CH. YOEURP

Compléments sur les temps locaux et les quasi-martingales

Astérisque, tome 52-53 (1978), p. 197-218
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__52-53__197_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 52-53 (1978) p.197-218

COMPLÉMENTS SUR LES TEMPS LOCAUX ET LES QUASI-MARTINGALES

CH. YOEURP

INTRODUCTION

Dans la première partie de l'article, on examine le caractère dissymétrique (en a, paramètre spatial) des temps locaux $(L_t^a,\ t \in \mathbb{R}_+)_{a \in \mathbb{R}}$ associés à une semi-martingale $X = (X_t)$.

Ensuite, on étudie un deuxième type de temps locaux $(\mathscr{L}_t^a,\ t \in \mathbb{R}_+)_{a \in \mathbb{R}}$ (ainsi que leurs projections duales prévisibles $(\Lambda_t^a,\ t \in \mathbb{R}_+)_{a \in \mathbb{R}}$, si elles existent) associés à X, qui, malheureusement, ne possèdent pas de propriété de densité de temps d'occupation, mais par contre, vérifient la relation :

$$[X,X]_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{L}_t^a \, da.$$

Enfin, on dégage, à l'aide des processus $(\mathscr{L}^a)_{a \in \mathbb{R}}$, une classe de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, laissant stable l'ensemble des quasi-martingales. En particulier, on montre que X est une quasi-martingale si, et seulement si, X^+ et X^- sont des quasi-martingales.

Un appendice rassemble quelques résultats complémentaires, en particulier, on exhibe une classe de processus prévisibles $V = (V_t)$ tels que, si X est une quasi-martingale, l'intégrale stochastique $V.X$ en est encore une.

0 - NOTATIONS

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désigne un espace probabilisé complet, muni d'une famille croissante $(\mathcal{F}_t)$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, satisfaisant aux conditions habituelles. D'une façon générale, nous adoptons le langage et les notations du cours de P.A. Meyer [2] sur les intégrales stochastiques :

$\mathcal{L}$: ensemble des martingales locales

$\mathcal{S}$: ensemble des semi-martingales

$\mathcal{S}_p$: ensemble des semi-martingales spéciales

Mais, contrairement à [2] , nous convenons que les intégrales stochastiques sont nulles en 0, ainsi que les crochets $[X,X]$ et $\langle X,X \rangle$.

1 - COMPLÉMENTS SUR LES TEMPS LOCAUX

Soit $X=(X_t) \in \mathcal{S}$, et $a \in \mathbb{R}$. En [2], P.A. Meyer a introduit comme suit les temps locaux $(L_t^a,\ t \in \mathbb{R}_+)_{a \in \mathbb{R}}$ associés à X : pour a fixé, L^a est un processus croissant, adapté, continu, nul en 0, vérifiant :

$$(1) \qquad |X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sig}(X_{s-} - a)\, dX_s$$
$$+ 2 \sum_{0 < s \leq t} \left[(X_s - a)^- 1_{\{X_{s-} > a\}} + (X_s - a)^+ 1_{\{X_{s-} \leq a\}} \right] + L_t^a$$

avec la convention : $\operatorname{sig}(0) = -1$.

Mireille Maurel a remarqué que si X est continue et positive ou nulle, le temps local L^0 n'est pas nul, en général. Cette remarque est à l'origine du résultat suivant :

<u>Proposition 1</u>

<u>Soit</u> $X=(X_t) \in \mathcal{S}$. <u>On note</u>(*) <u>ici</u> $(L_t^a(X),\ t \in \mathbb{R}_+)_{a \in \mathbb{R}}$ <u>les temps locaux associés à</u> X.

(*) Quand il n'y a pas de risque de confusion, on note tout simplement (L_t^a) au lieu de $(L_t^a(X))$.

Alors, on a, pour tout $a \in \mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$L_t^a(X)-L_t^{-a}(-X) = 2\left[\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}}dX_s - \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s-}=a\}} \Delta X_s\right]$$

En particulier, si X est une semi-martingale continue, de décomposition canonique $X=M+A$(**), on a :

$$L_t^a(X) = L_t^{-a}(-X) + 2\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}dA_s$$

Ainsi, pour toute martingale locale continue $N=(N_t)$, on a :

$$L_t^a(N) = L_t^{-a}(-N)$$

Démonstration :

1). Réécrivons la formule (1)

$$(2)\ |X_t-a| = |X_0-a| + \int_0^t 1_{\{X_{s-}>a\}}\, dX_s - \int_0^t 1_{\{X_{s-}\leq a\}}\, dX_s$$

$$+\ 2\sum_{0<s\leq t}\left[(X_s-a)^- 1_{\{X_{s-}>a\}} + (X_s-a)^+ 1_{\{X_{s-}\leq a\}}\right] + L_t^a(X)$$

En remplaçant dans (2), X par $-X$, et a par $-a$, on obtient :

$$(3)\ |X_t-a| = |X_0-a| - \int_0^t 1_{\{X_{s-}<a\}}\, dX_s + \int_0^t 1_{\{X_{s-}\geq a\}}dX_s$$

$$+\ 2\sum_{0<s\leq t}\left[(X_s-a)^+ 1_{\{X_{s-}<a\}} + (X_s-a)^- 1_{\{X_{s-}\geq a\}}\right] + L_t^{-a}(-X)$$

On retranche membre à membre (2) et (3), et on trouve le résultat voulu, en remarquant que : $(X_s-a)\, 1_{\{X_{s-}=a\}} = \Delta X_s\, 1_{\{X_{s-}=a\}}$.

2). Si X est continue, on a :

$$L_t^a(X)-L_t^{-a}(-X) = 2\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}dX_s$$

$$= 2\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}dM_s + 2\int_0^t 1_{\{X_s=a\}}dA_s.$$

(**) Une semi-martingale continue est spéciale ; de plus, dans la décomposition canonique, M et A sont continus (voir RPG).

Ainsi, $\int_0^t 1_{\{X_s=a\}} dM_s$ est à la fois une martingale locale continue et à variation finie sur tout compact. Elle est donc nulle. D'où le résultat désiré. ■

Remarques :

1°). La proposition 1 nous donne aussi l'information suivante :

$\int_0^t 1_{\{X_{s^-}=a\}} dX_s$ est un processus à variation finie sur tout compact.

2°). Dans la démonstration de la seconde partie de la proposition, on aurait également pu utiliser l'égalité (cf RPG) :

$$\int_0^t 1_{\{X_s=a\}} d\langle M,M\rangle_s = \int_{\{a\}} L_t^u \, du = 0$$

3°). Si la semi-martingale X vérifie $\sum_{0<s\leq t} |\Delta X_s| < +\infty$, le processus $a \to L_t^a(X)$ admet une version continue à droite et limitée à gauche (cf [6]). On montre alors facilement que $L_t^{-a}(-X) = L_t^{a-}(X)$. La première formule figurant dans la proposition 1 est donc identique à la formule (c) du théorème 2 de [6]. ■

La proposition suivante donne une expression simple du temps local en 0, associé à une semi-martingale ayant un signe constant.

Proposition 2

1°). Si $X=(X_t)$ est une semi-martingale positive ou nulle, alors, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$L_t^o(X) = 2\left[\int_0^t 1_{\{X_{s^-}=o\}} dX_s - \sum_{0<s\leq t} 1_{\{X_{s^-}=o\}} \Delta X_s\right]$$

2°). Si $Y=(Y_t)$ est une semi-martingale négative ou nulle, alors, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $\quad L_t^o(Y) = 0.$

Démonstration :

1°). X étant positive ou nulle, la formule (1) s'écrit, pour $a = 0$:

$$X_t = X_o + \int_0^t 1_{\{X_{s^-}>o\}} dX_s - \int_0^t 1_{\{X_{s^-}=o\}} dX_s + 2\sum_{0<s\leq t} X_s 1_{\{X_{s^-}=o\}} + L_t^o(X)$$

Comme $\int_0^t 1_{\{X_{s^-}>o\}} dX_s = X_t - X_o - \int_0^t 1_{\{X_{s^-}=o\}} dX_s$, on obtient la formule désirée.

2°). Y étant négative ou nulle, la formule (1) s'écrit, pour a=o :

$$-Y_t = -Y_o - \int_0^t dY_s + L_t^o(Y).$$

Donc, $L_t^o(Y) = 0$ ∎

Soit $X=(X_t) \in \mathcal{S}$. On définit maintenant, pour a fixé, un second processus croissant $\mathcal{L}^a = (\mathcal{L}_t^a)$, au moyen des formules :

(4) $$\mathcal{L}_t^a = \ell_t^a + L_t^a$$

(5) $$\ell_t^a = 2 \sum_{0<s\leq t} [(X_s-a)^- 1_{\{X_{s^-}>a\}} + (X_s-a)^+ 1_{\{X_{s^-}\leq a\}}]$$

L'introduction du processus $\mathcal{L}^a$ permet d'écrire la formule (1) sous la forme condensée suivante :

(1') $$|X_t-a| = |X_o-a| + \int_0^t \operatorname{sig}(X_{s^-}-a)dX_s + \mathcal{L}_t^a$$

Notons en passant que les trois processus ℓ^a, L^a et $\mathcal{L}^a$ sont croissants, et que L^a et ℓ^a sont respectivement la partie continue et la partie purement discontinue de $\mathcal{L}^a$.

La mesure aléatoire $dL_\cdot^a$ étant portée par l'ensemble $\{s/X_s=X_{s^-}=a\}$([2]), on en déduit le résultat suivant :

<u>Proposition 3</u>

<u>Pour tout</u> $a \in \mathbb{R}$, <u>la mesure</u> $d\mathcal{L}_\cdot^a$ <u>est portée par l'ensemble</u> $\{s/X_s = X_{s^-}=a\} \cup \{s/X_{s^-} \leq a < X_s\} \cup \{s/X_s < a < X_{s^-}\}$.

<u>Remarque</u> : Il existe des sauts de X, enjambant a, qui ne chargent pas la mesure $d\ell_\cdot^a$. C'est le cas des sauts tels que $X_s=a<X_{s^-}$, $X_{s^-}<a=X_s$, et $X_s<a=X_{s^-}$. ∎

En [5], M. Yor a montré que l'on peut choisir des versions de (L_t^a), donc de $(\mathcal{L}_t^a)$, qui dépendent mesurablement du triplet (a,t,ω). C'est toujours sur ces versions que nous travaillons dans la suite. La proposition suivante donne une relation liant $[X,X]$ et $(\mathcal{L}_t^a)$:

Proposition 4

Soit $X=(X_t) \in \mathcal{S}$. Alors, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$[X,X]_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_t^a \, da$$

Démonstration : on sait que ([2], p. 368) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_t^a \, da = \langle X^c, X^c \rangle_t$$

Il suffit donc de démontrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ell_t^a \, da = \sum_{0<s\leq t} (\Delta X_s)^2$.

En appliquant le théorème de Fubini-Tonnelli, on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ell_t^a \, da = 2 \sum_{0<s\leq t} \int_{-\infty}^{+\infty} [(X_s-a)^- \, 1_{\{X_{s^-}>a\}} + (X_s-a)^+ \, 1_{\{X_{s^-}\leq a\}}] da$$

Examinons séparément les cas où ΔX_s est positif ou nul (resp. négatif ou nul) :

a) $\Delta X_s \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [(X_s-a)^- \, 1_{\{X_{s^-}>a\}} + (X_s-a)^+ \, 1_{\{X_{s^-}\leq a\}}] da = \int_{-\infty}^{X_{s^-}} 0 + \int_{X_{s^-}}^{X_s} (X_s-a)\,da + \int_{X_s}^{+\infty} 0$$

$$= \frac{1}{2} (\Delta X_s)^2$$

b) $\Delta X_s \leq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [(X_s-a)^- \, 1_{\{X_{s^-}>a\}} + (X_s-a)^+ \, 1_{\{X_{s^-}\leq a\}}] da = \int_{X_s}^{X_{s^-}} (-X_s+a)\,da$$

$$= \frac{1}{2}(\Delta X_s)^2$$

D'où finalement : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ell_t^a \, da = \sum_{0<s\leq t} (\Delta X_s)^2$. ∎

2 - TEMPS LOCAUX ET QUASI-MARTINGALES

Nous nous intéressons maintenant à la propriété d'intégrabilité de $\mathcal{L}^a(X)$, pour a fixé, lorsque X est une semi-martingale spéciale ou une quasi-martingale.

Rappelons que $X=(X_t)$ est une semi-martingale spéciale si X peut s'écrire (de manière unique) comme $X=M+A$, où $M=(M_t)\in\mathcal{L}$, et $A=(A_t)$ est un processus prévisible, nul en 0, à variation localement intégrable.

En ce qui concerne les quasi-martingales nous renvoyons à l'article de K.M. Rao (3), et surtout à celui de C. Stricker (4).

Définition 5

Soit $X=(X_t)$ *un processus adapté continu à droite. On dit que* X *est une quasi-martingale si*

$$\mathrm{Var}(X) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} E(|X_{t_i} - E\{X_{t_{i+1}} | \mathcal{F}_{t_i}\}|) + E(|X_{t_n}|)$$

est fini, le sup *étant pris sur l'ensemble des suites finies* $0=t_0 < t_1 < \ldots < t_n < +\infty$.

Rappelons encore la notion, utilisée dans la suite de l'article, de processus borné dans L^1.

Définition 6 ((1)) et (4))

Soit $X=(X_t)$ *un processus adapté continu à droite. On pose*
$||X||_1 = \sup_T E(|X_T|)$, T *parcourant l'ensemble des temps d'arrêt finis.*

On dit que X *est borné dans* L^1 *si* $||X||_1 < +\infty$.

En (1), N. Kazamaki a montré que, si $M=(M_t)$ est une martingale locale, alors, on a $||M||_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} E(|M_{T_n}|)$, pour toute suite de t.a. T_n croissant vers $+\infty$, P-p.s., réduisant M.

A la fin de l'article, en appendice, nous montrerons qu'une semi-martingale est spéciale si, et seulement si, elle est localement bornée dans L^1.

Voici une caractérisation des quasi-martingales démontrée en (4) :

Théorème 7 ([4])

1°). Une semi-martingale $X=(X_t)$ est une quasi-martingale si, et seulement si, X peut s'écrire d'une manière canonique sous la forme : $X=M+A$ où $M=(M_t)$ est une martingale locale bornée dans L^1, et $A=(A_t)$ est un processus prévisible, nul en 0, et à variation intégrable.

2°). Une martingale locale $M=(M_t)$ est une quasi-martingale si, et seulement si, M est bornée dans L^1.

Il résulte de la première partie de ce théorème qu'une semi-martingale spéciale de décomposition canonique $X=M+A$ est une quasi-martingale si, et seulement si, X est bornée dans L^1, et $E(\int_{-\infty}^{+\infty}|dA_s|) < +\infty$.

L'énoncé suivant permet de vérifier assez facilement si une semi-martingale est une quasi-martingale.

Corollaire 8

Soit $X=(X_t)$ une semi-martingale bornée dans L^1 admettant une décomposition (non canonique) $X=M+A$, avec A processus càdlàg, adapté, à variation intégrable.

Alors, X est une quasi-martingale.

Démonstration : A est à l'évidence une quasi-martingale. M est bornée dans L^1 ; c'est donc une quasi-martingale (théorème 7, 2°)). $X=M+A$ est donc une quasi-martingale (utiliser la définition 5).

On est maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer la proposition suivante :

Proposition 9

1°). Si $X=(X_t)$ est une semi-martingale spéciale, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}^a = (\mathcal{L}^a_t)$ est un processus croissant localement intégrable.

2°). Si $X=(X_t)$ est une quasi-martingale, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}^a = (\mathcal{L}^a_t)$ est un processus croissant intégrable (i.e. $E(\mathcal{L}^a_\infty) < +\infty$).

3°). Une martingale locale $M=(M_t)$ telle que $E(|M_0|) < +\infty$, est une quasi-martingale si, et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $E(\mathcal{L}^a_\infty(M) < +\infty$.

Démonstration :

1°). Soit $X=M+A$ la décomposition canonique de X. La martingale locale M est localement dans $\mathcal{H}^1$, et A est à variation localement intégrable. On peut donc choisir une suite de t.a. $T_n \uparrow +\infty$ telle que $(M-M_0)^{T_n}$ soit dans $\mathcal{H}^1$, et que $E(\int_0^{T_n} |dA_s|) < \infty$. (Notons en passant que $X_0=M_0$ n'est pas nécessairement intégrable). Alors, il est immédiat que $(\int_0^{t\wedge T_n} \mathrm{sig}(X_{s^-}-a)dM_s)$ est dans $\mathcal{H}^1$.
D'après la formule (1'), on a :

$$\mathcal{L}^a_t = |X_t-a| - |X_0-a| - \int_0^t \mathrm{sig}(X_{s^-}-a)dM_s - \int_0^t \mathrm{sig}(X_{s^-}-a)dA_s$$

D'où :

$$E(\mathcal{L}^a_{T_n}) = E(|X_{T_n}-a| - |X_0-a|) - E(\int_0^{T_n} \mathrm{sig}(X_{s^-}-a)dA_s)$$

$$(6) \qquad E(\mathcal{L}^a_{T_n}) \leq E(|X_{T_n}-X_0|) + E(\int_0^{T_n} |dA_s|) < +\infty$$

D'où le résultat désiré.

2°). Si X est une quasi-martingale, la relation (6) ci-dessus donne :

$$E(\mathcal{L}^a_{T_n}) \leq 2\ ||X||_1 + E(\int_0^{+\infty} |dA_s|) < +\infty$$

On en déduit que $E(\mathcal{L}^a_\infty) < +\infty$

3°). La condition est évidemment nécessaire, d'après 2°). Pour prouver la condition suffisante, il suffit de montrer que $||M||_1 < +\infty$, compte tenu du théorème 7, 2°). Soit $T_n \uparrow +\infty$ une suite de t.a. telle que M^{T_n} soit dans $\mathcal{H}^1$.
La formule (1') s'écrit, pour tout t.a. T fini :

$$|M_{T\wedge T_n}-a| = |M_0-a| + \int_0^{T\wedge T_n} \mathrm{sig}(M_{s^-}-a)dM_s + \mathcal{L}^a_{T\wedge T_n}(M)$$

D'où : $E(|M_{T\wedge T_n}-a|) = E(|M_o-a|) + E(\mathcal{L}^a_{T\wedge T_n}(M))$

$$\leq E(|M_o-a|) + E(\mathcal{L}^a_\infty(M)) < +\infty .$$

Donc, d'après le lemme de Fatou :

$$\sup_T E(|M_T-a|) \leq E(|M_o-a|) + E(\mathcal{L}^a_\infty(M))$$

On en déduit que $||M||_1 < +\infty$. ∎

Remarque : la proposition précédente entraîne des conséquences assez intéressantes pour les martingales locales :

$M=(M_t)$ étant une martingale locale, on note $\hat{M}_t = \int_0^t \mathrm{sig}(M_{s-})dM_s$.

1°). Si M est bornée dans L^1 (resp. uniformément intégrable), alors $\hat{M}$ l'est aussi.

2°). Si $\hat{M}$ est uniformément intégrable et M bornée dans L^1, alors $\hat{M}$ est uniformément intégrable.

En effet, d'après la proposition 9, puisque M est bornée dans L^1, $\mathcal{L}^o_\infty(M)$ est intégrable. Il suffit alors d'écrire la formule (1') pour $a=o$ et $X=M$:

$$|M_t| = |M_o| + \hat{M}_t + \mathcal{L}^o_t(M)$$

D'où le résultat désiré. ∎

Nous obtenons par la suite une extension (*) de la seconde assertion de la proposition 9. Pour cela, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 10

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite de classe (β), si sa dérivée seconde, au sens des distributions, est une mesure μ bornée (i.e. $\int_{\mathbb{R}} |d\mu(x)| < +\infty$).

(*) Je remercie M. Yor d'avoir dégagé pour moi la classe de fonctions (β) permettant ainsi de généraliser les résultats précédents concernant la fonction valeur absolue. Il a aussi éclairci de nombreux points obscurs figurant dans une première rédaction.

Rappelons que, d'après (2) (voir aussi RPG), si $X=(X_t)$ est une semi-martingale, et f une fonction de classe (β), on a les formules :

$$(7) \qquad f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_g(X_{s-})dX_s + \mathcal{L}_t^f$$

$$(8) \qquad \mathcal{L}_t^f = \sum_{0<s\leq t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - f'_g(X_{s-})\Delta X_s] + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a\,\mu(da)$$

où f'_g désigne la dérivée à gauche de f.

Voici l'extension évoquée précédemment :

<u>Proposition 11</u>

<u>Soient</u> $X=(X_t)$ <u>une quasi-martingale</u>, <u>et</u> $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ <u>une fonction de classe</u> (β). Alors, on a :

$$E(\int_0^{+\infty} |d\mathcal{L}_s^f|) < +\infty.$$

<u>Démonstration</u> : si μ est la dérivée seconde de f au sens des distributions, d'après la théorie des distributions, il existe deux constantes réelles a et b telles que :

$$f(x) = ax+b+\int_0^x dy(\int_{]-\infty,y]}\mu(dz))$$

On peut alors écrire $f=f_1-f_2$, avec f_1 et f_2 deux fonctions convexes de classe (β) (prendre, par exemple, $f_2(x) = \int_0^x dy\ \mu^-(]-\infty,y]))$.

Si f est une fonction convexe, le processus $\mathcal{L}^f$ est croissant.On est donc ramené à montrer que si f est une fonction convexe de classe (β), alors $E(\mathcal{L}_\infty^f) < +\infty$.

Soit $X=M+A$ la décomposition canonique de X, et (T_n) une suite de t.a. croissant vers $+\infty$ telle que $(M-M_0)^{T_n} \in \mathcal{H}^1$.

f étant de classe (β), on a $||f'_g||_\infty = \sup_x|f'_g(x)| < +\infty$. La formule (7) permet alors d'écrire :

$$E(\mathcal{L}^f_{T_n}) = E(f(X_{T_n})-f(X_o)) - E(\int_o^{T_n} f'_g(X_{s-})dA_s)$$

$$\leq E(|f(X_{T_n})-f(X_o|) + E(\int_o^{T_n} |f'_g(X_{s-})||dA_s|)$$

$$\leq ||f'_g||_\infty \, [E(|X_{T_n}-X_o|) + E(\int_o^{+\infty}|dA_s|)]$$

$$\leq ||f'_g||_\infty \, [2||X||_1 + E(\int_o^{+\infty}|dA_s|)] < +\infty$$

D'où $E(\mathcal{L}^f_\infty) < +\infty$. ■

La proposition 11 permet d'obtenir le résultat de stabilité suivant pour les quasi-martingales :

Théorème 12

Si f est une fonction de classe (β), et $X=(X_t)$ une quasi-martingale, alors $f(X)$ est une quasi-martingale.

Démonstration : soit $X=M+A$ la décomposition canonique de X. Réécrivons la formule (7) :

$$f(X_t) = f(X_o) + \int_o^t f'_g(X_{s-})dM_s + (\int_o^t f'_g(X_{s-})dA_s + \mathcal{L}^f_t)$$

Compte tenu de la proposition 11, le processus $(\int_o^t f'_g(X_{s-})dA_s + \mathcal{L}^f_t)$ est à variation intégrable. Donc, d'après le corollaire 8, il nous reste à montrer que la semi-martingale $f(X)$ est bornée dans L^1.

Or, il existe deux constantes réelles c et d telles que $|f(x)| \leq c|x| + d$. Donc, $|f(X_t)| \leq c|X_t|+d$, et $||f(X)||_1 \leq c\,||X||_1 + d$. ■

Remarque : il résulte de la proposition 11 et du théorème 12 que si $X=(X_t)$ est une quasi-martingale, et ϕ la primitive continue à gauche d'une mesure bornée (i.e. $\phi(y) = \mu(]-\infty,y[)$), alors $(\int_o^t \phi(X_{s-})dX_s)$ est une quasi-martingale.

Nous verrons en appendice, une autre classe de processus prévisibles V jouant le rôle de $\phi(X_-)$, et possédant la même propriété. ■

Voici des conséquences importantes du théorème 12. Notons que, d'après la définition 5, il n'est pas du tout évident que la valeur absolue d'une quasi-martingale est encore une quasi-martingale.

Corollaire 13

Soit $X=(X_t)$ une semi-martingale.

Alors, X est une quasi-martingale si, et seulement si, X^+ et X^- sont des quasi-martingales. En particulier :

si $X=(X_t)$ est une quasi-martingale, alors $|X|$ est aussi une quasi-martingale.

Démonstration : les fonctions $x \to x^+$ et $x \to x^-$ sont de classe (β). ∎

Après ce corollaire, il est naturel de se poser la question :

si X est une semi-martingale telle que $|X|$ soit une quasi-martingale, X est-elle une quasi-martingale ? La réponse à cette question est, en toute généralité, négative (voir le contre-exemple qui suit le corollaire 14). Cependant, si l'on se restreint aux semi-martingales continues, la réponse est positive :

Corollaire 14

Soit $X=(X_t)$ une semi-martingale continue.

Alors, X est une quasi-martingale si, et seulement si, $|X|$ en est également une.

Démonstration : il nous reste à démontrer la condition suffisante. On suppose donc que $|X|$ est une quasi-martingale. Sa décomposition canonique est donnée par la formule (1) :

$$|X_t| = |X_0| + \int_0^t \operatorname{sig}(X_s)dM_s + \left(\int_0^t \operatorname{sig}(X_s)dA_s + L_t^0(X)\right),$$

où $X=M+A$ est la décomposition canonique de X. Donc, d'après le théorème 7, si on pose $B_t = \int_0^t \operatorname{sig}(X_s)dA_s + L_t^0(X)$, on a :

$$E\left(\int_0^{+\infty} |dB_s|\right) < +\infty.$$

D'autre part ([6], corollaire 4) : $L_t^0(X) \leq L_t^0(|X|)$.

Comme $E(L^0_\infty(|X|) = < +\infty$ (proposition 9, 2°)), on a :

$$E(\int_0^{+\infty} |dA_s|) \leq E(\int_0^{+\infty} |dB_s|) + E(L^0_\infty(X)) < +\infty .$$

$|X|$ étant borné dans L^1, X l'est aussi. Donc, X est une quasi-martingale (corollaire 8). ∎

Voici maintenant le contre-exemple promis :

Contre-exemple : on va construire une fonction $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, à variation finie sur tout compact, mais à variation infinie sur $[0,+\infty]$, telle que $|A|$ soit à variation finie sur $[0,+\infty]$. Il suffit de prendre
$A_t = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, 1_{[n,n+1[}(t)$. Alors, on a :

$$|A_t| = 1_{[1,+\infty[}(t).$$

On voit facilement que $\mathrm{var}(|A|) = 1$, alors que $\mathrm{var}(A) = +\infty$. ∎

3 - TEMPS LOCAUX ET DENSITÉS DE TEMPS D'OCCUPATION

Etudions maintenant un troisième type de temps locaux (Λ^a_t) définis comme suit : pour a fixé appartenant à $\mathbb{R}$, $\Lambda^a = (\Lambda^a_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est la projection duale prévisible de $\mathcal{L}^a$, si elle existe. Ici encore, M. Yor a montré en (5) que l'on peut choisir des versions de (Λ^a_t) dépendant mesurablement de (a,t,ω). C'est sur ces versions que nous allons travailler.

Proposition 15

Soit $X=(X_t) \in \mathcal{S}_p$, et soit $\Lambda = (\Lambda^a_t, a \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+)$, les temps locaux associés à X, définis (*) comme ci-dessus.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda^a_t \, da$ est finie, si, et seulement si, le crochet $[X,X]$ est localement intégrable.

Dans ces conditions, la projection duale prévisible $< X,X >$ de $[X,X]$ existe, et l'on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$< X,X >_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda^a_t \, da$$

(*) L'existence de $\Lambda = (\Lambda^a_t)$ est assurée par la proposition 9,1°).

Démonstration :

1°). D'après la définition de Λ^a, $\mathcal{L}^a-\Lambda^a$ est une martingale locale nulle en 0. Soit donc $T_n \uparrow +\infty$ une suite de t.a. telle que $(\mathcal{L}^a-\Lambda^a)^{T_n}$ soit une martingale uniformément intégrable. On a alors :

$$E(\Lambda^a_{t\wedge T_n}) = E(\mathcal{L}^a_{t\wedge T_n})$$

Intégrons les deux membres de l'égalité par rapport à da, en appliquant le théorème de Fubini-Tonnelli :

$$E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda^a_{t\wedge T_n}\, da\right) = E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}^a_{t\wedge T_n}\, da\right), \text{ donc :}$$

$$(9) \qquad E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda^a_{t\wedge T_n}\, da\right) = E([X,X]_{t\wedge T_n}) \quad \text{(proposition 4)}$$

On en conclut que si $[X,X]$ est localement intégrable, il en est de même pour $\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda^a_t\, da$. Réciproquement, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda^a_t\, da$ est finie, alors elle est localement intégrable, car c'est un processus croissant prévisible. Donc, $[X,X]$ est localement intégrable d'après la relation (9).

Pour démontrer la dernière partie de la proposition, on remarque que la relation (9) reste vraie si l'on remplace t par un t.a. T, ce qui montre que $\left([X,X]_{t\wedge T_n} - \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda^a_{t\wedge T_n}\, da\right)$ est une martingale. D'où le résultat. ∎

Ainsi, on a montré dans cet article, les relations suivantes :

$$[X,X]_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}^a_t\, da$$

$$\langle X,X\rangle_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda^a_t\, da$$

D'autre part, il est montré en [2] que (L^a_t) possède la propriété de densité de temps d'occupation (en abrégé : D.T.O.) suivante :

$$\forall f \in b(\mathbb{R}),\ \int_0^t f(X_s)\, d\langle X^c,X^c\rangle_s = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, L^a_t\, da$$

A la lumière de ces résultats, il est naturel de se demander si les processus $(\mathcal{L}^a_t)$ et (Λ^a_t) possèdent les propriétés de D.T.O. suivantes :

(10) $\quad \forall f \in b(\mathbb{R}), \int_0^t f(X_s)\, d[X,X]_s = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\mathscr{L}_t^a\, da$

(11) $\quad \forall f \in b(\mathbb{R}), \int_0^t f(\mathring{X}_s) d<X,X>_s = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, \Lambda_t^a\, da$

($\mathring{X}$ étant la projection prévisible de $X=(X_t) \in \mathcal{S}_p$)

(11') $\quad \forall f \in b(\mathbb{R}), \int_0^t f(X_{s-})\, d<X,X>_s = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\Lambda_t^a\, da$

Supposons que la relation (10) soit vraie. Par un argument de classe monotone, on montre aisément que, pour toute fonction bornée $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable, on a :

$$\int_0^t f(s,\omega,X_s)\, d[X,X]_s = \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t f(s,\omega,a) d\mathscr{L}_s^a$$

En prenant $f(s,\omega,a) = 1_{\{X_s(\omega) \neq a\}}$, on a alors :

(12) $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{X_s \neq a\}} d\mathscr{L}_s^a = 0$

De là, on tire le résultat suivant :

<u>Proposition 16</u>

<u>Soit</u> $X=(X_t) \in \mathcal{S}$ <u>telle que</u> $(\mathscr{L}_t^a)$ <u>possède la propriété de D.T.O.</u> (<u>10</u>). <u>Alors</u>, X <u>est continue, et l'on a</u> $\Lambda^a = \mathscr{L}^a = L^a$.

<u>Démonstration</u> : on a vu que si $(\mathscr{L}_t^a)$ vérifie la relation (10), alors $(\mathscr{L}_t^a)$ vérifie aussi la relation (12), qui s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{X_s \neq a\}}\, d(L_s^a + \ell_s^a) = 0$$

ou encore $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{X_s \neq a\}}\, d\ell_s^a = 0$, ($dL_s^a$ est portée par $\{X_s = X_{s-} = a\}$).

Or, $d\ell_s^a$ est portée par l'ensemble $\{s/X_s \neq a\}$, d'après la formule (5). On a donc, d'après la proposition 4 :

$$\sum_{0<s\leq t} (\Delta X_s)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t d\ell_s^a = 0 \quad \blacksquare$$

On a un énoncé analogue pour (Λ_t^a):

Proposition 17

Soit $X=(X_t) \in \mathcal{S}_p$ telle que (Λ_t^a) possède la propriété de D.T.O. (11) ou (11').

Alors, X est continue, et l'on a $\Lambda^a = \mathcal{L}^a = L^a$.

Démonstration : toujours par un argument de classe monotone, si (Λ_t^a) vérifie les relations (11) ou (11'), alors (Λ_t^a) vérifie respectivement l'une des deux relations suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{\dot{X}_s \neq a\}}\, d\Lambda_s^a = 0 \tag{13}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{X_{s-} \neq a\}} d\Lambda_s^a = 0 \tag{13'}$$

Donc, en intégrant les deux membres de (13) et (13') par rapport à P, et en appliquant le théorème de Fubini-Tonnelli, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} da\; E\left(\int_0^t 1_{\{\dot{X}_s \neq a\}} d\Lambda_s^a\right) = 0$$

resp.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} da\; E\left(\int_0^t 1_{\{X_{s-} \neq a\}} d\Lambda_s^a\right) = 0$$

ou encore :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} da\; E\left(\int_0^t 1_{\{\dot{X}_s \neq a\}}\, d\mathcal{L}_s^a\right) = 0$$

resp.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} da\; E\left(\int_0^t 1_{\{X_{s-} \neq a\}}\, d\mathcal{L}_s^a\right) = 0,$$

car $d\Lambda_s^a$ et $d\mathcal{L}_s^a$, pour a fixé, coïncident sur la tribu prévisible. On remarque ensuite que $1_{\{\dot{X}_s \neq a\}}\, d\mathcal{L}_s^a = 1_{\{\dot{X}_s \neq a\}}\, d\ell_s^a$, et que $1_{\{X_{s-} \neq a\}}\, d\mathcal{L}_s^a = 1_{\{X_{s-} \neq a\}}\, d\ell_s^a$ car dL_s^a ne charge pas les ensembles dénombrables, et que $\dot{X}$ et X_- diffèrent seulement sur un ensemble dénombrable.

Donc, en appliquant de nouveau le théorème de Fubini-Tonnelli, les deux relations précédentes deviennent :

$$E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{\dot{X}_s \neq a\}}\, d\ell_s^a\right) = 0 \tag{14}$$

(14') resp. $E(\int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{X_{s-} \neq a\}} d\ell_s^a) = 0$

Mais, on a d'autre part :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{\mathring{X}_s = a\}} d\ell_s^a = \int_{-\infty}^{+\infty} da (\sum_{0<s\leq t} 1_{\{\mathring{X}_s = a\}} \Delta\ell_s^a)$$

$$= \sum_{0<s\leq t} (\int_{-\infty}^{+\infty} 1_{\{a=\mathring{X}_s\}} \Delta\ell_s^a \, da) = 0.$$

resp. $\int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}} d\ell_s^a = 0.$

Donc, en vertu de la proposition 4, les relations (14) et (14') s'écrivent

$$E(\sum_{0<s\leq t} (\Delta X_s)^2) = 0 \quad \blacksquare$$

Appendice :

1°). On peut caractériser une semi-martingale spéciale à l'aide de la norme $||.||_1$ (cf. définition 6) :

Proposition A.1.

Soit $X=(X_t) \in \mathcal{S}$.

Alors, X est une semi-martingale spéciale si et seulement si, $X-X_0$ est localement bornée dans L^1.

Démonstration : soit $X=M+A$ une décomposition non nécessairement canonique de X. On a :

$$X-X_0 = (M-M_0) + A$$

On sait que $M-M_0$ est localement dans $\mathcal{H}^1$, donc localement bornée dans L^1. On se ramène donc à montrer que : A est à variation localement intégrable si, et seulement si, A est localement borné dans L^1. La condition nécessaire est évidente. Pour prouver que la condition est suffisante, soit $R_n \uparrow +\infty$ une suite de t.a. telle que $||A^{R_n}||_1 < +\infty$. Posons :

$$S_n = \inf\{t / \int_0^t |dA_s| \geq n\} \wedge n$$

$$T_n = S_n \wedge R_n \text{ : t.a. finis croissant vers } +\infty.$$

On a alors :

$$\int_0^{T_n} |dA_s| \leq n + |\Delta A_{T_n}| \leq 2n + |A_{T_n}|$$

Or $$E(|A_{T_n}|) \leq ||A^{R_n}||_1$$

Donc, $E(\int_0^{T_n} |dA_s|) \leq 2n + ||A^{R_n}||_1 < +\infty.$ ∎

2°). En (1), N. Kazamaki a montré qu'étant donnée une martingale locale $M=(M_t)$, bornée dans L^1, il existe deux martingales locales positives, $\overset{+}{M}=(\overset{+}{M}_t)$ et $\overline{M}=(\overline{M}_t)$, bornées dans L^1 telles que $M=\overset{+}{M}-\overline{M}$, et que $||M||_1 = ||\overset{+}{M}||_1 + ||\overline{M}||_1$. Cette décomposition (dite de Krickeberg) est unique.

D'autre part, C. Stricker a montré, en (4), qu'il existe deux surmartingales positives $M'=(M'_t)$ et $M''=(M''_t)$ telles que $M=M'-M''$, et que $Var(M)=Var(M')+Var(M'')$ Cette décomposition (dite de Rao) est également unique.

En fait, il s'agit d'une même décomposition :

<u>Proposition A.2.</u>

<u>Soit</u> $M=(M_t)$ <u>une martingale locale, bornée dans</u> L^1.

<u>Alors, on a</u> $||M||_1 = Var(M)$, <u>et la décomposition de Krickeberg de</u> M <u>coïncide avec celle de Rao de</u> M.

<u>Démonstration</u> :

a). Remarquons d'abord que si $X=(X_t)$ est une surmartingale positive, alors on a $Var(X) = ||X||_1 = E(X_0)$.

Soit $M=\overset{+}{M}-\overline{M}$ (resp. $M=M'-M''$) la décomposition de Krickeberg (resp. de Rao) de M. On peut alors écrire :

$$Var(M) \leq Var(\overset{+}{M}) + Var(\overline{M}) = ||\overset{+}{M}||_1 + ||\overline{M}||_1 = ||M||_1 ,$$

et

$$||M||_1 \leq ||M'||_1 + ||M''||_1 = Var(M') + Var(M'') = Var(M)$$

Donc, $||M||_1 = Var(M)$.

b). Maintenant il est facile de voir que la décomposition de Krickeberg de M est aussi une décomposition de Rao de M. L'unicité de la décomposition entraîne que $\overset{+}{M}=M'$ et $\overline{M}=M''$. ∎

3°). En dehors de cet article, le problème suivant ne nous semble pas avoir été considéré jusqu'alors : soit $X=(X_t)$ une quasi-martingale. Pour quels processus prévisibles $V=(V_t)$, l'intégrale stochastique $(\int_0^t V_s\, dX_s)$ est-elle une quasi-martingale ?

Le théorème suivant, communiqué par M. Yor, complète la remarque qui suit le théorème 12, et est une réponse partielle à cette question :

Théorème A.3

Soit $X=(X_t)$ une quasi-martingale, et $V=(V_t)$ un processus càdlàg adapté, à variation bornée, tel que $\int_0^{+\infty} |dV_s| \leq c$, pour une certaine constante c. Alors ,

1°). si V est prévisible, $\int_0^{\bullet} V_s\, dX_s$ est une quasi-martingale.

2°). sinon, $\int_0^{\bullet} V_{s-}\, dX_s$ est une quasi-martingale.

De plus, on a $\|\int_0^{\bullet} W_s\, dX_s\|_1 \leq 2c\|X\|_1$, avec $W=V$, dans le 1er cas, et $W=V_-$, dans le second cas.

Démonstration : elle est fondée sur deux formules d'intégration par parties :

- si V est prévisible, $XV = \int_0^{\bullet} V_s\, dX_s + \int_0^{\bullet} X_{s-}\, dV_s$

- si V est optionnel, $XV = \int_0^{\bullet} V_{s-}\, dX_s + \int_0^{\bullet} X_s\, dV_s$

Ces formules rappelées, nous ne démontrerons que la seconde assertion. Soit $X=M+A$ la décomposition canonique de X. On a :

$$\int_0^{\bullet} V_{s-}\, dX_s = \int_0^{\bullet} V_{s-}\, dM_s + \int_0^{\bullet} V_{s-}\, dA_s.$$

Comme, $E(\int_0^{+\infty} |V_{s-}|\, |dA_s|) \leq c\, E(\int_0^{+\infty} |dA_s|) < +\infty$; en vertu du corollaire 8, il nous reste à prouver que $\int_0^{\bullet} V_{s-}\, dX_s$ est bornée dans L^1. D'après la formule d'intégration par parties, on a :

$$||\int_0^{\cdot} V_{s-}\ dX_s||_1 \leq ||XV||_1 + E(\int_0^{+\infty} |X_s|\ |dV_s|)$$

$$\leq c||X||_1 + E(\int_0^{+\infty} |X_s||dV_s|)$$

Notons $U = \int_0^{\cdot} |dV_s|$, et soit τ le changement de temps continu à droite associé à U, on a alors :

$$E(\int_0^{+\infty} |X_s||dV_s|) = E(\int_0^{+\infty} |X_s|\ dU_s)$$

$$= E(\int_0^{U_s} |X_{\tau_u}|du)$$

$$\leq E(\int_0^{c} |X_{\tau_u}|du)$$

$$\leq \quad c||X||_1$$

Donc, $||\int_0^{\cdot} V_{s-}\ dX_s||_1 \leq 2c||X||_1$ ■

Finalement, en rapprochant le théorème A.3 de la remarque qui suit le théorème 12, on sait intégrer par rapport à une quasi-martingale X, une classe relativement vaste de processus prévisibles $H = (H_t)$ tels que $H.X$ soit une quasi-martingale :

Soient $(V^i)_{i=1,\ldots,n}$ n processus prévisibles satisfaisant aux conditions du théorème A.3, et $(\phi_i)_{i=1,\ldots,n}$ n primitives continues à gauche de mesures bornées. On pose :

$$X^1 = (V^1\ \phi_1(X_-)).X$$

$$X^2 = (V^2\ \phi_2(X^1_-)).X^1$$

$$\vdots$$

$$X^n = (V^n\ \phi_n(X^{n-1}_-)).X^{n-1}$$

On voit donc que $X^n = (\prod_{i=1}^{n} V^i\ \phi_i(X^i_-)).X$ est une quasi-martingale.

BIBLIOGRAPHIE

(1) N. KAZAMAKI : "Krickeberg's decomposition for local martingales". Séminaire de Proba. VI, Lecture Notes in Math. 258 (1972).

(2) P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Proba. X, Lecture Notes in Math. 511 (1976).

(3) K.M. RAO : "Quasi-martingales". Math. Scand. 24, pp. 79-92.

(4) C. STRICKER : "Quasimartingales, martingales locales, semi-martingales et filtration naturelle". Z. für Wahr. 39, 55-63 (1977).

(5) M. YOR : "Calcul stochastique dépendant d'un paramètre". A paraître (1977).

(6) M. YOR : "Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales (dans ce volume).