Astérisque

MARC YOR

Rappels et préliminaires généraux

Astérisque, tome 52-53 (1978), p. 17-22
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__52-53__17_0>

© Société mathématique de France, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Société Mathématique de France
Astérisque 52-53 (1978) p.17-22

RAPPELS ET PRÉLIMINAIRES GÉNÉRAUX

Marc YOR

Ces quelques pages ont essentiellement pour but d'indiquer les notations couramment utilisées par la suite, et de rappeler les principales formules, qui figurent dans le chapitre VI du cours de P.A. Meyer [4] sur les intégrales stochastiques, concernant les temps locaux associés à une semi-martingale.

Toutefois, on y trouvera également quelques précisions complétant la rédaction de [4].

1 - NOTATIONS ET RAPPELS SUR LES SEMI-MARTINGALES

1.1.- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ espace de probabilité filtré, vérifiant les conditions habituelles. $\mathcal{O}$ (resp : $\mathcal{P}$) désigne la tribu optionnelle (resp : prévisible) sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$, relative à $(\mathcal{F}_t)$. Comme toujours, on ne distingue pas deux processus indistinguables.

Si X est un processus, on note X^* le processus maximal associé, défini par : $X^*_t = \sup\limits_{(s \leq t)} |X_s|$. Si T est un $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt (en abrégé : t.a), on note X^T le processus $(X_{T \wedge t}, t \geq 0)$.

Si $\mathcal{C}$ est un ensemble de processus, on note $\mathcal{C}_{loc}$ l'ensemble des processus X tels qu'il existe une suite de t.a T_n, croissant P p.s vers $+\infty$, pour laquelle $X^{T_n} \in \mathcal{C}$, pour tout n.

Soit $1 \leq k < \infty$. Un processus X est dit localement dans L^k (resp : localement borné) s'il en est de même du processus croissant X^*, c'est à dire s'il existe une suite de temps d'arrêt T_n croissant P p.s vers $+\infty$, tels que, pour tout n, $X^*_{T_n}$ appartienne à L^k (resp : L_∞).

Enfin, $\mathcal{M}_{loc}$ (*) désigne l'espace des $(\mathcal{F}_t,P)$ martingales locales (toujours supposées cadlag), $\mathcal{A}$ l'espace des processus à variation bornée sur tout compact de $\mathbb{R}_+$, cadlag, nuls en t=0, et $(\mathcal{F}_t)$ adaptés, $\mathcal{V}$ le sous-espace de $\mathcal{A}$ constitué des processus prévisibles de $\mathcal{A}$.

1.2.- On appelle semi-martingale tout processus X qui se décompose en la somme d'une martingale locale M et d'un processus $A \in \mathcal{A}$. L'espace des semi-martingales est noté $\mathcal{S}$. Si $X \in \mathcal{S}$, il n'existe pas en général une unique décomposition X=M+A ($M \in \mathcal{M}_{loc}$, $A \in \mathcal{A}$). Par contre, s'il existe $N \in \mathcal{M}_{loc}$, et $B \in \mathcal{V}$, tels que X=N+B, une telle décomposition est unique:on dit alors que X est une semi-martingale spéciale (et on note : $X \in \mathcal{S}_p$), et la décomposition X = N+B ($N \in \mathcal{M}_{loc}$, $B \in \mathcal{V}$) est appelée décomposition canonique de X. On rappelle, à ce sujet, les résultats suivants (voir [4]) :

- une semi-martingale X est spéciale si, et seulement si, X (ou X^*) est localement dans L^1.

- soit $1 \leq k < \infty$. $X \in \mathcal{S}$ est localement dans L^k si, et seulement si il en est de même de $[X,X]^{1/2}$.

- une semi-martingale spéciale X=N+B ($N \in \mathcal{M}_{loc}$, $B \in \mathcal{V}$) est quasi-continue à gauche (resp : continue) si, et seulement si, N est quasi-continue à gauche (resp : continue) et B est continu.

Ce dernier résultat entraîne le lemme suivant, qui joue un rôle important dans certains articles de ce volume.

(*) On emploie aussi quelquefois la notation $\mathcal{L}$ pour $\mathcal{M}_{loc}$, s'il n'y a pas de risque de confusion avec les temps locaux $(\mathcal{L}^a_t)$ qui interviennent par la suite.

Lemme

Soit $X \in \mathcal{S}$. *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

1) *pour tout* t, $\sum_{s \leq t} |\Delta X_s| < \infty$, P p.s.

2) X *est la somme d'une martingale locale continue* M, *et d'un processus* $A \in \mathcal{A}$.

Démonstration : 2) $\Longrightarrow$ 1) : si l'assertion 2) est vérifiée,

$$\Delta X = \Delta A, \text{ et donc } \sum_{s \leq t} |\Delta X_s| \leq \int_0^t |dA_s| < \infty, \ P \text{ ps}$$

1) $\Longrightarrow$ 2) : supposons 1) vraie. Notons $\Sigma_t = \sum_{s \leq t} (\Delta X_s)$

D'après les rappels précédant le lemme, la semi-martingale continue $X-\Sigma$ est somme de M, martingale locale continue, et $V \in \mathcal{V}$, processus continu. On a donc : $X = M+A$, où $A=V+\Sigma \in \mathcal{A}$ ■

Remarque 1 : notons $\mathcal{S}'$ l'espace des semi-martingales vérifiant les assertions du lemme.

- Comme on le verra par la suite, l'application $X \to |X|$ laisse $\mathcal{S}$ invariant ; il en est donc de même de $\mathcal{S}'$.

- La décomposition de $X \in \mathcal{S}'$ en $M+A$ (assertion 2) du lemme) est unique ; toutefois, si, de plus, $X \in \mathcal{S}_p$, cette décomposition n'est pas en général la décomposition canonique de X. ■

Introduisons enfin les espaces H^k de semi-martingales : si $1 \leq k < \infty$, et $X=N+B$ ($N \in \mathcal{M}_{loc}$, $B \in \mathcal{V}$) appartenant donc à $\mathcal{S}_p$, on note $||X||_{H^k} = (E\{[N,N]^{k/2} + (\int_0^\infty |dB_s|)^k\})^{1/k}$. On pose $H^k=\{X \in \mathcal{S}_p \ ; \ ||X||_{H^k} < \infty\}$.

2 - TEMPS LOCAUX DE SEMI-MARTINGALES : FORMULES GÉNÉRALES

On suit, pour présenter ces formules, l'exposé de P.A. Meyer [4].

2.1.- Soit donc $X \in \mathcal{S}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un processus croissant $(L_t^a, t \geq 0)$ continu en t, tel que :

$$(1)\qquad (X_t-a)^+ = (X_o-a)^+ + \int_o^t 1_{(X_{s^-}>a)}dX_s$$
$$+ \sum_{0<s\leq t} I_{(X_{s^-}>a)}(X_s-a)^- + I_{(X_{s^-}\leq a)}(X_s-a)^+ + \frac{1}{2}L_t^a$$

égalité que l'on condense en :

$$(1')\qquad (X_t-a)^+ = (X_o-a)^+ + \int_o^t 1_{(X_{s^-}>a)}dX_s + \frac{1}{2}\mathcal{L}_t^a.$$

Si $X \in \mathcal{S}_p$, X est localement dans L^1, ce qui implique, d'après les rappels du paragraphe 1, et la formule (1'), que $\mathcal{L}^a$ est aussi localement intégrable, et admet donc une projection duale prévisible, notée Λ^a.

Remarquons que, si ν est la mesure de Lévy de X (cf[3]), on a :

$$(2)\qquad \Lambda_t^a = L_t^a + 2\int \nu(.;ds\times dx)\ 1_{]0,t]}(s)\ \{\ldots\}$$
$$\text{où } \{\ldots\} = \{I_{(X_{s^-}>a)}(X_{s^-}+x-a)^- + I_{(X_{s^-}\leq a)}(X_{s^-}+x-a)^+\}$$

On a montré, en [5] , qu'il existe :

- une version $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{O}$ mesurable de $\mathcal{L}$, qui soit partout cadlag en t.
- une version $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{P}$ mesurable de L, qui soit partout continue en t.

Ce second résultat et la formule (2) entraînent facilement, par application du théorème de classe monotone, que si $X\in\mathcal{S}_p$, il existe une version $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{P}$ mesurable de Λ , qui soit partout cadlag en t. On ne considérera plus, par la suite, que de telles versions.

D'après [4], pour tout $a\in\mathbb{R}$, la mesure $d_sL_s^a(\omega)$ est p.s portée par $\{s|X_s(\omega) = X_{s^-}(\omega) = a\}$, et vérifie de plus :

$$(3)\qquad \forall f\geq 0,\ \mathcal{B}(\mathbb{R})\ \text{mesurable,}\ \int_o^t f(X_s)\ d<X^c,X^c>_s = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\ L_t^a\ da,$$

cette égalité étant rendue licite par les résultats de mesurabilité précédents. En outre, si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est différence de deux fonctions convexes, et si l'on note f'_g sa dérivée à gauche, et μ le mesure sur $\mathbb{R}$ qui est la dérivée seconde de f au sens des distributions, on a la formule de changement de variables suivante, qui généralise la formule (1) : si $X \in \mathcal{S}$,

$$(4) \quad f(X_t)=f(X_o) + \int_o^t f'_g(X_{s-})dX_s + \sum_{s \leq t} \{f(X_s)-f(X_{s-}) - f'_g(X_{s-})\Delta X_s\} + \frac{1}{2}\int \mu(da)L_t^a.$$

2.2.- Il est maintenant naturel de se demander si, de même que L, les processus $\mathcal{L} : (a,t) \to \mathcal{L}_t^a$ et $\Lambda : (a,t) \to \Lambda_t^a$ (lorsque il est défini) peuvent être interprétés comme densités de temps d'occupation, et, tout d'abord si, pour $a \in \mathbb{R}$, les mesures $d_s\mathcal{L}_s^a$ et $d_s\Lambda_s^a$ (si $X \in \mathcal{S}_p$) sont portées par $(X_{s-}=a)$.

Le mesure $d_sL_s^a$ étant portée par $(X_{s-}=a)$, on a :

$$(5) \quad E(\int_o^\infty 1_{(X_{s-}\neq a)}d\mathcal{L}_s^a) = 2E\left[\sum_{s>o} I_{(X_{s-}>a)}(X_s-a)^- + I_{(X_{s-}<a)}(X_s-a)^+\right]$$
$$= E(\int_o^\infty 1_{(X_{s-}=a)}d\Lambda_s^a) \text{ (si } X \in \mathcal{S}_p),$$

d'où l'on déduit aisément que, <u>pour</u> a <u>fixé</u>, $d_s\mathcal{L}_s^a$ (ainsi que $d_s\Lambda_s^a$, si $X \in \mathcal{S}_p$) est portée par $\{s|X_{s-}=a\}$ si, et seulement si, on a :

(6) $(X_--a)\ (X-a) \geq 0$, à un ensemble évanescent près.

Faisons maintenant varier a : d'après (6), $d_s\mathcal{L}_s^a$ est portée par $\{s|X_{s-}=a\}$ <u>pour tout</u> $a \in \mathbb{R}$ si, et seulement si :

(7) P ps, $\forall a \in \mathbb{R}$, $(X_--a)(X-a) \geq 0$

(l'ensemble exceptionnel de P mesure nulle a pu être choisi indépendamment de a, grâce à la continuité de $a \to (X_--a)(X-a)$).

Enfin, (7) est vérifiée si, et seulement si, P ps $X=X_-$, c'est à dire : X <u>est continue</u> (Ch. Yoeurp donne en [6] une autre démonstration de ce résultat).

Il résulte finalement de cette étude que, <u>en général</u>,

- seul le processus L^a peut être désigné comme "temps local de X en a".

- si $X \in \mathcal{S}_p$, et est également un processus de Markov admettant a pour point régulier, le temps local de X on a (dans la théorie markovienne ; cf (1)) ne coïncide pas toujours avec l'un des processus $\mathcal{L}^a$, Λ^a, ou L^a :

. pour qu'il coïncide avec $\mathcal{L}^a$, ou Λ^a, il est nécessaire que $d_s\mathcal{L}_s^a$ soit portée par $(X_{s-}=a)$, et donc que $(X_- - a)(X-a) \geq 0$.

. d'autre part, si $X^c=0$, on a : da ps, $L^a=0$, alors que les temps locaux (au sens markovien) peuvent exister et ne sont pas nuls. C'est le cas, par exemple, si X est un processus à accroissements indépendants, réel, sans partie brownienne, et de mesure de Lévy m telle que $\int(|x| \wedge 1)m(dx) = \infty$, mais $\int(x^+ \wedge 1)m(dx)$ ou $\int(x^- \wedge 1)m(dx)$ est finie (voir (2)).

RÉFÉRENCES

(1) R.M. BLUMENTHAL, R.K. GETOOR : Markov processes and potential theory. Academic Press, N.Y. 1968.

(2) H. KESTEN : Hitting probabilities of single points for processes with stationary independent increments. Memoir 93, Am. Math. Soc. 1969.

(3) J. JACOD : Multivariate point processes, predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. Zeitschrift für Wahr. 31 (1975), 235-246.

(4) P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire Proba. Strasbourg X. Lecture Notes Math. 511, Springer, Berlin, 1976.

(5) C. STRICKER et M. YOR : Calcul stochastique dépendant d'un paramètre. (A paraître).

(6) Ch. YOEURP : Compléments sur les temps locaux et les quasi-martingales, (dans ce volume).