Astérisque

FRANÇOIS LEDRAPPIER

Mesures d’équilibre d’entropie complètement positive

Astérisque, tome 50 (1977), p. 251-272

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__50__251_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 50 (1977) p.251-272

MESURES D'ÉQUILIBRE D'ENTROPIE COMPLÈTEMENT POSITIVE.

François Ledrappier

Introduction

Considérons une transformation continue sur un espace métrique compact X. D. Ruelle et P. Walters ont introduit la pression, fonction réelle convexe sur l'espace $C(X)$ des fonctions continues sur X ([13] [14]). Les plans tangents à la pression en f définissent des probabilités de Radon invariantes sur X qu'on appelle mesures d'équilibre pour f. Les mesures d'équilibre pour f forment un ensemble convexe compact dont les points extrêmaux sont des mesures ergodiques. L'unicité de la mesure d'équilibre pour f est équivalente à la dérivabilité de la pression en f.

Dans cet article, nous donnons une condition pour que cette mesure soit d'entropie complètement positive (cf. §1). Pour cela, nous étendons la définition de la pression à un espace de suites de fonctions continues. Notre résultat principal est le suivant: Pour un système faiblement expansif (cf. §1), l'unique mesure d'équilibre pour f est d'entropie complètement positive si et seulement si la pression est dérivable dans certaines directions "ergodiques" (cf. §3 pour une formulation précise).

Ce résultat généralise une caractérisation analogue obtenue par D. Ruelle [12] dans le cas d'un gaz sur un réseau.

I. Préliminaires

Soient X un espace compact séparé, $T:X \to X$ une application continue, $C(X)$ l'espace des fonctions continues muni de la norme uniforme, $M(X,T)$ l'ensemble des probabilités de Radon T-invariantes sur X, muni de la topologie de la convergence vague. L'espace $M(X,T)$ est compact.

Soit (Y,S) un autre système dynamique topologique; on note $(X\times Y, T\times S)$ le système défini sur l'espace produit $X\times Y$ par $T\times S\,(x,y) = (Tx, Sy)$. On note Π_X, Π_Y les projections de $X\times Y$ sur X et Y.

Si m appartient à $M(X,T)$, A est une partition finie de X en ensembles mesurables on note $h_m(A,T) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_a - m(a) \log m(a)$ où la somme porte sur tous les éléments de la partition

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}A \ , \quad \text{et} \quad h(m,T) = \sup_A \; h_m(A,T) \ .$$

Si $(X\times Y, T\times S)$ est un système produit, m appartient à $M(X\times Y, T\times S)$, notons

$$h(m/Y) = \sup_A \; \inf_B \; h_m(\Pi_X^{-1}(A) \vee \Pi_Y^{-1}(B) \ , \ T\times S\ ) - h_{m\circ\Pi_Y^{-1}}(B,S)$$

où A (resp. B) décrit les partitions finies mesurables de X (resp. Y).

Nous avons alors la formule:

$$h(m,T\times S) = h(m\circ\Pi_Y^{-1},\ S) + h(m/Y) \ .$$

(cf. [11] et [7] lemma 3.1.)

Définition

Un système (X,T) est dit faiblement expansif si pour tout système (Y,S), la fonction $m \mapsto h(m/Y)$ es semi-continue supérieurement (et donc finie) sur $M(X\times Y, T\times S)$.

Soit m appartenant à $M(X,T)$. Les éléments mesurables A tels que $h_m(\{A,A^c\},T) = 0$ forment une σ-algèbre $\mathcal{P}(X,T,m)$. Une mesure m de $M(X,T)$ est dite d'entropie complètement positive si la σ-algèbre $\mathcal{P}(X,T,m)$ est grossière. Nous utiliserons la propriété suivante:

Proposition 1.1. (A. Berg [1] lemma 2.3.)

Soit m une mesure d'entropie complètement positive vérifiant $h(m,T) < +\infty$. Soit M une mesure de $M(X\times Y,\ T\times S)$ vérifiant $M\circ\Pi_X^{-1} = m$ et $h(m/Y) = h(m,T)$.

Alors M est une mesure produit sur $X\times Y$.

Supposons désormais X compact métrique et soit d une distance sur X définissant la topologie. Soit δ positif. Un sous-ensemble E de X est dit (n,δ)-séparé si pour tous $x \neq x'$ dans E, $\max_{0\leq i<n} d(T^i x, T^i x') \geq \delta$. Soit $B(X)$ l'espace des suites équicontinues bornées $f(n,x)$ de fonctions continues sur X. L'espace $B(X)$ muni de la norme $||f|| = \sup_{n,x} |f(n,x)|$ est un espace de Banach (cf. l'interprétation de $B(X)$ au § 2). Nous pouvons étendre à $B(X)$ les définitions de [14] et poser, pour $f(n,x)$ dans $B(X)$:

$$p_n(T,f,\delta) = \sup\left\{ \sum_{x\in E} \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(i,T^i x)\right) \;\middle|\; E\ (n,\delta)\text{-séparé} \right\}$$

$$P(T,f,\delta) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_n(T,f,\delta) \qquad P(T,f) = \lim_{\delta\searrow 0} P(T,f,\delta) .$$

Dans le cas où la suite $f(n,x)$ est une constante $f(x)$, la quantité $P(T,f)$ coïncide avec la pression de la fonction f définie en [14]. En particulier $P(T,0)$ est l'entropie topologique du système (X,T). On vérifie comme dans [14] que si $P(T,0)$ est fini, la fonction $f \to P(T,f)$ est lipschitzienne convexe de $B(X)$ dans R.

Rappelons également les résultats suivants (cf. [13] ou [4] chapitre V.9): Soit P une fonction convexe lipschitzienne d'une espace de Banach B dans R. On appelle plan tangent à P en b toute forme linéaire L (nécessairement continue) sur B telle que $L(b') \leq P(b+b')-P(b)$.

Pour b et b' dans B, la fonction $\lambda \longrightarrow \frac{1}{\lambda}[P(b+\lambda b') - P(b)]$ est croissante de $R^+\setminus\{0\}$ dans R et sa limite en 0 se note $DP(b;b')$. L'application $b' \dashrightarrow DP(b;b')$ est sous-additive, positivement multiplicative et continue. Une forme linéaire L sur B est un plan tangent à P en b si et seulement si pour tout b' ,

$$-DP(b;b') \leq L(b') \leq DP(b;b') .$$

On dit que P est dérivable en b dans la direction de b' si $DP(b;-b') = -DP(b;b')$. Une application du théorème de Hahn-Banach montre que si P n'est pas dérivable en b dans la direction de b' , il existe deux plans tangents à P en B prenant une valeur différente sur b' . La pression sur $C(X)$ est donc dérivable en f si et seulement si elle n'admet qu'un plan tangent L en f. Le résultat suivant exprime le "principe variationnel" (cf. [13] , [14] et [9]):

Proposition 1.2.

Soit (X,T) un système faiblement expansif. Les plans tangents à la pression en f sont exactement les mesures de probabilités invariantes telles que

$$h(L,T) + \int f \, dL = \sup_{m \in M(X,T)} h(m,T) + \int f \, dm = P(f,T) .$$

On les appelle également mesures d'équilibre pour f . Nous utiliserons le principe variationnel relativisé [7] :

Proposition 1.3.

Soient X et Y deux compacts métriques. Avec les notations de ce §, posons pour y dans Y , f continue sur $X \times Y$,

$$P(T,f,y) = \lim_{\delta} \limsup_{n} \frac{1}{n} \log \sup \left\{ \sum_{x \in E} \exp \sum_{i=o}^{n-1} f(T^i x, T^i y) \;\middle|\; E(n,\delta)\text{-séparé} \right\}$$

Soit ν appartenant à $M(Y,S)$. On a la formule:

$$\int P(T,f,y) d\nu(y) = \sup \left\{ h(M/Y) + \int f(x,y) \, dM(x,y) \;\middle|\; M \in M(X \times Y, T \times S),\ M \circ \Pi_Y^{-1} = \nu \right\} .$$

Nous utiliserons enfin la proposition suivante, qui assure qu'une mesure d'équilibre est d'entropie complètement positive:

Proposition 1.4.

Soit (X,T) faiblement expansif. Soit sur le produit $(X \times X', T \times T')$ de deux copies de (X,T) la fonction continue $F(x,x') = f(x) + f(x')$. Si la fonction F n'admet qu'une mesure d'équilibre dans $M(X\times X', T\times T')$, l'unique mesure d'équilibre pour f dans $M(X,T)$ est d'entropie complètement positive.

Démonstration.

Soit m une mesure d'équilibre pour f dans $M(X,T)$ et supposons que m ne soit pas d'entropie complètement positive, c'est-à-dire que la σ-algèbre $\mathcal{P}(X,T,m)$ ne soit pas grossière. La mesure produit $m\times m$ est clairement une mesure d'équilibre pour F ; nous allons en construire une autre:

Soit $\bar{m}$ la mesure définie sur les rectangles de $X\times X'$ par

$$\bar{m}(A\times A') = \int_A E_m^{\mathcal{P}(X,T,m)} 1_{A'}\, dm$$

Il est facile de vérifier que $\bar{m}$ se prolonge en une probabilité sur $X\times X'$, et que $\bar{m}$ vérifie:

$$h(\bar{m}, T\times T') = 2\, h(m,T) = h(m\times m, T\times T) ,$$

$$\int F \ d\bar{m} = 2\int f \ dm = \int F \ dm\times m .$$

La mesure $\bar{m}$ est donc une mesure d'équilibre pour F , différente de $m\times m$ si la σ-algèbre $\mathcal{P}(X,T,m)$ n'est pas grossière .

II. L'espace $B(X)$.

Dans ce § nous allons étudier les plans tangents à la fonction P introduite ci-dessus, et pour cela identifier $B(X)$ à un espace de fonctions continues sur un compact. Soit Y le compactifié de Stone-Čech de l'ensemble N des entiers naturels et notons encore n les éléments de N plongés dans Y . Notons S l'application continue de Y dans lui-même qui prolonge $Sn = n+1$. Toute application de N dans un espace compact séparé se prolonge à Y par une application continue; en particulier tout élément de $B(X)$ est une suite relativement compacte dans $C(X)$, il existe donc une application continue f de Y dans $C(X)$ telle que $f(n) = f(n,x)$. Nous identifions désormais la suite

$f(n,x)$ et la fonction continue sur $X\times Y$ qui à (x,y) associe la valeur de la fonction $f(y)$ au point x. Nous avons ainsi établi un isomorphisme d'espaces de Banach entre $B(X)$ et $C(X\times Y)$. Notons A l'enveloppe convexe fermée dans $M(Y,S)$ des points d'accumulation de la suite

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i$$

(ε_i dénote la mesure de Dirac au point i) .

Theorème 1.

Supposons (X,T) faiblement expansif et soit f une suite constante de $B(X)$. Les plans tangents à P en f sont des éléments de $M(X\times Y, T\times S)$ qui ont les propriétés suivantes:

1) $M\circ\Pi_Y^{-1}$ appartient à A

2) $M\circ\Pi_X^{-1}$ est une mesure d'équilibre pour f

3) $h(M/Y) = h(M\circ\Pi_X^{-1}, T)$.

Démonstration.

Soit $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{B}$) la σ-algèbre des boréliens sur $X\times Y$ (resp. Y) et soit M une probabilité de Radon sur $X\times Y$. Notons encore M le prolongement régulier de M à $\mathcal{C}$; $M\circ\Pi_Y^{-1}$ est le prolongement régulier de $M\circ\Pi_Y^{-1}$ à $\mathcal{B}$.
Pour f dans $L^1(X\times Y,M)$, $E_M^{\mathcal{B}}f$ dénote l'espérance conditionelle de la fonction f par rapport à la σ-algèbre $\Pi_Y^{-1}(\mathcal{B})$. Soit ξ une partition finie de $X\times Y$ en éléments mesurables, posons:

$$H_M(\xi/\mathcal{B}) = \int \sum_{a\in\xi} \eta\,(E_M^{\mathcal{B}} 1_a)\, dM \text{ , où } \eta(t) = -t\log t \text{ pour } t > 0, \eta(0) = 0$$

Lemme 2.1.

Soit ξ une partition de X formée d'éléments mesurables et de frontière $M\circ\Pi_X^{-1}$ négligeable. Alors:

$$\limsup_{\mu\to M} H_\mu(\xi/\mathcal{B}) \leq H_M(\xi/\mathcal{B}) \qquad \text{(cf. 7 lemma 3.2. ii))}$$

Démonstration.

Choisissons une famille filtrante de partitions finies ζ_α de Y formées d'éléments de frontière $M\circ\Pi_Y^{-1}$ négligeable et telle que l'algèbre $\bigvee_\alpha \zeta_\alpha$ engendre $\mathcal{B}$. Notons

$$E_\mu^{\zeta_\alpha} f = \sum_{b\in\zeta_\alpha} 1_{\Pi_Y^{-1}(b)} \frac{\int_{\Pi_Y^{-1}(b)} f \, d\mu}{\mu(\Pi_Y^{-1}(b))}, \quad H_\mu(\xi/\zeta_\alpha) = \int \sum_{a\in\xi} \mathcal{D}(E_\mu^{\zeta_\alpha}(1_a\circ\Pi_X)) \, d\mu \ .$$

Soit $\mathcal{C}_\alpha$ une fonction tendant vers 0 le long de α (par exemple $\mathcal{C}_\alpha = 1/\text{card}\,\zeta_\alpha$). L'ensemble U_α des mesures μ telles que $H_\mu(\xi/\zeta_\alpha) < H_M(\xi/\zeta_\alpha) + \mathcal{C}_\alpha$ est un ouvert de $M(X\times Y)$ contenant M. Nous pouvons alors écrire:

$$\begin{aligned}
\limsup_{\mu\to M} H_\mu(\xi/\mathcal{B}) &= \inf_{u\ni M} \ \sup_{\mu\in u} H_\mu(\xi/\mathcal{B}) \\
&\leq \inf_\alpha \ \sup_{\mu\in u_\alpha} H_\mu(\xi/\mathcal{B}) \\
&\leq \inf_\alpha \ \sup_{\mu\in u_\alpha} H_\mu(\xi/\zeta_\alpha) \quad \text{(d'après la concavité de } \mathcal{D}\text{)} \\
&\leq \inf \ (H_M(\xi/\zeta_\alpha) + \mathcal{C}_\alpha) = \inf_\alpha \ H_M(\xi/\zeta_\alpha) \ .
\end{aligned}$$

Pour tout a de ξ d'autre part, la famille $E_M^{\zeta_\alpha}(1_a\circ\Pi_X)$ forme une martingale bornée par rapport à la famille des σ-algèbres engendrées par $\Pi_Y^{-1}(\zeta_\alpha)$. D'après le théorème des martingales ([10]) , les fonctions $E_M^{\zeta_\alpha}(1_a\circ\Pi_X)$ convergent vers $E_M(1_a\circ\Pi_X)$ dans L^1 . Il s'ensuit qu'il existe une sous-suite α_n croissante telle que $E_M^{\zeta_{\alpha_n}}(1_a\circ\Pi_X)$ converge vers $E_M^{\mathcal{B}}(1_a\circ\Pi_X)$ M presque partout et donc:

$$\begin{aligned}
\inf_\alpha H_M(\xi/\zeta_\alpha) &= \inf_\alpha \int \sum_a \mathcal{D}(E_M^{\zeta_\alpha}(1_a\Pi_X)) \, dM \\
&= \inf_{\alpha_n} \int \sum_a \mathcal{D}(E_M^{\zeta_{\alpha_n}}(1_a\circ\Pi_X)) \, dM
\end{aligned}$$

$$= \int \sum_a (E_M^{\mathcal{B}}(1_a \circ \Pi_X))\, dM = H_M(\xi/\mathcal{B}) \; .$$

Le lemme est prouvé en comparant les deux inégalités.

Lemme 2.2.

Soit M une mesure invariante sur $X\times Y$, ξ une partition finie mesurable de X, ξ^n la partition $\bigvee_{i=o}^{n-1} T^i\xi$. Nous avons

$$\lim_n \frac{1}{n} H_M(\xi^n/\mathcal{B}) \leq h(M/Y) \; .$$

Démonstration.

D'après la défintiion de $h(M/Y)$, nous avons

$$h(M/Y) \geq \inf_\alpha (h_M(\Pi_X^{-1}(\xi) \vee \Pi_Y^{-1}(B_\alpha), T\times S) - h_{M\circ\Pi_Y^{-1}}(B_\alpha, S))$$

où B décrit les partitions finies de Y. D'où

$$h(M/Y) \geq \inf_\alpha (\lim_n \frac{1}{n} H_M(\xi^n/\bigvee_{i=o}^{n-1} S^i B_\alpha)) \geq \inf_\alpha (\lim_n \frac{1}{n} H_M(\xi^n/\mathcal{B})) = \lim_n \frac{1}{n} H_M(\xi^n/\mathcal{B})$$

Lemme 2.3.

Soit f' une fonction de $C(Y\times X)$,

$$P(f',T) \leq \sup \{h(M/Y + \int f'\, dM \mid M \in M(Y\times X, S\times T) \; , \; M\circ\Pi_Y^{-1} \in A\} \; .$$

Démonstration. (cf. [7] proposition 3.6., [9]) :

Soient $\delta > 0$ et E_n un ensemble (n,δ) séparé de X tel que

$$\sum_{x\in E_n} \exp \Big(\sum_{i=o}^{n-1} f'(i,T^i x)\Big) \geq \frac{1}{e}\, p_n(T,f',\delta) \; .$$

Soit σ_n la mesure atomique sur $Y\times X$ définie par:

$$\sigma_n = \frac{\displaystyle\sum_{x\in E_n} \exp \Big(\sum_{i=o}^{n-1} f'(i,T^i x)\Big)\, \varepsilon_{(0,x)}}{\displaystyle\sum_{x\in E_n} \exp \Big(\sum_{i=o}^{n-1} f'(i,T^i x)\Big)}$$

Si μ_n désigne la mesure $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(T\times S)^i\sigma_n$, $\mu_n\circ\Pi_Y^{-1}$ est la mesure $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon_i$. Soit n_j une sous-suite des entiers telle que

$$\frac{1}{n_j}\log P_{n_j}(T,f',\delta) \text{ tend vers } P(T,f',\delta)$$

quand j tend vers l'infini et soit μ un point d'accumulation des μ_{n_j}. La mesure μ appartient à $M(X\times Y, S\times T)$ et vérifie $\mu\circ\Pi_Y^{-1} \in A$.

Soit ξ une partition finie de X formée d'éléments de diamètre plus petit que δ et de frontière $\mu\circ\Pi_X^{-1}$ négligeable. Soit $m < n_j$, nous avons; comme dans [7] , [9] :

$$\frac{m}{n_j}\log p_{n_j}(T,f',\delta) \leq \frac{m}{n_j} + m\int f'\,d\mu_{n_j} + H_{\mu_{n_j}}(\xi^m/\mathcal{B}) + \frac{2m^2}{n_j}\log(\operatorname{card}\xi) .$$

D'où:

$$m\,P(T,f',\delta) \leq m\int f'\,d\mu + \limsup_{\mu'\to\mu} H_{\mu'}(\xi^m/\mathcal{B})$$

$$\leq m\int f'\,d\mu + H_\mu(\xi^m/\mathcal{B}) \quad \text{d'après le lemme 2.1.}$$

Nous obtenons $\quad P(T,f',\delta) \leq \quad f'\,d\mu + \frac{1}{m}H_\mu(\xi^m/\mathcal{B})$.

En faisant tendre m vers l'infini, il vient:

$$P(T,f',\delta) \leq \int f'\,d\mu + h(\mu/y) \leq \sup\{\int f'd\mu + h(\mu/Y) \mid \mu\in M(Y\times X, S\times T), \mu\circ\Pi_Y^{-1}\in A\} .$$

Le lemme est prouvé en faisant tendre δ vers 0 . Nous posons donc

$$Q(f') = \sup\{\int f'd\mu + h(\mu/Y) \mid \mu\in M(Y\times X, T\times S)\ \mu\circ\Pi_Y^{-1}\in A\}.$$

Lemme 2.4.

L'application $f'\mapsto Q(f')$ est une application convexe lipschitzienne de $C(Y\times X)$ dans $\mathbb{R}$. Si f' est une suite constante nous avons $Q(f') = P(f',T)$.

Démonstration. immédiate d'après la définition de Q .

Le lemme suivant décrit les plans tangents à Q .

Lemme 2.5.

Supposons (X,T) faiblement expansif et soit f' dans $C(Y\times X)$. Les plans tangents à Q en f' sont les mesures M de $M(Y\times X, S\times T)$ telles que $M\circ\Pi_Y^{-1}\in A$ et $h(M/Y)+\int f'dM = Q(f')$.

Démonstration.

D'après le lemme 2.4., tout plan tangent L à Q est une forme linéaire continue sur $C(Y\times X)$. Notons $M_{f'}$ l'ensemble des mesures de $M(Y\times X, S\times T)$ telles que

$$M\circ\Pi_Y^{-1}\in A \quad \text{et} \quad H(M/Y)+\int f'dM = Q(f') .$$

Le système étant faiblement expansif, $M_{f'}$, est non vide et tout M de $M_{f'}$ définit un plan tangent à Q en f' . En effet, pour tout f'' de $C(Y\times X)$, nous avons:

$$h(M/Y)+\int f''dM \leq Q(f'') \quad \text{et donc} \quad \int (f''-f')dM \leq Q(f'') - Q(f') .$$

Pour montrer le lemme il faut encore vérifier que tous les plans tangents sont de cette forme; pour cela calculons $DQ(f';f'')$. Pour tout $\lambda > 0$ choisissons μ_λ dans $M_{f'+\lambda f''}$, nous avons

$$Q(f'+\lambda f'') = h(\mu_\lambda/Y) + \int (f'+\lambda f'')d\mu_\lambda \quad \text{et} \quad Q(f') \geq h(\mu_\lambda/Y) + \int f' \, d\mu_\lambda .$$

D'où

$$\frac{1}{\lambda}\left[Q(f'+\lambda f'') - Q(f')\right] \leq \int f'' \, d\mu_\lambda \quad \text{et} \quad DQ(f';f'') \leq \limsup_{g\to f'} \sup_{\mu\in M_g} \int f'' \, d\mu$$

Le système étant faiblement expansif M_g est fermé, il existe donc une mesure μ_g dans M_g telle que

$$\sup_{\mu\in M_g} \int f'' \, d\mu = \int f'' \, d\mu_g .$$

Il existe alors une mesure μ_o adhérente aux $\mu_g, g\to f$ telle que

$$\limsup_{g \to f'} \int f'' \, d\mu_g = \int f'' \, d\mu_o .$$

Le système étant faiblement expansif, toute mesure adhérente aux $\mu_g, g \to f'$, appartient à $M_{f'}$. Nous avons donc obtenu la majoration suivante

$$DQ(f';f'') \leq \sup_{\mu \in M_{f'}} \int f'' \, d\mu .$$

En changeant f'' en $-f''$, nous obtenons finalement que tout plan tangent L à Q en f' doit vèrifier, pour tout f'' de $C(Y \times X)$:

$$\inf_{\mu \in M_{f'}} \int f'' \, d\mu \leq L(f'') \leq \sup_{\mu \in M_{f'}} \int f'' \, d\mu .$$

Cette relation n'est possible que si L appartient à l'enveloppe convexe vaguement fermée de $M_{f'}$, comme $M_{f'}$ est déjà un ensemble convexe vaguement fermé, L appartient à $M_{f'}$ et le lemme est démontré.

Nous pouvons maintenant montrer le théorème: Nous avons deux fonctions convexes P et Q sur $B(X)$ telles que $P \leq Q$ (lemme 2.3.). D'autre part si f est une suite constante de $B(X)$, $P(f) = Q(f)$ (lemme 2.4.). Les plans tangents à P en f sont donc également des plans tangents à Q en f, et donc appartiennent à M_f (lemme 2.5.) . Montrons que les mesures de M_f satisfont les propriétés 1/ 2/ et 3/ du théorème 1: Si M appartient à M_f, $M \circ \Pi_Y^{-1} \in A$ par définition et d'autre part les inégalités

$$h(M/Y) + \int f \, dM \circ \Pi_X^{-1} \leq h(M \circ \Pi_X^{-1}, T) + \int \, dM \circ \Pi_X^{-1} \leq \sup_{\mu \in M(X,T)} h(\mu,T) + \int f \, d\mu = P(f)$$

sont des égalités, ce qui entraîne les propriétés 2/ et 3/ .

III. Mesure d'équilibre d'entropie complètement positive.

Avec les notations du § 1, on dit qu'une suite $f(n,x)$ est ergodique si la suite $-\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(i,x)$ converge uniformément vers une fonction $\hat{f}$ de $C(X)$.
Notre résultat principal est:

Théorème 2.

Soit (X,T) faiblement expansif, f dans $C(X)$. Il n'existe qu'une mesure d'équilibre m pour f et m est d'entropie complètement positive si et seulement si la fonction $P(f',T)$ est dérivable en f dans les directions f' ergodiques, de dérivée $m(\hat{f'})$.

Démonstration.

Supposons d'abord que m est la seule mesure d'équilibre pour f, et d'entropie complètement positive. Avec les notations du § 2, d'après le théorème 1, tout plan tangent à P en f est répresenté par une mesure μ de $M(Y\times X,\ S\times T)$ avec les trois propriétés suivantes:

1. $\mu\circ\Pi_Y^{-1}$ appartient à A.

2. $\mu\circ\Pi_X^{-1}$ est une mesure d'équilibre pour f.

3. $h(\mu/Y) = h(m,T)$.

D'après la proposition 1.1. la mesure μ est la mesure produit de $\mu\circ\Pi_X^{-1}$ et de m. Ces propriétés impliquent que la mesure μ appartient à l'enveloppe convexe fermée des points d'accumulation de la suite $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon_i\times m$. (Il suffit de le vérifier pour les fonctions élémentaires produit !).

En particulier, si nous calculons pour f' ergodique $\mu(f')$, nous trouvons:

$$\mu(f') = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\varepsilon_i\times m)(f') = \lim_n \int \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f'(i,x)\,dm(x) = \int \hat{f}'\,dm$$

car la convergence vers $\hat{f}'$ est uniforme.

Nous avons montré que tout plan tangent à P en f prend la même valeur $\int \hat{f}'\,dm$ sur f' ergodique, autrement dit la fonction P est dérivable en f dans les directions ergodiques, de dérivée $m(\hat{f}')$.

Réciproquement supposons P dérivable en f dans les directions ergodiques. Les directions constantes étant en particulier ergodiques, la pression P est dérivable dans $C(X)$ et il existe une unique mesure d'équilibre m pour f.

Supposons de plus que la dérivée dans la direction f' vaut $m(\hat{f}')$. Le théorème résultera de la proposition 1.4. et du lemme 3.4..

Considérons le produit $(X\times X', T\times T')$ de deux copies de (X,T) .Si x est un point de X , g dans $C(X\times X')$, considérons l'élément h_x de $B(X)$ défini par : $h_x(n,x') = g(T^n x,x')$.

Lemme 3.1.

Si x est un point quasi-régulier de X (la limite vague de la suite $\frac{1}{n}\sum_{i=o}^{n-1} \varepsilon_{T^i x}$ existe) de mesure limite ϑ_x , la suite h_x est une suite ergodique de $B(X)$, $\hat{h}_x = \int g(t,x')\, d\vartheta_x(t)$

Démonstration.

La suite de fonctions uniformément continues en x', $\frac{1}{n}\sum_{i=o}^{n-1} g(T^i x,x')$ converge simplement vers la fonction continue en $x'\int g(t,x')d\vartheta_x(t)$. La convergence est donc uniforme .

Soit μ appartenant à $M(X,T)$. L'ensemble des points quasi-réguliers est de mesure 1 pour μ , et $\mu = \int \vartheta_x \, d\mu(x)$.

Lemme 3.2.

Soit μ appartenant à $M(X,T)$. La fonction $\lambda \to \frac{1}{\lambda}\int\left[P(f+\lambda h_x,T)-P(f,T)\right] d\mu$ décroit quand λ décroît vers 0 , vers $\int g(t,t')\, d\mu(t)dm(t')$.

Démonstration.

Si x est un point quasi-régulier de X, $\frac{1}{\lambda}\left[P(f+\lambda h_x,T)-P(f,T)\right]$ décroît quand λ tend vers 0 vers $m(\hat{h}_x) = \int g(t,x')\, d\vartheta_x(t)\, dm(x')$ (lemme 3.1.) .

La famille de fonctions

$$x \to \frac{1}{\lambda}\left[P(f + \lambda h_x,T) - P(f,T)\right]$$

décroît donc vers une limite qui est presque partout égale à

$$x \to \int g(t,x')\, d\vartheta_x(t)\, dm(x') .$$

Nous avons donc que

$$\frac{1}{\lambda}\int\left[P(f + \lambda h_x,T) - P(f,T)\right] d\mu(x)$$

décroît vers $\int g(t,x')\, d\nu_x(t)\, dm(x')\, d\mu(x)$ quand λ décroît vers 0. En intégrant cette dernière expression d'abord en x', puis en t et enfin en x, elle peut s'écrire

$$\int \left(\int g(t,x')\, dm(x') \right) d\nu_x(t)\, d\mu(x)$$

ou encore

$$\int \left(\int g(t,x')\, dm(x') \right) d\mu(t)$$

ce qui est l'expression annoncée.

Considérons la fonction $F(x,x') = f(x) + f(x')$ dans $C(X\times X')$.

<u>Lemme 3.3.</u>

Soit P la pression sur $(X\times X', T\times T'), \lambda > 0$, g appartenant à $C(X\times X')$, nous avons:

$$P(F + \lambda g) \leq P(f,T) + P\left(f + \lambda \int g(\cdot,t)\, dm(t)\, ,\, T\right) + \lambda \sup_{M(X,T)} s_\lambda\, ,$$

où s_λ est une fonction semi-continue supérieurement sur $M(X,T)$, décroissant vers 0 avec λ.

<u>Démonstration</u>.

D'après le principe variationnel (proposition 1.2.) nous avons en effet:

$$P(F + \lambda g) = \sup\{h(M, T\times T') + \int (F + \lambda g) dM \mid M \in M(X\times X', T\times T')\}$$

ou, en isolant ce qui dépend de x :

$$P(F + \lambda g) \leq \sup\{h(\mu,T) + \int f d\mu + R(\lambda,\mu) \mid \mu \in M(X,T)\}\, ,$$

où

$$R(\lambda,\mu) = \sup\{h(M/X) + \int (f\circ \Pi_{X'} + \lambda g)\, dM \mid M \in M(X\times X', T\times T')\ M\circ \Pi_X^{-1} = \mu\}.$$

Le système étant faiblement expansif, la fonction $R(\lambda,\mu)$ est semi-continue supérieurement sur $M(X,T)$. Définissons la fonction semi-continue supérieurement s_λ par

$$s_\lambda(\mu) = \frac{1}{\lambda}\left[R(\lambda,\mu) - P(f,T)\right] - \int g(t,t')\, d\mu(t)\, dm(t')\, .$$

Vérifions d'abord la formule annoncée. Nous avons:

$$P(F + \lambda g) \leq P(f,T) + \lambda \sup_{\mu \in M(X,T)} s_\lambda(\mu) + \sup_{\mu \in M(X,T)} h(\mu,T) + \int f d\mu + \int g(t,t') d\mu(t) dm(t)$$

et le dernier terme est bien egal à $P(f + \lambda\int g(.,t')\, dm(t'),T)$ d'après la proposition 1.2. . Vérifions ensuite que $s_\lambda(\mu)$ décroît vers 0 quand λ décroît vers 0 :

D'après le principe variationnel relativisé (proposition 1.3.), nous pouvons écrire:

$$R(\lambda,\mu) = \int_X P(T, f\circ\Pi_{X'} + \lambda g, x)\, d\mu(x) .$$

Remarquons d'autre part que la définition de $P(T, f\circ\Pi_{X'} + \lambda g, x)$ coïncide avec la définition de $P(f + \lambda h_x, T)$ où h_x est l'élément de $B(X)$ défini par $h_x(n,x') = g(T^n x, x')$.

Nous pouvons donc écrire $s_\lambda(\mu)$ sous la forme:

$$s_\lambda(\mu) = \frac{1}{\lambda}\left(\int P(f + \lambda h_x, T)\, d\mu(x) - P(f,T)\right) - \int g(t,t')\, d\mu(t')dm(t) .$$

D'après le lemme 3.2., s_λ décroît vers 0 avec λ .

<u>Lemme 3.4.</u>

La fonction F n'admet qu'une mesure d'équilibre dans $M(X\times X', T\times T')$.

<u>Démonstration.</u>

Nous allons montrer que la pression est dérivable en F dans $C(X\times X')$. Puisque la mesure produit $m\times m$ est une mesure d'équilibre pour F , nous savons déjà que $DP(F;g) \geq \int g\, dm\times m$ pour toute fonction g de $C(X\times X')$.

D'autre part nous avons d'après le lemme 3.3.,

$$DP(F,g) = \lim_{\lambda\searrow 0} \frac{1}{\lambda}\left[P(F + \lambda g) - P(F)\right]$$

$$\leq \lim_{\lambda\searrow 0} \frac{1}{\lambda}\left[P(f + \lambda\int g(.,t)\, dm(t), T) - P(f,T)\right] + \lim_{\lambda\searrow 0} \sup_{M(X,T)} s_\lambda .$$

Les fonctions s_λ étant semi-continues supérieurement et décroissant vers 0 sur un compact, convergent uniformément vers 0 et le dernier terme est nul:

$$DP(F,g) \leq \lim_{\lambda\searrow 0} \frac{1}{\lambda}\left[P(f + \lambda\int g(.,t)\, dm(t), T) - P(f,T)\right] .$$

La fonction P étant dérivable et de dérivée m sur les suites constantes, nous obtenons: $DP(F,g) \leq m(\int g(.,t)\, dm(t)) = \int g\, dmxm$. La mesure mxm est l'unique mesure d'équilibre pour F.

IV. Complements et remarques.

4.1. Un système (X,T) est dit expansif s'il existe un nombre δ tel que dès que $x \neq y \in X$, il existe un entier n avec $d(T^n x, T^n y) > \delta$. Il est facile de vérifier avec l'aide du lemme 2.1. qu'un système expansif est faiblement expansif. M. Misiurewicz [8] a introduit la notion de système asymptotiquement h-expansif. Pour vérifier qu'un système asymptotiquement h-expansif est faiblement expansif, il suffit de remplacer $h(m)$ par $h(m/Y)$ dans l'énoncé et la démonstration du théorème 4.2. de [8].

4.2. Soit τ une action de Z_+^d, d fini. Les résultats et les démonstrations s'étendent sans difficultés si on remplace toutes les moyennes de Cesaro par des moyennes sur les cubes de côté n. La proposition 1.1. est encore vraie dans le cas d'une action de Z^d (cf. [3] théorèmes 4.1. et 4.2.).

4.3. L'espace des suites ergodiques est la somme directe de l'espace $C(X)$ et de l'espace $D(X)$ des suites $f(n,x)$ telles que les fonctions $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(i,x)$ convergent uniformément vers 0; nous avons le résultat suivant:

Théorème 3.

Soient (X,T) faiblement expansif et f appartenant à $C(X)$. Supposons que la fonction $P(\cdot,T)$ est dérivable en f dans les directions de $D(X)$, de dérivée nulle. Toutes les mesures d'équilibre extrémales pour f sont alors d'entropie complètement positive.

Démonstration.

La démonstration suit les étapes du § 3: Soient Y un espace métrique compact , S une transformation continue de Y sur Y , uniquement ergodique (il existe une unique mesure ν dans $M(Y,S)$) . Tout point de Y est alors quasi-régulier de mesure limite ν . Considérons le produit $(Y\times X,\ S\times T)$ et pour y dans Y , g dans $C(Y\times X)$ la suite h_y de $B(X)$: $h_y(n,x) = g(T^n y,x)$.

Lemme 4.1.

La suite h_y est une suite ergodique de $B(X), \hat{h}_y = \int g(t,x)\, d\nu(t)$: (cf. Lem. 3.1.)

Supposons que la fonction $P(\cdot,T)$ est dérivable dans les directions de $D(X)$, de dérivée nulle.

Lemme 4.2.

La fonction $\lambda \longrightarrow \frac{1}{\lambda}\int\left[P(f + \lambda h_y,T) - P(f,T)\right] d\nu(y)$ décroît quand λ tend vers 0 vers $DP(f; \int g(t,.)\, d\nu(t))$.

Démonstration. (cf. Lemme 3.2.)

La suite h_y est la somme de la suite constante $\int g(t,\cdot)\, d\nu(t)$ et d'une suite h_y' de $D(X)$. Nous avons

$$\frac{1}{\lambda}\left[P(f + \lambda h_y,T) - P(f,T)\right]$$

majoré par

$$\frac{1}{2\lambda}\left[P(f + 2\lambda\int g(t,\cdot)\, d\nu(t),T) - P(f,T)\right] + \frac{1}{2\lambda}\left[P(f + 2\lambda h_y',T) - P(f,T)\right] .$$

Le deuxième terme décroît vers 0 par hypothèse, le premier décroît vers $DP(f; \int g(t,\cdot)\, d\nu(t))$.

Supposons $h(\nu,S)$ fini et notons encore P la pression sur $Y\times X$.

Lemme 4.3.

Soit g appartenant à $C(Y\times X)$. Nous avons:

$$P(f\circ \Pi_X + \lambda g) \leq h(\nu,S) + P(f,T) + \lambda DP(f, \int g(t,\cdot)\, d\nu(t)) + \lambda s_\lambda ,$$

où s_λ décroît vers 0 avec λ .

Démonstration. (cf. Lemme 3.3.)

Notons M_f l'ensemble de mesures d'équilibre pour f dans $M(X,T)$.

Lemme 4.4.

L'ensemble des mesures d'équilibre pour $f_\circ\Pi_X$ dans $M(Y\times X, S\times T)$ est $\nu\times M_f$.

Démonstration. (cf. Lemme 3.4.)

Nous avons d'abord $P(f_\circ\Pi_X) = h(\nu,S) + P(f,T)$ et les mesures de la forme $\nu\times m$, $m\in M_f$ sont bien des mesures d'équilibre pour $f_\circ\Pi_X$. Réciproquement si m est une mesure d'équilibre pour $f_\circ\Pi_X$, si $g\in C(Y\times X)$, $m(g) \leq DP(f_\circ\Pi_X;g)$

Or

$$DP(f_\circ\Pi_X;g) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\left[P(f_\circ\Pi_X + \lambda g) - P(f_\circ\Pi_X)\right] = DP(f;\int g(t,\cdot)\, d\nu(t)) \ .$$

D'où :

$$DP(f_\circ\Pi_X;g) \leq \sup_{\mu\in M_f} \mu(\int g(t,\cdot)\, d\nu(t)) \ .$$

Nous avons finalement :

$$\inf_{\mu\in M_f} \nu\times\mu(g) \leq m(g) \leq \sup_{\mu\in M_f} \mu\times\nu(g) \ ;$$

la mesure m doit appartenir à l'enveloppe convexe vaguement fermée de l'ensemble $\nu\times M_f$, qui est $\nu\times M_f$ lui-même. Pour démontrer le théorème 3 à partir du lemme 4.4., nous modifions légèrement l'argument de la proposition 1.4.. Soit donc m une mesure extrémale de M_f . Le système (X,T,m) est ergodique. D'après le théorème de Jewett-Krieger [6] , nous pouvons choisir un système (Y,S,ν) uniquement ergodique et isomorphe à (X,T,m) . Si la mesure m n'est pas d'entropie complètement positive, il est possible alors de construire sur $(Y\times X, S\times T)$ une mesure d'équilibre pour $f_\circ\Pi_X$ qui n'est pas une mesure produit, ce qui contredit le lemme 4.4. et achève la démonstration. Les méthodes du § 2 ne permettent pas de démontrer la réciproque du théorème 3 (contrairement à ce qui avait été annoncé lors de la conférence!) .

4.4. Les démonstrations des paragraphes 2 et 3 peuvent être adaptées pour obtenir également les résultats suivants : Soit $G(X)$ l'espace des suites presque-périodiques de fonctions sur X c'est-à-dire telles que pour tout ε il existe $n_1,\dots,n_k$ tels que :

$$\sup_{p\in Z}\ \inf_{n_i}\ \sup_{\substack{m\in Z\\ x\in X}} \left| f(n_i + m,x) - f(p + m,x)\right| < \varepsilon \ .$$

A chaque suite presque périodique est attachée une unique fonction $\hat{f}$, moyenne de la suite f. On définit la pression sur $G(X)$ comme au § 1. Soit $F(X)$ le sous-espace des suites presque-périodiques de moyenne nulle. L'espace des suites constantes de $G(X)$ est identifié avec $C(X)$. Nous avons alors les résultats :

<u>Théorème 4</u>.

Soit (X,T) un système faiblement expansif, f appartenant à $C(X)$. Toute mesure d'équilibre extrêmale pour f est faiblement mélangeante si et seulement si la fonction P définie sur $G(X)$ est dérivable en f dans les directions de $F(X)$, de dérivée nulle.

<u>Théorème 5</u>.

Soit (X,T) un système faiblement expansif, f appartenant à $C(X)$. Il n'existe qu'une mesure d'équilibre m pour f et le système (X,T,m) est faiblement mélangeant si et seulement si la pression P définie sur $G(X)$ est dérivable en f, de dérivée $m(f)$.

Le théorème 5 est une conséquence du théorème 4. La démonstration du théorème 4 suit les étapes de celle du théorème 2 :

Appelons Z' le compactifié de Bohr du groupe Z des entiers naturels, S la transformation $Sz = z + 1$. Nous identifions l'espace $G(X)$ à l'espace des fonctions continues sur $Z' \times X$. Supposons (X,T) faiblement expansif. Les plans

tangents à P en f sont alors des mesures de $M(Z'xX, SxT)$ telles que $M \circ \Pi_X^{-1}$ soit une mesure d'équilibre pour f (cf. § 2) . Supposons que tous les états extrémaux soient faiblement mélangeants. Alors par disjonction, ([5] Théorème 1) tout plan tangent à P est la mesure produit de la mesure de Haar sur Z' et d'une mesure de M . La valeur d'une telle mesure sur $F(X)$ est nulle.
Réciproquement supposons que la pression P est dérivable en f dans les directions de $F(X)$ et soit (Y,S,ν) un système dynamique où Y est un groupe compact abélien monothétique (il existe c tel que la suite nc, $n \in Z$ est dense dans Y) , S la transformation $Sy = y+c$, ν la mesure de Haar sur Y . Nous considérons le produit (YxX, SxT) . Il est immédiat que si g appartient à $C(YxX)$, y à Y, la suite $h_y(n,x) = g(y + nc, x)$ est presque-périodique. Il s'en déduit, comme au § 4.3., que les mesures d'équilibre dans $M(YxX, SxT)$ pour $f \circ \Pi_X$ sont les mesures produits de ν par les mesures d'équilibre sur X pour f . Supposons alors que m soit une mesure d'équilibre pour f extrémale (et donc ergodique) et non faiblement mélangeante; en choisissant Y facteur de (X,m), la mesure $\nu x m$ sur YxX n'est pas ergodique et ceci est en contradiction avec l'assertion précédente .

4.5. On dit qu'un système (X,T) vérifie la propriété de spécification si pour tout $\delta > 0$, il existe un entier $p(\delta)$ tel que pour chaque suite d'entiers

$$a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 \dots < a_n \leq b_n$$

avec $b_j - a_{j-1} > p(\delta)$, pour chaque $k \geq b_n - a_1 + p(\delta)$ et pour chaque famille $x_1 \dots x_n$ de points de X , on peut trouver un point x de période k tel que $d(T^s x, T^s x_j) < \delta$, pour $a_j \leq s < b_j$;

D'autre part pour f appartenant à $C(X)$, on considère les sommes

$$S_n(f) = \sum_{i=o}^{n-1} f(T^i \cdot)$$

et on appelle $V(T)$ l'ensemble des fonctions tels que il existe $\varepsilon > 0$ et K avec pour tout n ,

$d(T^k x, T^k y) \leq \varepsilon$ pour $0 \leq k < n$ entraîne $|S_n f(x) - S_n f(y)| \leq K$.

R. Bowen [2] a montré que si (X,T) est un système expansif vérifiant la propriété de spécification; les fonctions de $V(T)$ admettent une seule mesure d'équilibre. Le système produit $(X \times X', T \times T')$ de deux copies de (X,T) a les mêmes propriétés et la fonction $F = f \circ \Pi_X + f \circ \Pi_{X'}$ appartient à $V(T \times T')$ si f appartient à $V(T)$. La proposition 1.4. permet d'établir :

Théorème 6.

Sous les conditions de [2] , l'unique mesure d'équilibre définit un K-système.

References :

[1] Berg A. Convolution and invariant measures, maximal entropy Math. Syst. Theory 3 , (1969) 146-150.

[2] Bowen R. Some systems with unique equilibriumstate Math. Syst. Theory 8 , (1974) 193-202.

[3] Conze J.P. Entropie d'un groupe abélien de transformations Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 25 (1972) 11-30.

[4] Dunford N., Schwartz J.T. Linear operator, part 1 Interscience publishers, New York 1958.

[5] Furstenberg H. Disjointness in ergodic theory Math. Syst. Theory 1 , (1967) 1-49 .

[6] Krieger W. On unique ergodicity. Proc. of the sixth Berkely Symp. on math. Stat. and probability 1 , (1972) 327-346.

[7] Ledrappier F., Walters P. A relativized variational principle for continuous transformations . (to appear in J. London Math. Soc.)

[8] Misiurewicz M. Topological conditional entropy Studia Mathematica 55, (1976) 175-200.

[9] Misiurewicz M. A short proof of the variational principle for a Z_+^n action on a compact space. International Conference on Dynamical Systems in Math. Physics, Astérisque 40 (1976) 147-158.

[10] Neveu J. Martingales à temps discret. Masson, Paris 1972.

[11] Rohlin V.A. Lectures on the entropy theory of measure preserving transformations. Russian Math.Surveys 22 (1967) 1-52.

[12] Ruelle D. On the use of small extemal fields in the problem of symmetry breakdown in statistical mechanics. Annals of Phys. 69 (1972)364-374.

[13] Ruelle D. Statistical mechanics on a compact set with Z action satisfying expansiveness and specification. Trans.Amer.Math.Soc. 185 (1973) 237-251.

[14] Walters P. A variational principle for the pressure of continuous transformations. Amer.J. Math. 97 (1975) 937-971.

F. Ledrappier
106 rue de Fontenay
F. 94300 Vincennes
France