

Astérisque

GENEVIÈVE POURCIN

Théorème de Riemann-Roch pour les schémas quasi-projectifs

Astérisque, tome 36-37 (1976), Séminaire Bourbaki, exp. n° V, p. 86-100

http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__36-37__86_0

© Société mathématique de France, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH
POUR LES SCHÉMAS QUASI-PROJECTIFS

par Geneviève POURCIN

I - Classes de Chern localisées.

Soit X un sous-schéma fermé d'une variété lisse et irréductible M .
Soit E_* un complexe de fibrés sur M exact sur $M-X$. On a défini (exposé 4, § 1 et 2) un morphisme

$$\sigma : M \times \mathbb{P}^1 - X \times \{\infty\} \longrightarrow G \times \mathbb{P}^1$$

où $G = G_1 \times_M \dots \times_M G_r$ et $G_i = \text{Grass}_{\text{rang } E_i} (E_i \oplus E_{i-1})$.

Soit W l'adhérence de l'image de σ dans $G \times \mathbb{P}^1$; W définit une famille de cycles $\{W_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{P}^1\}$ rationnellement équivalents sur G et $W_\infty = [M_*] + Z$ où M_* est birationnellement équivalent à M et Z est concentré au-dessus de X (exposé n°4, § 2).

On note $H_*(X) = A_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ et $\text{ch} : K^0(G) \longrightarrow A^*(G) \otimes \mathbb{Q} = H^*(G)$ le caractère de Chern, défini canoniquement à partir des classes de Chern (exposé n°2).

Soit $\pi : G \longrightarrow M$ la projection; on note encore Z l'image de Z dans $H_*(\pi^{-1}(X))$ et ξ le fibré virtuel canonique sur G . $H_*(\pi^{-1}(X))$ est muni d'une structure de $H^*(G)$ -module (exposé n°2); on note \wedge la loi externe et on définit

$$\text{ch}_X^M(E_*) = \pi_*(\text{ch } \xi \wedge Z) \in H_*(X).$$

PROPOSITION 1. - Soit $i_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(M)$ le morphisme déduit du plongement de X dans M . On a

$$i_*(\text{ch}_X^M(E_*)) = \text{ch}(E_*) \wedge [M].$$

Cela résulte du fait que W_∞ et W_0 sont deux cycles rationnellement équivalents et des deux assertions suivantes :

- (i) $ch(\xi) \wedge Z = ch(\zeta) \wedge W_\infty$
- (ii) $\pi_* (ch(\xi) \wedge W_0) = ch(E_*) \wedge [M] \in H_*(M)$.

Pour prouver (i) , il suffit de montrer que $ch\xi \wedge [M_*] = 0$; comme, pour tout i , $\ker d_i|_{M-X}$ est un fibré, on peut considérer

$$G_* = \prod_i \text{Grass}_{k_i}(E_i) \quad \text{où } k_i = \text{rang } \ker d_i \quad .$$

M_* est contenu dans l'image de G_* par le plongement

$$\begin{aligned} G_* &\longleftarrow G \\ (S_i) &\longrightarrow (S_i \oplus S_{i-1}) \end{aligned}$$

et $\xi|_{G_*} = 0$, d'où (i) .

On déduit (ii) du fait que $\xi|_{W_0} = \sum (-1)^i E_i$, $W_0 = \sigma(M \times (0,1)) \simeq M$ et de la formule de projection.

II - Propriétés des classes de Chern localisées.

On se propose de montrer que les classes $ch_X^M(\)$ ainsi définies vérifient les propriétés suivantes.

a) Localisation.

Soit Y un sous-schéma fermé de M contenant X . Alors

$$j_* (ch_X^M(E_*)) = ch_Y^M(E_*)$$

$j_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$ étant défini par le plongement de X dans Y .

b) Excision.

Soient M_0 un ouvert de M , $X_0 = X \cap M_0$ et $i^* : H_*(X) \longrightarrow H_*(X_0)$ la restriction. Alors

$$i^* (ch_X^M(E_*)) = ch_{X_0}^{M_0}(E_*|_{M_0}) \quad .$$

c) Homotopie.

Soient C une courbe lisse et $f : M \longrightarrow C$ un morphisme plat. On suppose que $f|_X$ est plat et que $\text{coker}[E_1 \longrightarrow E_0]$ est C -plat. Soient $t \in C$ et $i_t^* : H_*(X) \longrightarrow H_*(X_t)$ le morphisme de Gysin. Alors

V-03

(i) $ch_{X_t}^{M_t}(E_{\bullet,t}) = i_t^* ch_X^M(E_{\bullet})$

(ii) si de plus $X = Y \times C$, tous les cycles $ch_Y^{M_t}(E_{\bullet,t})$ sont égaux dans $H_{\bullet}(Y)$.

d) Additivité.

Soit $0 \rightarrow E'_1 \xrightarrow{b} E_{\bullet} \rightarrow E'' \rightarrow 0$ une suite exacte de complexes sur M acycliques sur $M-X$.

$$ch_X^M(E_{\bullet}) = ch_X^M(E'_1) + ch_X^M(E'') .$$

e) Module.

Soit F_{\bullet} un complexe de fibrés quelconque sur M et E_{\bullet} un complexe acyclique sur $M-X$. Alors

$$ch_X^M(F_{\bullet} \otimes E_{\bullet}) = ch(F_{\bullet}) \wedge ch_X^M(E_{\bullet}) .$$

f) Pull back par morphismes plats.

Soit

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

un carré cartésien où f est plat. Alors

$$g^*(ch_X^M(E_{\bullet})) = ch_{X'}^{M'}(f^*E_{\bullet}) .$$

III - Démonstrations de a)...f) .

Les propriétés a) et b) résultent immédiatement de la construction de ch_X^M .

Démonstration de c) (homotopie).

Soit $\rho : V \rightarrow C \times P^1$ un morphisme birationnel tel que :

V est une surface lisse,

ρ est un isomorphisme au-dessus du complémentaire dans $C \times P^1$ d'un ensemble fini de $C \times \{\infty\}$,

si \tilde{W} désigne l'adhérence dans G_V de $\rho^*(W|_{C \times A^1})$, \tilde{W} est V -plat .

Notons $p : \tilde{W} \rightarrow V$ la projection. Alors \tilde{W} étant équidimensionnel sur V , pour tout cycle y sur V , le cycle $\tilde{W}_p \cdot y$ est défini.

D'autre part, si $t \in \mathbb{C}$, si D est la courbe non singulière sur V isomorphe par ρ à $\{t\} \times \mathbb{P}^1$ et W_t le cycle permettant de calculer

$$\text{ch}_{X_t}^{M_t}(E_{\bullet,t}) \quad \text{on a} \\ (1) \quad \tilde{W}_p \cdot D = W_t .$$

En effet, $\tilde{W}_p \cdot D$ est D -plat et W_t est une sous-variété de $\tilde{W}_p \cdot D$ coïncidant avec $\tilde{W}_p \cdot D$ au-dessus de l'ouvert dense $\{t\} \times \mathbb{A}^1$ de D et on applique le résultat suivant :

PROPOSITION 2.- Soient $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme propre et plat et $Z \subset X$ un sous-schéma fermé. Alors l'ensemble des points y de Y tels que $Z(y) = X(y)$ est fermé dans Y .

Enfin soit C' la courbe non singulière de V isomorphe par ρ à $C \times \{\infty\}$; on a $X_{C'} = X$, $M_{C'} = M$ et, d'après la proposition précédente,

$$(2) \quad \tilde{W}_p \cdot C' = W_\infty .$$

Soit v_0 (resp. v_1) le point de D (resp. C') au-dessus de (t, ∞) . Soit $\pi : G_V \rightarrow M_V$ la projection; pour toute sous-variété T de V , on note

$$\pi_{T*} : H_*(\pi^{-1}(X_T)) \longrightarrow H_*(X_T) ,$$

l'application déduite de π .

Comme $X_{v_0} = X_t$, il résulte des égalités (1) et (2) et de l'égalité (i) dans la démonstration de la proposition 1 que

$$\text{ch}_{X_t}^{M_t}(E_{\bullet,t}) = \pi_{v_0*} * (\text{ch } \xi \cap \tilde{W}_p \cdot v_0) \\ \text{ch}_X^M(E_{\bullet}) = \pi_{C'*} * (\text{ch } \xi \cap \tilde{W}_p \cdot C') .$$

Soit $i_{v_0}^* : H_*(X_D) \rightarrow H_*(X_{v_0})$ le morphisme de Gysin. On a :

$$\pi_{v_0*} * (\text{ch } \xi \cap \tilde{W}_p \cdot v_0) = i_{v_0*} [\pi_{D*} (\text{ch } \xi \cap \tilde{W}_p \cdot D)] .$$

D'autre part $\rho^{-1}((t, \infty))$ est réunion de courbes rationnelles L_1, \dots, L_n se coupant transversalement [2]. Si L_1 est telle que $v_0 = D \cap L_1$, on a de

même

$$\text{ch}_{X_t}^M(E_{\bullet, t}) = i_{v_0^*} (\pi_{L_1}^* (\text{ch } \xi \cap \tilde{W}_{\bullet, p} L_1))$$

où $i_{v_0^*} : H_{\bullet}(X_{L_1}) \rightarrow H_{\bullet}(X_{v_0})$ est le morphisme de Gysin. Comme $X_{L_1} = X_t \times L_1$ le morphisme de Gysin $H_{\bullet}(X_{L_1}) \rightarrow H_{\bullet}(X_t)$ est indépendant du point de L_1 choisi. En se déplaçant le long des courbes L_i on atteint v_1 et on obtient

$$\text{ch}_{X_t}^M(E_{\bullet, t}) = i_{v_1^*} (\pi_{C^*}^* (\text{ch } \xi \cap \tilde{W}_{\bullet, p} C'))$$

d'où le résultat.

Démonstration de d).

En utilisant c) on se ramène au cas d'une suite exacte scindée : on considère sur $M \times \mathbb{C}$ le morphisme surjectif de complexes

$$h : p^*E_{\bullet} \oplus p^*E''_{\bullet} \longrightarrow p^*E''_{\bullet}$$

$$(x, x'') \longmapsto b(x) - tx''$$

où $p : M \times \mathbb{C} \rightarrow M$ est la projection. La propriété c) appliquée à $\tilde{E} = \ker h$ donne

$$\text{ch}_X^M(E_{\bullet}) = \text{ch}_X^M(\tilde{E}_{\bullet}(1)) = \text{ch}_X^M(\tilde{E}_{\bullet}(0)) = \text{ch}_X^M(E'_{\bullet} \oplus E''_{\bullet}) .$$

Soient alors G, G', G'' les grassmanniennes associées respectivement à $E'_{\bullet} \oplus E''_{\bullet}, E'_{\bullet}, E''_{\bullet}$; $G' \times G''$ s'identifie à une sous-variété fermée de G . Il résulte alors aisément de la construction des classes de Chern et des propriétés du foncteur H_{\bullet} que

$$\text{ch}_X^M(E'_{\bullet} \oplus E''_{\bullet}) = \text{ch}_X^M(E'_{\bullet}) + \text{ch}_X^M(E''_{\bullet}) .$$

(pour plus de détails voir [1], ch. II, § 2.2).

Démonstration de e).

Par une homotopie, on se ramène au cas où les flèches de F_{\bullet} sont nulles ; alors par d) :

$$\text{ch}(F_1 \otimes E_1) = \sum_i \text{ch}(\tilde{F}_i \otimes E_{\bullet})$$

où F_i est le complexe nul en tout degré différent de i et égal à F_i en degré i .

Soient $M(E.)$ le "mapping cylinder" de $E.$ et $\tilde{E}.$ le complexe $E.$ décalé ($E_i = E_{i-1}$). On déduit de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{E} \longrightarrow M(E.) \longrightarrow E. \longrightarrow 0$$

et de d) que

$$\text{ch}_X^M(\tilde{E}) = - \text{ch}_X^M(E.)$$

d'où

$$\text{ch}_X^M(\tilde{F}_i \otimes E.) = (-1)^i \text{ch}_X^M(F_i \otimes E.) \quad .$$

Il reste alors à montrer que pour un fibré F on a

$$\text{ch}_X^M(F \otimes E.) = \text{ch}(F) \wedge \text{ch}_X^M(E.)$$

pour cela on considère les grassmanniennes G et \tilde{G} respectivement associées à $E.$ et $E. \otimes F$ et le plongement de G dans \tilde{G} qui à (S_i) associe $(S_i \otimes F)$ (cf. [1], ch. 2, § 2.3).

Démonstration de f) :

Le morphisme g étant plat, $g^* : H_*(X) \longrightarrow H_*(X')$ est bien défini ; d'autre part $f^*W \longrightarrow W$ est plat et si W' désigne le cycle utilisé dans le calcul de $\text{ch}_{X'}^{M'}(f^*E.)$, W' est une sous-variété de f^*W qui coïncide avec f^*W au-dessus d'un ouvert dense de W ; donc (prop. 2) $W' = f^*W$. On en déduit alors aisément le résultat.

IV - Classes de Chern localisées d'un faisceau cohérent.

Soient X une variété quasi-projective et F un faisceau cohérent sur X . Soient $X \longrightarrow M$ un plongement de X dans une variété quasi-projective non singulière et $E.$ une résolution localement libre sur M de F . On pose

$$\text{ch}_X^M(F) = \text{ch}_X^M(E.) \quad .$$

Comme dans ([3], § 4, lemmes 12-13) on montre, à l'aide des résultats du paragraphe II, que la définition ne dépend pas de la résolution choisie et que si $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte, on a

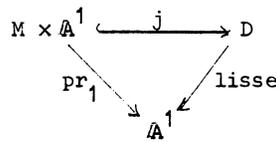
$$\text{ch}_X^M(F) = \text{ch}_X^M(F') + \text{ch}_X^M(F'') \quad .$$

PROPOSITION 3.- Soit $X \subset M \subset P$ où M et P sont non singulières. Soit N le fibré normal de M dans P . Alors on a

$$\text{ch}_X^M(F) = \text{todd}(N)^{-1} \wedge \text{ch}_X^M(F) \quad .$$

Déformation du fibré normal.

Soient $M \subset P$ un plongement de variétés quasi-projectives non singulières et N le fibré normal à M dans P . Alors il existe un diagramme commutatif



où j est un plongement, D est lisse et

(i) pour tout $t \in \mathbb{A}^1 - \{0\}$, le plongement $M \times \{t\} \xrightarrow{j_t} D_t$ est isomorphe au plongement de M dans P ;

(ii) le plongement $M \times \{0\} \xrightarrow{j_0} D_0$ est isomorphe au plongement de M dans N par la section nulle.

On suppose P localement fermé dans \mathbb{P}^n et M défini dans P par des équations homogènes

$$F_1(X_0, \dots, X_n) = \dots = F_r(X_0, \dots, X_n) = 0 \quad .$$

Si $d_i = \text{degré } F_i$, $F = (F_1, \dots, F_r)$ définit une section s du fibré

$E = \bigoplus \mathcal{O}_P(d_i)$. Dualement on obtient la suite exacte

$$E^V \xrightarrow{F^*} \mathcal{O}_P \longrightarrow \mathcal{O}_M \longrightarrow 0$$

et N s'identifie à un sous-fibré de $E|_M$: plus précisément si $\mathcal{R} = \ker F^*$

on a la suite exacte

$$(*) \quad 0 \longrightarrow N \longrightarrow E|_M \longrightarrow \mathcal{R}|_M^V = \text{Hom}(\mathcal{R}/\mathcal{M}, \mathcal{O}_M) \quad .$$

Pour définir D on reprend la construction de l'exposé II dans un cas particulier : soit

$$\begin{aligned} \sigma : P \times \mathbb{A}^1 - \{0\} &\longrightarrow E \times \mathbb{A}^1 \\ (x, \lambda) &\longrightarrow \left(\frac{1}{\lambda} s(x), \lambda \right) \end{aligned}$$

et D l'adhérence de l'image de σ dans $E \times \mathbb{A}^1$.

(i) est évident ; on vérifie (ii) localement : on suppose $P \subset \{X_0 \neq 0\}$ et M défini dans P par

$$F_1(1, x_1, \dots, x_n) = \dots = F_k(1, x_1, \dots, x_n) = 0 \quad .$$

On a de plus

$$\forall i > k \quad , \quad F_i(1, x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^k a_{ij}(x) F_j(1, x_1, \dots, x_n)$$

et D est défini dans $E \times \mathbb{A}^1 = P \times \mathbb{A}_j^r \times \mathbb{A}_\lambda^1$ par

$$(**) \quad \begin{cases} \lambda y_i = F_i(1, x_1, \dots, x_n) \quad , & i = 1, \dots, k \\ y_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} y_j \quad , & i > k \quad . \end{cases}$$

L'assertion (ii) résulte alors de la suite exacte (*) et au fait que les seules relations entre les F_1, \dots, F_k sont les relations triviales.

Enfin on déduit des équations (**) de D que D est sous \mathbb{A}^1 -torsion donc plat sur \mathbb{A}^1 ; D , étant d'autre part à fibres lisses, est lisse.

COROLLAIRE.- Avec les mêmes hypothèses, si X est un sous-schéma fermé de M et F un faisceau cohérent sur X , on a

$$ch_X^P(F) = ch_X^N(F) \quad .$$

Soient $M \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{j} D$ comme ci-dessus et $p : M \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow M$ la projection ; p^*F étant plat sur \mathbb{A}^1 , la propriété (c)ii) (homotopie) donne :

$$i_t^* ch_{X \times \mathbb{C}}^D(p^*F) = i_0^* ch_{X \times \mathbb{C}}^D(p^*F)$$

c'est-à-dire

$$ch_X^P(F) = ch_X^N(F) \quad .$$

Démonstration de la proposition 3.

Soit $\pi : N \longrightarrow M$ la projection, on identifie M à son image M_0 dans N par la section nulle, alors le complexe de Koszul $\Lambda^* \pi^* N^V$ fournit une résolution de θ_{M_0} sur θ_N .

D'autre part, si E_\bullet est une résolution de F sur M , $\pi^* E_\bullet$ est une résolution de $\pi^* F$. Comme $\pi^* E_\bullet \otimes_{\mathbb{C}_N} \mathbb{C}_{M_0} = E_\bullet$ on a

$$\forall i > 0, \quad \text{Tor}_i^N(\mathcal{O}_{M_0}, \pi^*F) = 0$$

et par conséquent le complexe $\wedge^* \pi^*N^\vee \otimes \pi^*E_\bullet$ est une résolution de $\mathcal{O}_{M_0} \otimes_{\mathcal{O}_N} \pi^*F = F$.
Compte tenu du corollaire, il suffit donc de montrer que

$$\text{ch}_X^N(\wedge^* \pi^*N^\vee \otimes \pi^*E_\bullet) = (\text{todd } N)^{-1} \cap \text{ch}_X^M(E_\bullet) \quad .$$

Pour cela, soient $P = \mathbb{P}(N \oplus 1)$ et H le fibré canonique en hyperplans ;
on prolonge le complexe $\wedge^* \pi^*N^\vee$ par le complexe de Koszul $\wedge^* H$ défini par la section

$$H \longrightarrow p^*(N^\vee \oplus 1) = (p^*N^\vee) \oplus \mathcal{O}_P \longrightarrow \mathcal{O}_P$$

Soit $i : X \subset p^*X$ le plongement déduit de la section nulle, par II a) et b) on obtient

$$\begin{aligned} i_* \text{ch}_X^N(F) &= \text{ch}_{p^*X}^P(F) \\ &= \text{ch}_{p^*X}^P(\wedge^* H \otimes p^*E_\bullet) \end{aligned}$$

par II e) :

$$= \text{ch}(\wedge^* H) \cap \text{ch}_{p^*X}^P(p^*E_\bullet)$$

et par pull back (II, f) :

$$= \text{ch}(\wedge^* H) \cap p^* \text{ch}_X^M(E_\bullet) \quad .$$

Enfin la formule de projection donne

$$\text{ch}_X^N(F) = p_* i_* \text{ch}_X^N(F) = p_* \text{ch}(\wedge^* H) \cap \text{ch}_X^M(E_\bullet) \quad .$$

Il reste donc à montrer le

LEMME.- Dans $H^*(M)$ on a $p_*(\text{ch} \wedge^* H \cap p^* \text{todd } N) = 1 \quad .$

$$\text{De la suite exacte } 0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \longrightarrow p^*N \oplus 1 \longrightarrow H \longrightarrow 0 \quad (3)$$

on déduit $p^*(\text{todd } N) = \text{todd } H^\vee \text{todd } \mathcal{O}(-1)$. D'autre part, on a

$$\text{ch} \wedge^* H = C_e(H) \text{todd}(H^\vee)^{-1}, \quad \text{où } e = \text{rang } H. (*) \quad .$$

Il suffit donc de prouver

$$p_*(C_e(H) \text{todd } \mathcal{O}(-1)) = 1 \quad .$$

D'autre part $0 = C_{e+1}(N^\vee) = C_{e+1}(N^\vee \oplus 1)$ et on déduit alors de la suite exacte

(3) que dans $\Lambda^*(P)$:

$$0 = C_e(H^\vee) C_1(\mathcal{O}(-1))$$

(*) voir note de bas de page, page suivante.

et

$$C_e(H^V) = \sum_{i=0}^e (-1)^{e-i} p_* C_i(N) [C_1(\mathcal{O}(-1))]^{e-i} .$$

Enfin $N+1$ étant un fibré de rang $(e+1)$, $\Lambda^*(\mathbb{P}(N+1)) = \Lambda^*(M)[T]/R(T)$

où T est la classe de $\mathcal{O}(-1)$ et $R(T)$ un polynôme de degré $(e+1)$; de

plus $p_*(T^i) = 0$ si $i \leq e-1$ et $p_*(T^e) = 1$. Il en résulte que $p_* C_e(H^V) = (-1)^e$
d'où le lemme. Ce qui termine la démonstration de la proposition 3.

(*) si $C(H) = \prod_{i=1}^e (1 + a_i) = C(\bigoplus_{i=1}^e L_i)$ où les L_i sont des fibrés de rang 1 ,

on a :

$$\begin{aligned} C(\wedge^S H) &= C\left(\bigoplus_{i_1 < \dots < i_s} (L_{i_1} \otimes \dots \otimes L_{i_s})\right) \\ &= \prod_{i_1 < \dots < i_s} (1 + a_{i_1} + \dots + a_{i_s}) . \end{aligned}$$

Alors

$$\text{ch}(\wedge^S H) = \sum (-1)^S \text{ch}(\wedge^S H) = \prod (e^{a_i} - 1)$$

$$\text{Todd } H^V = \frac{(-1)^e a_1 \dots a_e}{\prod (1 - e^{a_i})} = \frac{C_e(H)}{C(\wedge^S H)} .$$

V - Théorème de Riemann-Roch pour les schémas quasi-projectifs.

THÉORÈME.- Il existe une seule transformation naturelle de foncteurs $\tau : K_0 \rightarrow H_0$ de la catégorie des schémas quasi-projectifs et morphismes propres dans celle des groupes abéliens vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) τ est compatible avec l'excision (i.e. si U est un ouvert de X , le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_0(X) & \longrightarrow & H_0(X) \\ \text{res} \downarrow & & \downarrow \text{res} \\ K_0(U) & \longrightarrow & H_0(U) \end{array}$$

(ii) Pour tout n , le terme de plus haut degré de $\tau(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ est $[\mathbb{P}^n]$.

Alors de plus :

(iii) τ est compatible avec le caractère de Chern (i.e. le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} K^0(X) \otimes K_0(X) & \xrightarrow{\otimes} & K_0(X) \\ \text{ch} \otimes \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ H^*(X) \otimes H_0(X) & \xrightarrow{\wedge} & H_0(X) \end{array}$$

(iv) Si X est non singulière $\tau(\mathcal{O}_X) = \text{Todd } X \wedge [X]$

Définition de τ .- Si le schéma X est plongé dans la variété quasi-projective irréductible et lisse M , on pose, pour tout faisceau cohérent F sur X ,

$$\tau^M(F) = T(M) \wedge \text{ch}_X^M(F) \in H_0(X),$$

où $T(M) \in H^*(M)$ est la classe de Todd du fibré tangent à M . On va montrer que τ^M est indépendant de M et définit la transformation τ cherchée.

Si $X = M$ est lisse et irréductible, il résulte de la proposition 1 que $\text{ch}_X^M(F) = \text{ch}(F) \wedge [M]$ et

$$\tau^M(F) = (\text{ch } F \cup T(M)) \wedge [M],$$

en particulier $\tau^M(\mathcal{O}_M) = T(M) \wedge [M]$ d'où (iv). De plus, le théorème redonne le théorème de Riemann-Roch dans le cas classique : si $f : M \rightarrow M'$ est un morphisme propre, M et M' étant lisses $f_*(\text{ch } F \cup T(M)) = \text{ch}(f_*F) \cup T(M')$.

$\Delta - \tau^M$ est indépendant de M .

On se ramène tout d'abord au cas où M est un ouvert d'espace projectif ; en effet, il résulte de (§ IV, prop. 2) que si $M \subset P$, on a $\tau^M = \tau^P$.

Soit j (resp. i) un plongement de X dans un ouvert V (resp. U) d'un espace projectif P (resp. Q) . Il en résulte un plongement de X dans $U \times V$ et on va montrer que $\tau^{U \times V} = \tau^U$, et $\tau^{U \times V} = \tau^V$ par symétrie.

Le graphe Γ_j de j définit un plongement fermé de X dans $X \times P$ et donc deux morphismes $K_0(X) \longrightarrow K_0(X \times P)$ et $H_*(X) \longrightarrow H_*(X \times P)$. On considère alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 K_0(X) & \xrightarrow{\tau^{U \times V}} & H_*(X) \\
 \Gamma_{j*} \downarrow & \textcircled{1} & \downarrow \Gamma_{j*} \\
 K_0(X \times P) & \xrightarrow{\tau^{U \times P}} & H_*(X \times P) \\
 \text{pr}_{1*} \downarrow & \textcircled{2} & \downarrow \text{pr}_{1*} \\
 K_0(X) & \xrightarrow{\tau^U} & H_*(X)
 \end{array}$$

La composée des flèches verticales étant l'identité de $K_0(X)$ et $H_*(X)$, il suffit de montrer la commutativité de $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$.

α) Commutativité de $\textcircled{1}$.

Soit $F \in K_0(X)$, il faut montrer que

$$(*) \quad \text{ch}_{X \times P}^{U \times P} \left(\Gamma_{j*}(F) \right) \cap T(U \times P) = \Gamma_{j*} \left(\text{ch}_X^{U \times V}(F) \cap T(U \times V) \right) .$$

Or, par localisation (II, a) :

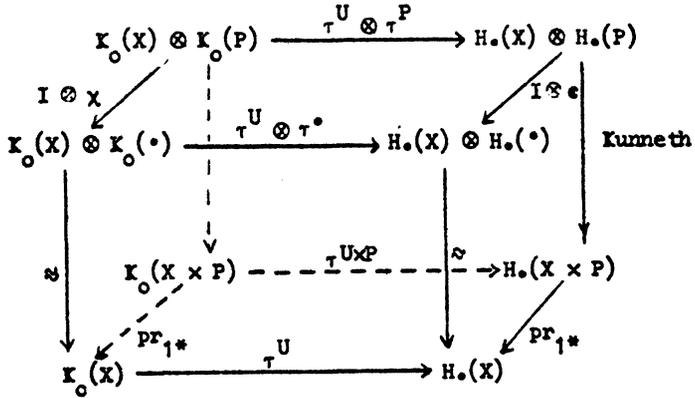
$$\text{ch}_{X \times P}^{U \times P} \left(\Gamma_{j*}(F) \right) = \Gamma_{j*} \left(\text{ch}_X^{U \times V}(F) \right)$$

et si $\sim : U \times V \longrightarrow U \times P$ désigne le plongement naturel, on a

$T(U \times V) = \sim^* T(U \times P)$; la formule (*) résulte alors de la formule de projection.

β) Commutativité de $\textcircled{2}$.

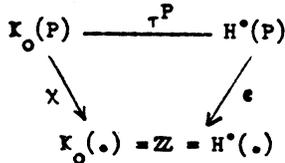
Comme $K_0(X) \otimes K_0(P) \longrightarrow K_0(X \times P)$ est surjective ([3], prop. 9), on considère le diagramme



La commutativité de 2 résultant alors de la commutativité de toutes les autres faces du diagramme.

$\chi : K_0(P) \rightarrow K_0(\cdot) = \mathbb{Z}$ est défini par $\chi(F) = \sum (-1)^i \dim H^i(P, F)$ et τ^\cdot est l'identité de \mathbb{Z} .

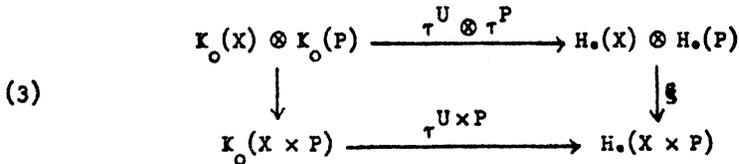
La commutativité de la face supérieure résulte de celle du diagramme suivant



et de la formule (B.S. prop. 10) :

$$\epsilon(\text{ch } F - T(P)) = \chi(F) \quad (*)$$

v) Commutativité de :



ξ est défini de la façon suivante : si $q_1 : X \times P \rightarrow P$ et $q_2 : X \times P \rightarrow X$ sont les projections, si $x \in A_*(X)$ et $y \in A_*(P)$, on pose

(*) voir note de bas de page, page suivante.

$$\xi(x \otimes y) = q_2^* x \cdot_{q_1} y ;$$

on a aussi $\xi([V] \otimes [W]) = [V \times W]$. De plus l'image de $T(M) \otimes T(P)$ par $H^*(M) \otimes H^*(P) \xrightarrow{\xi} H^*(M \times P)$ est $T(M \times P)$.

D'autre part si E est un fibré vectoriel sur X , il résulte de (II,d) que

$$\tau^M(E \otimes F) = \text{ch } E \wedge \tau^M(F) ,$$

il suffit alors, pour montrer la commutativité de (3), de considérer les éléments de $K_0(X) \otimes K_0(P)$ de la forme $F \otimes \mathcal{O}_P$ soit

$$(4) \quad \tau^{M \times P}(q_2^* F) = \xi((T(M) \otimes T(P)) \wedge (\text{ch}_X^M(F) \otimes [P])) ,$$

ξ étant compatible avec ξ (4) est équivalent à

$$\begin{aligned} \tau^{M \times P}(q_2^* F) &= T(M \times P) \wedge \xi(\text{ch}_X^M(F) \otimes [P]) \\ &= T(M \times P) \wedge q_2^* \text{ch}_X^M(F) \\ &= T(M \times P) \wedge \text{ch}_X^M(q_2^* F) \end{aligned}$$

ce qui résulte de la définition de $\tau^{M \times P}$.

(*) Rappelons que si

$$a = C_1(\mathcal{O}(-1)) , \quad T(P) = \frac{a^{r+1}}{(1 - e^{-a})^{r+1}} ; \text{ en effet, soit } L \subset P \times \mathbb{P}^{r+1} = E$$

le fibré canonique, l'espace tangent à \mathbb{P}^n s'identifie à $\text{Hom}(L, E/L)$;

$\text{Hom}(L, L) = L \otimes L^\vee$ étant trivial, $T(P)$ est la classe de Todd de

$\text{Hom}(L, E/L) \oplus \text{Hom}(L, L) = \text{Hom}(L, E)$ somme directe de $(r+1)$ fibrés égaux à L ,

d'où le résultat.

On peut se borner au cas où $F = \mathcal{O}(n)$, alors $\text{ch}(F) = e^{na}$ et $e(\text{ch } F \cup T(P))$ est le coefficient de a^r dans $\frac{e^{na} a^{r+1}}{(1 - e^{-a})^{r+1}}$.

B - Fin de la démonstration du théorème.

1°) Montrons que τ est un morphisme de foncteurs. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre entre deux schémas quasi-projectifs ; f est le composé d'un plongement fermé $f_1 : X \hookrightarrow Y \times P$, où P est un espace projectif et de la projection $p_2 : Y \times P \rightarrow P$. On considère alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 K_0(X) & \xrightarrow{\tau(X)} & H_*(X) \\
 f_{1*} \downarrow & \textcircled{1} & \downarrow f_{1*} \\
 K_0(Y \times P) & \xrightarrow{\tau(Y \times P)} & H_*(Y \times P) \\
 p_{2*} \downarrow & \textcircled{2} & \downarrow p_{2*} \\
 K_0(Y) & \xrightarrow{\tau(Y)} & H_*(Y)
 \end{array}$$

Le diagramme $\textcircled{2}$ ci-dessus n'est autre que le diagramme $\textcircled{2}$ du paragraphe 1., et par conséquent commute ; τ étant indépendant du plongement et f_1 étant un plongement fermé $\textcircled{1}$ commute par localisation (II, a) . Q.E.D.

2°) L'assertion (i) résulte de la propriété d'excision (II, b). On remarque d'ailleurs que par (II, f) (iii) est encore vrai si $U \rightarrow X$ est plat.

3°) L'assertion (iii) résulte de (II, e) et du fait que, pour tout fibré E sur X , il existe un plongement de X dans une variété lisse M et un fibré sur M prolongeant E .

4°) Unicité de τ : compte tenu de (exposé n°4), il suffit de montrer que le terme de plus haut degré de $\tau(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ est $[\mathbb{P}^n]$, ce qui résulte du fait que $\tau(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = T(\mathbb{P}^n) \cap [\mathbb{P}^n]$ par (ii) et que le terme de plus bas degré de plus bas degré de $T(\mathbb{P}^n)$ est 1 (§ 1, β).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAUM-FULTON-MAC PHERSON - Riemann-Roch for singular varieties.
- [2] O. ZARISKI - Introduction to the problem of minimal models...,
Pub. Math. Soc. Japan 1958 (4).
- [3] BOREL-SERRE - Le théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. Math. France
86 (1958) p. 97-136.