique point y vérifiant : $d(f^n(x), g^n(y)) < \delta$, pour tout n appartenant à \mathbb{Z} . Comme les deux points z et $\Phi(g)(x)$ vérifient cette condition, on a : $z = \Phi(g)(x)$. Ceci démontre l'inclusion $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(U_\Lambda) \subset \Phi(g)(\Lambda)$; l'inclusion inverse est triviale si g est assez proche de f pour que $\Phi(g)(\Lambda)$ soit contenu dans U_Λ . \square

THÉORÈME 8.23. Supposons que Λ soit un fermé invariant hyperbolique pour f , muni d'une structure de produit local et contienne $L(f)$. Supposons qu'il existe une décomposition $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k$ de Λ en une réunion disjointe de fermés invariants telle que la famille $(\Lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$ ne contienne pas de cycle. Il existe alors une filtration adaptée à Λ , un voisinage $\eta_f \subset \text{Diff}^r(M)$ de f et une fonction continue $\Phi : \eta_f \rightarrow C^0(\Lambda, M)$, tels que :

- 1) \mathfrak{m} est une filtration adaptée pour toutes les applications g de η_f .
- 2) $\Phi(f) = \text{inc}_\Lambda$.

- 3) $\Phi(g)_\Lambda = K^{\mathcal{G}}(\mathfrak{m})$; $\Phi(g)\Lambda_i = K_i^{\mathcal{G}}(\mathfrak{m})$.
- 4) $\Phi(g) : \Lambda \rightarrow K^{\mathcal{G}}(\mathfrak{m})$ est une conjugaison topologique.
- 5) Il existe une constante positive K telle que : $d_{C^0}[\Phi(g), \text{inc}(\Lambda)] \leq K d_{C^0}(g, f)$.

Démonstration : L'existence de \mathfrak{m} est donnée par le théorème 2.3, tandis que la proposition 2.4 démontre le point 1). De la proposition 2.4, on déduit de plus que, si g est assez proche de f , l'ensemble $K^{\mathcal{G}}(\mathfrak{m})$ est contenu dans le voisinage U_Λ de Λ donné par la proposition 8.20. Ceci montre que $K^{\mathcal{G}}(\mathfrak{m})$ est contenu dans $\Phi(g)_\Lambda$.

Il reste à démontrer l'inclusion inverse. Supposons que \mathfrak{m} soit la filtration :

$\Phi = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = M$, chaque fermé invariant Λ_i est contenu dans la différence $M_i - \bar{M}_{i-1}$. Si g est assez proche de f , l'ensemble $\Phi(g)(\Lambda_i)$ est aussi contenu dans $(M_i - \bar{M}_{i-1})$ et donc $\Phi(g)(\Lambda_i)$ est contenu dans $K_i^{\mathcal{G}}(\mathfrak{m})$. \square

Cette dernière proposition a, comme corollaires, trois résultats apparemment distincts, mais en fait identiques.

COROLLAIRE 8.24 (Théorème d' Ω -stabilité). Soit f un difféomorphisme de classe C^r de la variété M .

a) Si $\overline{L(f)}$ est un ensemble hyperbolique pour f et s'il n'y a pas de cycles, f est \bar{L} -stable. L'ensemble des applications f de $\text{Diff}^r(M)$, telles que $\overline{L(f)}$ soit hyperbolique et qu'il n'y ait pas de cycles, est un ouvert de $\text{Diff}^r(M)$.

b) Si f satisfait l'axiome A et s'il n'y a pas de cycles, f est Ω -stable. L'ensemble des applications f de $\text{Diff}^r(M)$, qui satisfont à l'axiome A et telles qu'il n'y ait pas de cycles, est un ouvert de $\text{Diff}^r(M)$.

c) Si $R(f)$ est hyperbolique pour f , f est R -stable. L'ensemble des applications f de $\text{Diff}^r(M)$, telles que $R(f)$ soit hyperbolique, est un ouvert de $\text{Diff}^r(M)$.

Enfin, dans chacun des cas a), b) et c), on a :

$$\overline{\text{Per}(f)} = \overline{L(f)} = \Omega(f) = R(f) .$$

Démonstration : Dans les cas a), b) et c), nous avons respectivement :

$\overline{\text{Per}}(f) = \overline{L}(f)$ resp $\Omega(f)$ resp $R(f)$ (cf. 8.6 à 8.9). La décomposition spectrale n'a pas de cycles (pour le cas de $R(f)$, voir la remarque qui suit la définition 8.16), et $\overline{\text{Per}}(f)$ admet une structure de produit local. Posons $\Lambda = \overline{\text{Per}}(f)$ et appliquons le théorème

8.23. Lorsque g appartient au voisinage η_f et f , on a :

$$\Phi(g)_\Lambda = K^g(\mathfrak{m}), \text{ d'où la suite d'inclusions :}$$

$$\overline{\text{Per}}(g) \subset \overline{L}(g) \subset \Omega(g) \subset R(g) \subset \Phi(g)(\Lambda) .$$

L'homéomorphisme $\Phi(g)$ est une conjugaison, donc $\Phi(g)(\text{Per}(f))$ est contenu dans $\text{Per}(g)$ et donc $\Phi(g)_\Lambda$ est contenu dans $\overline{\text{Per}}(g)$, d'où les égalités :

$$\Phi(g)(\Lambda) = \overline{\text{Per}}(g) = \overline{L}(g) = \Omega(g) = R(g) .$$

Si $\Phi(g)$ est suffisamment proche de l'identité, $\Phi(g)(\Lambda)$ est un ensemble hyperbolique pour g . La décomposition spectrale de la restriction $g|_{\Phi(g)(\Lambda)}$ est l'image par $\Phi(g)$ de la décomposition spectrale de f . Il n'y a pas de cycle puisque \mathfrak{m} est une filtration adaptée à cette décomposition. \square

Remarque : Nous avons montré les équivalences :

$$\left(\begin{array}{l} \overline{L}(f) \text{ est hyperbolique et} \\ \text{il n'existe pas de cycle} \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{l} f \text{ vérifie l'axiome A} \\ \text{et n'a pas de cycle} \end{array} \right) \iff R(f) \text{ est hyperbolique}$$

C'est-à-dire que, dans les seuls cas de \overline{L} , Ω ou R -stabilité que nous connaissons, ces trois concepts coïncident.

- EXERCICES ET PROBLÈMES -

Problème central. La Ω (resp \overline{L} ou R)-stabilité d'un difféomorphisme de classe C^r de la variété M implique-t-elle que l'ensemble $\Omega(f)$ (resp $\overline{L}(f)$ ou $R(f)$) soit hyperbolique ?

On ne pose d'habitude cette question qu'au sujet de Ω . La réponse n'est

connue que pour le cercle.

Exercice 8.1. Énoncer et démontrer un théorème de \overline{L}_+ ou \overline{L}_- -stabilité en utilisant les définitions d'un cycle et d'une filtration données dans les exercices du chapitre 3.

Exercice 8.2. Soit Λ un fermé invariant hyperbolique pour $f \in \text{Diff}^r(M)$, muni d'une structure de produit local. Démontrer l'égalité $\overline{\text{Per}(f)}_{|\Lambda} = R(f|_{\Lambda})$. Démontrer qu'un difféomorphisme d'Anosov satisfait à l'axiome A et n'a pas de cycle.

Exercice 8.3. Soit f un difféomorphisme d'Anosov de la variété M . Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}_f \subset \text{Homeo}(M)$ de f tel que, pour toute application g appartenant à ce voisinage, il existe une semi-conjugaison entre g et f , c'est-à-dire une application h continue et surjective de M sur M telle que $hg = fh$.

Indication pour la surjectivité de h : Si j est une application continue de M dans M proche de l'identité, elle est homotope à l'identité. Donc, si m est la dimension de M , l'application j induit l'identité sur $H_m(M, \mathbb{Z}_2)$:

$$\text{id} = j_* : H_m(M, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_m(M, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$$

et donc ne peut se factoriser par $M - p$, où p est un point de M , car $H_m(M - p) = 0$. Par conséquent, j est surjective.

Exercice 8.4. Si f est un difféomorphisme d'Anosov de la variété M , montrer qu'il existe un voisinage \mathcal{U} de l'identité de M dans $C^0(M, M)$ tel que la seule application j appartenant à \mathcal{U} vérifiant $fj = jf$ soit l'identité de M .

Exercice 8.5. Soit $(P_i)_{1 \leq i \leq s}$ la décomposition spectrale de $f|_{\overline{\text{Per}(f)}}$ donnée par le théorème 8.13. Montrer que, non seulement l'homéomorphisme $f|_{P_i}$ est topologiquement transitif, mais aussi que, si U et V sont des ouverts non vides et n un

entier positif, il existe un entier $m > n$ tel que l'intersection $f^m(U) \cap V$ soit non vide.

Indication : Utiliser le fait que $f^N_i|_{X_{i,j}}$ soit topologiquement mélangeant.

Exercice 8.6. Démontrer que, si $R(f)$ est hyperbolique, il n'y a pas de cycle.

Indication : Supposer que P_1, \dots, P_ℓ soit un cycle.

Soit $x_i \in (W^U(P_i) - P_i) \cap (W^S(P_{i+1}) - P_{i+1})$, $1 \leq i \leq \ell-1$ et $x_\ell \in (W^U(P_\ell) - P_\ell) \cap (W^S(P_1) - P_1)$. Montrer qu'il existe une filtration \mathfrak{m} ,

$\mathfrak{m} : M_0 = \emptyset \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = M$ telle que $x_i \notin K(\mathfrak{m})$, $i = 1, \dots, \ell$. Montrer ensuite que, pour tout $i = 1, \dots, \ell$, il existe α_i tel que $P_i \subset K_{\alpha_i}(\mathfrak{m})$. En déduire que les $K_{\alpha_i}(\mathfrak{m})$, $i = 1, \dots, \ell$, forment un cycle, ce qui est absurde.

Autre démonstration : Supposer que P_1, \dots, P_r soit un cycle. Chaque intersection $(W^U(P_i) - P_i) \cap (W^S(P_{i+1}) - P_{i+1})$, $i < r$, contiendra un point x_i et l'intersection $(W^U(P_r) - P_r) \cap (W^S(P_1) - P_1)$ contiendra un point x_r . Montrer que x_1 appartient à $R(f)$ en construisant une α -pseudo-orbite de la forme :

$$\{x_1, f(x_1), \dots, f^{n_1}(x_1), z_2, \dots, f^{\ell_2}(z_2), f^{-m_2}(x_2), \dots, x_2, \dots, f^{n_2}(x_2), z_3, \dots, f^{\ell_3}(z_3), f^{-m_3}(x_3), \dots, x_3, \dots, f^{m_3}(x_3), z_4, \dots, z_r, \dots, f^{\ell_r}(z_r), f^{-m_r}(x_r), \dots, f^{n_r}(x_r), z_1, \dots, f^{\ell_1}(z_1), f^{-m_1}(x_1), \dots, x_1\} \quad \text{où } z_i \in P_i.$$

Encore une autre démonstration : Comme $R(f)$ admet une suite fine de filtrations, utiliser la proposition 8.22 pour montrer qu'il existe une filtration \mathfrak{m} vérifiant $K(\mathfrak{m}) = R(f)$. On sait, en effet, qu'il existe une suite de filtrations telle que $\bigcap_i K(\mathfrak{m}_i) = R(f)$. L'un des fermés $K(\mathfrak{m}_i)$ doit être contenu dans le voisinage U de la proposition 8.22 ; \mathfrak{m}_i est donc la filtration \mathfrak{m} cherchée.

Exercice 8.7. (Théorème de Birkhoff-Smale).

Supposons que p soit un point fixe hyperbolique d'un difféomorphisme f de classe C^r . S'il existe un point q d'intersection transverse de $W^S(p)$ et $W^U(p)$ différent de p , montrer que q appartient à $\overline{\text{Per}}(f)$ et en conclure que f a une infinité de points périodiques.

Indication : Utiliser la proposition 8.19 et les commentaires du chapitre 8.

CHAPITRE 9 - POT-POURRI DE RÉSULTATS DE STABILITÉ

PROPOSITION 9.1. Soit Λ un fermé invariant pour $f \in \text{Diff}^r(M)$ muni d'une structure de produit local. On a alors :

$$W^S(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^S(x) \quad \text{et} \quad W^U(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^U(x) .$$

Démonstration : Comme dans la proposition 8.21, si l'on se donne δ assez petit, on peut trouver un voisinage U de Λ et un réel $\alpha > 0$, tels que toute α -pseudo-orbite de f contenue dans U soit δ -pistée par un point de Λ . Soit y un point de $W^S(\Lambda)$, il existe un entier N tel que :

$$\forall n \geq N, f^n(y) \in U .$$

L'ensemble $\underline{y} = \{y_i ; y_i = f^{i+N}(y) ; i \geq 0\}$ est une orbite contenue dans U . Elle est donc δ -pistée par un point x appartenant à Λ . Par définition d'un δ -pistage, on a :

$$\forall i \geq 0, d(f^i(x), f^{i+N}(y)) < \delta .$$

Si δ est assez petit, la variété stable locale $W_\delta^S(x)$ est définie, le point $f^N(y)$ appartiendra à cette variété stable locale et donc y appartiendra à la variété stable $W^S(f^{-N}(x))$.

Le résultat concernant $W^U(\Lambda)$ s'obtient de même en considérant f^{-1} . □

Rappelons que, si le point y appartient à la variété stable $W^S(x)$, les variétés stables $W^S(y)$ et $W^S(x)$ coïncident. En effet, pour tout point z de M , les deux conditions suivantes sont équivalentes :

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d[f^n(z), f^n(y)] = 0$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d[f^n(z), f^n(x)] = 0$$

puisque l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} d[f^n(y), f^n(x)] = 0$.

Si $\overline{L(f)}$ est hyperbolique, $\overline{L(f)}$ admet une décomposition spectrale et une

structure en produit local. Soit $\overline{L}(f) = L_1 \cup \dots \cup L_k$ cette décomposition spectrale. Pour tout point x de M , il existera un indice i tel que x appartienne à $W^S(L_i)$ et un indice j tel que x appartienne à $W^U(L_j)$. La proposition 9.1 implique l'existence d'un point y_i de L_i et d'un point y_j de L_j , tels que x appartienne à $W^S(y_i)$ et à $W^U(y_j)$. On aura donc : $W^S(x) = W^S(y_i)$ et $W^U(x) = W^U(y_j)$, où, pour chaque point x , $W^S(x)$ et $W^U(x)$ sont des espaces euclidiens immergés injectivement dans M . Nous avons démontré le :

COROLLAIRE 9.2. Si $\overline{L}(f)$ est hyperbolique pour $f \in \text{Diff}^r(M)$, pour tout $x \in M$ les sous-ensembles $W^S(x)$ et $W^U(x)$ sont des espaces euclidiens immergés dans M par une immersion injective de classe C^r .

Bien sûr, le même résultat est vrai si f satisfait l'axiome A ou si $R(f)$ est un ensemble hyperbolique pour f .

DÉFINITION 9.3. Si, soit $\overline{L}(f)$ est hyperbolique, soit f satisfait l'axiome A, soit $R(f)$ est hyperbolique, nous dirons que f satisfait la condition de transversalité forte quand, pour tout point x de M , les variétés stables et instables $W^S(x)$ et $W^U(x)$ sont transverses au point x .

Pour des raisons historiques, nous choisissons d'énoncer le théorème qui va suivre pour une application f vérifiant l'axiome A (condition sur Ω).

THÉORÈME 9.4. Si un difféomorphisme f de classe C^r de la variété M vérifie l'axiome A et satisfait la condition de transversalité forte, f est structurellement stable.

Nous ne démontrerons pas ce théorème.

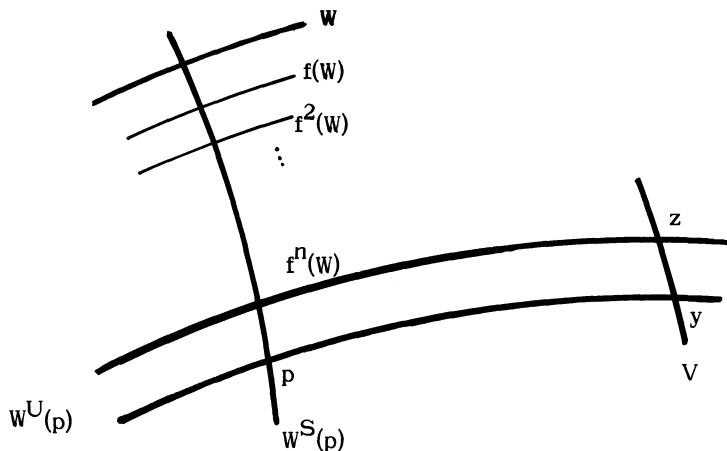
Un problème essentiel : Si un difféomorphisme de classe C^r de la variété M est structurellement stable, f vérifie-t-il l'axiome A et satisfait-il à la condition de transversalité forte ?

DÉFINITION 9.5. On note $AS^r(M)$ l'ensemble des difféomorphismes vérifiant l'axiome A et la condition de transversalité forte. Si f appartient à $AS^r(M)$ et si, de plus, $\Omega(f)$ est fini, on dit que f est un difféomorphisme de Morse-Smale. On note $MS^r(M)$ l'ensemble des difféomorphismes de Morse-Smale de M de classe C^r .

Nous esquissons maintenant quelques propositions pour démontrer finalement qu'un difféomorphisme vérifiant l'axiome A n'a pas de 1-cycle.

PROPOSITION 9.6. Supposons que p soit un point périodique hyperbolique d'un difféomorphisme f de classe C^r de M .

Supposons que la variété W coupe transversalement en un point x contenu dans son intérieur la variété stable $W^S(p)$, tandis que la variété V coupe transversalement, en un point y contenu dans son intérieur, la variété instable $W^U(p)$. Il existe alors un entier positif n tel que les variétés $f^n(W)$ et V se coupent transversalement en un point z .



Esquisse de démonstration : En remplaçant f par une de ses puissances, on peut supposer que le point p est fixe. Comme la variété $W^S(p)$ est invariante, on peut

remplacer W par $f^n(W)$ et x par $f^n(x)$ ($n > 0$). On peut supposer que x appartient à un petit voisinage U de p . En remplaçant y par $f^{-n}(y)$ pour $n > 0$, on peut aussi supposer que le point y appartient au voisinage U . En affinant les estimations faites lorsque nous avons utilisé la transformation de graphe, on peut montrer que, lorsque la dimension de W est égale à celle de la variété $W_{loc}^U(p)$, la plaque $f^n(W) \cap U$ tend, pour la topologie C^1 , vers la plaque $W_{loc}^U(p)$ quand n tend vers l'infini, donc pour n assez grand, $f^n(W)$ coupera transversalement V . Si la dimension de W est plus grande que celle de $W_{loc}^U(p)$, on peut choisir une sous-variété W' de W contenant le point x , de même dimension que $W_{loc}^U(p)$ et transverse en x à la variété $W^S(p)$. \square

Remarques : 1) On peut appliquer la proposition 9.6 quand V et W sont des ouverts (un ouvert coupe n'importe quelle sous-variété transversalement). On peut facilement démontrer la proposition directement dans ce cas en utilisant nos techniques.

2) Si V_x est un voisinage ouvert dans M du point $x \in W^U(p)$ et si W est transverse à $W^S(p)$, il existe un entier positif n tel que l'intersection $f^n(W) \cap V_x$ ne soit pas vide. On a donc l'inclusion :

$$W^U(p) \subset \overline{\bigcup_{n>0} f^n(W)} .$$

PROPOSITION 9.7. Supposons que f vérifie l'axiome A ou que $\overline{L(f)}$ soit un ensemble hyperbolique invariant pour f . Soit $P_1 \cup \dots \cup P_s = \overline{\text{Per}(f)}$ la décomposition spectrale de $\overline{\text{Per}(f)}$. Soient U et V deux ouverts non vides contenus dans P_i . Il existe alors un point périodique p et des entiers n_1 et n_2 tels que $f^{n_1}(p)$ appartienne à U et $f^{n_2}(p)$ appartienne à V .

Démonstration : La restriction de f à P_i admet une orbite dense, donc :

$$\exists x, n_1, n_2 \mid f^{n_1}(x) \in U ; f^{n_2}(x) \in V .$$

Comme les points périodiques sont denses, un point périodique p assez proche de x fait l'affaire. \square

PROPOSITION 9.8. Un difféomorphisme f vérifiant l'axiome A n'a pas de 1-cycle.

Démonstration : Soit $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_s$ la décomposition spectrale de Ω . Supposons que le point x appartienne à l'intersection $W^S(\Omega_1) \cap W^U(\Omega_1)$. Soit U un voisinage de x . Il existe un point périodique p et des entiers relatifs n_1 et n_2 tels que l'on ait :

$$W^U(f^{n_1}(p)) \cap U \neq \emptyset ; \quad W^S(f^{n_2}(p)) \cap U \neq \emptyset .$$

Cela implique qu'il existe un entier positif k tel que l'intersection $f^k(U) \cap U$ ne soit pas vide. Le point x appartient alors à Ω et doit donc appartenir à Ω_1 . \square

EXERCICE 9.1. Si $\overline{L(f)}$ est hyperbolique a-t-on $\overline{L(f)} = R(f)$? Si f vérifie l'axiome A, a-t-on $\Omega(f) = R(f)$?

EXERCICE 9.2.

a) "Lemme du nuage". Supposons que p et q soient des points hyperboliques du difféomorphisme f de classe C^r de M . Supposons que les variétés $W^U(p)$ et $W^S(q)$ se coupent transversalement au point x et que les variétés $W^U(q)$ et $W^S(p)$ se coupent au point y . Montrer que y appartient à $\Omega(f)$. (Faire la figure pour comprendre le nom du lemme).

b) Raisonner de même pour une suite de points hyperboliques de f . Plus précisément, si p_1, \dots, p_k sont des points hyperboliques de f et si les variétés $W^S(p_1)$ et $W^U(p_k)$ se coupent au point x ; si, de plus, $W^U(p_i)$ a un point d'intersection transverse avec $W^S(p_{i+1})$ pour $1 \leq i < k-1$, montrer que le point x est non-errant.

EXERCICE 9.3. Soit f un difféomorphisme de classe C^r de la variété M vérifiant l'axiome A. On dit que f satisfait l'axiome B si, de plus, chaque fois que l'intersection $[W^S(\Omega_i) - \Omega_i] \cap [W^U(\Omega_j) - \Omega_j]$ n'est pas vide, il existe des points périodiques

p appartenant à Ω_i et q appartenant à Ω_j tels que les variétés $W^S(p)$ et $W^U(q)$ aient un point d'intersection transverse.

Montrer l'implication : Axiome B \implies pas de cycle.

Montrer que la transversalité forte implique l'axiome B. (On en déduit que la transversalité forte implique qu'il n'y a pas de cycle.)

EXERCICE 9.4. Si $\overline{L(f)}$ est hyperbolique, $\overline{L(f)}$ peut-il contenir un 1-cycle ?

CHAPITRE 10 - PARTITIONS MARKOVIENNES *

I - DYNAMIQUE SYMBOLIQUE.

I.A. Sous-shift de type fini.

Soit ℓ un entier supérieur ou égal à 1. On note $[\ell]$ l'ensemble $\{1, 2, \dots, \ell\}$ muni de la topologie discrète ; on note $\Sigma(\ell)$ le produit $[\ell]^{\mathbb{Z}}$, muni de la topologie produit. Un élément de $\Sigma(\ell)$ est donc une suite $\underline{a} = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. La topologie de $\Sigma(\ell)$ est métrisable ; une métrique associée est la suivante :

$$\forall \underline{a} \in \Sigma(\ell), \forall \underline{b} \in \Sigma(\ell), \quad d(\underline{a}, \underline{b}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{2|n|+1}} \delta_{a_n b_n},$$

où δ_{ij} est ici le symbole de Kronecker.

Les lemmes suivants découlent de la définition de la distance d .

LEMME 10.1. Soient $\underline{a}, \underline{b}$ deux éléments de $\Sigma(\ell)$. On a :

$$d(\underline{a}, \underline{b}) \leq \frac{1}{3} \iff a_0 = b_0 \quad \& \quad d(\underline{a}, \underline{b}) \geq \frac{1}{2} \iff a_0 \neq b_0.$$

LEMME 10.2. Une suite $(\underline{a}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\Sigma(\ell)$ est convergente si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la suite $(a_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang.

DÉFINITION 10.3. Le shift σ est l'homéomorphisme de $\Sigma(\ell)$ défini par :

$$\forall \underline{a} \in \Sigma(\ell), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad [\sigma(\underline{a})]_i = a_{i+1}.$$

On notera $M_{\ell \times \ell}(\{0, 1\})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre ℓ , dont les coefficients ne prennent que les valeurs 0 ou 1.

* Rédaction de Yoccoz.

DÉFINITION 10.4. Soit $A = (A_{ij}) \in M_{\ell \times \ell}(\{0,1\})$. On définit alors :

$$\Sigma_A = \{ \underline{a} \in \Sigma(\ell) \mid \forall i \in \mathbb{Z}, A_{a_i a_{i+1}} = 1 \} .$$

Le sous-ensemble Σ_A est un sous-espace de $\Sigma(\ell)$ invariant par σ et fermé d'après le Lemme 10.2. Muni de l'homéomorphisme $\sigma_A = \sigma|_{\Sigma_A}$, qu'on notera encore parfois σ s'il n'y a pas de confusion possible, Σ_A est appelé sous-shift de type fini.

Exemple : Soit une partition $(M_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ d'un ensemble E ; soit f une application : $E \rightarrow E$. Définissons $A = (A_{ij}) \in M_{\ell \times \ell}(\{0,1\})$ par :

$$\forall i, j \in [\ell], \quad A_{ij} = 1 \iff f(M_i) \cap M_j \neq \emptyset .$$

A tout élément x de E , on peut associer $\underline{a} = \tau(x)$ dans Σ_A défini par :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad f^i(x) \in M_{a_i} .$$

Par la définition de τ , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tau} & \Sigma_A \\ f \downarrow & & \downarrow \sigma \\ E & \xrightarrow{\tau} & \Sigma_A \end{array}$$

L'application τ est un "codage" de f .

DÉFINITION 10.5. Soit $A \in M_{\ell \times \ell}(\{0,1\})$. Une suite (a_0, \dots, a_k) d'éléments de $[\ell]$ est dite admissible (pour A) si :

$$\forall i \in [k], \quad A_{a_{i-1} a_i} = 1 .$$

Soient p, q dans $[\ell]$; on note $N_k(p, q, A)$ le nombre de suites (a_0, \dots, a_k) admissibles pour A , qui commencent par p et finissent par q : $a_0 = p, a_k = q$.

LEMME 10.6. On a : $N_k(p, q, A) = (A^k)_{p, q}$.

Démonstration : Ce résultat, qui, pour $k = 1$, résulte de la définition des suites

admissibles, se démontre par récurrence sur k . Supposons le vrai pour $k - 1$. Le terme d'indice $k - 1$ d'une suite admissible dont le terme d'indice k est q ne peut être un élément donné r de $[\ell]$ que si $A_{rq} = 1$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} N_k(p, q, A) &= \sum_{r=1}^{\ell} N_{k-1}(p, r, A) \cdot A_{rq} \\ &= \sum_{r=1}^{\ell} (A^{k-1})_{p,r} A_{rq} = (A^k)_{p,q} \quad . \quad \square \end{aligned}$$

DÉFINITION 10.7. Si f est une application continue d'un espace topologique dans lui-même, on note $N_n(f)$ le nombre de points fixes isolés de f^n .

Une conséquence du Lemme 10.6 est alors la :

PROPOSITION 10.8. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, N_n(\sigma_A) = \text{Tr} A^n$.

On peut, sur (Σ_A, σ_A) définir des analogues des variétés stables et instables (locales) pour un difféomorphisme.

Posons :

$$\begin{aligned} W_{1/3}^S(\underline{x}) &= \{\underline{y} \in \Sigma_A \mid \forall n \geq 0, d(\sigma^n(\underline{x}), \sigma^n(\underline{y})) \leq \frac{1}{3}\} \\ W_{1/3}^U(\underline{x}) &= \{\underline{z} \in \Sigma_A \mid \forall n \leq 0, d(\sigma^n(\underline{x}), \sigma^n(\underline{z})) \leq \frac{1}{3}\} \end{aligned}$$

PROPOSITION 10.9. Pour tout $\underline{x} \in \Sigma_A$, on a :

$$\begin{aligned} W_{1/3}^S(\underline{x}) &= \{\underline{y} \in \Sigma_A \mid \forall n \geq 0, x_n = y_n\} \\ W_{1/3}^U(\underline{x}) &= \{\underline{y} \in \Sigma_A \mid \forall n \leq 0, x_n = y_n\} \quad . \end{aligned}$$

Si $\underline{x}, \underline{x}' \in \Sigma_A$ sont de distance inférieure ou égale à $\frac{1}{3}$, alors $W_{1/3}^S(\underline{x}) \cap W_{1/3}^U(\underline{x}')$ est non vide et réduit à un point \underline{z} qui vérifie :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0, \quad z_n &= x_n \\ \forall n \leq 0, \quad z_n &= x'_n \quad . \end{aligned}$$

L'homéomorphisme σ_A est expansif, avec $\frac{1}{3}$ comme constante d'expansivité. De plus, on a :

$$\forall \underline{y} \in W_{1/3}^S(\underline{x}), \quad d(\sigma(\underline{x}), \sigma(\underline{y})) = \frac{1}{4} d(\underline{x}, \underline{y})$$

$$\forall \underline{y} \in W_{1/3}^U(\underline{x}), \quad d(\sigma^{-1}(\underline{x}), \sigma^{-1}(\underline{y})) = \frac{1}{4} d(\underline{x}, \underline{y}) .$$

Démonstration : Les deux premières affirmations résultent du Lemme 10.1, et le reste d'un calcul immédiat. \square

Soit $U_{1/2}$ le voisinage ouvert de la diagonale dans $\Sigma_A \times \Sigma_A$ défini par :

$$U_{1/2} = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in \Sigma_A \times \Sigma_A \mid d(\underline{x}, \underline{y}) < \frac{1}{2}\} .$$

On peut alors, par 10.9, définir une application continue, notée "crochet"

$$U_{1/2} \xrightarrow{[\ , \]} \Sigma_A$$

$$(\underline{x}, \underline{y}) \longmapsto \underline{z} = [\underline{x}, \underline{y}] = W_{1/3}^S(\underline{x}) \cap W_{1/3}^U(\underline{y}) .$$

La continuité résulte de 10.2 et 10.9.

PROPOSITION 10.10. Soit \underline{x} un point de Σ_A . Le crochet est un homéomorphisme de $W_{1/3}^U(\underline{x}) \times W_{1/3}^S(\underline{x})$ sur l'ouvert $U(\underline{x}) = \{\underline{y} \mid y_0 = x_0\}$.

Démonstration : Il est clair, d'après 10.9, que :

$$[W_{1/3}^U(\underline{x}), W_{1/3}^S(\underline{x})] \subset U(\underline{x}) .$$

Remarquons que : $\underline{y} \in U(\underline{x}) \implies (\underline{x}, \underline{y}) \in U_{1/2}$.

On peut alors définir une application continue :

$$U(\underline{x}) \longrightarrow W_{1/3}^U(\underline{x}) \times W_{1/3}^S(\underline{x})$$

$$y \longrightarrow ([\underline{y}, \underline{x}], [\underline{x}, \underline{y}]) .$$

Cette application, continue parce que le crochet l'est, est l'inverse du crochet. \square

I.B. Fonction ζ d'une application.

DÉFINITION 10.11. Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes. On note ζ_α la série formelle :

$$\zeta_\alpha(t) = \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{i} t^i \right) .$$

Si f est une application continue d'un espace topologique dans lui-même, on pose :

$$\zeta_f(t) = \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{N_i(f)}{i} t^i \right) .$$

Propriétés : 1) Si $\alpha = (\lambda^n)_{n \geq 1}$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\log \frac{1}{1 - \lambda t} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i} t^i .$$

Par conséquent :

$$\zeta_\alpha = \frac{1}{1 - \lambda t}$$

$$2) \zeta_{\alpha+\beta}(t) = \zeta_\alpha(t) \cdot \zeta_\beta(t)$$

$$\zeta_{-\alpha}(t) = \frac{1}{\zeta_\alpha(t)} .$$

PROPOSITION 10.12. Soient A et B deux matrices carrées. Posons $\alpha_n = \text{Tr}A^n - \text{Tr}B^n$, pour tout $n \geq 1$, et $\alpha = (\alpha_n)_{n \geq 1}$. On a :

$$\zeta_\alpha(t) = \frac{\det(I - tB)}{\det(I - tA)} .$$

Démonstration : La propriété 2) ci-dessus permet de supposer $B = 0$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ les valeurs propres, comptées avec leur ordre de multiplicité, de la matrice A .

Par la propriété 1) ci-dessus, nous avons :

$$\begin{aligned} \zeta_\alpha(t) &= \exp \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\text{Tr}A^i}{i} t^i \right) \\ &= \exp \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k^i \right) \frac{t^i}{i} \right) \end{aligned}$$

$$= \prod_{k=1}^{\ell} \frac{1}{1-\lambda_k t} = (\det(I - tA))^{-1} . \quad \square$$

En particulier, résultant de 10.8, on a :

COROLLAIRE 10.13. Soit $A \in M_{\ell \times \ell}(\{0,1\})$. On a :

$$\zeta_{\sigma_A}(t) = \frac{1}{\det(I-tA)}$$

COROLLAIRE 10.14. 1) Si A est une matrice complexe et $\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell}$ sont ses valeurs propres comptées avec ordre de multiplicité, on a :

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \log |\text{Tr} A^k| = \max_{i \in [\ell]} \log |\lambda_i| .$$

2) Si, de plus, A est à coefficients entiers, et l'expression ci-dessus est nulle, les λ_i sont nuls ou racines de l'unité.

Démonstration : 1) Posons $\alpha = (\alpha_k)_{k \geq 1} = (\text{Tr} A^k)_{k \geq 1}$. On a $\zeta_{\alpha}(t) = \frac{1}{\det(I-tA)}$, et par conséquent le rayon de convergence $\rho(\zeta_{\alpha})$ de ζ_{α} est égal à $(\max_{1 \leq i \leq \ell} |\lambda_i|)^{-1}$.

L'exponentielle étant une fonction entière, le rayon de convergence de la série

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\text{Tr} A^k}{k} t^k$ est inférieur ou égal à $\rho(\zeta_{\alpha})$. On en déduit :

$$\left(\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{\text{Tr} A^k}{k}} \right)^{-1} \leq \left(\max_{1 \leq i \leq \ell} |\lambda_i| \right)^{-1}$$

$$\left(\max_{1 \leq i \leq \ell} \log |\lambda_i| \right) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \log |\text{Tr} A^k| .$$

Comme d'autre part :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |\text{Tr} A^k| \leq \ell \left(\max_{i \in [\ell]} |\lambda_i| \right)^k ,$$

on en déduit le premier énoncé du corollaire.

2) Les nombres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell}$ sont dans le disque unité et racines d'un polynôme unitaire de degré ℓ à coefficients entiers. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il en est de même pour $\lambda_1^k, \dots, \lambda_{\ell}^k$. Un polynôme unitaire à coefficients entiers de

degré ℓ de racines dans le disque unité, a ses coefficients bornés ; il n'existe donc qu'un nombre fini de tels polynômes, dont les racines forment un ensemble fini, qui doit contenir les puissances successives des λ_k . Ceux-ci sont donc racines de l'unité ou zéro. \square

II - PARTITIONS MARKOVIENNES.

II.A. Préliminaires et définition.

Dans la suite, Λ est un fermé hyperbolique invariant pour un C^r -difféomorphisme f ($r \geq 1$) d'une variété M . On suppose que Λ a une structure de produit local :

$$\exists \epsilon, \delta > 0, \forall x, y \in \Lambda, d(x, y) < \delta \implies [x, y] = W_\epsilon^S(x) \cap W_\epsilon^U(y) \in \Lambda.$$

On supposera que $\delta < \frac{\epsilon}{2}$ et que ϵ est une constante d'expansivité pour f .

Si A est sous-ensemble de Λ , on notera $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A en tant que sous-espace de Λ ; ∂A sera alors la frontière de A .

Si $x \in \Lambda$, on pose :

$$W^S(x, A) = W_\epsilon^S(x) \cap A.$$

Si η est un nombre inférieur ou égal à ϵ , on pose :

$$W_\eta^S(x) = \{y \in W_\epsilon^S(x) \mid d(x, y) \leq \eta\} \quad \& \quad \overset{\circ}{W}_\eta^S(x) = \{y \in W_\epsilon^S(x) \mid d(x, y) < \eta\}.$$

Si B est un sous-ensemble de $W_\epsilon^S(x) \cap \Lambda$, on notera $\text{Int } B$ l'intérieur de B dans $W_\epsilon^S(x) \cap \Lambda$, et $\text{Fr}(B)$ sa frontière dans $W_\epsilon^S(x) \cap \Lambda$.

Les définitions et notations pour les variétés instables sont analogues.

En rapport avec 10.10, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 10.15. Il existe une constante strictement positive ρ , inférieure à $\delta/2$, telle que, pour tout point x de Λ , le crochet soit un homéomorphisme du produit $(\overset{\circ}{W}_\rho^U(x) \cap \Lambda) \times (\overset{\circ}{W}_\rho^S(x) \cap \Lambda)$ sur un voisinage ouvert de x dans Λ .

Démonstration : Soit $V_\delta(x) = \{y \in \Lambda \mid d(x, y) < \delta\}$. On définit sur V_δ deux applications

continues :

$$\begin{aligned} \Pi_S : V_\delta(x) &\rightarrow W_\epsilon^S(x, \Lambda) \\ y &\rightarrow [x, y] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_U : V_\delta(x) &\rightarrow W_\epsilon^U(x, \Lambda) \\ y &\rightarrow [y, x] \end{aligned}$$

Le crochet est une application uniformément continue dans un voisinage compact de la diagonale dans $\Lambda \times \Lambda$. Par conséquent :

$$\exists \rho > 0, \quad \rho < \frac{\delta}{2}, \quad \forall x, y, z \in \Lambda$$

$$\left. \begin{aligned} d(x, y) < \rho \\ d(x, z) < \rho \end{aligned} \right\} \implies d(x, [y, z]) < \delta$$

Si maintenant $(y, z) \in (\overset{\circ}{W}_\rho^U(x) \cap \Lambda) \times (\overset{\circ}{W}_\rho^S(x) \cap \Lambda)$, on a :

$$d(x, [y, z]) < \delta$$

$$\Pi_S([y, z]) = [x, [y, z]] = z$$

$$\Pi_U([y, z]) = [[y, z], x] = y .$$

Le crochet est donc un homéomorphisme sur l'ouvert $\Pi_S^{-1}(\overset{\circ}{W}_\rho^S(x) \cap \Lambda) \cap \Pi_U^{-1}(\overset{\circ}{W}_\rho^U(x) \cap \Lambda)$. \square

DÉFINITION 10.16. Une partie R de Λ est un rectangle si elle est de diamètre moindre que δ , et stable pour le crochet, i.e. :

$$\forall x \in R, \quad \forall y \in R, \quad [x, y] \in R .$$

Un rectangle R est propre s'il est égal à l'adhérence de son intérieur dans Λ ; i. e. $\bar{R} = R$.

L'homéomorphisme de 10.15 nous permet d'énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 10.17. Soit R un rectangle, de diamètre moindre que ρ , et $x \in R$,

$$\text{on a : } \overset{\circ}{R} = [\text{Int } W^U(x, R), \text{Int } W^S(x, R)]$$

$$\partial R = [\text{Fr } W^U(x, R), W^S(x, \bar{R})] \cup [W^U(x, \bar{R}), \text{Fr } W^S(x, R)] .$$

COROLLAIRE 10.18. Soit R un rectangle de diamètre moindre que ρ :

$$x \in \overset{\circ}{R} \iff x \in \text{Int}(W^U(x,R)) \cap \text{Int}(W^S(x,R)) .$$

De plus, si $x \in \overset{\circ}{R}$, on a :

$$\text{Int } W^S(x,R) = W^S(x, \overset{\circ}{R})$$

$$\text{Int } W^U(x,R) = W^U(x, \overset{\circ}{R}) .$$

Si le rectangle R est fermé, on a la décomposition suivante :

$$\partial R = \partial^S R \cup \partial^U R$$

avec :

$$\partial^S R = \{x \in R \mid x \notin \text{Int } W^U(x,R)\} = \{x \in R \mid W^S(x,R) \cap \overset{\circ}{R} = \emptyset\}$$

$$\partial^U R = \{x \in R \mid x \notin \text{Int } W^S(x,R)\} = \{x \in R \mid W^U(x,R) \cap \overset{\circ}{R} = \emptyset\} .$$

Démonstration : La première équivalence se déduit de $[x,x] = x$ et de 10.17.

Les égalités : $\text{Int } W^S(x,R) = W^S(x, \overset{\circ}{R})$ & $\text{Int } W^U(x,R) = W^U(x, \overset{\circ}{R})$ sont immédiates, pour $x \in \overset{\circ}{R}$.

$$\text{Soit } z \in R. \text{ On a : } \forall y \in W^S(z,R), \quad [z,y] = y$$

$$\forall y \in W^U(z,R), \quad [y,z] = y .$$

On en déduit :

$$[\{z\} \cap \text{Int } W^U(z,R), \text{Int } W^S(z,R)] = \text{Int } W^S(z,R) \cap \overset{\circ}{R} = W^S(z,R) \cap \overset{\circ}{R}$$

$$[\text{Int } W^U(z,R), \{z\} \cap \text{Int } W^S(z,R)] = \text{Int } W^U(z,R) \cap \overset{\circ}{R} = W^U(z,R) \cap \overset{\circ}{R} .$$

Ces deux égalités impliquent le reste du corollaire. \square

LEMME 10.19. Soit x un point de Λ . L'application $f|_{\overset{\circ}{W}_\delta^S(x)} : \overset{\circ}{W}_\delta^S(x) \rightarrow W_\epsilon^S(f(x))$ (respectivement $f^{-1}|_{\overset{\circ}{W}_\delta^U(x)} : \overset{\circ}{W}_\delta^U(x) \rightarrow W_\epsilon^U(f^{-1}(x))$) est ouverte.

$$\text{Par conséquent, la restriction } f : \overset{\circ}{W}_\delta^S(x) \cap \Lambda \rightarrow W_\epsilon^S(f(x)) \cap \Lambda$$

(respectivement $f^{-1} : \overset{\circ}{W}_\delta^U(x) \cap \Lambda \rightarrow W_\epsilon^U(f^{-1}(x)) \cap \Lambda$) est ouverte.

Démonstration : Le nombre δ a été choisi de telle manière que, si $d(x,y) < \delta$, les variétés $W_\epsilon^S(x)$ et $W_\epsilon^U(y)$ se coupent en un (seul) point, qui se trouve dans l'intérieur de ces variétés. En particulier, l'ensemble $\overset{\circ}{W}_\delta^S(x)$ est un ouvert de $W_\epsilon^S(x)$ qui ne

coupe pas le bord de cette variété. C'est donc une variété sans bord, envoyée par le plongement $C^\infty f$ dans la variété de même dimension $W_\epsilon^S(f(x))$. Il en résulte que $f|W_\delta^S(x)$ est ouverte.

Le cas de la variété instable se traite de façon similaire. \square

Pour pouvoir appliquer 10.17, 10.18, 10.19, nous supposons dorénavant que les rectangles ont un diamètre inférieur à ρ .

PROPOSITION 10.20. Soit R un rectangle fermé ($\text{diam } R < \rho$), et soit $0 < \delta' < \delta$. Alors, l'ensemble $\{x \in \Lambda \mid W_{\delta'}^S(x) \cap \partial^S R = \emptyset\}$ est un ouvert dense de Λ . De plus, si $W_{\delta'}^S(x) \cap \partial^S R$ est vide, alors $(W_{\delta'}^S(x) \cap \Lambda) - \partial R$ est ouvert et dense dans $W_\delta^S(x) \cap \Lambda$.

Des résultats analogues s'énoncent pour les variétés instables.

Démonstration : L'ensemble $W^S(x, R)$ dépend continument de x élément de R . Par conséquent $\partial^S R = \{x \in R \mid W^S(x, R) \cap \overset{\circ}{R} = \emptyset\}$ est fermé. Comme $W_{\delta'}^S(x)$ dépend aussi continument de x dans Λ , l'ensemble $\{x \in \Lambda \mid W_{\delta'}^S(x) \cap \partial^S R = \emptyset\}$ est ouvert dans Λ . Montrons que cet ensemble est aussi dense dans Λ . Soit y dans $\partial^S R \cap W_{\delta'}^S(x)$. Par 10.18, le point y appartient à la frontière de $W^U(y, R)$ dans $W_\epsilon^U(y) \cap \Lambda$. On a $[y, x] = x$, $d(x, y) < \delta'$. Le crochet étant continu, on peut trouver un point z dans $W_\epsilon^U(y) \cap (\Lambda - R)$ suffisamment proche de y pour que :

$$d(x, z) < \delta \quad \& \quad d([z, x], y) < \delta.$$

On a alors :

$$t \in W_{\delta'}^S([z, x]) \cap R \implies z = [[z, x], y] = [t, y] \in R.$$

Donc $W_{\delta'}^S([z, x]) \cap R$ est vide. Comme $[z, x]$ est arbitrairement proche de x lorsque z est arbitrairement proche de y , on a bien montré la densité de $\{x \in \Lambda \mid W_{\delta'}^S(x) \cap \partial^S R = \emptyset\}$.

Démontrons la deuxième partie de la proposition.

Soit $x \in \Lambda$, tel que $W_{\delta'}^S(x) \cap \partial^S R = \emptyset$. Si $W_{\delta'}^S(x) \cap \partial R$ est vide,

$\overset{\circ}{W}_{\delta^1}^S(x) \cap \Lambda - \partial R$ est dense dans $\overset{\circ}{W}_{\delta^1}^S(x) \cap \Lambda$. Autrement, supposons que $y \in \overset{\circ}{W}_{\delta^1}^S(x) \cap \Lambda \cap (\partial R - \partial^S R)$. Le corollaire 10.18 implique que $y \in \text{Fr}(W^S(y, R))$. Mais $\overset{\circ}{W}_{\delta^1}^S(x)$ est ouvert dans $W_\epsilon^S(x)$. Il existe donc des points de z , arbitrairement proches de y , tels que :

$$z \in \overset{\circ}{W}_{\delta^1}^S(x) \cap W_\epsilon^S(y) \cap \Lambda - W^S(y, R) .$$

De tels points n'appartiennent pas à R . Comme ∂R est fermé, on a bien montré que $\overset{\circ}{W}_{\delta^1}^S(x) \cap \Lambda - \partial R$ est ouvert et dense dans $\overset{\circ}{W}_{\delta^1}^S(x) \cap \Lambda$. \square

DÉFINITION 10.21. Partition markovienne.

Une partition markovienne de Λ pour f , est une collection finie $\mathcal{R} = (R_1, \dots, R_n)$ de rectangles propres vérifiant :

- (i) $\Lambda = \bigcup_{i=1}^n R_i$
 $\forall i, j \in [n], i \neq j, \overset{\circ}{R}_i \cap \overset{\circ}{R}_j = \emptyset$
- (ii) $\forall x \in \Lambda$,
 $x \in \overset{\circ}{R}_i, f(x) \in \overset{\circ}{R}_j \implies f(W^S(x, R_i)) \subset W^S(f(x), R_j)$
- (iii) $\forall x \in \Lambda$,
 $x \in \overset{\circ}{R}_i, f^{-1}(x) \in \overset{\circ}{R}_j \implies f^{-1}(W^U(x, R_i)) \subset W^U(f^{-1}(x), R_j) .$

Remarques : 1) Les R_i sont implicitement supposés de diamètre inférieur à ρ . Ce sont des rectangles fermés, car ils sont propres.

2) Par 10.18 et 10.19, les conditions (ii) et (iii) impliquent :

- (ii') $\forall x \in \Lambda$,
 $x \in \overset{\circ}{R}_i, f(x) \in \overset{\circ}{R}_j \implies f(W^S(x, \overset{\circ}{R}_i)) \subset W^S(f(x), \overset{\circ}{R}_j)$
- (iii') $\forall x \in \Lambda$,
 $x \in \overset{\circ}{R}_i, f^{-1}(x) \in \overset{\circ}{R}_j \implies f^{-1}(W^U(x, \overset{\circ}{R}_i)) \subset W^U(f^{-1}(x), \overset{\circ}{R}_j) .$

La proposition suivante est conséquence immédiate de 10.9 et 10.10.

PROPOSITION 10.22. Soit A une matrice appartenant à $M_{\ell \times \ell}(\{0,1\})$, et soit (Σ_A, σ_A) le sous-shift de type fini associé à A . Soit $C_i = \{a \in \Sigma_A, a_0 = i\}$. La partition $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_\ell\}$ est une partition markovienne de Σ_A pour σ_A .

Les sous-shifts de type fini et les partitions markoviennes associées sont des modèles "universels" comme on va le voir plus loin.

Exemple. L'isomorphisme (linéaire) de \mathbb{R}^2 , de matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ induit sur $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ un difféomorphisme d'Anosov (exemple 4.6). Les valeurs propres de M sont :

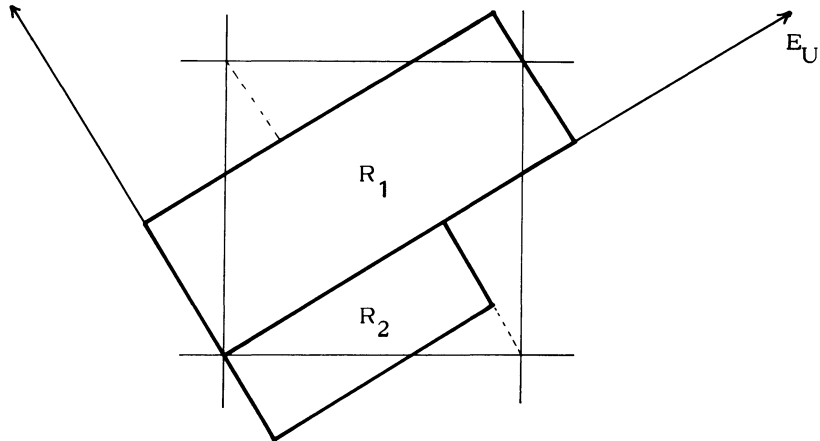
$$\lambda_s = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \quad \lambda_u = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) .$$

Les variétés stables et instables correspondantes sont données par :

$$y - y_0 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})(x - x_0) \quad \text{pour } W^S(x_0, y_0)$$

$$y - y_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)(x - x_0) \quad \text{pour } W^U(x_0, y_0) .$$

Elles sont orthogonales pour la métrique de \mathbb{R}^2 . Le tore T^2 se décompose en deux parties fermées d'intérieurs disjoints, R_1, R_2 , provenant de rectangles de \mathbb{R}^2 dont les côtés sont parallèles aux directions propres de M : cette décomposition est dessinée ci-dessous.



(T^2, M) est muni d'une structure de produit local, et on obtient donc des constantes ϵ , δ et ρ associées à cette structure.

On peut vérifier qu'on obtient une partition markovienne de (T^2, M) en prenant, pour rectangles de la partition, les intersections $\bigcap_{i=-N}^{+N} f^i(R_{\epsilon_i})$ ($\epsilon_i \in \{1, 2\}$), N étant fixé et choisi assez grand pour que les intersections considérées soient de diamètre moindre que ρ .

II. B. Existence d'une partition markovienne.

Conservant les notations adoptées en II.A., nous allons montrer dans ce paragraphe l'existence d'une partition markovienne de Λ pour f .

Soit β tel que $0 < \beta < \frac{\rho}{2} < \frac{\delta}{4} < \frac{\epsilon}{8}$. Choisissons ensuite α vérifiant :

- . $0 < \alpha < \beta$
- . Toute α -pseudo-orbite dans Λ est β -pistée par une unique orbite dans Λ .
- . Un tel choix est possible par la proposition 8.21.

Puisque Λ est compact, on peut trouver γ tel que :

- . $0 < \gamma < \frac{\alpha}{2}$
- . $\forall x, y \in \Lambda, d(x, y) < \gamma \implies d(f(x), f(y)) < \frac{\alpha}{2}$.

On peut recouvrir Λ par un nombre fini de boules ouvertes de rayon γ de centres p_1, \dots, p_ℓ . Définissons alors une matrice $A \in M_{\ell \times \ell}(\{0, 1\})$ par :

$$\forall i, j \in [\ell], A_{ij} = 1 \iff f(p_i) \in \overset{\circ}{B}_\alpha(p_j).$$

Pour tout point \underline{a} de Σ_A , la suite $(p_{a_i})_{i \in \mathbb{Z}}$ est une α -pseudo-orbite ; elle est donc β -pistée par l'orbite d'un unique point $x = \theta(\underline{a})$. On a ainsi défini une application $\theta : \Sigma_A \rightarrow \Lambda$.

PROPOSITION 10.23. L'application θ est une semi-conjugaison entre σ_A et f ;

i.e. elle est continue, surjective et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_A & \xrightarrow{\sigma_A} & \Sigma_A \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \end{array}$$

Démonstration : 1) Si l'orbite de $x \in \beta$ -piste (p_{a_i}) , l'orbite de $f(x) \in \beta$ -piste $(p_{(\sigma \underline{a})_i})$.

Le diagramme est donc commutatif.

2) Si θ n'était pas continue, comme Λ est compact, il existerait deux suites (\underline{s}^n) et (\underline{t}^n) convergeant vers la même limite $\underline{\ell}^n$ dont les images par θ convergeraient vers des limites différentes s et t dans Λ . D'autre part,

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, d(f^i(\theta(\underline{s}^n)), p_{s_i}) < \beta.$$

Par passage à la limite, on obtient, par 10.2 :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, d(f^i(s), p_{\ell_i}) \leq \beta.$$

De même :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, d(f^i(t), p_{\ell_i}) \leq \beta.$$

On en déduit :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, d(f^i(s), f^i(t)) \leq 2\beta < \frac{\delta}{2} < \epsilon.$$

Mais ϵ est une constante d'expansivité, donc $s = t$, ce qui contredit l'hypothèse.

3) Soit $x \in \Lambda$, et \underline{a} un élément de Σ tel que :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, f^i(x) \in \overset{\circ}{B}_\gamma(p_{a_i}).$$

On a alors, par définition de γ :

$$d(f(p_{a_i}), p_{a_{i+1}}) \leq d(f(p_{a_i}), f^i(x)) + d(f^{i+1}(x), p_{a_{i+1}}) < \frac{\alpha}{2} + \gamma < \alpha.$$

On en déduit que $\underline{a} \in \Sigma_A$; comme $\theta(\underline{a}) = x$, l'application θ est bien surjective. \square

PROPOSITION 10.24. L'application θ est un morphisme de crochet. Plus précisément, on a :

$$d(\underline{a}, \underline{b}) < \frac{1}{2} \implies \begin{cases} d(\theta(\underline{a}), \theta(\underline{b})) < \rho \leq \delta \\ \theta([\underline{a}, \underline{b}]) = [\theta(\underline{a}), \theta(\underline{b})] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \forall \underline{a} \in \Sigma_A \quad \theta(W_{1/3}^S(\underline{a})) &\subset W_\epsilon^S(\theta(\underline{a})) \\ \theta(W_{1/3}^U(\underline{a})) &\subset W_\epsilon^U(\theta(\underline{a})) . \end{aligned}$$

Démonstration : Si $d(\underline{a}, \underline{b})$ est inférieur à $\frac{1}{2}$, $a_0 = b_0$. On en déduit :

$$d(\theta(\underline{a}), \theta(\underline{b})) \leq d(\theta(\underline{a}), p_{a_0}) + d(p_{a_0}, \theta(\underline{b})) \leq 2\beta < \rho .$$

Cela montre que $[\theta(\underline{a}), \theta(\underline{b})]$ est défini.

Soit $\underline{a} \in \Sigma_A$, et c un point de $W_{1/3}^S(\underline{a})$. La proposition 10.9 implique :

$$\forall i \geq 0, \quad c_i = a_i .$$

Par conséquent, on a :

$$\forall i \geq 0, \quad d(f^i(\theta(\underline{a})), f^i(\theta(\underline{c}))) \leq d(f^i(\theta(\underline{a})), p_{a_i}) + d(p_{c_i}, f^i(\theta(\underline{c}))) \leq 2\beta < \epsilon ,$$

c'est-à-dire : $\theta(\underline{c}) \in W_\epsilon^S(\theta(\underline{a}))$.

De la même manière, on démontre que :

$$\theta(W_{1/3}^U(\underline{a})) \subset W_\epsilon^U(\theta(\underline{a})) .$$

Réunissant ces deux propriétés et la définition du crochet, on obtient :

$$\begin{aligned} \theta([\underline{a}, \underline{b}]) &= \theta(W_{1/3}^S(\underline{a}) \cap W_{1/3}^U(\underline{b})) \\ &\subset W_\epsilon^S(\theta(\underline{a})) \cap W_\epsilon^U(\theta(\underline{b})) = [\theta(\underline{a}), \theta(\underline{b})] . \quad \square \end{aligned}$$

Posons $T_i = \theta(C_i)$, pour $i \in [\ell]$, (cf. 10.22). L'application θ étant surjective, les $(T_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ forment un recouvrement de Λ .

LEMME 10.25. Soient $i \in [\ell]$, \underline{a} un point de C_i . Alors T_i est un rectangle fermé

de diamètre moindre que ρ , et on a :

$$\begin{aligned}\theta(W^S(\underline{a}, C_i)) &= W^S(\theta(\underline{a}), T_i) \\ \theta(W^U(\underline{a}, C_i)) &= W^U(\theta(\underline{a}), T_i) .\end{aligned}$$

Démonstration : Comme C_i est un rectangle de diamètre moindre que $\frac{1}{2}$, la proposition 10.24 implique que T_i est un rectangle de diamètre inférieur à ρ ; le rectangle T_i est fermé car θ est continue et C_i est compact.

D'autre part, par définition de C_i et par le lemme 10.1, on a :

$$W^S(\underline{a}, C_i) = W_{1/3}^S(\underline{a}) .$$

On en déduit, par 10.24 :

$$\theta(W^S(\underline{a}, C_i)) \subset W_\epsilon^S(\theta(\underline{a})) \cap T_i = W^S(\theta(\underline{a}), T_i) .$$

On montre de même :

$$\theta(W^U(\underline{a}, C_i)) \subset W^U(\theta(\underline{a}), T_i) .$$

Réciproquement, si $x \in W^S(\theta(\underline{a}), T_i)$, soit \underline{s} un antécédent de x par θ dans C_i . On a :

$$\theta([\underline{a}, \underline{s}]) = [\theta(\underline{a}), \theta(\underline{s})] = [\theta(\underline{a}), x] = x$$

$$\text{et } [\underline{a}, \underline{s}] \in W^S(\underline{a}, C_i) .$$

Donc, on a montré que :

$$W^S(\theta(\underline{a}), T_i) \subset \theta(W^S(\underline{a}, C_i)) .$$

De même, on montre :

$$W^U(\theta(\underline{a}), T_i) \subset \theta(W^U(\underline{a}, C_i)) . \quad \square$$

PROPOSITION 10.26. Si $\underline{s} \in C_i$ et $\sigma(\underline{s}) \in C_j$, on a, en posant $x = \theta(\underline{s})$:

$$\begin{aligned}f[W^S(x, T_j)] &\subset W^S(f(x), T_i) \\ f^{-1}[W^U(f(x), T_j)] &\subset W^U(x, T_i) .\end{aligned}$$

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned}
 f(W^S(x, T_i)) &= f(W^S(\theta(\underline{s}), T_i)) \\
 &= f\theta(W^S(\underline{s}, C_i)) \quad , \text{ d'après 10.25} \\
 &= \theta\sigma(W^S(\underline{s}, C_i)) \\
 &\subset \theta(W^S(\sigma(\underline{s}), C_j)) \\
 &= W^S(\theta(\sigma(\underline{s})), T_j) \quad , \text{ d'après 10.25} \\
 &= W^S(f(x), T_j)
 \end{aligned}$$

La démonstration pour la variété instable est similaire. \square

COROLLAIRE 10.27. Soit x un point de T_i ($i \in [\ell]$). Alors :

(i) $\exists j \in [\ell]$ tel que $f(x) \in T_j$

$$\begin{aligned}
 f(W^S(x, T_i)) &\subset W^S(f(x), T_j) \\
 f^{-1}(W^U(f(x), T_j)) &\subset W^U(x, T_i)
 \end{aligned}$$

(ii) $\exists k \in [\ell]$ tel que $f^{-1}(x) \in T_k$

$$\begin{aligned}
 f(W^S(f^{-1}(x), T_k)) &\subset W^S(x, T_i) \\
 f^{-1}(W^U(x, T_i)) &\subset W^U(f^{-1}(x), T_k) \quad .
 \end{aligned}$$

Démonstration : Soit $\underline{s} \in C_i$, tel que $\theta(\underline{s}) = x$. On définit j et k par $\sigma(\underline{s}) \in C_j$ et $\sigma^{-1}(\underline{s}) \in C_k$, et on applique la proposition précédente. \square

La partition markovienne recherchée s'obtient par subdivision des T_i .

DÉFINITION 10.28. Si T_i et T_j se coupent, posons :

$$\begin{aligned}
 T_{ij}^!(1) &= \{x \in T_i \mid W^S(x, T_i) \cap T_j \neq \emptyset, W^U(x, T_i) \cap T_j \neq \emptyset\} \\
 T_{ij}^!(2) &= \{x \in T_i \mid W^S(x, T_i) \cap T_j \neq \emptyset, W^U(x, T_i) \cap T_j = \emptyset\}
 \end{aligned}$$

$$T'_{ij}(3) = \{x \in T_i \mid W^S(x, T_i) \cap T_j = \emptyset, W^U(x, T_i) \cap T_j \neq \emptyset\}$$

$$T'_{ij}(4) = \{x \in T_i \mid W^S(x, T_i) \cap T_j = W^U(x, T_i) \cap T_j = \emptyset\} .$$

LEMME 10.29. Les $T'_{ij}(k)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) forment une partition de T_i . De plus, $T'_{ij}(1) = T_i \cap T_j$; les ensembles $T'_{ij}(1)$, $T'_{ij}(1) \cup T'_{ij}(2)$, $T'_{ij}(1) \cup T'_{ij}(3)$ sont fermés.

Démonstration : La première assertion est triviale, de même que $T_i \cap T_j \subset T'_{ij}(1)$. Réciproquement, si $x \in T'_{ij}(1)$, soient $y \in W^S(x, T_i) \cap T_j$ et $z \in W^U(x, T_i) \cap T_j$; alors $x = [y, z]$, et par conséquent $x \in T_j$.

Les rectangles T_i, T_j sont fermés, donc $T'_{ij}(1)$ est fermé. D'autre part, on a :

$$T'_{ij}(1) \cup T'_{ij}(2) = \{x \in T_i \mid W^S(x, T_i) \cap T_j \neq \emptyset\}$$

$$T'_{ij}(1) \cup T'_{ij}(3) = \{x \in T_i \mid W^U(x, T_i) \cap T_j \neq \emptyset\} .$$

Les relations définissant ces ensembles s'écrivent aussi :

$$W^S_\epsilon(x) \cap (T_i \cap T_j) \neq \emptyset, \quad W^U_\epsilon(x) \cap (T_i \cap T_j) \neq \emptyset .$$

Mais $W^S_\epsilon(x)$ et $W^U_\epsilon(x)$ dépendent continument de x , et $T_i \cap T_j$ est fermé. Il s'ensuit que les ensembles $T'_{ij}(1) \cup T'_{ij}(2)$ et $T'_{ij}(1) \cup T'_{ij}(3)$ sont fermés. \square

Posons : $T_{ij}(k) = \overline{T'_{ij}(k)}$.

LEMME 10.30. Le rectangle T_i se décompose en l'union $\bigcup_{k=1}^4 T_{ij}(k)$, avec les propriétés suivantes :

1) $T_{ij}(1) = T_i \cap T_j$,

2) $T_{ij}(k) \cap T_{ij}(\ell) = \emptyset$ si $k < \ell$ ou $k = 3, \ell = 2$.

En particulier, les $T_{ij}(k)$ sont d'intérieurs disjoints.

3) $T_{ij}(k) \subset T'_{ij}(k) \cup \left(\bigcup_{\ell=1}^4 \partial T_{ij}(\ell) \right)$,

4) Les $T_{ij}^{(k)}$, ainsi que leurs intérieurs, sont des rectangles.

Démonstration : La première assertion résulte de 10.29. Pour la seconde, on envisage successivement les cas :

$$\cdot k = 1, \quad \overset{\circ}{T}_{ij}^{(1)} = \overset{\circ}{T}_{ij}^{(1)} \subset T_{ij}^{(1)}$$

Donc :

$$\overset{\circ}{T}_{ij}^{(1)} \cap T_{ij}^{(\ell)} = \emptyset \quad (\ell > 1)$$

On en déduit :

$$\overset{\circ}{T}_{ij}^{(1)} \cap T_{ij}^{(\ell)} = \overset{\circ}{T}_{ij}^{(1)} \cap \bar{T}_{ij}^{(\ell)} = \emptyset .$$

$$\cdot k = 2, \quad \overset{\circ}{T}_{ij}^{(2)} \subset T_{ij}^{(2)} \subset T_{ij}^{(1)} \cup T_{ij}^{(2)}$$

Par conséquent, pour $\ell > 2$:

$$\overset{\circ}{T}_{ij}^{(2)} \cap T_{ij}^{(\ell)} = T_{ij}^{(2)} \cap \bar{T}_{ij}^{(\ell)} = \emptyset .$$

• Le cas $k = 3$ se traite de façon similaire.

Comme, pour $\ell \neq k$, $\overset{\circ}{T}_{ij}^{(k)} \cap \overset{\circ}{T}_{ij}^{(\ell)}$ est vide, on a :

$$T_{ij}^{(k)} - \left(\bigcup_{\ell=1}^4 \partial T_{ij}^{(\ell)} \right) \subset T_i - \bigcup_{\ell \neq k} T_{ij}^{(\ell)} \subset T_{ij}^{(k)}$$

ce qui démontre la troisième assertion.

Par continuité du crochet, et par 10.17, l'adhérence et l'intérieur d'un rectangle de diamètre moindre que ρ sont des rectangles de diamètre moindre que ρ .

Il nous suffit donc de démontrer que les $T_{ij}^{(k)}$ sont des rectangles.

• Si x et y appartiennent à T_i , alors :

$$W^S([x,y], T_i) = W^S(x, T_i)$$

$$W^U([x,y], T_i) = W^U(y, T_i) .$$

Par conséquent, si x et y sont dans $T_{ij}^{(k)}$, leur crochet $[x,y]$ est aussi dans $T_{ij}^{(k)}$. Les $T_{ij}^{(k)}$ sont donc des rectangles, et de même les $T_{ij}^{(k)}$ et les $\overset{\circ}{T}_{ij}^{(k)}$. \square

Posons $Z = \Lambda - \bigcup_{i,j=1}^{\ell} \bigcup_{k=1}^4 \partial T_{ij}^{(k)}$. Cet ensemble Z est un ouvert dense de Λ .

Le lemme précédent montre que :

$$\forall i,j \in [\ell], \forall k \in [4], Z \cap T_{ij}^{(k)} = Z \cap \overset{\circ}{T}_{ij}^{(k)} = Z \cap T_{ij}'^{(k)}$$

relation dont on se servira constamment implicitement dans la fin du raisonnement.

Si x est un point de Z , posons :

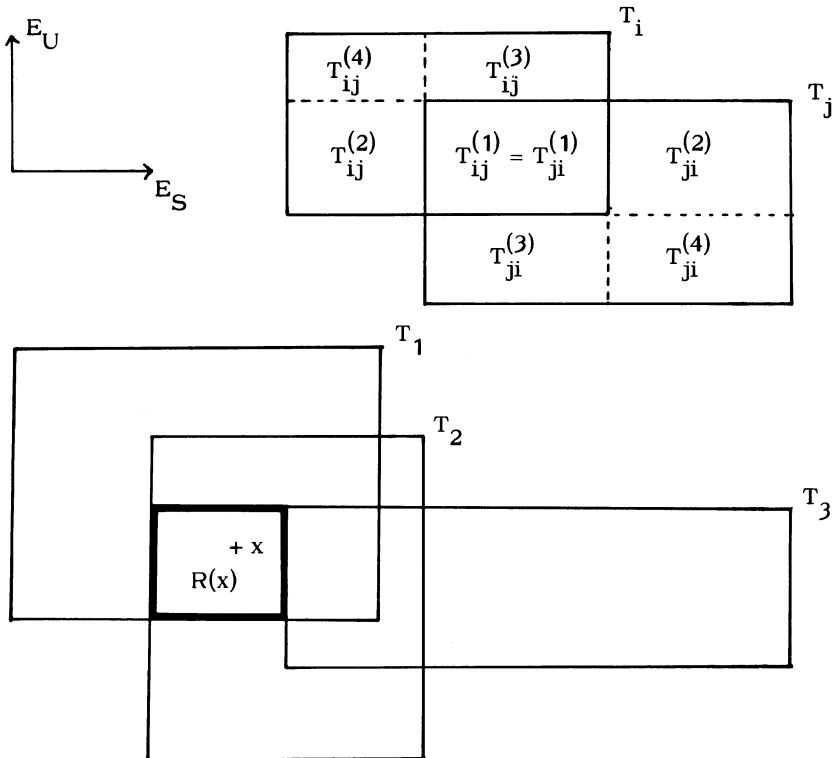
$$K(x) = \{T_i \mid x \in T_i\}$$

$$K^*(x) = \{T_j \mid \exists T_i \in K(x), T_i \cap T_j \neq \emptyset\}.$$

$$R(x) = \bigcap \{T_{ij}^{(k)} \mid T_i \in K(x), T_j \in K^*(x), x \in T_{ij}^{(k)}\}.$$

Il est clair que $R(x)$ est un rectangle ouvert contenant x .

Les figures ci-dessous explicitent les constructions faites précédemment.



LEMME 10.31. Si x et y appartiennent à Z , les rectangles associés $R(x)$ et $R(y)$ sont égaux ou disjoints.

Démonstration : Soit $z \in Z \cap R(x)$. Montrons que $R(z) = R(x)$, et pour cela, montrons d'abord $K(z) = K(x)$.

Par définition de $R(x)$, on a $K(x) \subset K(z)$. Si réciproquement $z \in T_j$ et $x \in T_i$, T_j est élément de $K^*(x)$ et x appartient à un certain $T_{ij}^{\circ}(k)$. Comme $z \in T_{ij}^{\circ}(1)$; par 10.30., on a $k = 1$ et, par conséquent $x \in T_j$, et donc $T_j \in K(x)$.

On a donc montré $K(z) = K(x)$, ce qui implique $K^*(z) = K^*(x)$.

Les indices i, j étant fixés, les rectangles $T_{ij}^{\circ}(k)$ sont disjoints. On a, par conséquent :

$$R(z) = R(x) .$$

Si maintenant x et y appartiennent à Z , avec $R(x) \cap R(y) \neq \emptyset$, cette intersection ouverte contient un point z de Z . Le raisonnement ci-dessus permet de conclure :

$$R(x) = R(z) = R(y) . \quad \square$$

LEMME 10.32. Soient $x, y \in Z \cap f^{-1}(Z)$, tels que $R(x) = R(y)$ et $y \in W_{\epsilon}^S(x)$. On a alors :

$$R(f(x)) = R(f(y)) .$$

Démonstration : On montre d'abord $K(f(x)) = K(f(y))$.

Si $f(x) \in T_i$, il existe \underline{s} dans C_i tel que $f(x) = \theta(\underline{s})$. Soit $j = s_{-1}$. Comme $x = \theta\sigma^{-1}(\underline{s})$, et $\theta(W^S(\sigma^{-1}(\underline{s}), C_j)) = W^S(x, T_j)$ d'après 10.25., l'élément y a un antécédent \underline{t} par θ dans $W^S(\sigma^{-1}(\underline{s}), C_j)$. Par conséquent :

$$t_1 = s_0 = i .$$

On en déduit :

$$f(y) = \theta\sigma(y) \in T_i .$$

Ceci montre que $K(f(x)) \subset K(f(y))$. Comme x et y jouent des rôles symétriques, cela implique que $K(f(x)) = K(f(y))$, dont on déduit par définition :

$$K^*(f(x)) = K^*(f(y)) .$$

Fixons maintenant $i \in K(f(x))$ et $j \in K^*(f(x))$. Comme $W^S(f(x), T_i) = W^S(f(y), T_i)$, on a :

$$W^S(f(x), T_i) \cap T_j \neq \emptyset \implies W^S(f(y), T_i) \cap T_j \neq \emptyset .$$

Prouvons le même résultat pour les variétés instables.

Par le corollaire 10.27, on peut trouver un rectangle T_k de $K(x)$, tel que :

$$(*) \quad f^{-1}[W^U(f(x), T_i)] \subset W^U(x, T_k) .$$

Supposons l'intersection $W^U(f(x), T_i) \cap T_j$ non vide, et soit z un point de cette intersection. Le corollaire 10.27 implique alors qu'on peut trouver $T_p \in K(f^{-1}(z))$ vérifiant :

$$(**) \quad f[W^S(f^{-1}(z), T_p)] \subset W^S(z, T_j) .$$

Soit $t = [z, f(y)]$. Le point t appartient à T_i , comme z et $f(y)$, et à $W^U_e(f(y))$. Montrons qu'il appartient à T_j .

Du choix de z et de (*), nous tirons :

$$f^{-1}(z) \in T_p \cap W^U(x, T_k) .$$

On en déduit par 10.29., que $x \in T_{kp}'(1) \cup T_{kp}'(3)$. Il en est donc de même pour y , ce qui implique :

$$W^U(y, T_k) \cap T_p \neq \emptyset .$$

Soit u un point de cette intersection. On a alors, vu le choix de u :

$$[f^{-1}(z), u] = [f^{-1}(z), y] \in W^S(f^{-1}(z), T_p) .$$

La relation (***) implique alors :

$$t = [z, f(y)] = f([f^{-1}(z), y]) \in W^S(z, T_j) \subset T_j .$$

On a donc montré :

$$W^U(f(x), T_i) \cap T_j \neq \emptyset \implies W^U(f(y), T_i) \cap T_j \neq \emptyset .$$

Comme x et y jouent des rôles symétriques, l'implication réciproque est vraie.

On a donc les deux équivalences :

$$W^S(f(x), T_i) \cap T_j \neq \emptyset \iff W^S(f(y), T_i) \cap T_j \neq \emptyset$$

$$W^U(f(x), T_i) \cap T_j \neq \emptyset \iff W^U(f(y), T_i) \cap T_j \neq \emptyset .$$

Comme $f(x)$ et $f(y)$ appartiennent à Z , il en résulte :

$$R(f(x)) = R(f(y)) . \quad \square$$

La collection des $R(x)$, pour $x \in Z$, est finie car les $T_{ij}^{(k)}$ sont en nombre fini. Soit :

$$\mathfrak{R} = \{R_1, \dots, R_s\} = \{\bar{R}(x) \mid x \in Z\} .$$

PROPOSITION 10.33. La collection \mathfrak{R} est une partition markovienne de Λ pour f .

Démonstration : Démontrons successivement les différentes propriétés des partitions markoviennes.

1° Les R_i recouvrent Λ , car ils contiennent l'ensemble dense Z . Ils sont propres car toute partie A d'un espace topologique vérifie :

$$\bar{\bar{A}} = \bar{A}$$

2° Soient deux rectangles disjoints $R(x)$ et $R(y)$. On a :

$$\begin{aligned} R(x) \cap R(y) = \emptyset &\implies R(x) \cap \bar{R}(y) = \emptyset \\ &\implies R(x) \cap \bar{\bar{R}}(y) = \emptyset \\ &\implies \bar{R}(x) \cap \bar{\bar{R}}(y) = \emptyset \\ &\implies \bar{\bar{R}}(x) \cap \bar{\bar{R}}(y) = \emptyset . \end{aligned}$$

Les rectangles R_i sont d'intérieurs disjoints.

3° Introduisons l'ensemble Z^* défini par :

$$Z^* = \{x \in Z \mid W_{\delta/2}^S(x) \cap \left(\bigcup_{i,j=1}^{\ell} \bigcup_{k=1}^4 \partial S_{T_{ij}}^{(k)} \right) = \emptyset\} .$$

La proposition 10.20 implique que Z^* est un ouvert dense de Λ , et que, si $x \in Z^*$, $\bar{W}_{\delta/2}^S(x) \cap Z$ est ouvert et dense dans $\bar{W}_{\delta/2}^S(x) \cap \Lambda$. Puisque f est un

homéomorphisme de Λ , l'ensemble $Z^* \cap f^{-1}(Z^*)$ est ouvert et dense dans Λ .

Soit $x \in Z^* \cap f^{-1}(Z^*)$, l'ensemble $Z \cap \overset{\circ}{W}_{\delta/2}^S(f(x))$ est ouvert et dense dans $\overset{\circ}{W}_{\delta/2}^S(f(x)) \cap \Lambda$. Le lemme 10.19 implique que $f^{-1}(Z) \cap \overset{\circ}{W}_{\delta/2}^S(x)$ est dense dans $\overset{\circ}{W}_{\delta/2}^S(x) \cap \Lambda$. Par conséquent, $Z \cap f^{-1}(Z) \cap \overset{\circ}{W}_{\delta/2}^S(x)$ est ouvert et dense dans $\overset{\circ}{W}_{\delta/2}^S(x) \cap \Lambda$.

Supposons maintenant que $x \in Z^* \cap f^{-1}(Z^*) \cap \overset{\circ}{R}_1 \cap f^{-1}(\overset{\circ}{R}_j)$. On a alors $R_1 = \overline{R(x)}$ et $R_j = \overline{R(f(x))}$. Par la proposition 10.15 et le raisonnement ci-dessus, on obtient :

$$W^S(x, R_1) = \overline{W^S(x, R(x))} = \overline{W^S(x, R(x)) \cap Z \cap f^{-1}(Z)} .$$

Or, par le lemme 10.32, nous avons :

$$f[W^S(x, R(x)) \cap Z \cap f^{-1}(Z)] \subset R(f(x)) \subset R_j .$$

Comme f est continue, on en déduit :

$$f(W^S(x, R_1)) \subset R_j .$$

Soit, finalement :

$$f(W^S(x, R_1)) \subset R_j \cap W_e^S(f(x)) = W^S(f(x), R_j) .$$

Si, maintenant, x est quelconque dans $\overset{\circ}{R}_1 \cap f^{-1}(\overset{\circ}{R}_j)$, comme $Z^* \cap f^{-1}(Z^*)$ est dense et $\overset{\circ}{R}_1 \cap f^{-1}(\overset{\circ}{R}_j)$ est ouvert non vide, il existe un point x^* dans $Z^* \cap f^{-1}(Z^*) \cap \overset{\circ}{R}_1 \cap f^{-1}(\overset{\circ}{R}_j)$. Comme R_1 est un rectangle, on a :

$$W^S(x, R_1) = \{[x, z] \mid z \in W^S(x^*, R_1)\} .$$

On en déduit :

$$f(W^S(x, R_1)) \subset \{[f(x), f(z)] \mid z \in W^S(x^*, R_1)\} .$$

On peut appliquer à x^* le début de la démonstration :

$$f(W^S(x^*, R_1)) \subset W^S(f(x^*), R_j) .$$

Par conséquent, on obtient :

$$f(W^S(x, R_1)) \subset \{[f(x), w] \mid w \in W^S(f(x^*), R_j)\} = W^S(f(x), R_j) ,$$

où la dernière égalité vient du fait que R_j est un rectangle.

On a donc finalement montré :

$$\forall x \in \overset{\circ}{R}_1 \cap f^{-1}(\overset{\circ}{R}_j), \quad f(W^S(x, R_1)) \subset W^S(f(x), R_j) .$$

Le résultat analogue pour les variétés instables se montre de façon similaire. \square

En conclusion de ce paragraphe, nous pouvons énoncer le théorème d'existence d'une partition markovienne.

THÉORÈME 10.34. Soit f un difféomorphisme C^r ($r \geq 1$) d'une variété différentiable M . Soit Λ un fermé de M invariant hyperbolique pour f , admettant une structure de produit local. Il existe alors une partition markovienne de Λ pour f .

III - APPLICATIONS

III. - A. Codage associé à une partition markovienne.

Les notations sont les mêmes qu'en II.

Soit $\mathcal{R} = (R_1, \dots, R_\ell)$ une partition markovienne de Λ pour f , telle que :

$$\forall i \in [\ell], \quad \text{diam } R_i < \rho < \frac{\delta}{2} < \epsilon .$$

Définissons alors une matrice A dans $M_{\ell \times \ell}(\{0,1\})$ par :

$$A_{ij} = 1 \iff f(\overset{\circ}{R}_i) \cap \overset{\circ}{R}_j \neq \emptyset .$$

Le but de ce paragraphe est de définir une semi-conjugaison Π canonique de (Σ_A, σ_A) sur (Λ, f) , et d'étudier ses propriétés.

DÉFINITION 10.35. Soit R un rectangle de Λ . Une partie S de R est une bande stable de R (resp. bande instable de R), si, pour tout point x de S :

$$W^S(x, R) \subset S \text{ (resp. } W^U(x, R) \subset S) .$$

PROPOSITION 10.36. Soit S une bande stable d'un rectangle R . Alors S est un rectangle. Si S est non vide, S coupe toute variété instable $W^U(x, R)$ ($x \in R$).

Soient $x \in R$ et $y \in S$. On a : $S = [W^U(x, R) \cap S, W^S(y, R)]$.

Démonstration : Soient $x \in R$ et $y \in S$. On a, par définition :

$$[y, x] \in W^S(y, R) \subset S .$$

Donc S est un rectangle et coupe $W^U(x, R)$.

Soit maintenant $z \in S$. On vérifie que :

$$z = [[z, x], [y, z]] .$$

Par conséquent, on a l'inclusion :

$$S \subset [W^U(x, R) \cap S, W^S(y, R)] .$$

L'inclusion réciproque résulte du fait que S est un rectangle. \square

COROLLAIRE 10.37. Si $\overset{\circ}{R}_i \cap f^{-1}(\overset{\circ}{R}_j)$ est non vide, et si S est une bande stable non vide de R_j (resp. de $\overset{\circ}{R}_j$), alors $f^{-1}(S) \cap R_i$ (resp. $f^{-1}(S) \cap \overset{\circ}{R}_i$) est une bande stable non vide de R_i (resp. de $\overset{\circ}{R}_i$).

Démonstration : Soit x un point de $\overset{\circ}{R}_i \cap f^{-1}(\overset{\circ}{R}_j)$. On a :

$$f^{-1}(W^U(f(x), R_j)) \subset W^U(x, R_i) .$$

Mais, d'après la proposition précédente, $S \cap W^U(f(x), R_j)$ est non vide, donc $f^{-1}(S) \cap R_i$ est non vide.

Soit $y \in f^{-1}(S) \cap R_i$; on a :

$$W^S(y, R_i) = \{[y, z] \mid z \in W^S(x, R_i)\}$$

et par conséquent :

$$f(W^S(y, R_i)) = \{[f(y), f(z)] \mid z \in W^S(x, R_i)\} .$$

Mais comme les R_k forment une partition markovienne, on a :

$$f(W^S(x, R_i)) \subset W^S(f(x), R_j) .$$

On obtient donc :

$$f(W^S(y, R_i)) \subset \{[f(y), w] \mid w \in W^S(f(x), R_j)\} = W^S(f(y), R_j) \subset S .$$

Il en résulte aisément que $f^{-1}(S) \cap R_i$ est une bande stable de R_i .

Rappelons la propriété donnée en remarque après la définition des partitions markoviennes :

$$\forall x \in \overset{\circ}{R}_i \cap f^{-1}(\overset{\circ}{R}_j), \quad f(W^S(x, \overset{\circ}{R}_i)) \subset W^S(f(x), \overset{\circ}{R}_j) \\ f^{-1}(W^U(f(x), \overset{\circ}{R}_j)) \subset W^U(x, \overset{\circ}{R}_i) .$$

Par conséquent, la démonstration du corollaire pour $\overset{\circ}{R}_i$ et $\overset{\circ}{R}_j$ se fait exactement de la même façon que pour R_i et R_j . \square

On obtient un résultat analogue en remplaçant f^{-1} par f et les bandes stables par des bandes instables.

COROLLAIRE 10.38. Soit (a_0, \dots, a_k) une suite admissible pour A . L'intersection $\bigcap_{s=0}^k f^{-s}(R_{a_s})$ (resp. $\bigcap_{s=0}^k f^{-s}(\overset{\circ}{R}_{a_s})$) est une bande stable non vide de R_{a_0} (resp. $\overset{\circ}{R}_{a_0}$). De même, $\bigcap_{s=0}^k f^s(R_{a_s})$ (resp. $\bigcap_{s=0}^k f^s(\overset{\circ}{R}_{a_s})$) est une bande instable non vide de R_{a_0} (resp. $\overset{\circ}{R}_{a_0}$).

Démonstration : Les démonstrations se font par récurrence sur k en utilisant le corollaire précédent et sont similaires. Démontrons par exemple la première assertion.

Pour $k = 0$, le résultat est évident. Supposons le résultat vrai pour toute suite admissible (b_0, \dots, b_{k-1}) ; Soit (a_0, \dots, a_k) une suite admissible. Alors (a_1, \dots, a_k) est admissible, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : l'ensemble $S = \bigcap_{s=1}^k f^{-s+1}(R_{a_s})$ est une bande stable de R_{a_1} . En appliquant le corollaire 10.37 à S , on obtient le résultat cherché. \square

Soit maintenant $\underline{a} \in \Sigma_A$. La suite d'ensembles $(\bigcap_{s=-k}^{+k} f^s(R_{a_s}))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de compacts non vides (par le corollaire précédent et le fait que les R_i sont compacts). Son intersection $(\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k)$ est donc non vide. Si elle contenait deux points distincts x et y , on aurait :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad d(f^i(x), f^i(y)) \leq \text{diam}(R_{a_i}) < \varepsilon .$$

Mais ε est une constante d'expansivité. L'intersection est donc réduite à un seul

point.

On peut donc définir une application π de Σ_A dans Λ par la relation

$$\pi(\underline{a}) = x = \bigcap_{k=-\infty}^{k=+\infty} f^{-k}(R_{a_k}) .$$

Soit H défini par : $H = \bigcap_{k=-\infty}^{k=+\infty} f^{-k}(\Lambda - \bigcup_{s=1}^l \partial R_s)$. Par le théorème de Baire,

H est un G_δ dense dans Λ .

Les propriétés de π sont contenues dans les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 10.39. L'application π de Σ_A dans Λ , est continue, surjective, injective sur $\pi^{-1}(H)$. C'est un morphisme de crochet envoyant C_i dans R_i , qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_A & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_A \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \end{array}$$

Démonstration : . π est continue. Soient \underline{b} un point de Σ_A , U un voisinage de $x = \pi(\underline{b})$ dans Λ , $(\underline{b}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Σ_A convergeant vers \underline{b} . On a alors :

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k = \{x\} , \text{ avec } F_k = \bigcap_{s=-k}^{s=+k} f^{-s}(R_{a_s}) .$$

Par conséquent, les F_k sont contenus dans U à partir d'un rang n_0 . Par le lemme 10.2 :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall i, |i| \leq n_0, \quad \forall n \geq n_1, \quad b_i^n = b_i .$$

Pour tout $n \geq n_1$, $\pi(\underline{b}^n)$ est donc dans F_{n_0} , donc dans U . L'application π est continue.

. π est surjective, injective sur $\pi^{-1}(H)$. Soit x un point de H .

Pour tout i , $f^i(x)$ appartient à un unique rectangle R_{b_i} et est à l'intérieur de ce rectangle. La suite $(b_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est donc élément de Σ_A , seul antécédent de x par π .

Comme l'application π est continue, et Σ_A est compacte, l'image $\pi(\Sigma_A)$ est compacte et contient H , donc est égale à Λ tout entier.

. La commutativité du diagramme est immédiate, ainsi que la relation : $\pi(C_i) \subset R_i$.

. π est un morphisme de crochet. Soient $\underline{a} \in C_i$, $x = \pi(\underline{a})$; l'image de la variété stable $W^S(\underline{a}, C_i)$ est contenue dans $\bigcap_{j=0}^{\infty} f^{-j}(R_{a_j})$. Soit y un point de ce dernier ensemble. On a :

$$\forall k \geq 0, \quad d(f^k(x), f^k(y)) \leq \text{diam } R_{a_k} < \epsilon .$$

Donc, $y \in W^S(x, R_i)$, ce qui montre l'inclusion :

$$\pi(W^S(\underline{a}, C_i)) \subset W^S(\pi(\underline{a}), R_i) .$$

De même :

$$\forall \underline{b} \in C_i, \quad \pi(W^U(\underline{b}, C_i)) \subset W(\pi(\underline{b}), R_i) .$$

Cela implique immédiatement que π est un morphisme de crochet. \square

THÉORÈME 10.40. Tout point de Λ a, au plus, ℓ^2 antécédents par π , où $\ell = \text{card } \mathcal{R}$.

La démonstration nécessite le lemme suivant :

LEMME 10.41. Soient b_0, \dots, b_N et b'_0, \dots, b'_N deux suites admissibles telles que $b_0 = b'_0$ et $b_N = b'_N$. Si R_{b_i} et $R_{b'_i}$ se coupent pour tout i , les deux suites admissibles sont égales.

Démonstration : Par le corollaire 10.38, on peut trouver x, y dans Λ tels que :

$$\forall i, \quad 0 \leq i \leq N, \quad f^i(x) \in \overset{\circ}{R}_{b_i}, \quad f^i(y) \in \overset{\circ}{R}_{b'_i} .$$

Par hypothèse, R_{b_i} et $R_{b'_i}$ se coupent pour tout i ; donc :

$$\forall 0 \leq i \leq N, \quad d(f^i(x), f^i(y)) \leq \text{diam } R_{b_i} + \text{diam } R_{b'_i} < 2\rho < \delta .$$

Donc le crochet $[f^i(x), f^i(y)]$ est défini pour tout $0 \leq i \leq N$.

$$\text{On a : } R_{b_0} = R_{b'_0}, \text{ donc } [x, y] \in \overset{\circ}{R}_{b_0} .$$

Par la remarque qui suit la définition d'une partition markovienne et une récurrence immédiate, on a :

$$\forall 0 < i \leq N, \quad [f^i(x), f^i(y)] = f^i([x, y]) \in W^S(f^i(x), \overset{\circ}{R}_{b_i}) .$$

On peut appliquer le même raisonnement à $f^N([x, y]) = [f^N(x), f^N(y)]$ et à f^{-1} ; on obtient :

$$f^i([x, y]) \in W^U(f^i(y), \overset{\circ}{R}_{b_i'}) .$$

Par conséquent, $\overset{\circ}{R}_{b_i} \cap \overset{\circ}{R}_{b_i'}$ est non vide, ce qui implique $b_i = b_i'$. \square

Démonstration du théorème 10.40. : Supposons qu'un point x de Λ ait $\ell^2 + 1$ antécédents distincts par π ; notons les $\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^{\ell^2+1}$. On peut alors choisir un entier N assez grand de façon à ce que les suites admissibles $(x_{-N}^i, \dots, x_0^i, \dots, x_N^i)$ soient toutes distinctes. Il existe donc deux indices i et j tels que :

$$x_{-N}^i = x_{-N}^j, \quad x_N^i = x_N^j .$$

Le lemme précédent apporte alors la contradiction désirée. \square

Le théorème implique immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 10.42. $\pi^{-1}(\text{Per } f|\Lambda) = \text{Per } \sigma_A$.

COROLLAIRE 10.43. Soient \underline{s} et \underline{t} deux antécédents par π d'un point périodique x . Si $s_i = t_i$ pour un $i \in \mathbf{Z}$, on a : $\underline{s} = \underline{t}$.

Démonstration : Soit N une période commune à \underline{s} et \underline{t} . Soit i tel que $s_i = t_i$. Les deux suites admissibles (s_i, \dots, s_{i+N}) et (t_i, \dots, t_{i+N}) vérifient les hypothèses du lemme 10.41 : $s_i = t_i$, $s_{i+N} = t_{i+N}$ et les rectangles R_{s_j} et R_{t_j} se coupent car ils contiennent tous deux x . On a donc : $\underline{s} = \underline{t}$. \square

III. B. Rationalité de la fonction ζ .

DÉFINITION 10.44. On dit que k -rectangles sont reliés si leur intersection est non vide.

Soient $\mathcal{R} = (R_1, \dots, R_\ell)$ une partition markovienne, $A \in M_{\ell \times \ell}(\{0, 1\})$ la matrice associée. Pour tout $r \in [\ell]$, désignons par I_r l'ensemble des parties K de $[\ell]$ ayant r éléments, telles que les rectangles $(R_i)_{i \in K}$ soient reliés. Les éléments de I_r seront notés comme r -uplets ordonnés d'éléments de $[\ell]$: (s_1, \dots, s_r) avec $s_1 < s_2 < \dots < s_r$.

DÉFINITION 10.45. On note \mathfrak{S}^r le groupe des permutations de $[r]$.

Pour tout $r \in [\ell]$, on définit une matrice carrée $A^{(r-1)}$ à coefficients indexés par les éléments de I_r de la façon suivante :

Si $s = (s_1, \dots, s_r)$ et $t = (t_1, \dots, t_r)$ sont deux éléments de I_r , le coefficient $A_{st}^{(r-1)}$ est égal à 0 ou 1 ; il est égal à 1 si et seulement si il existe un unique élément μ de \mathfrak{S}^r tel que :

$$\forall i \in [r], \quad A_{s_i t_{\mu(i)}}^{(r-1)} = 1 .$$

DÉFINITION 10.46. Pour tout $r \in [\ell]$, on définit la matrice $B^{(r-1)}$, à coefficients indexés par I_r , de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } A_{st}^{(r-1)} &= 0, & B_{st}^{(r-1)} &= 0 \\ \text{si } A_{st}^{(r-1)} &= 1, & B_{st}^{(r-1)} &= \text{sgn } \mu \end{aligned}$$

où μ désigne l'unique permutation de la définition précédente.

PROPOSITION 10.47. Définissons l'entier L par :

$$L = \max \{r \in [\ell], I_r \neq \emptyset\} .$$

On a alors la relation :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad N_p(f/\Lambda) = \sum_{r=0}^{L-1} (-1)^r \text{Tr}(B^{(r)})^p .$$

Démonstration : a) Notons Σ_r l'ensemble des suites indexées par \mathbb{Z} d'éléments de I_r ;

notons $\Sigma(A^{(r-1)})$ l'ensemble des suites $a^* = (a_m^*)_{m \in \mathbb{Z}}$ de Σ_r vérifiant la condition :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad A_{a_m^* a_{m+1}^*}^{(r-1)} = 1 .$$

Remarquons que Σ_r et $\Sigma(A^{(r-1)})$ sont définis par rapport à I_r et $A^{(r-1)}$ de la même façon que Σ et Σ_A sont définis par rapport à $[\ell]$ et A .

On définit sur Σ_r et $\Sigma(A^{(r-1)})$ un shift σ^* par :

$$[\sigma^*(a^*)]_m = a_{m+1}^* .$$

Notons $\text{Per}_p(\Sigma(A^{(r-1)}))$ l'ensemble des points p -périodiques pour σ^* .

Donnons-nous une suite $a^* = (a_m^*)_{m \in \mathbb{Z}}$ de $\Sigma(A^{(r-1)})$, et notons :

$$a_m^* = (a_m^1, \dots, a_m^r) \in I_r .$$

Appelons μ_m la permutation de 10.45, unique par définition, qui assure

$A_{a_m^* a_{m+1}^*}^{(r-1)} = 1$. Définissons la suite de permutations $(\nu_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ par :

$$\nu_0 = \text{id. (élément neutre de } \mathfrak{S}^r)$$

$$\nu_m = \mu_{m-1} \circ \mu_{m-2} \circ \dots \circ \mu_0 \quad \text{si } m > 0$$

$$\nu_m = \mu_m^{-1} \circ \mu_{m+1}^{-1} \circ \dots \circ \mu_{-1}^{-1} \quad \text{si } m < 0 .$$

On obtient alors r éléments $\alpha^1, \dots, \alpha^r$ de Σ_A , en posant :

$$\forall i \in [r], \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_m^i = a_m^{\nu_m(i)} .$$

Pour tout m , les rectangles $(R_m^j)_{1 \leq j \leq r}$ sont reliés. On en déduit :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad \forall i, k \in [r],$$

$$d(f^m[\pi(\alpha^i)], f^m[\pi(\alpha^k)]) < 2 \max \text{diam } R_j < \varepsilon .$$

Puisque ε est une constante d'expansivité, on obtient :

$$\forall i, k \in [r], \quad \pi(\alpha^i) = \pi(\alpha^k) .$$

On peut donc définir une application π_r^* par :

$$\begin{aligned} \pi_r^* : \Sigma(A^{(r-1)}) &\longrightarrow \Lambda \\ \pi_r^*(a^*) &= \pi(\alpha^i), \quad \forall i \in [r] . \end{aligned}$$

b) Soit $a^* \in \text{Per}_p(\Sigma(A^{(r-1)}))$. Cela signifie que :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad a_m^* = a_{m+p}^* .$$

Gardant les notations de a), on a :

$$\begin{aligned} f^p(\pi_r^*(a^*)) &= f^p\left(\bigcap_{i \in [r]} \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} f^{-m}(R_{\alpha_m^i})\right) \\ &= f^p\left(\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} f^{-m}\left(\bigcap_{i \in [r]} R_{a_m^i}\right)\right) \\ &= \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} f^{p-m}\left(\bigcap_{i \in [r]} R_{a_m^i}\right) \\ &= \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} f^{p-m}\left(\bigcap_{i \in [r]} R_{a_{m-p}^i}\right) \\ &= \pi_r^*(a^*) . \end{aligned}$$

Donc, on a l'inclusion :

$$\pi_r^*(\text{Per}_p(\Sigma(A^{(r-1)}))) \subset \text{Per}_p(f/\Lambda) .$$

c) Soit $x \in \text{Per}_p(f/\Lambda)$. Ses antécédents par π sont en nombre fini par 10.40, et périodiques par 10.42. Notons les $\alpha^1, \dots, \alpha^k$. Par le corollaire 10.43, les rectangles $R_{\alpha_m^1}, R_{\alpha_m^2}, \dots, R_{\alpha_m^k}$ sont distincts et reliés pour tout m . Ils définissent donc un élément a_m^* de I_k . On peut associer à x une suite

$$a^* = (a_m^*)_{m \in \mathbb{Z}} \text{ de } \Sigma_k .$$

LEMME 10.48. L'élément a^* est dans $\Sigma(A^{(k-1)})$.

Démonstration : Il suffit de montrer que, pour tout m donné, l'identité est l'unique permutation μ dans \mathfrak{S}^k qui vérifie :

$$\forall i \in [k], \quad \alpha_m^i \alpha_{m+1}^{\mu(i)} = 1 .$$

Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence d'un entier relatif m et d'une permutation non triviale μ satisfaisant la relation ci-dessus. Soit τ l'ordre de μ dans \mathfrak{S}_k , soit i un élément non fixé par μ ($\mu(i) \neq i$) et soit q une période commune aux α^j . Considérons les deux suites admissibles :

$$\alpha_m^i \alpha_{m+1}^{\mu(i)} \dots \alpha_{m+q}^{\mu(i)} \alpha_{m+q+1}^{\mu^2(i)} \dots \alpha_{m+(\tau-1)q}^{\mu^{\tau-1}(i)} \alpha_{m+(\tau-1)q+1}^i$$

$$\alpha_m^i \alpha_{m+1}^i \dots \alpha_{m+q}^i \alpha_{m+q+1}^i \dots \alpha_{m+(\tau-1)q+1}^i .$$

Elles vérifient les hypothèses du lemme 10.41, donc sont égales. Mais on a supposé $\mu(i) \neq i$, et, d'après 10.43, $\alpha_{m+1}^{\mu(i)} \neq \alpha_{m+1}^i$. \square

Suite de la démonstration de la proposition 10.47 :

Comme x est de période p pour f , la puissance p -ième σ^p du shift laisse invariant l'ensemble des antécédents de x par π . La définition de a^* montre alors que a^* appartient à $\text{Per}_p(\Sigma(A^{(k-1)}))$.

d) Fixons toujours $x \in \text{Per}_p(f|\Lambda)$. Nous voulons déterminer les antécédents de x par les π_r^* , pour $1 \leq r \leq \ell$, qui appartiennent à $\text{Per}_p(\Sigma(A^{(r-1)}))$.

Conservant les notations de c), on note μ la permutation de \mathfrak{S}^k déterminée par :

$$\forall i \in [k], \quad \alpha_p^{\mu(i)} = \alpha_o^i .$$

La permutation μ n'est autre que la restriction de σ^p à l'ensemble des antécédents

de x par π ; elle se décompose en cycles disjoints μ_1, \dots, μ_s agissant sur des ensembles I_1, \dots, I_s formant une partition de $[k]$.

Soit b^* un antécédent de x par π_t^* , avec $1 \leq t \leq \ell$. La partie a) montre que b^* fournit t antécédents de x par π . Donc, on a $t \leq k$. De plus, à b^* est associée la partie J de $[k]$ telle que les antécédents fournis par b^* soient les $(\alpha_j)_{j \in J}$. Si nous exigeons de plus que b^* soit fixe pour σ^{*p} , la définition de μ montre que J doit être globalement invariante par μ , donc union de certains sous-ensembles I_m .

En résumé, à tout antécédent b^* de x de période p pour σ^* est associé une partie K de $[s]$, telle que, si nous posons $J = \bigcup_{m \in K} I_m$, les antécédents de x par π fournis par b^* sont les $(\alpha_j)_{j \in J}$.

Réciproquement, on peut associer à toute partie K de $[s]$ la partie $J = \bigcup_{m \in K} I_m$, puis les antécédents de x par π $(\alpha_j)_{j \in J}$; ceux-ci permettent, comme en c), de former un antécédent de x par π_t^* dans $\text{Per}_p(\Sigma(A^{(t-1)}))$ avec :

$$t = \sum_{m \in K} \text{card } I_m .$$

e) Démontrons maintenant l'égalité de la proposition. Pour cela, considérons l'expression :

$$C_p = \sum_{r=1}^L (-1)^{r-1} \sum_{a^* \in \text{Per}_p(\Sigma(A^{(r-1)}))} \text{sgn } \tilde{\mu}$$

La permutation $\tilde{\mu}$ est l'élément de \mathfrak{S}^r défini de la façon suivante : $\alpha^1, \dots, \alpha^r$ étant associés à a^* , comme en a), on doit avoir :

$$\alpha_0^i = \alpha_p^{\tilde{\mu}(i)} .$$

Remarquons que la signature de $\tilde{\mu}$ ne dépend pas de la numérotation des α^i , car la signature est invariante par conjugaison dans \mathfrak{S}^r .

D'une façon absolument similaire à la proposition 10.8, on démontre que :

$$C_p = \sum_{r=1}^L (-1)^{r-1} \text{Tr}(B^{(r-1)})^p .$$

D'autre part, en rassemblant b) et c), on obtient :

$$\begin{aligned} C_p &= - \sum_{x \in \text{Per}_p(f|_\Lambda)} \sum_{r=1}^L \left(\sum_{\substack{\pi_r^*(a^*)=x \\ a^* \in \text{Per}_p(\Sigma(A^{(r-1)}))}} (-1)^r \text{sgn } \tilde{\mu} \right) \\ &= - \sum_{x \in \text{Per}_p(f|_\Lambda)} \Phi(x) \end{aligned}$$

Les considérations faites en d) montrent, en adoptant les mêmes notations qu'en d), que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \text{Per}_p(f|_\Lambda) \\ \Phi(x) &= \sum_{K \subset [s]} \left(\prod_{m \in K} (-1)^{\text{card } I_m} \text{sgn } \mu_m \right) \\ &= \prod_{m=1}^s (1 + (-1)^{\text{card } I_m} \text{sgn } \mu_m) - 1 \end{aligned}$$

Mais la signature d'un cycle de longueur h est $(-1)^{h+1}$, donc :

$$\forall x \in \text{Per}_p(f|_\Lambda), \quad \Phi(x) = -1 .$$

En comparant les deux expressions pour C_p , on peut écrire :

$$N_p(f|_\Lambda) = \sum_{r=0}^{L-1} (-1)^r \text{Tr}(B^{(r)})^p . \quad \square$$

THÉORÈME 10.48. La fonction ζ associée à $f|_\Lambda$ est rationnelle sur \mathbb{Q} .

Démonstration : Les propositions 10.47 et 10.12 impliquent en effet :

$$\zeta_{f|_\Lambda}(t) = \frac{\prod_{r \text{ impair}} \det(I - tB^{(r)})}{\prod_{r \text{ pair}} \det(I - tB^{(r)})} \quad \square$$

THÉORÈME 10.49. Si $\overline{\text{Per}f}$ est hyperbolique, la fonction ζ_f est rationnelle sur \mathbb{Q} .

Démonstration : Par définition de la fonction ζ , on a :

$$\zeta_f = \zeta_f|_{\overline{\text{Per} f}} .$$

Par la proposition 8.11, $\overline{\text{Per} f}$ a une structure de produit local. On peut donc lui appliquer le théorème précédent. \square

COROLLAIRE 10.50. Soit f un difféomorphisme de classe C^r ($r \geq 1$) d'une variété compacte M . Si f satisfait l'axiome A (respectivement si $R(f)$ est hyperbolique, resp. si $\overline{L}(f)$ est hyperbolique), la fonction ζ associée à f est rationnelle sur \mathbb{Q} .

Démonstration : Cela résulte de 8.6, 8.7, 8.9 et 10.49. \square

EXERCICE : Soit f un difféomorphisme vérifiant l'axiome A. Montrer que $\Omega(f)$ est fini si et seulement si $\limsup \frac{1}{n} \log N_n(f) = 0$.

COMMENTAIRES

A chaque chapitre correspond un commentaire qui est suivi d'une bibliographie. La référence (i, j) représente la j -ème référence de la bibliographie du chapitre i .

Certaines notions peuvent être introduites dans le commentaire du i -ème chapitre et ne se trouver justifiées que lors des commentaires concernant un chapitre ultérieur.

Ces commentaires sont subjectifs : ils reflètent comment j'ai pris connaissance du sujet et ne prétendent aucunement fournir un historique de son développement.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE 1

Nous considérons un difféomorphisme $f : M \rightarrow M$ comme un système dynamique : nous le considérons comme une action différentiable de \mathbb{Z} sur M . En général, si G est un groupe de Lie, un système dynamique de classe $C^{s,r}$ est un homomorphisme de groupes $\Phi : G \rightarrow \text{Diff}^r(M)$ tel que l'application naturelle $G \times M \rightarrow M$

$$(g, m) \mapsto \Phi(g)(m)$$

admette des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre s par rapport aux variables qui décrivent G , jusqu'à l'ordre r par rapport aux variables qui décrivent M ; on suppose de plus que les dérivées croisées existent jusqu'à l'ordre $\min(r, s)$ et sont continues sur $G \times M$. Une telle application $G \times M \rightarrow M$ est de classe $\min(r, s)$, sa restriction $G \times \{m\} \rightarrow M$ est de classe C^s quel que soit le point m de M et sa restriction $\{g\} \times M \rightarrow M$ est de classe C^r quel que soit l'élément g de G . Souvent r et s sont différents. On dira alors que l'action est de classe C^q avec $q = \min(r, s)$. Les exemples fondamentaux viennent de la théorie des équations

différentielles ordinaires sur les variétés. Rappelons qu'une équation différentielle ordinaire sur une variété fermée (compacte sans bord) est définie par un champ de vecteurs $V : M \rightarrow TM$ c'est-à-dire par une section du fibré tangent de M . Une solution de l'équation passant par le point x_0 de M est une fonction $\Phi(x_0, t) \in \mathbb{R}$, définie lorsque la variable t décrit un voisinage ouvert de l'origine de \mathbb{R} , qui vérifie $\Phi(x_0, 0) = x_0$ et $V(\Phi(x_0, u)) = \left(\frac{d\Phi(x_0, t)}{dt} \right)_u$. Si V est un champ de vecteurs de classe C^r avec $r > 0$, il existe une unique fonction $\Phi(x_0, t)$ définie quel que soit t appartenant à \mathbb{R} et qui vérifie quels que soient t et s :

$\Phi(\Phi(x_0, t), s) = \Phi(x_0, t+s)$. De plus, l'application $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}^r(M)$ définie par $\tilde{\Phi}(t)(x) = \Phi(t, x)$ est un système dynamique de classe $C^{r+1, r}$, c'est-à-dire une action de classe $C^{r+1, r}$ de \mathbb{R} , que l'on appelle encore flot de classe $C^{r+1, r}$ ou C^r (le $r+1$ est habituellement omis). Je cherche à faire une étude qualitative du comportement asymptotique des orbites de l'action et à relier ces comportements asymptotiques et la stabilité. Deux livres excellents et élémentaires traitant des équations différentielles ordinaires sont [1.1] et [1.7]. Le comportement asymptotique de l'orbite $\Phi(x_0, t)$ est son comportement lorsque t tend vers $\pm\infty$ si le groupe G est \mathbb{R} , ou, lorsque n tend vers $\pm\infty$, si $G = \mathbb{Z}$. Si G est un groupe de Lie quelconque, nous entendons par là l'étude de la suite $\Phi(x_0, g_i)$ où g_i est une suite qui sort de tout compact de G . Cette approche n'a de sens que si G n'est pas compact ; le cas où G est un groupe de Lie compact est l'objet de la géométrie différentielle compacte ; on connaît dans ce contexte un théorème de stabilité fort [1.8]. Les méthodes asymptotiques permettent essentiellement de comprendre les deux cas suivants : $G = \mathbb{R}$ (temps continu) ou $G = \mathbb{Z}$ (temps discret). Ces deux cas présentent de nombreuses similitudes. Je me limiterai au cas $G = \mathbb{Z}$, c'est-à-dire à l'étude de difféomorphismes de M . Les actions des groupes autres que \mathbb{R} ou \mathbb{Z} sont étudiées dans [1.3], [1.6], [1.13] et [1.14]. Mon point de vue vient de [1.16].

Les 4 premiers chapitres reprennent en fait [1.16], ouvrage qui m'a fait découvrir le sujet.

Les notions induites dans ce premier chapitre viennent toutes de [1.16] à l'exception de celles de α -pseudo-orbite que l'on trouve dans [1.4] et [1.2] et d'ensemble récurrent par chaîne définie d'abord en [1.4] que l'on retrouve dans [1.5]. Le point de vue générique est apparu dans les systèmes dynamiques avec les théorèmes démontrés par Peixoto (les flots structurellement stables d'une surface forment un ouvert dense) et avec les théorèmes de Kupka et Smale de généricité de ce que l'on appelle maintenant les difféomorphismes de Kupka-Smale [1.8] et [1.17]. Dans le même esprit, on trouvera la démonstration du théorème de Pugh dans [1.12].

On peut relier d'une autre façon les flots et les difféomorphismes : par suspension [1.16].

Etant donné un difféomorphisme $f : M \rightarrow M$, définissons l'application $\varphi_S : M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$ par $\psi_S(m, t) = (m, t+s)$; φ est un flot sur $M \times \mathbb{R}$. Le quotient de $M \times \mathbb{R}$ par la relation $(m, t) \sim (f(m), t+1)$ est compact. Cet espace quotient $\tilde{M} = M \times \mathbb{R} / \sim$ est un fibré sur S^1 de fibre difféomorphe à M . Le flot φ_S se projette sur \tilde{M} en un flot Φ_S . Les dynamiques de Φ_S et de f sont étroitement liées.

De bonnes références sur les systèmes dynamiques sont [1.2], [1.9] et [1.10]. J'ai fait de larges emprunts à ces ouvrages.

BIBLIOGRAPHIE 1

- [1.1] ARNOLD V.I., Equations différentielles ordinaires, Editions de Moscou, traduction française, 1974.
- [1.2] BOWEN R., Equilibrium states and the ergodic theory of axiom A diffeomorphisms, Lecture Notes in Math., 470, Springer-Verlag, 1975.
- [1.3] CAMACHO C., On $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^1$ -actions, in Dynamical Systems (Peixoto Ed.), Academic Press, 1973, p. 23.

- [1.4] CONLEY C., On the gradient structure of a flow, I.B.M. Preprint.
- [1.5] CONLEY C., Some aspects of the qualitative theory of differential equations, in *Dynamical Systems, An international Symposium* (Cesari Hale & Lasalle, Ed.), Academic Press, 1976.
- [1.6] HIRSCH M.W., Foliations and non-compact transformation groups, *Bull. Amer. Math. Soc.* 76 (1970), p. 1020.
- [1.7] HIRSCH M.W. and SMALE S., *Differential equations dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.
- [1.8] KUPKA I., Contributions à la théorie des champs génériques, *Contributions to differential equations*, 2 (1963), p. 457.
- [1.9] MELO W. and PALIS J., *Introdução aos sistemas dinâmicos*, IMPA, 1975.
- [1.10] NITECKI Z., *Differentiable dynamics*, M.I.T. Press, 1972.
- [1.11] PEIXOTO M., Structural stability on two dimensional manifolds, *Topology* 1 (1962), p. 101.
- [1.12] PUGH C.C., An improved closing lemma and a general density theorem, *Amer. J. Math.* 89 (1967), p. 1010.
- [1.13] PUGH C.C. and SHUB M., Ergodicity of Anosov actions, *Inventiones Math.* 15 (1972), p. 1.
- [1.14] PUGH C.C. and SHUB M., Axiom A actions, *Inventiones Math.* 29 (1974), p. 7.
- [1.15] SHUB M., Dynamical systems, filtrations and entropy, *Bull. Amer. Math. Soc.* 80 (1974), p. 27.
- [1.16] SMALE S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967), p. 747.
- [1.17] SMALE S., Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 17 (1963), p. 97.
- [1.18] PALAIS R., Equivalence of nearby differential actions of a compact group, *Bull. Amer. Math. Soc.* 67 (1961), p. 362.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE 2

Smale [1.16] utilise des filtrations pour contrôler la croissance de l'ensemble non errant d'un difféomorphisme après perturbation. Les conditions d'ordre ont été utilisées par Smale lorsqu'il démontre les inégalités de Morse que vérifient les difféomorphismes que l'on appelle maintenant difféomorphismes de Morse-Smale [2.7]. Rosenberg [2.4] a généralisé ces conditions pour définir la propriété : "Il n'existe pas de cycle" et généraliser les inégalités de Morse. Palis [2.3] a défini des filtrations qui permettent de démontrer que les difféomorphismes de Morse-Smale d'une variété forment un ouvert, et je lui dois la suite de lemmes que j'ai utilisée (à partir de 2.7). Il me les a communiqués quand nous travaillions sous la direction de Smale à Berkeley entre 1964 et 1967.

Newhouse [2.1] a étudié des filtrations dans un contexte plus général que Smale, en insistant sur l'étude des ensembles-limite et sur celle des ordres de filtration.

Ces idées ont été systématisées dans [2.5], [2.6] et [2.2].

Conley a considéré des suites de filtrations dans le cas topologique et eut l'idée de les utiliser pour étudier l'ensemble récurrent par chaîne (cf. [1.4] et [1.5]). Le théorème 2.3 et la proposition 2.4 viennent pour l'essentiel de [1.16] et ont été repris dans les travaux plus récents.

BIBLIOGRAPHIE 2

- [2.1] NEWHOUSE S., On hyperbolic limit sets, Trans. Amer. Math. Soc. 167 (1972), p. 125.
- [2.2] NITECKI Z. and SHUB M., Filtrations, decompositions and explosions, Amer. J. of Math., 107 (1975), p. 1029.

- [2.3] PALIS J., On Morse–Smale dynamical systems, *Topology* 8 (1969), p. 385.
- [2.4] ROSENBERG H., A generalization of the Morse–Smale inequalities, *Bull. Amer. Math. Soc.* 70 (1964), p. 422.
- [2.5] SHUB M., Stability and genericity for diffeomorphisms, in *Dynamical Systems* (Peixoto, ed.), Academic Press 1973, p. 493.
- [2.6] SHUB M. and SMALE S., Beyond hyperbolicity, *Annals of Math.* 96 (1972), p. 587.
- [2.7] SMALE S., Morse inequalities for a dynamical system, *Bull. Amer. Math. Soc.* 66 (1960), p. 43.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE 3

On utilise les suites de filtrations dans [2.6], [2.2], pour le cas topologique dans [1.4] et dans [1.5]; le théorème 3.4 et les propositions 3.5 et 3.6 sont énoncées dans [1.5], le théorème 3.11 dans [2.6]. On trouvera la démonstration de la proposition 3.12 dans [2.2] pour le cas de la dimension 2 et dans [2.6] pour les dimensions plus grandes. On ne trouvera pas le théorème 3.14 énoncé ainsi dans la littérature. Toutefois le cas topologique est pratiquement traité dans [1.4]. On trouvera dans [2.6] les techniques nécessaires à la démonstration de ce théorème, mais non son énoncé. L'ingrédient essentiel est la technique de lissage de [3.2]. Dans ce cadre, mon premier contact avec ces techniques fut [3.1]. Il existe une version du théorème 3.11, énoncée en termes de flots, qui utilise le théorème 3.14 et les résultats de [2.2].

L'exercice vient de [2.1].

BIBLIOGRAPHIE 3

- [3.1] PUGH C.C. and SHUB M., Ω -stability theorem for flows, *Inventiones Math.* 11 (1970), p. 150.

- [3.2] WILSON F.W., Smoothing derivatives of functions and applications, *Trans. Amer. Math. Soc.* 139 (1969), p. 413.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE 4

Mes exemples et mes définitions viennent de [1.16] ; le lecteur trouvera dans [1.16] les connaissances de base et les motivations qui l'aideront à lire ce chapitre. La proposition 4.2 se trouve dans [4.2] et avait été d'abord énoncée dans [4.4].

Il me semble, qu'à un moment, beaucoup se demandaient s'il existait un difféomorphisme stable ayant une infinité d'orbites périodiques. Levinson [4.3] en donna un exemple. Smale [4.6] construisit le fer à cheval en pensant à l'exemple de Levinson et le relia aux points homocliniques de Poincaré. Thom remarqua l'exemple 4.6, que l'on appelle souvent difféomorphisme de Thom. Anosov [4.1] montra que les difféomorphismes que l'on appelle maintenant difféomorphismes d'Anosov sont structurellement stables, et formula la condition globale d'hyperbolicité. Smale [1.16] définit les ensembles hyperboliques, puis l' Ω -stabilité et généralisa le théorème d'Anosov au cas Ω -stable.

J'aime particulièrement l'exemple du solénoïde. Smale l'a trouvé après que j'eus étudié, dans ma thèse [4.5], l'application de S^1 dans $S^1 : z \mapsto z^2$ dont j'avais démontré qu'elle était structurellement stable, comme le sont toutes les dilatations.

Williams [4.7] a généralisé ces résultats aux attracteurs dilatants. Je suis, dans ce chapitre, le point de vue de Williams.

BIBLIOGRAPHIE 4

- [4.1] ANOSOV D.V., Geodesic flows on compact manifolds of negative curvature, Trudy Mat. Inst. Steklov 90 (1967) = Proc. Steklov Inst., Amer. Math. Soc. transl. (1969).
- [4.2] HIRSCH M.W. and PUGH C.C., Stable manifolds and hyperbolic sets, in "Global analysis", vol. XIV, Proceedings of Symposia in pure math., Amer. Math. Soc. (1970), p. 133.
- [4.3] LEVINSON N., A second order differential equation with singular solutions, Annals of Math. 50 (1949), p. 126.
- [4.4] MATHER J., Characterization of Anosov diffeomorphisms, Indag. Math. 30 (1968), p. 479.
- [4.5] SHUB M. Endomorphisms of compact differentiable manifolds, Amer. J. Math. 91 (1969), p. 175.
- [4.6] SMALE S. Diffeomorphisms with many periodic points, in Differential and Combinatorial Topology, a Symposium in honor of M. Morse (S.S.Cairns, Ed.), Princeton Univ. Press (1965), p. 63.
- [4.7] WILLIAMS R.F., Expanding attractors, Publications mathématiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques 43 (1974), p. 169.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE 5

Voir les variétés stables et instables et comprendre comment elles s'intersectent, ceci non seulement en un point, mais en tout point d'un ensemble hyperbolique (voir chapitre 6) et même étendre ces variétés hors de l'ensemble hyperbolique (voir les commentaires portant sur le chapitre 7) est le coeur du sujet.

Dans [4.1], Anosov donne un petit aperçu historique.

J'ai suivi de très près [4.2] en ajoutant aux démonstrations des idées prises dans [5.1]. C'est, entre autres, pour faciliter au lecteur des chapitres 4 et 5 la lecture de [5.1].

La démonstration du théorème de la variété (in)stable que l'on trouve dans l'appendice 2 vient de [5.2] et [5.3].

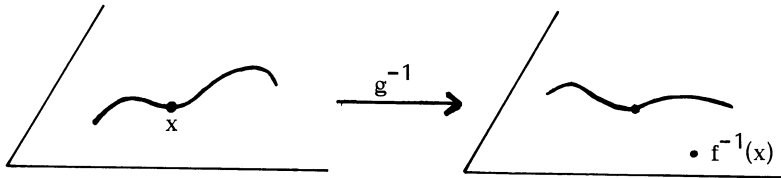
BIBLIOGRAPHIE 5

- [5.1] HIRSCH M.W., PUGH C.C. and SHUB M., Invariant manifolds, Lecture notes in Math. n° 583, Springer-Verlag (1976).
- [5.2] IRWIN M.C., On the stable manifold theorem, Bull. London Math. Soc. 2 (1970), p. 196.
- [5.3] IRWIN M.C., On the smoothness of the composition map, Quart. J. of Math. (Oxford), 23 (1972), p. 113.

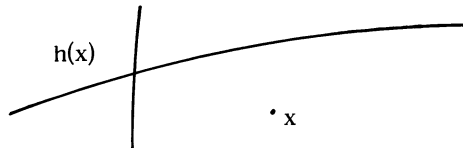
COMMENTAIRES DU CHAPITRE 6

Je garde la présentation de [4.2]. Moser [6.2] donne une nouvelle démonstration du théorème d'Anosov. Dans l'appendice de [1.16], Mather traduit la technique du théorème des fonctions implicites de Moser en termes de variétés banachiques. L'idée était la suivante : Pour trouver une solution continue à l'équation $gh = hf$, lorsque g est proche de f , considérons la transformation $T_g : C^0(M, M) \rightarrow C^0(M, M)$ définie par $T_g(h) = ghf^{-1}$. Lorsque $g = f$, l'identité Id_M est une solution, c'est-à-dire un point fixe de T_f . L'identité Id_M est un point fixe transverse si et seulement si $I - f_{\#}$ est inversible, car, dans une carte convenable, $f_{\#}$ est la dérivée de T_f au point Id_M . Le théorème des fonctions implicites implique que la transformation T_g a un unique point fixe au voisinage de Id_M lorsque g est assez proche de f . Mather a démontré que l'endomorphisme $I - f_{\#}$ de $\Gamma^0(M, TM)$ est inversible si et seulement si f est un difféomorphisme d'Anosov. Je le rappelle ici car cela montre comment historiquement l'attention s'est portée sur $I - f_{\#}$ et met en évidence les origines de la démonstration.

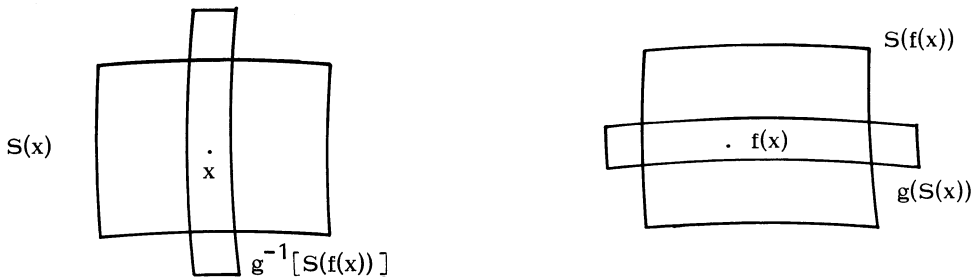
Remarquons que le point fixe de T_g est le point d'intersection (dans $C^0(M, M)$) de la variété stable locale et de la variété instable locale de T_g . Encore une fois, si nous suivons la démonstration du théorème de la variété stable et instable, nous constatons que, si g est assez proche de f , $\exp[\text{ev}_x W_{\text{loc}}^U(T_g)] = \exp(\text{graphe}(U_x))$ est l'image par l'exponentielle du graphe d'une fonction $U_x : E_{x, \epsilon}^U \rightarrow E_{x, \epsilon}^S$, si f et g sont de classe suffisante U_x sera de classe C^r , etc... Pour un $\epsilon > 0$ assez petit, $\exp(\text{graphe}(U_x))$ sera une variété de classe C^r et sera formée de points y vérifiant $d(g^n(y), f^n(x)) < \epsilon, \forall n \leq 0$.



La même analyse s'applique aux ensembles stables.



Le point d'intersection de ces deux sous-variétés est unique : c'est $h(x)$, et les deux variétés sont transverses en ce point. Plus précisément, choisissons une boîte $S(x)$ autour de chaque point M . Soit maintenant une application g proche de f .



Les ensembles :

$$\bigcap_{n \geq 0} g^{-n}[S(f^n(x))] = \{y \mid d(g^n(y), f^n(x)) < \epsilon, \forall n \geq 0\}$$

et

$$\bigcap_{n \leq 0} g^n[S(f^n(x))] = \{y \mid d(g^n(y), f^n(x)) < \epsilon, \forall n \leq 0\}$$

sont des variétés qui coïncident avec les variétés stables et instables pour f passant par le point x quand $g = f$; l'application g contracte et dilate ces variétés locales d'un facteur proche de la constante d'hyperbolicité de f , ce qui démontre que ce sont des variétés stables et instables pour g , enfin elles sont transverses et donc

l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^{-n}[S(f^n(x))]$ est réduite à un point y qui est le seul point vérifiant pour tout n appartenant à \mathbb{Z} : $d(g^n(y), f^n(x)) < \epsilon$. La conjugaison cherchée h est donc : $h(x) = y$. C'est ainsi qu'Anosov construit son application de conjugaison.

On peut trouver directement les variétés $\bigcap_{n \geq 0} g^{-n}[S(f^n(x))]$ et $\bigcap_{n \geq 0} g^n[S(f^{-n}(x))]$ à l'aide d'une transformation de graphe dans la réunion disjointe des boîtes $S(x)$.

En général, on peut raisonner dans l'espace fonctionnel ou directement dans la variété M ; la seconde voie a l'avantage d'une saveur plus géométrique, mais les énoncés précis sont difficiles à établir. J'ai, en général, choisi l'approche fonctionnelle car elle semblait plus rapide.

Le lecteur pourra retrouver ces différents points de vue dans Anosov [4.1], Palis et Smale [6.3], Melo [6.1], Robinson [6.5] ; chez Conley [1.5], il trouvera le côté géométrique et chez Moser [6.2] et Robbin [6.4] une approche plus fonctionnelle.

Cette discussion se poursuivra à travers les chapitres qui vont suivre.

BIBLIOGRAPHIE 6

- [6.1] MELO W., Structural stability of diffeomorphisms on two manifolds, *Inventiones Math.*, vol. 21 (1973), p. 233.
- [6.2] MOSER J., On a theorem of Anosov, *J. Diff. Equat.* 5 (1969), p. 411.
- [6.3] PALIS J. and SMALE S., Structural stability theorems in "Global Analysis", *op. cit.*, p. 223.
- [6.4] ROBBIN J., A structural stability theorem, *Annals of Math.*, 94 (1971), p. 447.
- [6.5] ROBINSON C., Structural stability of C^1 diffeomorphisms, *J. Diff. Equat.* 22 (1976), p. 28.

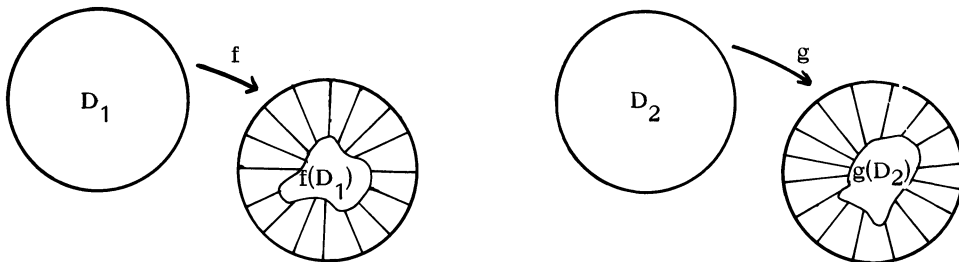
COMMENTAIRES DU CHAPITRE 7

L'expansivité a joué un rôle dans la démonstration que donne Smale du théorème d' Ω -stabilité. Il m'a demandé si je pouvais la démontrer et j'ai fait le calcul pour lui (voir [1.16]). La théorie de la variété stable n'était pas bien comprise à l'époque. La démonstration que je donne est celle de Bowen ([1.2]).

La définition 7.3 vient de [4.2]. Le théorème 7.8 vient d'Anosov. Ralph Abraham a montré à Anosov la démonstration de Mather du théorème de stabilité d'Anosov pendant l'été 1967 et Anosov a donné une nouvelle démonstration proche de celle de Mather. Abraham en envoya une copie à Smale, qui me l'a montrée. Nous en tirerons les fruits dans les chapitres suivants. La proposition 7.7 est un cas particulier du théorème des fonctions implicites. La démonstration donnée fournit les majorations que requiert le théorème 7.8.

La version que nous avons donnée du théorème de Grobman et Hartman ([7.1]) : le théorème 7.9 se trouve dans [7.3] et [7.4]. Je vais esquisser une démonstration géométrique du théorème de Grobman et Hartman en dimension finie inspirée par [2.3]. Nous étendrons les variétés stables et instables à un voisinage de l'ensemble hyperbolique (cf. commentaires du chapitre 5).

Supposons que l'on se donne deux disques D_1 et D_2 de dimension k et deux difféomorphismes $f : D_1 \rightarrow \text{int } D_1$ et $g : D_2 \rightarrow \text{int } D_2$ qui sont des contractions et ont mêmes orientations.

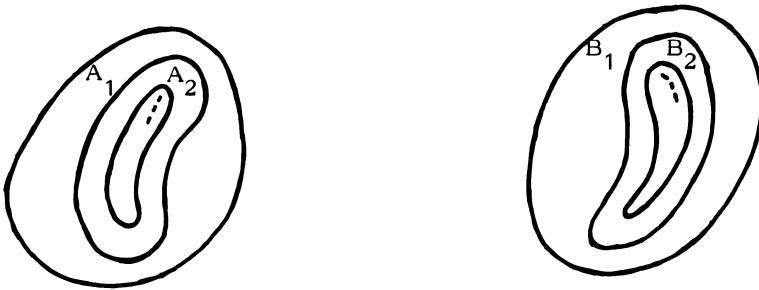


Les régions hachurées sont des anneaux, c'est-à-dire sont difféomorphes à $S^{k-1} \times I$ (c'est un résultat standard de géométrie différentielle [7.2]).

Si nous voulons construire un homéomorphisme $h : D_1 \rightarrow D_2$ vérifiant $hf = gh$, nous pouvons commencer comme suit : Supposons d'abord que la restriction de h : $\partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ soit un difféomorphisme qui préserve l'orientation. La restriction de h à $f(\partial D_1)$ est alors définie ; on doit avoir : $h(y) = ghf^{-1}(y)$, si l'on veut que h conjugue f et g .

Il n'y a pas d'obstruction maintenant à étendre h en un difféomorphisme qui envoie la couronne A_1 de bord $\partial D_1 \cup f(\partial D_1)$ sur la couronne B_2 de bord $\partial D_2 \cup g(\partial D_2)$. En effet, la seule obstruction pourrait venir des orientations des restrictions de f et g à ∂D_1 et ∂D_2 .

Posons $f^{i-1}(A_1) = A_i$ et $g^{i-1}(B_1) = B_i$.



Comme le difféomorphisme $h : A_1 \rightarrow B_1$ a été défini sur la première couronne A_1 , il l'est aussi sur les couronnes suivantes par $h(y) = g^i h f^{-i}(y)$ puisque h doit conjuguer f et g . Enfin, si p est l'unique point fixe de f et q l'unique point fixe de g , posons $h(p) = q$. Il n'est pas très difficile maintenant de vérifier que h est un homéomorphisme.

Supposons maintenant que l'on se donne deux points fixes hyperboliques p_1 pour f_1 et p_2 pour f_2 vérifiant $\dim W^S(p_1) = \dim W^S(p_2)$ et $\dim W^U(p_1) = \dim W^U(p_2)$. Supposons de plus que les orientations des restrictions de f_1 à $W^S(p_1)$ et $W^U(p_1)$,

et de f_2 à $W^S(p_2)$ et $W^U(p_2)$ coïncident. Il existe alors un homéomorphisme h défini sur un voisinage de p_1 vérifiant $hf_1 = f_2h$. La dimension des variétés stables et instables associées à f et l'orientation des restrictions à chacune de ces variétés forment donc un ensemble complet d'invariants attachés à un point fixe hyperbolique.

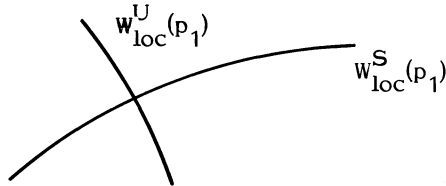
Voici l'idée de la démonstration que l'on trouvera dans [2.3]. Les figures représentent le cas où la variété M est de dimension 2. Nous allons essayer de représenter f_1 au voisinage de p_1 comme un "produit" : $f_1|_{W_{loc}^S(p_1)} \times f_1|_{W_{loc}^U(p_1)}$

et f_2 au voisinage de p_2 par $f_2|_{W_{loc}^S(p_2)} \times f_2|_{W_{loc}^U(p_2)}$.

Le raisonnement que nous venons de faire montre que les restrictions $f_1|_{W_{loc}^S(p_1)}$ et $f_2|_{W_{loc}^S(p_2)}$ sont conjuguées, de même que les restrictions $f_1|_{W_{loc}^U(p_1)}$ et $f_2|_{W_{loc}^U(p_2)}$ puisque c'est le cas de leurs inverses.

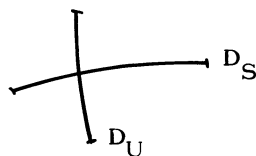
Le "produit" de ces conjugaisons sera la conjugaison cherchée entre f_1 et f_2 .

$W_{loc}^U(p_1)$ et $W_{loc}^S(p_1)$ se coupent transversalement en p_1 . La figure locale est :

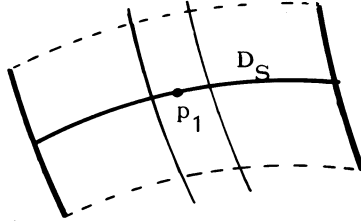


La situation est la même au voisinage de p_2 .

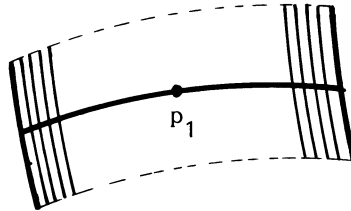
Choisissons un disque D_S , avec $p_1 \in D_S \subset W_{loc}^S(p_1)$ et un disque D_U , avec $p_1 \in D_U \subset W_{loc}^U(p_1)$, tels que : $f(D_S) \subset \text{int} D_S$, $f^{-1}(D_U) \subset \text{int} D_U$.



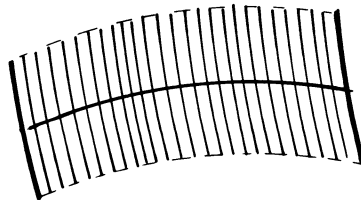
Le long de ∂D_S , érigons une barrière (famille de disques verticaux parallèles à D_U). Prenons leurs images et retailons-les à la dimension de la première barrière,



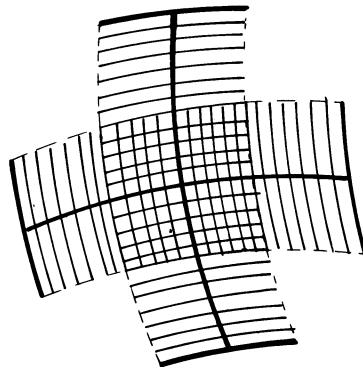
puis remplissons la couronne (réunion de deux intervalles en dimension 2) à l'aide de "verticales".



Prenons maintenant les images successives de ces verticales et retailons-les. En ajoutant le disque D^U , lui aussi convenablement recoupé, nous avons achevé une plantation bien calibrée sur le disque D_S . Ceci définit la "coordonnée x".



On définira la "coordonnée y" à l'aide de f_1^{-1} .



Ce procédé est le contenu géométrique de nombreux arguments de linéarisation et de stabilité.

La méthode qui permet de trouver le point fixe de la proposition 7.7 vient de [4.2].

BIBLIOGRAPHIE 7

- [7.1] HARTMAN P., Ordinary differential equations, John Wiley, 1984, p. 250.
- [7.2] PALAIS R., Extending diffeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), p. 274.
- [7.3] PALIS J., On the local structure of hyperbolic points in Banach spaces, Ann. Acad. Brasil Cien. 40 (1968), p. 263.
- [7.4] PUGH C., On a theorem of P. Hartman, Amr. J. Math. 91 (1969), p. 363.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE 8

C'est le chapitre des moissons. Une fois encore, je tire de [1.16] la discussion que je vais faire de la stabilité. Le théorème 8.3 se retrouve presque exactement dans [1.16] et est énoncé dans [4.2]. Un historique de cette question se trouve dans les commentaires portant sur le chapitre 6. Le corollaire 8.4 est le théorème d'Anosov [5.1]. La proposition 8.6 est énoncée dans [8.2]. La proposition 8.7 est démontrée dans [2.1]. Allan Dankner annonce la construction d'un difféomorphisme hyperbolique f pour lequel $\text{Per } f \neq \Omega(f)$ [8.5].

La proposition 8.8 est connue sous le nom de lemme de fermeture d'Anosov, en particulier dans le cas où $\Lambda = M$ et où f est un difféomorphisme d'Anosov. La définition 8.9 vient de [1.16]. Le crochet $[,]$ est défini dans [1.16] ainsi que la structure de produit local.

La notion de décomposition spectrale vient aussi de [1.16]. Le théorème 8.13 y est énoncé pour Ω et des difféomorphismes vérifiant l'axiome A ; [2.1] généralise ce résultat à $\overline{\text{Per } f}$ si cet ensemble est hyperbolique, et donc à $\overline{L(f)}$; le cas de $R(f)$ est traité dans [8.1].

La partie qui concerne les applications topologiquement mélangeantes a été traitée par Bowen. Les énoncés et les démonstrations se trouvent dans [1.2]. Le β -pistage vient de [1.2], et de là vient aussi la proposition 8.17. La proposition 8.19 est énoncée dans [8.2], mais on en trouvera une démonstration très améliorée dans [1.2]. On trouve dans la proposition 8.20, l'idée fondamentale de Ω -stabilité, qui vient de [1.16]. La structure hyperbolique impliquera la stabilité locale tandis que la filtration contrôlera le comportement global du difféomorphisme.

Le théorème de stabilité vient de [1.16]. La généralisation à $\overline{L(f)}$ se trouve dans [2.1], un énoncé utilisant $R(f)$ se trouve aussi dans [8.1].

Le problème central est bien sûr central. Dans le cas de Ω , c'est une conjecture de Smale (voir [8.3]). Une référence sur ce qui est connu dans cette voie est [8.4].

Si f est difféomorphisme de classe C^r de M qui satisfait l'axiome A et n'a pas de cycle, lorsque g est assez proche de f , les restrictions $f|_{\Omega(f)}$ et $f|_{\Omega(g)}$ sont topologiquement conjuguées par $\Phi(g)$. Le théorème 8.23 montre que $\Phi(g)$ vérifie :

$$d_{c_0}(\text{inc}(\Omega(f)), \Phi(g)) \leq K d_{c_0}(f, g),$$

où K est une constante positive.

Réciproquement, si, pour tout g assez proche de f , il existe une conjugaison $\Phi(g)$ qui vérifie cette condition, Mañé [8.4] a montré qu'alors f vérifie l'axiome A.

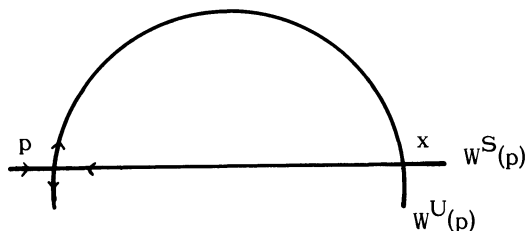
Nous avons donc une excellente condition nécessaire et suffisante pour cette sorte d' Ω -stabilité. D'aucuns peuvent se contenter de ce résultat.

Une analyse plus détaillée des points homocliniques montre aussi que, quand $\overline{\text{Per } f}$ est hyperbolique, cet ensemble a une structure de produit local.

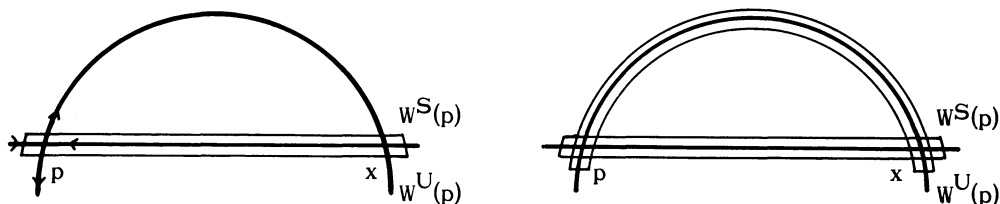
Rappelons qu'un point x est homoclinique si c'est un point d'intersection transverse des variétés stables et instables $W^U(p)$ associées à un point hyperbolique $p \neq x$. Le point x appartient alors à $\overline{\text{Per } f}$ [4.6]. Mais, comme x n'est pas périodique, $\text{Per } f$ doit être infini.

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Birkhoff-Smale bien que l'analyse de la démonstration de ce dernier théorème montre qu'il s'agit d'un résultat plus profond.

Supposons que p soit un point fixe. La situation peut se schématiser comme suit :



Choisissons un rectangle très étroit "parallèle" à $W^S(p)$ contenant x et p .
 Quitte à remplacer f par une puissance f^n assez grande, et si le rectangle est assez étroit, l'image du rectangle aura l'allure suivante :



Nous retrouvons la figure du fer à cheval. L'ensemble $\{f^n(x), n \in \mathbb{Z}\} \cup p$ est hyperbolique pour f .

On peut voir que tout point homoclinique x appartient à $\overline{\text{Per } f}$ en prenant :

$$E_x^S = T_x W^S(p) \quad ; \quad E_x^U = T_x W^U(p)$$

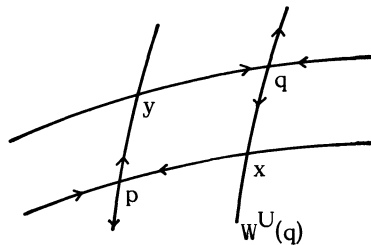
$$E_{f^n(x)}^S = Df^n T_x W^S(p) \quad ; \quad E_{f^n(x)}^U = Df^n T_x W^U(p)$$

en scindant $T_p M$ en $T_p M = E_p^S \oplus E_p^U$, puis en évaluant les constantes d'hyperbolicité.

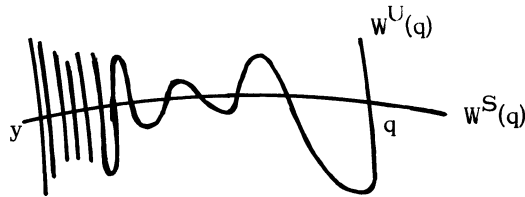
Un pistage permet maintenant de montrer directement que le point x appartient à $\overline{\text{Per } f}$.

En fait, il est toujours possible de montrer qu'une puissance assez grande de f contient un 2-shift [4.6].

Supposons maintenant que p et q soient deux points périodiques et que les variétés $W^S(p)$ et $W^U(q)$ se coupent transversalement en un point x , tandis que $W^U(p)$ et $W^S(q)$ se coupent transversalement en y .



Restreignons f à $W^U(q)$.



Le point y est limite d'une suite y_n de points où $W^U(q)$ coupe transversalement $W^S(q)$. Le théorème de Birkhoff-Smale implique alors que les points y_n appartiennent à $\overline{\text{Per } f}$ pour tout n , le point y appartient donc lui aussi à $\overline{\text{Per } f}$. Ce résultat implique que $\overline{\text{Per } f}$ a une structure de produit local s'il est hyperbolique ; il est cependant plus fort car les points p et q ne sont plus supposés proches.

BIBLIOGRAPHIE 8

- [8.1] FRANKE J. and SELGRADE J., Hyperbolicity and chain recurrence, Trans. Amer. Math. Soc. 245 (1978), p. 251.
- [8.2] HIRSCH M.W., PALIS J., PUGH C.C. and SHUB M., Neighborhoods of hyperbolic sets, Inventiones Math. 9 (1969-1970), p. 121.
- [8.3] SMALE S., Notes on differentiable dynamical systems, in "Global Analysis", op. cit., p. 277.
- [8.4] MAÑÉ R., On infinitesimal and absolute stability of diffeomorphisms, in Dynamical Systems - Warwick 1974 (Ed. Manning), Lecture notes in Math. 468, Springer-Verlag, 1975, p. 151.
- [8.5] DANKNER A., On Smale's Axiom A dynamical systems, Ann. of Math. 107 (1978), p. 517.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE 9

C'est le chapitre le plus faible du cours puisque le but que je m'étais fixé au début a été quasiment atteint avec le chapitre 8.

Ce qui restait était cependant trop important pour être relegué dans les commentaires.

La proposition 9.1 a été démontrée pour la première fois dans [8.2] en réponse à une question de Smale ; la démonstration que j'en donne vient de [1.2] et est bien plus simple que la première. La condition de transversalité forte a été énoncée, pour la première fois, dans [1.16] et, sous la forme que je donne, elle se trouve dans [9.3].

Le théorème 9.4 a été démontré par Peixoto dans le cas de S^1 comme cas particulier de son théorème sur les champs de vecteurs sur les variétés de dimension deux [1.10], par Anosov pour les difféomorphismes d'Anosov [4.1], par Palis pour les difféomorphismes de Morse-Smale en dimension 2 et 3 [2.3], par Palis et Smale pour les difféomorphismes de Morse-Smale en dimension quelconque [6.3], par Robbin, qui utilise une approche fonctionnelle si f est de classe C^2 [6.4] et par Robinson, si f est de classe C^1 . Depuis lors, de nombreuses autres versions de ce théorème, fonctionnelles ou géométriques, ont été données.

Le problème essentiel de ce chapitre est la conjecture de Palis-Smale [6.3].

On sait qu'un difféomorphisme qui est structurellement stable et qui satisfait l'axiome A, satisfait la condition de transversalité forte [9.2]. Le problème essentiel est de savoir si une application f structurellement stable vérifie l'axiome A. Nous avons déjà rencontré un autre problème -l' Ω -stabilité implique-t-elle l'axiome A ?- dans le chapitre précédent. Je ne peux pas imaginer que la réponse aux deux questions ne soit pas la même.

En ce qui concerne l' Ω -stabilité, on sait que l' Ω -stabilité et l'axiome A impliquent qu'il n'existe pas de cycle. C'est ce résultat qui a fait énoncer la propriété "pas de cycle" dans le cadre de l' Ω -stabilité pour se substituer à l'axiome B de Smale [1.16] (voir exercice 9.3).

Abréviations : AS signifie : axiome A + Stabilité forte (strong stability), dans la liste AS, KS, MS, mais ce peut être lu aussi comme l'abréviation de Anosov-Smale, ce qui me semble une bonne idée.

La convergence vers $W^U(p)$ a été démontrée dans [4.2]. Il faudrait rendre plus précis notre discours. Le lemme A que l'on trouve dans [2.3] rend cette discussion rigoureuse.

La proposition 9.8 est là pour montrer que les définitions de Smale de l'axiome A et de "pas de cycle" coïncident avec les miennes. En effet, il suppose seulement qu'il n'existe pas de m -cycle pour $m \geq 2$.

Les exercices 2a et 2b viennent de [1.16].

Vérifier la transversalité en quelques points est parfois plus facile que de démontrer qu'il n'existe pas de cycle.

BIBLIOGRAPHIE 9

- [9.1] PALIS J., A note on Ω -stability, in "Global Analysis", op. cit., p. 221.
- [9.2] ROBINSON C., C^r structural stability implies Kupka-Smale, in Dynamical Systems (Peixoto, Ed.), op. cit., p. 443.
- [9.3] SMALE S., Stability and genericity in dynamical systems, Séminaire Bourbaki, vol. 1969-1970, Lecture notes in Math. n° 180, Springer-Verlag, 1971.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE 10

La dynamique symbolique a une longue histoire, que nous n'essayerons pas d'exposer ici. Les propositions 10.5, 10.6, 10.8, et 10.13 viennent de [10.5]. Artin et Mazur [10.2] ont défini la fonction ζ d'un difféomorphisme, et étudié quelques unes de ses propriétés. Smale [1.16] a donné la première démonstration de la rationalité de la fonction ζ pour les difféomorphismes vérifiant l'axiome A et n'ayant pas de cycle. Williams [10.15] et Guckenheimer [10.6] ont fini le travail. Leur méthode était basée sur la formule de Lefschetz. Manning [10.9] a démontré, en utilisant les partitions markoviennes, la rationalité de la fonction ζ pour les difféomorphismes vérifiant l'axiome A, mais ayant éventuellement des cycles.

Notre traitement des partitions markoviennes est une réécriture des sections du livre de Bowen [1.2] qui s'y rapportent. Nous avons ajouté quelques détails, et nous avons énoncé les théorèmes pour les ensembles hyperboliques ayant une structure en produit local, plutôt que pour les (seuls) ensembles basiques. Les démonstrations sont les mêmes et nous gagnons un peu en généralité, ce qui peut être utile. Par exemple, si $f : M \rightarrow M$ est un difféomorphisme d'Anosov, il existe une partition markovienne de M bien que nous ne sachions pas que $M = \overline{\text{Per}f}$. L'introduction systématique des partitions markoviennes est due à Sinai [10.12, 10.13, 10.14] pour les difféomorphismes d'Anosov, et a été généralisée par Bowen pour le cas des difféomorphismes vérifiant l'axiome A. Ces partitions markoviennes sont l'instrument principal pour l'analyse du comportement qualitatif des systèmes vérifiant l'axiome A. Il y a une collection remarquable de théorèmes dus essentiellement à Sinai, Bowen et Ruelle. Voir [1.2] pour une partie de ces résultats. Adler et Weiss [10.1] ont construit les partitions markoviennes pour les automorphismes (linéaires) hyperboliques du tore T^2 . Notre exemple sur T^2 se trouve aussi dans Sinai [10.12].

Notre démonstration de 10.38 et 10.39 est faite pour être mise en parallèle avec l'analyse du "fer à cheval" (chapitre 4). Cette analyse devrait servir de modèle pour ce chapitre. Le théorème 10.40 a été démontré pour la première fois par Bowen [10.3]. Le lemme 10.41 représente une grande amélioration dans la démonstration ; il a été communiqué à Bowen par Brian Markus. Nous l'avons pris de Bowen [10.4]. Ce dernier article est un excellent "survey".

L'idée de la démonstration de la rationalité de la fonction ζ , en utilisant les matrices $B^{(r-1)}$ m'a été communiquée en esquisse par Bowen en 1975 ; elle est très proche de la démonstration de Manning. Lebasque et Yoccoz l'ont décortiquée et l'ont rendue cohérente dans la section III.B. Ils ont concocté la démonstration la plus claire que je connaisse pour la rationalité des fonctions ζ .

La rationalité de la fonction ζ a été utilisée par plusieurs auteurs pour obtenir des propriétés qualitatives et topologiques des systèmes vérifiant l'axiome A, voir par exemple [10.7], [10.8], [10.10] et [10.11].

BIBLIOGRAPHIE 10

- [10.1] R. ADLER and B. WEISS, Similarity of automorphisms of the torus, *Memoirs AMS* 98 (1970).
- [10.2] M. ARTIN and B. MAZUR, On periodic points, *Annals of Math.* (2) 81, (1965), p. 82.
- [10.3] R. BOWEN, Markov partitions and minimal sets for Axiom A diffeomorphisms, *Amer. J. Math.* 92 (1970), p. 907.
- [10.4] R. BOWEN, On axiom A diffeomorphisms, *CBMS Regional conference series in Math.*, vol. 35, Amer. Math. Soc. (1978).
- [10.5] R. BOWEN, and O. LANDFORD III, Zeta functions of restrictions of the shift map, *Proceedings Symposia in Pure Math.* "Global Analysis", vol. 14 (1970), p. 43.
- [10.6] J. GUCKENHEIMER, Axiom A + no cycles = $\zeta_f(t)$ rational, *Bull. Amer. Math. Soc.* 76 (1970), p. 592.
- [10.7] J. FRANKS, Morse inequalities for zeta functions, *Annals of Math.* 102 (1975), p. 143-158.
- [10.8] J. FRANKS, A reduced zeta function for diffeomorphisms (à paraître).

- [10.9] A. MANNING, Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions, Bull. London Math. Soc. 3 (1971), p. 215.
- [10.10] A. MANNING, There are no new Anosov diffeomorphisms on tori, Amer. J. Math. 96 (1974), p. 422.
- [10.11] M. SHUB and R. WILLIAMS, Entropy and stability, Topology, vol. 14 (1975), p. 329.
- [10.12] J. SINAI, Markov partitions and C diffeomorphisms, Func. Anal. and its applications 2 (1968), n° 1, p. 64.
- [10.13] J. SINAI, Construction of Markov partitions, Func. Anal. and its Applic. 2 (1968), n° 2, p. 70.
- [10.14] J. SINAI, Gibbs measures in ergodic theory, Russ. Math. Surveys 166 (1972), p. 21.
- [10.15] R. WILLIAMS, The zeta function of an attractor, Conference on the Topology of Manifolds (Michigan State University, East Lansing, Michigan), Prindle-Weber & Schmidt, Boston, Mass., 1968, p. 155.

INDEX DES NOTATIONS

	Pages		Pages
$\alpha_f(x)$	2	$N_n(f)$	146
$AS^\Gamma(M)$	140		
		$\omega_f(x)$	2
$\mathfrak{B}(\mathbb{N}, E)$	71	$\Omega(f)$	2
$B(\Lambda, M)$	87		
		$Per(f)$	2
$\Gamma_f(\sigma)$	43		
$\Gamma^o(\Lambda, E)$	85	$R(f)$	3
$\Gamma^b(\Lambda, E)$	85		
$[,]$	121	$\Sigma(\ell), \sigma$	32, 144
		Σ_A, σ_A	145
$\partial^S R, \partial^U R$	152	s^r	174
\exp_x	87	$W^S(B), W^U(B)$	8
		$W^U_{loc}(p), W^S_{loc}(p)$	42
$f_\#$	86	$W^S_{r'}(f)$	69
$K^f(m)$	8	$W^S_\epsilon(x, f), W^U_\epsilon(x, f)$	84
		$W^S(x, f), W^U(x, f)$	84
$L(f)$	3	$W^S(x, A), W^U(x, A)$	150
$Lip(g)$	41		
		$\zeta_A(t), \zeta_f(t)$	148
$MS^\Gamma(M)$	141		
$M_{\ell \times \ell}(\{0, 1\})$	144		

I N D E X

	Pages		Pages
Application lipschitzienne	41	Expansif	97
Application exponentielle	87		
Anosov (difféomorphisme d'Anosov)	29	Fer à cheval de Smale	29
Automorphisme hyperbolique	41	Filtration	8
Axiome A	121	Filtration fine	14
Axiome B	142	Filtration (ordre de)	9
α -limite (ensemble)	2	Filtrations (suite de)	14
α -pseudo orbite	3	Filtrations (suite fine de)	14
α -pseudo périodique (point)	3	Fonction ζ	148
		Fonction de Lyapounov	21
Bande (in)stable	168		
Birkhoff-Smale (Théorème de)	137	Grobman-Hartman (théorème de)	111
β -piste, β -pistage	128		
		Hyperbolique (automorphisme)	41
Codage associé à une partition markovienne	168	" (ensemble)	25
Condition de Hölder	58	" (point fixe)	27
Condition de transversalité forte	139		
C^0 - Ω -explosion	20	Lemme du nuage	142
Conjugaison	115	Lipschitzienne (application)	41
C^r -topologie	5		
Cycle	9	Métrique adaptée	26
		Morse-Smale (difféomorphisme de)	140
Décomposition spectrale	126		
Difféomorphisme d'Anosov	29	Ω -stabilité (théorème d')	133
Difféomorphisme de Morse-Smale	140	ω -limite (ensemble)	2
Disque (in)stable	84		
		Partition markovienne	154
Ensemble hyperbolique	25	Pas de cycle	9, 127
Ensemble ω -limite	2	Piste, pistage	128
Ensemble α -limite	2	Point errant	1
Errant (point)	1	Point non-errant	1
		Point fixe hyperbolique	27

	Pages		Pages
Point périodique par chaîne	3	Théorème de Birkhoff-Smale	137
" α -pseudo périodique	3	" de Grobman-Hartman	111
" puits	28	" d'inversion locale	Appendice 41
" selle	28	" de la variété (in)stable	41, 42
" source	28	" d' Ω -stabilité	133
Problème central	134	Topologie C^r	5
Produit local (structure de)	121	Transformation de graphe	43
		Transversalité	96
Rectangle	151	" forte (condition de)	139
Rectangle propre	151		
		Variété (in)stable locale	64, 95
Shift	32, 144	" globale	64, 95
Solénoïde	35	" (théorème de la)	41, 42
Sous-shift de type fini	145		
Stabilité	115		
" structurelle	115		
Structure de produit local	121		

A B S T R A C T

We present, in these lectures, the basic theorems of the theory of global stability of dynamical systems, among them Smale's Ω -stability theorem, and the rationality of the ζ function of an Axiom A diffeomorphism. The reader will find here, among other things, the basic tools for the study of hyperbolic invariant sets : filtration theory, the stable manifold theorem, stability of hyperbolic sets, local product structure and existence of Markov partitions.