A. JAFFE

Problèmes ergodiques dans la théorie quantique des champs

Astérisque, tome 40 (1976), p. 105-112
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__40__105_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 40 (1976) p.105-112

PROBLÈMES ERGODIQUES DANS LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

A. JAFFE
Harvard University

Soit R^d l'espace-temps Euclidien de dimension égale à d . La théorie quantique des champs est maintenant bien connue dans les cas $d = 2$ ou bien $d = 3$, et le problème plus difficile est le cas $d = 4$. Aujourd'hui nous descendons souvent à $d = 2$.

Soit $x \in R^d$. La configuration du champ, φ , est un élément d'un espace de fonctions généralisées. C'est convenable de prendre

$$\varphi \in \mathcal{S}'_r(R^d) ,$$

la partie réelle de l'espace des distributions tempérées sur R^d . Nous définissons une théorie des champs en donnant une mesure de probabilité dq sur $\mathcal{S}'_r(R^d)$. On peut donner également la fonction caractéristique de la mesure dq , c'est-à-dire

$$S\{f\} = \int e^{i\varphi(f)}\, dq \ , \ f \in \mathcal{S}(R^d)$$

où $\varphi : f \longmapsto \varphi(f) \in \mathbb{C}$.

1.- Les axiomes de Osterwalder et Schrader

Pour trouver la physique, il faut que $S\{f\}$ possède quelques propriétés supplémentaires. Une forme convenable est les axiomes de Osterwalder et Schrader [2] . Nous donnons les axiomes dans une forme simple :

A.O. $S\{f\}$ est la fonction caractéristique d'une mesure sur $\mathcal{S}'_r(R^d)$.

A.1.- Régularité. $S\{f\} \in C^{\infty}$. Les fonctions de Schwinger sont les dérivées

$$S_n(f_1,\ldots,f_n) = \frac{d^n}{d\mu_1\ldots d\mu_n} \quad S\{\sum_{i=1}^{n} \mu_i \; f_i\}|_{\mu_i=0}$$

On écrit les densités (dans $\mathcal{S}'(R^{nd})$) de S_n par $S_n(x_1,\ldots,x_n)$.

A.2.- Invariance. $S\{E\ f\} = S\{f\}$, ou $E : R^d \to R^d$ est une transformation Euclidienne, et

$$(E\ f)(x) \equiv f(E^{-1}x)$$

Donc E agit comme un automorphisme sur l'algèbre des fonctions de $\varphi(f)$, laissant invariante la mesure dq.

A.3.- O.-S. positivité. Soit $A = A(\varphi(f_1),\ldots,\varphi(f_n))$, où $\operatorname{supp} f_i \subset \{x=(x_o,\vec{x}) : x_o = t \geqslant o\}$; c'est-à-dire l'ensemble des x à temps positifs. Donc

$$\int \hat{A}\ A\ dq \geqslant 0 ,$$

où

$$\hat{A} = A(\varphi(\hat{f}_1),\ldots,\varphi(\hat{f}_n))^* ,$$

où $*$ est la conjugaison complexe et $\hat{f}(x) = f(-x_o,\vec{x})$.

Théorème 1. [2] .

Donné A0-A3 , il existe une théorie quantique des champs de Wightman (à part l'unicité du vide) , telle que les fonctions de Schwinger $S_n(x_1,\ldots,x_n)$ se prolongent analytiquement dans chaque variable du temps $t \to i\ t$, donnant les fonctions de Wightman.

2.- Les questions fondamentales

Avec ce théorème, on voit que la mesure dq contient toute la physique. Alors nous posons les trois questions fondamentales.

I.- Est-ce que la mesure dq existe ?

II.- La mesure dq est-elle ergodique par rapport au sous-groupe des translations du temps ? Si le vide est unique, dq est ergodique.

III.- Comment classer les composantes ergodiques de dq et donner une interprétation physique ? Comment dessiner le diagramme des phases ?

3.- Existence (la théorie constructive des champs)

3.0. Le champ libre

Dans ce cas, $S\{f\} = S_o\{f\} = \exp\left[-\frac{1}{2} <f,f>_{-1}\right]$, où l'espace de **Sobolev** H_{-1} a le produit scalaire $<f,g>_{-1} = <f,(-\Delta+1)^{-1}g>_{L_2}$. Nous écrivons dans ce cas trivial $dq = d\varphi$. C'est-à-dire, $d\varphi$ est la mesure Gaussienne avec la moyenne zéro et la covariance égale à $(-\Delta+1)^{-1}$.

3.1. Le champ φ^4

Les cas qui nous intéressent donnent des mesures non-Gaussiennes, et une physique (non triviale) des particules avec interaction. Le modèle dit φ à la puissance quatre est l'exemple le plus simple.

Soit $\varphi_\kappa(x)$ le champ régularisé

$$\varphi_\kappa = (\delta_\kappa * \varphi)$$

où δ_κ est une C_o^∞ approximation positive de la fonction de Dirac ,

$$0 \lesssim \delta_\kappa(x) = \kappa^2 \, g(\kappa x)$$

$$\int \delta_\kappa(x) \, dx = 1$$

Avec cette définition, $\varphi_\kappa(x) \in L_p(d\varphi)$ quel que soit $p < \infty$, et

$$c_\kappa \equiv \int \varphi_\kappa(x)^2 \, d\varphi = O(\ln \kappa) \qquad (d = 2) .$$

La singularité logarithmique de c_κ représente la singularité de la fonction de Green diagonale. La constante c_κ est indépendante de x en raison de l'invariance de $d\varphi$ sous les translations.

Nous définissons pour $\lambda \geqslant 0$ et pour $d = 2$,

$$V(\kappa,\Lambda) = \lambda \int_\Lambda d\,x \left[\varphi_\kappa(x)^4 - 6c_\kappa\, \varphi_\kappa(x)^2 + 3\, c_\kappa^2\right] \tag{1}$$

Comme $V(\kappa,\Lambda) \geqslant -O(c_\kappa^2\, |\Lambda|)$, nous voyons que $\exp[-V(\kappa,\Lambda)] \in L_p(d\,\varphi)$, quel que soit $p < \infty$. Soit

$$dq(\kappa,\Lambda) = \frac{e^{-V(\kappa,\Lambda)}\,d\varphi}{\int e^{-V(\kappa,\Lambda)}\,d\varphi}$$

<u>Théorème 2</u>. [3] [4] [5]

$$S\{f\} = \lim_{\Lambda \uparrow R^2} \lim_{\kappa \to \infty} \int e^{i\,\varphi(f)}\, dq(\kappa,\Lambda) = \int e^{i\,\varphi(f)}\, dq$$

existe et satisfait les axiomes de Osterwalder et Schrader.

4.- <u>Ergodicité</u> (résultats connus)

<u>Théorème 3</u>. (a) [3]

Soit λ *suffisamment petit. Alors* dq *est ergodique.*

(b) [6]

Soit λ *suffisamment grand. Alors* dq *n'est pas ergodique.*

En effet, dans le cas de (b), il existe au moins deux composantes ergodiques reliées par l'automorphisme $\varphi \longrightarrow -\varphi$. La preuve de (b) contient en même temps l'expansion de cluster [3] aussi bien que l'argumentation de Peierls, adaptée pour la théorie quantique des champs.

C'est clair que l'on s'intéresse d'avoir une théorie plus générale de la structure des phases.

5.- L'approximation classique

C'est l'approximation classique qui donne la motivation de ces résultats.

On généralise le cas $P(\varphi) = \lambda \varphi^4$ en considérant un polynôme $P(\xi)$

$$P(\xi) = \sum_j \alpha_j \xi^j$$

qui est borné inférieurement . On prend dans ce cas

$$V(\kappa,\Lambda) = \sum_j \alpha_j \int_\Lambda dx\, c_\kappa^{j/2} H_j(c_\kappa^{-1/2} \varphi_\kappa(x))$$

où H_j est le $j^{\text{ième}}$ polynôme d'Hermite.

L'approximation classique est décrite par deux paramètres ξ_c , m_c définis par

$\xi_c \equiv$ une valeur de ξ qui minimalise $P(\xi) + \frac{1}{2} \xi^2$

$m_c^2 \equiv P''(\xi_c) + 1$

En prenant la série de Taylor,

$$P(\xi)+\frac{1}{2} \xi^2 = \text{constante} + \frac{1}{2} m_c^2(\xi-\xi_c)^2 + \sum_{j\geqslant 3} \lambda_j(\xi-\xi_c)^j \;,$$

l'approximation classique est valide si

1) $|\lambda_j| \ll 1$, $j \geqslant 3$,

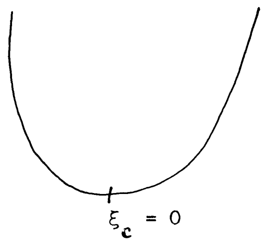
2) $m_c = 1$

On s'attend à ce que la mesure dq est presque Gaussienne, et que

$$\langle\varphi\rangle \equiv \int\varphi\, dq \sim \xi_c$$

(et que la masse m des particules satisfait $m \sim m_c$).

Le cas $P(\xi) = \lambda \xi^4$ du théorème 3(a) est classique. La courbe $\lambda \xi^4 + \frac{1}{2} \xi^2$ a la forme



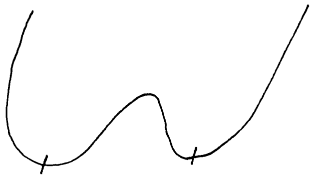
avec $\xi_c = 0$, $m_c = 1$. La solution exacte pour dq donne $\langle\varphi\rangle = 0$, $m \sim 1$.

Le cas du théorème 3(b) n'est pas classique. Il faut reparamétriser ; voir [7] .

On trouve alors le polynôme équivalent

$$P(\xi) = \lambda\xi^4 - \frac{3}{4}\xi^2 + (64\lambda)^{-1} \quad , \lambda << 1$$

et $P(\xi) + \frac{1}{2}\xi^2$ a la forme



avec les valeurs $\xi_c = \xi_+, \xi_- = \pm(8\lambda)^{-1/2}$, $m_c = 1$. Alors l'approximation classique donne deux solutions (deux phases).

6.- <u>Les problèmes ouverts</u>

1. Dans le cas classique, est-ce que l'approximation classique décrit toutes les composantes ergodiques de dq ? [8]

2. Avec un polynôme $P_{pair}(\xi) - \mu\,\xi$, $\mu > 0$, est-ce qu'il existe une seule solution ergodique pour dq ?

3. Est-ce que les surfaces des transitions de phase sont analytiques par morceau ?

4. Est-ce qu'il existe des polynômes $P(\xi)$ tels que l'on ait

trois, quatre, ... composantes ergodiques pour dq ? (Les points triples ...)

5. Est-ce qu'il existe une autre approximation simple qui décrit la structure des phases en dehors de la région classique ?

6. Après ces questions du vide, on veut étudier le spectre de masse dans les théories des champs avec les transitions de phase.

Je veux remercier M. Charles Pfister qui m'a aidé à apprendre ces mots français.

REFERENCES

1. Supported in part by the National Science Foundation under Grant, MPS 75-21212

2. K. OSTERWALDER et R. SCHRADER. Axioms for Euclidean Green's Functions, Commun. Math. Phys. 31, (1973) 83-113 et 42 (1975) 281-305

3. J.GLIMM, A. JAFFE et T. SPENCER. The Wightman axioms and particle structure in the $P(\varphi)_2$ quantum field model. Ann. Math. 100 (1974) 585-632

______________. The particle structure of the weakly coupled $P(\varphi)_2$ model and other applications of high temperature expansions. Springer Lecture Notes in Physics, t. 25

4. E. NELSON. Probability theory and quantum field theory. Springer Lecture Notes in Physics, t. 25

F. GUERRA, L. ROSEN et B. SIMON. The Euclidean quantum field theory as classical statistical mechanics. Ann. Math. 101 (1975), 111-259

J. FRÖHLICH. Verification of axioms for Euclidean and relativistic fields and Haag's theorem in a class of $P(\varphi)_2$ models. Ann. Inst. H. Poincaré.

5. Il existe aussi une autre construction utilisant les C^*-algèbres qui pourrait être utile pour la discussion de l'unicité du vide. Voir

J.GLIMM et A. JAFFE. The $\lambda\varphi^4_2$ quantum field theory without cutoffs III. The physical vacuum Acta Math. 125 (1970) 203-261.

______________. Quantum field models, dans la mécanique statistique et la théorie des champs, éditeurs C. de Witt et R. Stora, Gordon et Breach (1971).

6. J.GLIMM A. JAFFE et T. SPENCER. Phase transitions for φ^4_2 quantum fields. Commun. Math. Phys. 45 (1975), 293-320.

______________. A Convergent Expansion about Mean Field Theory, Part I. The Expansion, and Part II. Convergence of the Expansion. Annals of Physics, to appear.

7. ______________. Existence of phase transitions for φ^4_2 quantum fields. Dans la conférence de Marseille, Juin 1975

8. Dans le cas de la C^*-algèbre $\mathfrak{A}$ des observables locales [5], on cherche tous les états ω qui sont invariants sous le groupe des automorphismes $\sigma_{\{\Lambda,a\}}$ de Lorentz et qui ont l'énergie positive.