Astérisque

NICOLE EL KAROUI
M. CHALEYAT-MAUREL

Un problème de réflexion et ses applications au temps local et aux équations différentielles stochastiques sur $\mathbb{R}$, cas continu

Astérisque, tome 52-53 (1978), p. 117-144
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__52-53__117_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 52-53 (1978) p.117-144

UN PROBLÈME DE RÉFLEXION ET SES APPLICATIONS AU TEMPS LOCAL ET AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES SUR $\mathbb{R}$. CAS CONTINU.

N. El Karoui. M. Chaleyat-Maurel .

Il est bien connu que le module du mouvement brownien est un processus de Markov, car le semi-groupe du mouvement brownien est invariant par symétrie (voir Dynkin [1] p 325) ; mais il n'en est pas forcément de même pour un processus de diffusion quelconque. Toutefois, sous certaines hypothèses, on peut établir l'existence d'un processus de Markov, dit réfléchi, processus positif qui coïncide avec la diffusion jusqu'au premier temps d'atteinte de $\{o\}$ (cf par exemple Stroock et Varadhan [2], Watanabe [3] et El Karoui [4]).

Nous allons étendre cette notion de "réflexion", en généralisant un problème posé par Bensoussan et Lions [5], dans le cas d'une semi-martingale brownienne.

Dans une première partie, nous définissons et résolvons en toute généralité ce problème de réflexion (en abrégé PBR), et donnons des applications immédiates au temps local des semi-martingales.

Et dans la seconde partie, nous établissons, grâce au PBR, l'existence et l'unicité d'un système stochastique de réflexion très général. Nous appliquons ensuite ces résultats aux processus de réflexion en $\{o\}$ sur $\mathbb{R}$ et démontrons un théorème de comparaison des solutions ; nous en déduisons avec des hypothèses supplémentaires, un théorème d'unicité trajectorielle pour un système stochastique de réflexion.

I UN PROBLÈME DE RÉFLEXION

I.1 Nous commençons par poser le problème sur $\mathbb{R}$, sans aucune considération probabiliste.

Nous désignons par $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

<u>Définition I.1.1.</u>

Soit y un élément de $\mathcal{C}$. On dit que le couple (z,k), où z et k sont des éléments de $\mathcal{C}$, est solution du problème de réflexion associé à y (en abrégé PBR (y)), si le système suivant est vérifié :

(1) $z = y + k$.

(2) z est positif ou nul.

(3) k est une fonction croissante, nulle en $\{o\}$,

telle que : $\int_0^\infty z(s)dk(s) = o$.

<u>Théorème I.1.2</u>

Pour tout y de $\mathcal{C}$ tel que $y(o) \geq o$, le PBR(y) admet une solution unique, définie par :

$$k(t) = \sup_{[o,t]} \bar{y}(s) \quad \text{où} \quad \bar{y}(s) = \sup(-y(s),o)$$

et $z(t) = y(t) + k(t)$.

<u>Remarque</u> : Nous avons dégagé ce problème sous une forme générale, non probabiliste, mais dans Mc Kean [6], on trouve déjà la résolution de cette équation pour le mouvement brownien ;

quant à la question de l'unicité, elle est traitée dans l'article de Skorokhod [7] sur les équations différentielles stochastiques.

Preuve

(a) Unicité. Si le PBR(y) admet deux solutions (z,k) et (z',k') alors :

$$(z(t)-z'(t))^2 = (k(t)-k'(t))^2 = 2\int_0^t [k(s)-k'(s)]\,[dk(s)-dk'(s)]$$

$$= 2\int_0^t [z(s)-z'(s)]\,[dk(s)-dk'(s)] = -2\left[\int_0^t z(s)dk'(s) + \int_0^t z'(s)dk(s)\right]$$

En appliquant les formules (2) et (3) de la définition du PBR on obtient $(z(t) - z'(t))^2 \leqq o$ et donc :

$$z(t) = z'(t) \quad \text{d'où} \quad k(t) = k'(t).$$

(b) Existence.

Soit $k(t) = \sup_{[o,t]} \bar{y}(s)$ et $z(t) = y(t) + k(t)$

. $k(t)$ est croissant, positif et $k(o) = o$ car $\bar{y}(o) = o$.

. $z(t)$ vérifie la condition (2) car :

$$z(t) = y(t) + k(t) = y^+(t) - \bar{y}(t) + \sup_{[o,t]} \bar{y}(s) \geqq o.$$

. $k(t)$ est continu et il ne croit que sur l'ensemble $\{s : z(s)=o\}$.

En effet, soit t_o un point de croissance à droite de k.

Par définition de k :

$$\forall h, \quad \exists t_h \in [t_o, t_o+h] : k(t_o) < \bar{y}(t_h) \leqq k(t_o+h)$$

k et $\bar{y}$ sont continues donc $k(t_o) = \bar{y}(t_o) = -y(t_o)$

d'où $z(t_o) = o$.

De même pour un point de croissance à gauche.

Le couple (z,k) est donc bien une solution du PBR(y).

I.2 Applications aux processus

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité satisfaisant aux conditions habituelles, et Y_t un processus à valeurs réelles, continu.

On dira que les processus (Z_t, K_t) résolvent le PBR(Y) si, pour tout ω de Ω, $(Z_t(\omega), K_t(\omega))$ est une solution du PBR $(Y_t(\omega))$ défini dans le paragraphe précédent.

Pour tout processus Y continu, tel que $Y_o \geq o$, il existe donc une unique solution au PBR(Y), (Z,K) donnée par :

(1) $$Z_t = Y_t + K_t \quad \text{et} \quad K_t = \sup_{[o,t]} \bar{Y}_s \quad \text{où} \quad \bar{Y}_s = \sup(-Y_s, o)$$

De la définition, il résulte aisément que les processus Z et K sont $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}_\infty$-mesurables, et que si le processus Y est $\mathcal{F}_t$-adapté, il en est de même des processus Z et K.

Nous allons voir que ce problème extrêmement simple a de nombreuses applications à la théorie des semi-martingales.

Proposition I.2.1

Soit Y une semi-martingale continue, de la forme $Y = Y_o + M + V$ où M est une martingale locale continue et V un processus à variation finie continu. On suppose Y_o positif et $\mathcal{F}_o$-mesurable.

Nous désignons par (Z,K) une solution du PBR(Y) et par L^o le temps local de Z au point $\{o\}$ (associé à signe $(o) = -1$).

Alors, $$K_t = -\int_o^t 1_{\{Z_s = o\}} dV_s + \frac{1}{2} L^o_t = \sup_{[o,t]} \bar{Y}_s$$

<u>Remarque</u>

K est donc le temps local de Z au point $\{o\}$, associé à signe(o) = + 1, noté L^{o-}_{t} en [16].

<u>Preuve</u>

D'après [8] , Z étant une semi-martingale positive, son temps local en $\{o\}$ vaut :

$$L^{o}_{t} = 2\int_{o}^{t} 1_{\{Z_s=o\}}(dV_s + dK_s)$$

soit encore :

$$K_t = -\int_{o}^{t} 1_{\{Z_s=o\}} dV_s + \frac{1}{2} L^{o}_{t} \quad .$$

<u>Remarque</u>

Les conséquences de la forme explicite de K_t sont de plusieurs ordres.

Les formules (1) montrent immédiatement que K et Z sont mesurables par rapport à la filtration engendrée par Y . Un article du même volume ([9]) développe ces propriétés de mesurabilité et en conclut des égalités de différentes filtrations.

D'autre part, K_t est exprimé comme le processus maximal d'une semi-martingale, ce qui permet d'utiliser les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy relatives aux martingales ; nous en donnerons quelques exemples dans la suite.

Etablissons d'abord une proposition qui exprime comment le PBR est lié au module des semi-martingales et à leur temps local.

Proposition I.2.2

Soit X une semi-martingale continue de la forme $X = X_o + M + V$ où M est une martingale locale continue nulle en o et V un processus à variation finie. Désignons par $L^o{}_t$ le temps local de X en $\{o\}$.

Alors le couple $(X^+, \frac{1}{2} L^o)$, [respectivement : $(X^-, \frac{1}{2} L^o)$, $(|X|, L^o)$] est l'unique solution du

PBR $(X_o^+ + \int_o^t 1_{\{X_s > o\}} dX_s)$ [resp. : PBR $(X_o^- - \int_o^t 1_{\{X_s \leq o\}} dX_s)$,

PBR $(|X_o| + \int_o^t \text{signe} X_s dX_s)$] .

Preuve

Il est clair que les trois formules :

$$X_t^+ = X_o^+ + \int_o^t 1_{\{X_s > o\}} dX_s + \frac{1}{2} L^o{}_t$$

$$X_t^- = X_o^- - \int_o^t 1_{\{X_s \leq o\}} dX_s + \frac{1}{2} L^o{}_t$$

$$|X_t| = |X_o| + \int_o^t \text{signe} X_s dX_s + L^o{}_t$$

donnent le résultat ; puisque le support de L^o est $\{s : X_s = o\}$ les propriétés du PBR sont vérifiées.

En particulier on a :

$$L^o{}_t = 2 \sup_{[o,t]} \left(\sup \left(-X_o{}^+ - \int_o^t 1_{\{X_s > o\}} dX_s, o\right)\right)$$

$$= 2 \sup_{[o,t]} \left(\sup \left(-X_o{}^- + \int_o^t 1_{\{X_s \leq o\}} dX_s, o\right)\right)$$

$$= 2 \sup_{[o,t]} \left(\sup \left(-|X_o| - \int_o^t \operatorname{signe}(X_s)dX_s, o\right)\right)$$

Si D désigne le premier temps d'atteinte de $\{o\}$ par X, la première expression s'écrit encore :

$$L^o_t = 2 \sup_{[D,D\vee t]} \left(-\int_D^{D\vee t} 1_{\{X_s>o\}}dX_s\right) \quad .$$

et de même pour les deux autres.

Nous allons démontrer des inégalités du type Burkholder-Davis-Gundy pour la solution du PBR associé à une martingale continue ; nous en déduirons grâce à la proposition I.2.2 une application à la partie positive des martingales.

Proposition I.2.3

Soient Y une martingale locale continue, de processus croissant $<Y,Y>$ et (Z,K) la solution du PBR associée à Y. Nous désignons par $<<Y,Y>>_t$ le processus croissant $Y_o^2+<Y,Y>_t$. Pour tout p, $1 \leqq p < +\infty$, il existe deux constantes strictement positives, c et C , ne dépendant que de p, telles que

$$c\; E(\ll Y,Y\gg_\infty^{p/2}) \leqq E(\sup_t Z_t^p) \leqq C \;\; E(\ll Y,Y\gg_\infty^{p/2}).$$

Démonstration

Nous désignons par (1) l'inégalité

$$c\, E(\langle\langle Y,Y\rangle\rangle_\infty^{p/2}) \leqq E(\sup_t Z_t^p)$$

et par (2) l'inégalité

$$E(\sup_t Z_t^p) \leqq C\, E(\langle\langle Y,Y\rangle\rangle_\infty^{p/2})$$

a) Nous commençons par justifier l'inégalité (2) .

Par construction, $Z_t = Y_t + K_t$, où $K_t = \sup_{s\leqq t} (\bar{Y}_s)$,

ce qui entraine que : $\sup_t Z_t \leqq 2 \sup_t |Y_t|$.

Nous concluons à l'aide des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy, qui impliquent en particulier que

$$E(\sup_t |Y_t|^p) \leqq K\, E(\langle\langle Y,Y\rangle\rangle_\infty^{p/2}), \quad \text{et donc que}$$

$$E(\sup_t Z_t^p) \leqq 2^p K\, E(\langle\langle Y,Y\rangle\rangle_\infty^{p/2}) .$$

b) L'inégalité (1) s'établit moins aisément. Nous utiliserons une démonstration très proche de celle proposée dans [10] (p350) pour montrer l'inégalité de Davis, deuxième moitié.

Remarquons tout d'abord, que si l'inégalité (1) est vraie pour toute martingale locale $\tilde{Y}$ telle que :

i) $\tilde{Y}_0 \geqq a > 0$, ii) $\tilde{Y}$ et $\tilde{Z}.\tilde{Y}$ sont des martingales locales de H^1 où $\tilde{Z}$ est la solution du PBR associée à $\tilde{Y}$, alors l'inégalité (1) est satisfaite pour toute martingale locale.

En effet, si Y est une martingale locale continue, il existe une suite $(T_n)_{n\in N}$, tendant vers $+\infty$, telle que les martingales locales Y^{T_n} et $(Z.Y)^{T_n}$ appartiennent à H^1.

Désignons par $(Z^{n,\varepsilon},K^{n,\varepsilon})$ la solution du PBR associée à $Y^{n,\varepsilon} = Y^{T_n} + \varepsilon$ et par (Z^n,K^n) celle associée à Y^{T_n}.

D'après la formule d'Ito,

$$(Z^{n,\varepsilon}_t - Z^n_t)^2 = \varepsilon^2 + 2\int_0^t (Z^{n,\varepsilon}_s - Z^n_s)(dK^{n,\varepsilon}_s - dK^n_s) \leqq \varepsilon^2$$

$Z^{n,\varepsilon}$ converge donc p.s uniformément en t vers Z^n

$$|\sup_t |Z^{n,\varepsilon}_t| - \sup_t |Z^n_t|| \leqq \varepsilon$$

Par suite, si $Z^n.Y^{T_n}$ appartient à H^1, il en est de même de $Z^{n,\varepsilon}.Y^{n,\varepsilon}$. L'inégalité (1) est donc satisfaite, par hypothèse, par $Y^{n,\varepsilon}$ et $Z^{n,\varepsilon}$ et donc aussi après passage à la limite, par (Y^{T_n},Z^n).

Il reste à faire tendre n vers $+\infty$ en remarquant que $Z^n_t = Z_{t\wedge T_n}$ et que $<<Y^{T_n},Y^{T_n}>>_\infty = <<Y,Y>>_{T_n}$.

c) Nous pouvons donc supposer que $Y_o \geqq a > o$ et que Y et $Z.Y$ appartiennent à H^1.

Désignons par Z^*_t le processus croissant $\sup_{s\leqq t} Z_s$.

Puisque $Y_o \geqq a > o$, $\frac{1}{Z^*_\infty}$ est bornée par $\frac{1}{a}$, et nous pouvons écrire comme dans [10] (p350) que, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$(3) \qquad E\sqrt{<<Y,Y>>_\infty} \leqq [E(Z^*_\infty)]^{1/2} \left[E\left(\frac{<<Y,Y>>_\infty}{Z^*_\infty}\right)\right]^{1/2}$$

Nous nous proposons de majorer $E\left(\frac{<<Y,Y>>_\infty}{Z^*_\infty}\right)$ par $E(Z^*_\infty) + K\,\|Y\|_{H^1}$

D'après l'inégalité (3), en posant $A = \|Y\|_{H^1}$ et $B = E(Z^*_\infty)$,

$$A \leqq \sqrt{B}\,\sqrt{B+KA}\ , \text{ où par hypothèse } o < A < +\infty .$$

Or cette inégalité ne peut être satisfaite que si :

$o < A \leqq B(\frac{1+\sqrt{K^2+4}}{2})$, soit encore $A \leqq c\,B$.

d) Montrons donc que $E(\frac{<<Y,Y>>_\infty}{Z^*_\infty}) \leqq E(Z^*_\infty) + K \| Y \|_{H^1}$.

La martingale $H_t = E(\frac{1}{Z^*_\infty}/\mathcal{F}_t)$ est bornée, ainsi que le produit de H par le processus croissant Z^*_t $(Z^*_t H_t \leqq 1$, p.s.) .

Comme $Z_t \leqq Z^*_t$, d'après la remarque de [10] (p 336), la martingale $Z.H$ a une norme BMO majorée par une constante $k(=\sqrt{6})$. D'après l'inégalité de Fefferman, pour tout temps d'arrêt T ,

$$E\int_0^T |d<Y,Z.Y>_t| \leqq \sqrt{2}\ \| Z.H \|_{BMO} \|Y\|_{H^1} \leqq \sqrt{2}\,k\ \|Y\|_{H^1}$$

Or $<Y,Z.H> = <Z.Y,H>$ car $Z.Y$ appartient à H^1 .

Par suite, si S est un temps d'arrêt qui réduit fortement la martingale $(Z.Y)H - <Z.Y,H>$

$$|E(<Z.Y,H>_S)| = |E(Z.Y_S H_S)| \leqq \sqrt{2}k\ \|Y\|_{H^1}$$

H est bornée, $Z.Y$ appartient à H^1 , nous pouvons donc faire tendre S vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, qui s'écrit alors

$$|E(Z.Y_\infty\ H_\infty)| \leqq \sqrt{2}\,k\ \|Y\|_{H^1}.$$

Or $Z_t^2 = 2(Z.Y)_t + <<Y,Y>>_t$ donc,

$$E(\frac{<<Y,Y>>_\infty}{Z^*_\infty}) \leqq E(\frac{Z_\infty^2}{Z^*_\infty}) + \sqrt{2}k\ \|Y\|_{H^1} \leqq E(Z^*_\infty) + K\ \|Y\|_{H^1}$$

ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire</u> I.2.4 Soit X une martingale locale continue, de partie positive X^+

$$(1)\qquad c\, E\left(\left[(X_o^+)^2 + \int_o^\infty 1_{\{X_s > o\}} d\langle X,X\rangle_s\right]^{p/2}\right) \leqq E\left[(\sup_t X_t^+)^p\right]$$

$$\leqq C\, E\left[\left((X_o^+)^2 + \int_o^\infty 1_{\{X_s > o\}}\, d\langle X,X\rangle_s\right)^{p/2}\right]$$

$$(2)\qquad c\, E\left(\int_o^\infty 1_{\{o<X_s<\frac{1}{2}L_s^o\}}\ d\langle X,X\rangle_s\right)^{p/2} \leqq E\left[(L_t^o)^p\right]$$

$$\leqq C\, E\left(\int_o^\infty 1_{\{o<X_s<\frac{1}{2}L_s^o\}}\ d\langle X,X\rangle_s\right)^{p/2}$$

Démonstration

Les inégalités (1) sont une conséquence immédiate de la proposition I.2.3 car X^+ est la solution du PBR associée à la martingale locale $Y_t = X_o^+ + \int_o^t 1_{\{X_s>o\}}\, dX_s$.

Quant aux secondes inégalités, elles s'établissent à partir de la formule $L_t^o = \sup\limits_{o<s\leqq t} (-Y_s)^+$ et de l'inégalité (1) , lorsqu'on a remarqué que

$$\{ -Y_s>o\} = \{X_s^+<\tfrac{1}{2}\ L_s^o\} \quad .$$

I.3 Lois des solutions dans le cas brownien

Proposition I.3.1

Soit (Z,K) la solution du PBR associée à un mouvement brownien W tel que $W_o \geqq o$; la loi de Z est alors celle du module du mouvement brownien.

Preuve

D'après la proposition I.2.2. le couple $(|W|,L^o)$ est

solution du PBR asocié à $\hat{W}_t = W_o + \int_o^t \text{signe}(W_s) dW_s$;
or $\hat{W}_t$ est un mouvement brownien car c'est une martingale continue de processus croissant $\int_o^t \text{signe}^2 W_s dW_s = t$; 2
ainsi les processus $Z_t = W_t + \sup\limits_{[o,t]} \bar{W}_s$ et $|W_t| = \hat{W}_t + \sup\limits_{[o,t]} \bar{\hat{W}}_s$ ont même loi .

<u>Remarque</u> : Nous retrouvons ici un résultat analogue à celui de Levy [11] qui prouvait que les deux processus $|\beta_t|$ et $\sup\limits_{[o,t]} \beta_s - \beta_t$ ont même loi où β_t est un mouvement brownien.

I.4 <u>Un changement de temps</u>

<u>Proposition I.4.1</u>

Soient Y une martingale continue telle que $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} Y_t = +\infty$ p.s. et $<Y,Y>$ son processus croissant associé. Nous notons A le processus croissant continu défini par :

$$A_t = \int_o^t 1_{\{Y_s > o\}} d<Y,Y>_s \quad .$$

Alors Y_{j_t} a même loi que le module du mouvement brownien réel, où j_t désigne le changement de temps continu à droite, inverse de A .

<u>Preuve</u>

(a) Commençons par démontrer que sous l'hypothèse $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} Y_t = \infty$, $A_\infty = \infty$ p.s.

Appliquons la formule de Tanaka-Meyer au processus Y_t^+ :

$$Y_t^+ = Y_o^+ + \int_o^t 1_{\{Ys>o\}} dY_s + \frac{1}{2} L^o_t \quad .$$

La martingale continue $M_t = \int_0^t 1_{\{Y_s>o\}} dY_s$ a pour processus croissant A_t , c'est donc un mouvement brownien changé de temps par A_t . On écrit alors

$$Y_t^+ = Y_o^+ + \beta_{A_t} + \frac{1}{2} L^o_t \quad .$$

D'après la proposition I.2.2 on a :

$$\frac{1}{2} L^o_t = \sup_{[o,t]} \overline{(Y_o^+ + \beta_{A_s})}$$

d'où $$\frac{1}{2} L^o_\infty \leqq \sup_s |Y_o^+ + \beta_{A_s}| \leqq \sup_{s \leqq A_\infty} |Y_o^+ + \beta_s| \cdot$$

Soit ω appartenant à l'ensemble $\{A_\infty < +\infty\}$, alors $L_\infty < \infty$ car β est continu et donc en réutilisant la formule de Tanaka on aurait $\overline{\lim_{t\to\infty}} Y_t < \infty$, ce qui est impossible .

Donc $A_\infty = \infty$ p.s.

(b) Reprenons la formule :

$$Y_t^+ = Y_o^+ + \beta_{A_t} + \frac{1}{2} L^o_t$$

et on fait formellement le changement de temps j_t :

$$Y_{j_t}^+ = Y_{j_o}^+ + \beta_{A_{j_t}} + \frac{1}{2} L^o_{j_t} \quad .$$

$Y_{j_t}^+ = Y_{j_t}$ car j_t appartient à $\{s : Y_s \geqq o\}$. Donc :

$$Y_{j_t} = Y_{j_o}^+ + \beta_t + \frac{1}{2} L^o_{j_t} \quad .$$

L^o_j ne croit que sur $\{s : Y^+_{j_s} = o\}$ donc, d'après la proposition

I.3.1 , Y_{j_t} a même loi que le module du mouvement brownien.

Remarque : ce résultat figure, pour le mouvement brownien, dans Ito-Mc Kean ([12] p 81) .

II ÉQUATIONS STOCHASTIQUES RÉFLÉCHIES

Nous nous proposons d'étendre la méthode des équations différentielles stochastiques de Catherine Doléans-Dade [13] à des équations de réflexion ; le problème (R) défini précédemment permettant de construire des solutions approchées. Cette idée a été utilisée par Bensoussan et Lions [5] pour des équations browniennes. Dans le premier paragraphe nous résolvons un système stochastique réfléchi et ensuite, dans le paragraphe deux nous appliquerons ces résultats aux équations différentielles stochastiques de réflexion sur $\mathbb{R}$; enfin, dans les paragraphes trois et quatre nous démontrerons un théorème de comparaison des solutions puis un thèorème d'unicité trajectorielle.

II.1

Nos notations seront celles de [13] .

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désigne un espace de probabilité complet muni d'une filtration satisfaisant aux conditions habituelles.

Soit M une martingale locale continue, réduite par une suite de temps d'arrêt T_n ; son processus croissant est noté $\langle M,M\rangle$. Par ailleurs, si T est un temps d'arrêt, nous désignerons par M^T la martingale locale $M_{t\wedge T}$.

D'autre part, soit A un processus continu, à variation finie, dont la variation est notée $|A|$.

Enfin, soient f et g deux applications de $\mathbb{R}\times\Omega\times\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et η_t un processus tels que :

(L_1) Pour tous ω,s,x,y :

$$|g(s,\omega,x) - g(s,\omega,y)| + |f(s,\omega,x) - f(s,\omega,y)| \leqq K|x-y|$$

(L_2) Pour tous ω et x, les fonctions f et g sont continues à gauche et pourvues de limites à droite.

(L_3) Pour tous t,x , les fonctions $f(t,.,x)$ et $g(t,.,x)$ sont $\tilde{\mathcal{F}}_t$-mesurables.

(L_4) η_t est un processus adapté, continu, positif.

Définition II.1.1

On appelle solution du système stochastique réfléchi (I) tout couple (X,K) satisfaisant à :

(a) $X_t = \eta_t + \int_0^t f(s,X_s)dM_s + \int_0^t g(s,X_s)dA_s + K_t$.

(b) X_t est un processus adapté, continu, positif .

(c) K_t est un processus croissant, continu, adapté, nul en o, tel que : $\int_0^\infty X_s dK_s = o$ p.s.

Théorème II.1.2

Sous l'hypothèse (L) , le système stochastique (I) admet une solution et une seule.

Preuve

Nous suivons de près la démonstration de [14] , en procédant aux mêmes simplifications. On montre de la même manière que, si pour tout K, il existe $b>o$, tel que l'existence et l'unicité aient lieu pour f et g lipschitziennes , bornées en $x = o$, tout η_t borné, tout couple (M,A) où :
M est une martingale continue de carré intégrable nulle en zéro telle que $\langle M,M\rangle_\infty \leqq b^2$;
A est un processus à variation finie, continu, nul en zéro tel que $|A| \leqq b$;
alors, l'existence et l'unicité ont lieu sans restriction.

Nous prendrons donc les hypothèses supplémentaires :

(H_1) $|f(s,\omega,o)| \leqq c$ $\quad |g(s,\omega,o)| \leqq c$

(H_2) $\langle M,M\rangle_\infty \leqq b^2$, $|A| \leqq b$ avec $2\sqrt{10}\, Kb< 1$

(H_3) $\sup\limits_t |\eta_t| \leqq N$

Construction par approximations successives

Nous désignons par $\mathcal{H}$ l'ensemble des processus continus, adaptés X tel que $X^* = \sup\limits_t |X_t|$ appartienne à L^2 muni de la norme :

$$|||X||| = \|X^*\|_2$$

Nous allons résoudre le système (I) sous les conditions (L) et (H) dans $\mathcal{H}$.
Etant donné Z dans $\mathcal{H}$, nous notons $(R(Z),K^Z)$ la solution du PBR associée à $\eta_t + \int_o^t f(s,Z_s)dM_s + \int_o^t g(s,Z_s)dA_s$.

Lemme II.1.3

Si Z et Z' sont deux éléments positifs de $\mathcal{H}^p$, alors

(a) $R(Z)$ et K^Z appartiennent à $\mathcal{H}^p$.

(b) il existe deux constantes h et h' telles que :

$$|||R(Z) - R(Z')||| \leqq h\ |||Z-Z'|||$$

$$|||K^Z - K^{Z'}||| \leqq h'\ |||Z - Z'|||$$

Preuve

(a) Il suffit d'établir la propriété (b) qui, appliquée à $Z' \equiv o$ montre que :

$$|||R(Z)||| \leqq h\ |||Z||| + |||R(o)||| \quad .$$

Or $R(o)$ est l'unique solution du PBR associé à

$$Y^o{}_t = \eta_t + \int_o^t f(s,\omega,o)dM_s + \int_o^t g(s,\omega,o)dA_s$$

on a donc $K^o{}_\infty = \sup\limits_t \overline{Y^o_t} \leqq \sup\limits_t |Y^o_t|$

et $\qquad R(o)_t = Y^o_t + K^o_t$ ce qui entraine

$$\sup_t R(o)_t \leqq 2 \sup_t |Y^o_t| \quad .$$

Il reste à calculer $|||Y^o|||$.

D'après l'inégalité de Doob,

$$E(\sup_t(\int_o^t f(s,\omega,o)dM_s)^2) \leqq 4\ E\int_o^\infty f^2(s,\omega,o)d\langle M,M\rangle_s \leqq 4c^2b^2 \quad .$$

et $$\sup_t|\int_o^t g(s,\omega,o)dA_s| \leqq \int_o^\infty g(s,\omega,o)d|A_s| \leqq cb.$$

Par suite

$$|||Y^o|||^2 \leqq 3(|||\eta|||^2 + 4c^2b^2 + c^2b^2) \leqq 3(N^2 + 5c^2b^2)$$

et $$|||K^o|||^2 \leqq 3(N^2 + 5c^2b^2)$$

d'où $|||R(o)|||^2 \leqq 6(N^2 + 5c^2b^2)$.

(b) Pour établir les inégalités, posons :

$$Y_t^Z = \eta_t + \int_o^t f(s,\omega,Z_s)dM_s + \int_o^t g(s,\omega,Z_s)dA_s$$

$$|K^Z - K^{Z'}|_t = |\sup_{[o,t]} \overline{Y_s^Z} - \sup_{[o,t]} \overline{Y_s^{Z'}}| \leqq \sup_{[o,t]} |Y_s^Z - Y_s^{Z'}|$$

et $$\sup_t |R(Z) - R(Z')| \leqq 2 \sup_t |Y_t^Z - Y_t^{Z'}| \quad .$$

Le même calcul que ci-dessus montre que :

$$E(\sup_t |\int_o^t (f(s,\omega,Z_s) - f(s,\omega,Z'_s))dM_s|^2) \leqq 4K^2b^2 \;|||Z - Z'|||^2 \quad .$$

et

$$\sup_t |\int_o^t (g(s,\omega,Z_s) - g(s,\omega,Z'_s)dA_s| \leqq Kb \;|Z - Z'|^* \quad .$$

où K désigne la constante de Lipschitz de f et g .

Par suite :

$$|||K^Z - K^{Z'}|||^2 \leqq 10K^2b^2 \;|||Z - Z'|||^2 \quad .$$

et $$|||R(Z) - R(Z')|||^2 \leqq 40K^2b^2 \;|||Z - Z'|||^2 \quad .$$

b satisfait à : $2\sqrt{10}.Kb < 1$; l'opérateur qui à Z associe $R(Z)$ est contractant. Il existe d'après le thèorème du point fixe un processus X de $\mathcal{H}$ unique dans $\mathcal{H}$ tel que : $R(X) = X$ et alors K^X ne croit que sur $\{X_s = o\}$.

Il reste à montrer que toute solution est dans $\mathcal{H}$. Soit X une solution ; notons $T = \inf\{s : X_s \geqq m\}$, X^T est solution du système associé à M^T et A^T ; comme X^T est borné par m , X^T appartient à $\mathcal{H}$ et coïncide en raison de l'unicité avec la solution unique de $\mathcal{H}$. Il ne reste plus qu'à faire tendre m vers l'infini .

II.2 Application aux équations de réflexion sur $\mathbb{R}$

Définition II.2.1

Soient σ et b deux applications mesurables et W un mouvement brownien réel.

On dit qu'un couple (X,K) est solution d'une équation de réflexion sur $\mathbb{R}$ si

(a) $X_t = X_o + \int_o^t \sigma(X_s)dW_s + \int_o^t b(X_s)ds + K_t$.

(b) X est positif, continu, adapté.

(c) K est un processus croissant, nul en zéro tel que :

$$\int_o^\infty X_s dK_s = o \quad .$$

En utilisant le théorème II.1.2 , on voit, si σ et b sont lipschitziens, qu'il existe une solution et une seule au système (II) , mesurable par rapport à la filtration naturelle de W . Yamada ([15]) a montré l'existence et l'unicité avec des hypothèses plus faibles, par exemple σ et b höldériens d'ordre $\alpha \geqq \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, si σ^2 ne s'annule pas, les travaux de Stroock et Varadhan [2] montrent que le système II admet une solution faible pour des coefficients continus (c'est-à-dire qu'il existe un mouvement brownien tel que le système II admette une solution).

Rappelons que lorsqu'il y a existence et unicité de la solution, le processus X_t est un processus de Markov fort (voir [4]).

Remarque : Puisque X est positif ou nul, on a : $X^+ = X$ et donc : si L^o_t est le temps local de X ,

$$X_t = X_o + \int_o^t 1_{\{X_s>o\}}\sigma(X_s)dW_s + \int_o^t 1_{\{X_s>o\}}b(X_s)ds + \frac{1}{2} L^o_t$$

en utilisant le fait que $\int_o^t 1_{\{X_s>o\}}dK_s = o$.

De plus, nous savons (cf RPG) que $\int_o^t 1_{\{X_s=o\}}\sigma^2(X_s)ds = o$

soit encore $\sigma^2(o)\int_o^t 1_{\{X_s=o\}}ds = o$.

Le système (II) est donc équivalent au système (II)'

(a) $X_t = X_o + \int_o^t 1_{\{X_s>o\}}\sigma(X_s)dW_s + \int_o^t 1_{\{X_s>o\}}b(X_s)ds + L_t$

(b) X est positif, adapté, continu

(c) L est un processus croissant, nul en zéro, tel que

$$\int_o^\infty X_s dL_s = o$$

(d) $\sigma^2(o)\int_o^t 1_{\{X_s = o\}} ds = o$.

En effet, si (X,K) est solution de (II), $(X, K-b(o)\int_o^{\cdot} 1_{\{X_s=o\}}ds)$ est solution de (II)' car d'après la proposition I.2.1,

$$K_t - b(o)\int_o^t 1_{\{X_s=o\}}ds \text{ est un processus croissant.}$$

Remarquons que si $\sigma^2(o) \neq o$ alors $\int_o^t 1_{\{X_s=o\}}ds = o$

et (II) et (II)' ont les mêmes solutions.

Précisons ce qui se passe lorsque $\sigma^2(o) = o$.

Proposition II.2.2

Supposons que σ vérifie $|\sigma(x)| \leqq K|x|$ dans un voisinage de zéro, alors le processus croissant K_t solution de (II) est égal à :

$$K_t = -b(o)\int_o^t 1_{\{X_s=o\}}ds.$$

Preuve

En utilisant la proposition I.2.1 et une forme explicite du temps local (voir [16]) on a :

$$K_t = -\int_o^t 1_{\{X_s=o\}} b(X_s)ds + \lim_{r\to o} \frac{1}{2r}\int_o^t 1_{\{o<X_s\leqq r\}} \sigma^2(X_s)ds$$

$$= -b(o)\int_o^t 1_{\{X_s=o\}}ds$$

car l'hypothèse faite sur σ entraine $|\sigma^2(X_s)| \leqq K^2|X_s|^2$

et donc $\lim\limits_{r\to o} \frac{1}{2r}\int_o^t 1_{\{o<X_s\leqq r\}} \sigma^2(X_s)ds \leqq \lim\limits_{r\to o} \frac{K^2+r}{2} = o$.

Remarque : On suppose $X_o \equiv o$

Supposons qu'il y ait unicité trajectorielle pour le système (II), alors on peut distinguer trois cas

(1) $b(o) > o$

la solution unique est $K_t \equiv o$ et X_t solution de l'équation

$$X_t = \int_o^t 1_{\{X_s > o\}} \sigma(X_s) dW_s + \int_o^t 1_{\{X_s > o\}} b(X_s) ds \quad .$$

(2) $b(o) = o$

la solution est $X_t \equiv o$, $K_t \equiv o$.

(3) $b(o) < o$

la solution est $X_t \equiv o$ et $K_t = -b(o)t$.

II.3 Théorème de comparaison

Théorème II.3.1

On suppose σ lipschitzien borné et on note X^1 et X^2 deux solutions, si elles existent, du système (II) associées à des coefficients b^1 et b^2 continus, bornés, satisfaisant à

$b^1(x) < b^2(x) \qquad x \in \mathbb{R}^+$. Alors :

$X^1 \leqq X^2 \quad$ P p s et $X_o^2 = X_o^1 \quad$ p.s .

Remarque : Nakao ([17]) a démontré un théorème analogue mais sous des hypothèses légèrement différentes ($\sigma > o$) .

Preuve

Appliquons la formule de Ito au processus $(X^2 - X^1)^-$

$$(X^2 - X^1)^- = -\int_0^t 1_{\{X_s^2 < X_s^1\}}(dX_s^2 - dX_s^1) + \frac{1}{2} L^o_t$$

L^o_t est le temps local de $X^2 - X^1$ associé à signe$\{o\} = o$ et

$$L^o_t = \lim_{r \to o} \frac{1}{r} \int_0^t 1_{\{o<(X_s^2 - X_s^1)^- \leqq r\}} |\sigma(X_s^2) - \sigma(X_s^1)|^2 ds$$

étant lipschitzien , $L^o_t \equiv o$. Donc :

$$(X_t^2 - X_t^1)^- = -\int_0^t 1_{\{X_s^2 < X_s^1\}} |\sigma(X_s^2) - \sigma(X_s^1)| dW_s$$

$$-\int_0^t 1_{\{X_s^2 < X_s^1\}} |b^2(X_s^2) - b^1(X_s^1)| ds$$

$$-\int_0^t 1_{\{X_s^2 < X_s^1\}} (dK_s^2 - dK_s^1) \ .$$

mais $\int_0^t 1_{\{X_s^2 < X_s^1\}} dK_s^1 = \int_0^t 1_{\{X_s^2 < o\}} dK_s^1 = o$.

Soit $\tau = \inf \{s : b^2(X_s^2) < b^1(X_s^1)\}$.

on a : $\tau > o$ car $b^2(X^2_o) > b^1(X^1_o)$ puisque $X^2_o = X^1_o = X_o$.

On a $E(X^2_{t\wedge\tau} - X^1_{t\wedge\tau})^- \leqq o$, car $(X^2_{t\wedge\tau} - X^1_{t\wedge\tau})^-$ est une surmartingale positive ; donc $X^2_{t\wedge\tau} \geqq X^1_{t\wedge\tau}$.

Soit $\rho = \inf \{s : X_s^2 < X_s^1\}$.

Il est clair que $\rho \geqq \tau$ et $X^2 = X^1$ sur $(\rho < \infty)$.

(Mais si $\rho = \infty$, le problème est résolu)

Posant à nouveau :

$$\tau' = \inf \{s \geqq \rho : b^2(X_s^2) < b^1(X_s^1)\} \ .$$

on a $\tau' > \rho$ car $b^1(X^2_\rho) > b^2(X^2_\rho)$; et par un raisonnement analogue sur $(X^2_{\rho+t} - X^1_{\rho+t})^-$, on montrerait de même que $X^2_t \geqq X^1_t$ dans un voisinage à droite de ρ , c'est à dire sur $[\rho,\tau']$; ce qui est contradictoire avec la définition de ρ et la continuité de X ; ρ ne peut donc qu'être infini.

II.4 Un théorème d'unicité

Théorème II.4.1

Supposons qu'il y ait existence forte des solutions de (II) pour σ lipschitzien borné et b continu borné ; alors il y a unicité trajectorielle des solutions.

Remarque : Par existence forte, nous voulons dire qu'on suppose que pour un mouvement brownien donné, il y a existence des solutions du système stochastique. Skorokhod [18] a démontré ce résultat dans le cas sans réflexion sur $\mathbb{R}$ tandis, qu'à notre connaissance, on ne sait démontrer que l'existence en loi des solutions pour le cas avec réflexion.

Nous reprenons alors la démonstration de Skorokhod ([18] p 129) pour démontrer sous les hypothèses du théorème, un résultat d'unicité.

Preuve

Soient X^1 et X^2 deux solutions de II correspondant à (σ,b) , on veut montrer alors que $X^1 = X^2$.

Pour ε de $[0,1]$ on pose $b^{-\varepsilon} = b - \varepsilon\sigma$

$$b^{+\varepsilon} = b + \varepsilon\sigma$$

et soient $X^{-\varepsilon}$ (resp^{t} $X^{+\varepsilon}$) une solution de (II) correspondant à $(\sigma, b^{-\varepsilon})$ (resp^{t} $(\sigma, b^{+\varepsilon})$).

On peut alors appliquer la formule de Cameron-Martin dans toute sa généralité car l'équation $\sigma^2 c' = b'$ a une solution $c' = \varepsilon$ (voir N. El Karoui [4]) ; Les lois $\mu^{-\varepsilon}$ et $\mu^{+\varepsilon}$ des processus $X^{-\varepsilon}$ et $X^{+\varepsilon}$ sont liées par :

$$\left(\frac{d\mu^{+\varepsilon}}{d\mu^{-\varepsilon}}\right)_t = \exp\left\{\int_0^t 2\varepsilon dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t 4\varepsilon^2 \, ds\right\}$$

Soit $\left(\frac{d\mu^{+\varepsilon}}{d\mu^{-\varepsilon}}\right)_t = \exp\{2\, W_t - 2\varepsilon^2 t\}$.

On a $b^{-\varepsilon} < b < b^{+\varepsilon}$, on peut alors appliquer le théorème de comparaison II.3.1 qui entraine que

$$X^{-\varepsilon}_t \leqq X^1_t \leqq X^{+\varepsilon}_t$$

et

$$X^{-\varepsilon}_t \leqq X^2_t \leqq X^{+\varepsilon}_t$$

On a $|X^1_t - X^2_t| \leqq (X^{+\varepsilon}_t - X^{-\varepsilon}_t)$ et on conclut comme dans Skorokhod [18] , que :

$$\begin{aligned} E|X_t - X_t| &\leqq E(X^{+\varepsilon}_t - X^{-\varepsilon}_t) = E(X^{+\varepsilon}_t - X_o - (X^{-\varepsilon}_t - X_o)^{\cdot}) \\ &= E\left[(X^{-\varepsilon}_t - X_o)(-1 + \exp\{2\varepsilon W_t - 2\varepsilon^2 t\}\right) \\ &\leqq \sqrt{E(X^{-\varepsilon}_t - X_o)^2} \quad \sqrt{E(-1 + \exp\{2\varepsilon W_t - 2\varepsilon^2 t\})^2} \end{aligned}$$

or $\quad E(-1 + \exp\{2\varepsilon W_t - 2\varepsilon^2 t\}) = 4\varepsilon^2 \, E\int_0^t \exp(2\varepsilon W_s - 2\varepsilon^2 s)\, ds$

$\leqq 4\varepsilon^2 t$ tend donc vers zéro lorsque $\varepsilon \to o$.

Par suite, les deux processus X^1 et X^2 sont indistinguables.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E.B. DYNKIN
Markov processes
Springer. Berlin. (1965)

[2] D.W. STROOCK and S.R.S VARADHAN
Diffusion processes with boundary conditions
Comm. on pure and applied math. Vol XXIV (1971)
p. 147-225.

[3] S. WATANABE
On stochastic differential equations for multi-dimensional diffusion processes with boundary conditions
Journal of math. of Kyoto University.
I 11. 1 (1971) p. 169-180.
II 11. 3 (1971) p. 545-551.

[4] N. EL KAROUI
Processus de réflexion sur $\mathbb{R}^n$.
Séminaire de probabilité IX.
Lecture notes in math. n°465 Springer (1975)

[5] A. BENSOUSSAN and JL. LIONS
Diffusion processes in bounded domains and singularpertubation problems for variational inequalities with Neumann boundary conditions.
Probabilistic methods in differential equations.
Lecture notes in math. n°451 Springer (1974)

[6] H.P. Mc KEAN.
Stochastic integrals. Academic press (1969).

[7] A. SKOROKHOD
Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region.
Theory of proba. and its appl.
I vol 6 264-274 (1961)
II vol 7 3-23 (1962).

[8] CH. YOEURP
Compléments sur les temps locaux et les quasi-martingales
(dans ce volume)

[9] M. CHALEYAT-MAUREL et M.YOR
Les filtrations de $|X|$ et X^+ lorsque X est une semi--martingale continue
(dans ce volume)

[10] P.A. MEYER
Un cours sur les intégrales stochastiques
Séminaire de probabilité X
Lecture notes in math. n°511. Springer (1976)

[11] P. LEVY
Processus stochastique et mouvement brownien
Gauthier-Villars (1948)

[12] K. ITO and H.P. Mc KEAN
Diffusion processes and their sample paths
Springer (1965)

[13] C.DOLEANS-DADE
Existence and unicity of solutions of stochastic differential equations.
Z. für W-theorie tome 36 p. 93-102 (1976)

[14] C. DOLEANS-DADE et P.A. MEYER
Equations différentielles stochastiques
Séminaire de probabilité XI
Lecture notes in math. N° 581 Springer (1977)

[15] T. YAMADA
On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations with reflecting barrier conditions.
Séminaire de probabilité X
Lecture notes in math. n° 511 Springer (1976)

[16] M. YOR
Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales (dans ce volume)

[17] S. NAKAO
Comparison theorems for solutions of one dimensional stochastic differential equations
Proceedingsof the second Japan-URSS symposium on Probability
Lecture notes in math. n°330 Springer (1973)

[18] A. SKOROKHOD
Studies in the theory of random processes
Addison-Wesley publishing company INC (1965)