Astérisque

NICOLE EL KAROUI

Sur les montées des semi-martingales

Astérisque, tome 52-53 (1978), p. 63-72
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__52-53__63_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 52-53 (1978) p.63-72

SUR LES MONTÉES DES SEMI-MARTINGALES

par Nicole El Karoui .

Parmi les nombreuses caractérisations ou approximations du temps local en zéro du mouvement brownien décrites dans [1], nous nous intéressons à la suivante :

Désignant par U_t^ε le nombre des montées du mouvement brownien au-dessus de l'intervalle $]o,\varepsilon[$, il est établi, à partir de la loi de ce processus, que $2\varepsilon U_t^\varepsilon$ converge p.s uniformément en t sur tout intervalle borné, vers le temps local en zéro.

Nous nous proposons d'étendre ce résultat aux semi--martingales continues, mais par une méthode complètement différente.

Plus précisément, nous montrons d'abord que si la martingale X appartient à $H^p(p\geq 1)$, $\varepsilon U_t^\varepsilon$ converge uniformément en t dans L^p vers le temps local en zéro $L^o(X)_t$.

Nous en déduisons que $\varepsilon U_t^\varepsilon$ converge en probabilité vers $L^o(X)_t$, uniformément en t sur tout compact de $\mathbb{R}_+$.

Nous prouvons ensuite, en particulier, que $\frac{1}{n}U^{1/n}_t$ converge p.s , uniformément en t sur tout compact, vers la même limite.

M. Yor a relu avec un soin exceptionnel les différentes versions de ce travail, et a contribué grandement aux résultats de la deuxième partie de cette étude. Qu'il en soit ici remercié.

1 Etude de la convergence dans L^p

Nous utilisons systématiquement les notations de l'introduction de ce volume (RPG) .

En particulier, X désigne une semi-martingale continue de décomposition canonique $X = X_o + M + V$, où M est une martingale locale continue et V un processus à variation finie continu. Le temps local de X au point a est désigné par $L^a(X)_t$.

Décrivons les montées de X au dessus de l'intervalle $I =]a,b[$ de la manière habituelle, à l'aide de la suite double de temps d'arrêt définis par la récurrence suivante :

$$S^a = \inf\{t>o \ , \ X_t \leqq a\} \qquad T_1^b = \inf\{t>S^a \ , \ X_t \geqq b\}$$

$$S_n^a = \inf\{t>T_{n-1}^b, \ X_t \leqq a\} \qquad T_n^b = \inf\{t>S_n^a \ , \ X_t \geqq b\}$$

en faisant la convention usuelle : $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

Une montée est alors un des intervalles stochastiques

$]\!]S_n^a, T_n^b]\!] = \{(\omega,t) \ ; \ t \in \mathbb{R}^+, \ S_n^a(\omega) < t \leqq T_n^b(\omega)\}$, pour lequel T_n^b est fini ; le nombre de montées de X au-dessus de l'intervalle I , pendant le temps t , que nous désignons U_t^I , est égal à :

$$U_t^I = \sum_{n \geqq 1} 1_{\{T_n^b \leqq t\}}$$

Nous introduisons encore quelques notations importantes pour la démonstration . L^I est le sous-ensemble prévisible de $\Omega \times \mathbb{R}^+$, défini par :

$$L^I = \bigcup_{n \geqq 1}]\!] S_n^a \ , \ T_n^b]\!] = \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \ , \ \exists n \text{ t.q } S_n^a(\omega) < t \leqq T_n^b(\omega)\}$$

C'est l'ensemble des couples (ω,t) qui appartiennent soit à une montée $(T_n^b < +\infty)$, soit au "dernier passage" dans l'intervalle I . Les inclusions suivantes résultent directement de la définition des temps d'arrêt S_n^a , T_n^b .

(1) $\{(\omega,t)\ ;\ t>S^a \text{ et } X_t<a\} \subseteq L^I \subsetneq \{(\omega,t)\ ;\ t>S^a\ ,\ \text{et } X_t \leqq b\}$

Nous désignons par K^I l'ensemble optionnel $\bigcup\limits_{n\geqq 1} [\![S_n^a\ ,\ T_n^b [\![$ qui est encadré de la même façon par :

(2) $\{(\omega,t)\ ;\ t\geqq S^a \text{ et } X_t\leqq a\} \subsetneq K^I \subsetneq \{(\omega,t)\ ;\ t\geqq S^a \text{ et } X_t<b\}$

Enfin, nous notons $|I|$ la longueur de l'intervalle I .

Remarque : Pour simplifier l'écriture, il nous arrivera par la suite, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, de ne pas distinguer les ensembles et leurs indicatrices.

La proposition suivante est à la base de cette étude .

Proposition 1

Soit X une semi-martingale continue de H^p $(p\geqq 1)$. Lorsque a croit vers b , le processus croissant $|I|\ U_t^I$ converge uniformément en t dans L^p vers $\frac{1}{2}\ L^{-b}(-X)_t$.

Remarque : Dans [3] , Yor montre que $L^{-b}(-X)_t$ est aussi égal à la limite à gauche de $L^a(X)_t$ lorsque a tend vers b .

Démonstration

(a) L'idée de la démonstration est d'exprimer $|I|\ U_t^I$ à l'aide des processus $X_{t\wedge T_n^b} - X_{t\wedge S_n^a}$. L'égalité suivante en est alors le fondement :

(3) $(b-a)1_{\{T_n^b\leqq t\}} = X_{t\wedge T_n^b} - X_{t\wedge S_n^a} - 1_{\{S_n^a\leqq t<T_n^b\}}(X_t-a)$, si $n\geqq 2$

En effet, X étant continue, $X_{T_n^b} = b$ sur l'ensemble $\{T_n^b< +\infty\}$

(resp $X_{S_n^a} = a$ sur l'ensemble $\{S_n^a<+\infty\}$) si $n\geqq 2$.

Si $n=1$, l'écriture est un peu différente, car si $X_0<a$, S^a est nul mais X_{S^a} est différent de a . Toutefois, on a encore :

$$(4)\quad (b-a)1_{\{T_1^b\leq t\}} = (X_{T_1^b} - X_{S^a})1_{\{T_1^b\leq t\}} + (X_{S^a} - a)1_{\{T_1^b\leq t\}}$$

$$= X_{T_1^b\wedge t} - X_{S^a\wedge t} - 1_{\{S^a\leq t<T_1^b\}}(X_t - a) + (X_{S^a} - a)1_{\{S^a\leq t\}}$$

Or $\quad (X_{S^a} - a)1_{\{S^a\leq t\}} = (X_0 - a)1_{\{X_0<a\}} = -(X_0 - a)^-$.

Sommons sur n les identités (3) et (4) après avoir remarqué que

$X_{t\wedge T_n^b} - X_{t\wedge S_n^a} = \int_0^t 1_{]\!] S_n^a, T_n^b]\!]}(s)dX_s$. Il vient aisément que :

$$(5)\quad |I|U_t^I = - (X_0-a)^- + \int_0^t L^I(s)\, dX_s - K^I(t)(X_t-a)$$

Nous allons étudier la limite du membre de droite de (5) lorsque a croit vers b

b) Notons tout de suite que $(X_0 - a)^-$ tend vers $(X_0 - b)^-$, la différence étant bornée par $(b-a)$.

Plus généralement, d'après les inclusions précisées en (2) ,

$$(a- X_t)^+ \leq K^I(t)(a - X_t) \leq (b - X_t)^+ \quad \text{pour tout } t\geq 0 .$$

La différence $|K^I(t)(a - X_t) - (b - X_t)^+|$ est majorée par $(b-a)$ et converge uniformément en t p.s et dans L^P vers zéro .

c) Etudions la limite de l'intégrale stochastique.

Remarquons tout d'abord que les temps d'arrêt S^a décroissent vers un temps d'arrêt $\bar{S}^b = \inf\{t\ ;\ X_t<b\}$. Pour montrer cela, notons $\tilde{S}_b = \inf\{t | X_t<b\}$.

Alors, si $t<S^a$, pour tout $a<b$, $X_t\geq a$ et t est donc inférieur strictement à $\tilde{S}^b$, ce qui entraine que $\bar{S}^b\leq\tilde{S}^b$.

Or pour tout $a<b$, $S^a\geq\tilde{S}^b$, ce qui entraine l'égalité de $\bar{S}^b$ et de $\tilde{S}^b$.

D'autre part, l'ensemble $L^I \cap \{(\omega,s)\ ;\ X_s(\omega)= b\}$ est la réunion des graphes de T_n^b , par définition même de L^I . C'est donc un ensemble à coupes dénombrables, dont l'intégrale stochastique par rapport à la semi-martingale continue X est nulle.

L'ensemble $L^I \cap \{(\omega,s)\ ;\ X_s(\omega)<b\}$ converge, d'après les inégalités (1) , vers l'ensemble $\{(\omega,s)\ ;\ s>\bar{S}^b(\omega)\ ;\ X_s(\omega)<b\} = \{(\omega,s)\ ;\ s>o\ ,\ X_s(\omega)<b\}$, par définition de $\bar{S}^b$.

Comme X est un élément de H^p, l'intégrale stochastique $\int_o^t L^I(s)dX_s$ converge, uniformément en t , dans L^p vers $\int_o^t 1_{\{X_s<b\}}dX_s$.

En résumé, nous venons d'établir que $|I|\ U_t^I$ converge uniformément dans L^p vers un processus croissant égal à p.s à

$$(X_t - b)^- - (X_o - b)^- + \int_o^t 1_{\{X_s<b\}}dX_s \quad .$$

Cette dernière expression est égale, d'après la formule de Tanaka-Meyer (RPG) à $\frac{1}{2}\, L^{-b}(-X)_t$.

Remarque : En fait, l'étude précédente peut être considérée comme une autre démonstration de la formule de Tanaka-Meyer : en effet, si nous désignons par K_t la limite continue à droite de $|I|\ U_t^I$ (dans L^p) , K_t est indistingable de $(X_t - b)^- - (X_o - b)^- + \int_o^t 1_{\{X_s<b\}}dX_s$.

C'est donc un processus croissant continu, limite uniforme en t dans L^p de processus croissantsà support inclus dans l'ensemble $\{X_s = b\}$.
Son support est donc aussi inclus dans cet ensemble.

Corollaire 1.1

Soit X une semi-martingale continue de H^p $(p\geq 1)$. Lorsque b décroit vers a , le processus croissant $|I|\ U_t^I$ converge uniformément en t dans L^p vers $\frac{1}{2}\, L^a(X)_t$.

Démonstration

Le nombre de descentes de X au-dessus de l'intervalle $]a,b[$ diffère au plus de 2 du nombre de montées de X au-dessus du même intervalle.

Or ce nombre de descentes est égal au nombre de montées de $-X$ au-dessus de l'intervalle $]-b, -a[$. Nous sommes ainsi ramenés à l'étude précédente.

Remarque : Les montées de X au-dessus de l'intervalle $]a,b[$ sont aussi les montées de $(X-a)^+$ au-dessus de l'intervalle $]0, b-a[$. Les processus $|I|\, U_t^I$ sont donc adaptés à la filtration engendrée par $(X-a)^+$, complétée , et il en est de même de leur limite lorsque b décroit vers a .

On retrouve ainsi une partie d'un résultat de [2] :
Les filtrations engendrées par $(X-a)^+$, $\int_0^t 1_{\{X_s>a\}} dX_s$, $\int_0^t 1_{\{X_s\geq a\}} dX_s$ ont même P-complétées.

2 Etude de la convergence en probabilité et presque sûre.

Dans la première partie de ce travail, nous avons établi un résultat de convergence sous l'hypothèse : X est une semi-martingale de H^p .
Cette hypothèse est inutile si nous étudions la convergence en probabilité.

Proposition 2

Soit X une semi-martingale continue. $|I|\, U_t^I$ converge en probabilité, uniformément en t sur tout compact, vers $\frac{1}{2} L^{-b}(-X)_t$ (resp $\frac{1}{2} L^a(X)_t$) lorsque a croit vers b (resp b décroit vers a) .

Démonstration

X étant une semi-martingale continue, il existe une suite de temps d'arrêt T_k, qui tend vers $+\infty$, tels que pour tout k, la semi-martingale arrêtée à T_k, X^{T_k}, appartienne à H_1.

Pour tout $\alpha>0$, $P(\sup\limits_{t\leq n} |\,|I|\,U_t^I - \frac{1}{2}L^{-b}(-X)_t|>\alpha))$

$$\leq P(T_k\leq n) + P(\sup_t |\,|I|\,U^I_{t\wedge T_k} - \frac{1}{2}L^{-b}(-X)_{t\wedge T_k}|>\alpha)) \quad .$$

Le processus de $U^I_{t\wedge T_k}$ représente le nombre de montées de X^{T_k} au-dessus de l'intervalle $]a,b[$, et $L^{-b}(-X)_{t\wedge T_k}$ est égal à $L^{-b}(-X^{T_k})_t$.

Pour tout $\varepsilon>0$, il existe k_0 tel que $P(T_{k_0}\leq n)<\varepsilon$.

D'autre part, d'après la proposition 1, $P(\sup\limits_t |\,|I|\,U^I_{t\wedge T_{k_0}} - \frac{1}{2}L^{-b}(-X)_{t\wedge T_{k_0}}|>\alpha))$ tend vers zéro lorsque a croit vers b.

Par suite, $P(\sup\limits_{t\leq n}|\,|I|\,U_t^I - \frac{1}{2}L^{-b}(-X)_t|>\alpha))$ a une limite, lorsque a croit vers b, qui est inférieure ou égale à ε, pour tout $\varepsilon>0$.

La proposition est donc démontrée.

En fait, lorque X est un mouvement brownien, il est établi dans [1], à l'aide d'un argument de surmartingale, très lié à la loi du mouvement brownien, que $|I|\,U_t^I$ converge p.s vers $\frac{1}{2}L^a(X)_t$, uniformément sur tout compact, lorsque b décroit vers a.

Nous allons établir ici un résultat moins précis.

Théorème 3

Soit X une semi-martingale continue.

Nous désignons par $U_t^{\alpha,b}$ (resp $U_t^{a,\alpha}$) le nombre des montées de X au-dessus de l'intervalle $]b-\alpha, b[$ (resp $]a, a+\alpha[$).

Pour toute suite α_n de réels strictement positifs tels qu'il existe $p\geq 1$ pour lequel $\sum_n \alpha_n^p < +\infty$, les processus croissants $\alpha_n U_t^{\alpha_n,b}$ (resp. $\alpha_n U_t^{a,\alpha_n}$) convergent p.s uniformément en t sur tout compact vers $\frac{1}{2} L^{-b}(-X)_t$ (resp. $\frac{1}{2} L^a(X)_t$) lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration

Remarquons tout d'abord que l'on peut procéder par localisation, c.à.d que si T_k est une suite de t.a qui tend p.s vers $+\infty$, il suffit d'établir, que pour tout N et tout k,

$$\sup_{t \leqq N} \left| \alpha_n U_{t \wedge T_k}^{\alpha_n,b} - \frac{1}{2} L^{-b}(-X)_{t \wedge T_k} \right| \text{ converge p.s vers o si } n \to +\infty .$$

Or X étant continu, il existe une suite T_k de temps d'arrêt tendant vers $+\infty$, telle que X^{T_k} appartienne à H^p ($p \geqq 1$) , pour tout k .
Il suffit donc d'établir le théorème pour X^{T_k} si la serie $\sum_n \alpha_n^p$ converge.
Pour simplifier la suite de la démonstration, nous ne considérons que des semi-martingales continues X appartenant à $H^p(p \geqq 1)$.

Or, nous avons vu au cours de la démonstration de la proposition 1 que les processus croissants $|I|\, U_t^I$ peuvent se décomposer en la somme de deux termes dont l'un converge p.s uniformément en t et dont l'autre, égal à $\int_0^t L^I(s) 1_{\{X_s<b\}} \, dX_s$, converge dans L^p vers $\int_0^t 1_{\{X_s<b\}} dX_s$.

Toutefois, si nous considérons la décomposition canonique de X en X_0+M+V où M est une martingale locale et V un processus à variation finie, continu, l'intégrale de Stieltjes converge p.s uniformément en t sur tout compact vers $\int_0^t 1_{\{X_s<b\}} dV_s^M$. Il reste à établir que $Y_t^n = \int_0^t (1-L^{\alpha_n,b}(s)) 1_{\{X_s<b\}} dM_s$ converge p.s vers zéro où $L^{\alpha_n,b}$ désigne l'ensemble L^I associé à $I =]b-\alpha_n, b[$.

Or, $\quad (1-L^{\alpha_n,b}(s)) 1_{\{X_s<b\}} \leqq 1_{\{0<b-X_s \leqq \alpha_n\}}$,

et donc $\quad E(\sup_t |Y_t^n|^{2p}) \leq C\ E\left[\left(\int_0^\infty 1_{\{0<b-X_s\leq\alpha_n\}} d\langle M,M\rangle\right)^p\right]$

d'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy.

Admettons pour le moment que cette dernière expression soit majorée par

$$K\alpha_n^p\ \|X\|_{H^p}^p\ .$$

La série $E(\sup_t |Y_t^n|^{2p})$ est convergente, ce qui entraine d'après le lemme de Borel-Cantelli que la suite $\sup_t |Y_t^n|$ converge p.s vers zéro.

La majoration admise ci-dessus a été établie en toute généralité et utilisée dans [3], pour démontrer la continuité en y des temps locaux L_t^y .

Nous en redonnons ici une démonstration "plus élémentaire", en ce sens qu'elle n'utilise que la formule de Tanaka-Meyer et la formule d'Ito, mais qui n'est guère plus courte.

Proposition 4

Soit X une semi-martingale continue.

$$E\left(\int_0^\infty 1_{\{a\leq X_s<b\}} d\langle X^c,X^c\rangle_s\right)^p \leq K\ (b-a)^p\ \|X\|_{H^p}^p\ .$$

Démonstration

D'après la formule de Tanaka-Meyer,

$$(X_t-a)^+ - (X_t-b)^+ = (X_t\wedge b-a)^+ = (X_0\wedge b-a)^+ + \int_0^t 1_{\{a\leq X_s<b\}} dX_s + \frac{1}{2}L_t^a - \frac{1}{2}L_t^b$$

et $\quad \left[(X_t\wedge b-a)^+\right]^2 = ((X_0\wedge b-a)^+)^2 + 2\int_0^t (X_s-a)1_{\{a\leq X_s<b\}} dX_s - \frac{1}{2}(b-a)\ L_t^b$

$$+ \int_0^t 1_{\{a\leq X_s<b\}} d\langle X^c,X^c\rangle_s\ .$$

or $\quad \frac{1}{2}L_t^b = (X_t-b)^+ - (X_0-b)^+ - \int_0^t 1_{\{X_s>b\}} dX_s$

et donc d'après les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy

$$E((L_t^b)^p) \leq K\ \ \|X\|_{H^p}^p\ .$$

De même $E(\sup_t |\int_0^t (X_s-a)1_{\{a\leqq X_s<b\}} dX_s|^p) \leqq c(b-a)^p \; \|X\|^p_{H^p}$

car sur l'ensemble $a\leqq X_s<b$, (X_s-a) est majoré par $(b-a)$.

De plus $[(X_t\wedge b-a)^+]^2 \leqq (b-a)\;|X_t-a|$ et donc $E[[(X_t\wedge b-a)^+]^{2p}]\leqq(b-a)^p \;\|X\|^p_{H^p}$.

Toutes ces inégalités impliquent que :

$$E\left[\left(\int_0^\infty 1_{\{a\leqq X_s<b\}} d\langle X^c,X^c\rangle_s\right)^p\right] \leqq C\;(b-a)^p\;\|X\|^p_{H^p} \quad .$$

<u>Remarque</u> : D'après le théorème 3 , les processus croissants $\frac{1}{n}\,U_t^{1/n,b}$ convergent p.s uniformément sur tout compact vers $\frac{1}{2}\,L^{-b}(-X)_t$.
Il en est de même des processus $\frac{1}{n}\,U^{a,\frac{1}{n}}$, qui convergent vers $\frac{1}{2}\,L^a(X)_t$.

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>

[1] <u>K. ITO et H.P. Mc KEAN</u> Diffusion processes and their sample paths Springer-Verlag 1965

[2] <u>M. CHALEYAT-MAUREL et M. YOR</u> Les filtrations de $|X|$ et X^+ lorsque X est une semi-martingale continue. (dans ce volume)

[3] <u>M. YOR</u> Sur la continuité des temps locaux associés à certaines martingales. (dans ce volume)