MIREILLE DESCHAMPS

Morphisme de Gysin et spécialisation du groupe de Chow transformations naturelles du foncteur de Chow

Astérisque, tome 36-37 (1976), Séminaire Bourbaki, exp. nº III, p. 64-78
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__36-37__64_0>

MORPHISME DE GYSIN ET SPÉCIALISATION DU GROUPE DE CHOW

TRANSFORMATIONS NATURELLES DU FONCTEUR DE CHOW

par Mireille DESCHAMPS

Les parties I et II sont indépendantes

I. - MORPHISME DE GYSIN ET SPÉCIALISATION.

§ 1. Gysin.

0. Dans tout ce paragraphe, les schémas seront quasi-projectifs sur un corps k . Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de schémas tel que O_Y soit de Tor-dimension finie sur O_X . Soit $z \in Z^k(X)$ un cycle réduit et irréductible tel que le support de f^*O_z soit de codimension supérieure ou égale à k .

Posons :

$$\tilde{f}(z) = \sum_{i=o}^{\infty} (-1)^i Z^k \operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_Y, O_Z) \qquad (1)$$

Cette formule permet de définir, lorsque X est régulier, l'image inverse du cycle z .

Nous allons montrer que, sans hypothèse sur X , la formule (1) permet de définir une image inverse raisonnable, lorsque Y est un diviseur positif de "self-intersection" nulle.

1. Soient D un diviseur positif sur X et $i : D \longrightarrow X$ l'inclusion.

PROPOSITION.- <u>Soit</u> F <u>un faisceau cohérent sur</u> X <u>dont le support est de codimension</u> $\geqslant k$, <u>et tel que</u> $F_{|D}$ <u>ait un support de codimension</u> $\geqslant k$.

Alors le cycle $\sum_{i=o}^{1} (-1)^i Z^k(\operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_D, F))$ ne dépend que du cycle $z = Z^k(F)$. Si $F = O_V$, où V est réduite et irréductible

$$\sum_{i=o}^{1} (-1)^i Z^k(\operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_D, O_V)) = Z^k(O_D \otimes O_V) \quad .$$

La première assertion est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 1.- Soit A un anneau local, $\underline{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ une suite A-régulière. Soit M un A-module de type fini tel que $M/\underline{\alpha}M$ soit de longueur finie. Notons $\chi(A/\underline{\alpha},M) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i\, l(\mathrm{Tor}_i^A(A/\underline{\alpha},M))$. Alors $\chi(A/\underline{\alpha},M)$ est positif ou nul, et il est nul si et seulement si la dimension de M est strictement plus petite que d.

Soit V une variété réduite et irréductible de codimension k telle que $i^*(O_V)$ ait un support de codimension k, c'est-à-dire telle que V ne soit pas contenue dans le support de D.

Quand on tensorise la suite exacte :

$$0 \longrightarrow O_X(-D) \longrightarrow O_X \longrightarrow O_D \longrightarrow 0$$

par O_V, elle reste donc exacte :

$$0 \longrightarrow O_V(-D) \longrightarrow O_V \longrightarrow O_V \otimes_{O_X} O_D \longrightarrow 0$$

donc

$$\sum_{i=0}^{1} (-1)^i Z^k(\mathrm{Tor}_i^{O_X}(O_D, O_V)) = Z^k(O_V \otimes O_D) .$$

2. Supposons maintenant que $D = \mathrm{div}\, t$, où t est une fonction sur X, régulière dans un voisinage de D.

Soit z un cycle irréductible et réduit de codimension k sur X.

Posons : $\tilde{i}(z) = Z^k(O_D \otimes O_Z)$, si $Z \not\subset D$

$\tilde{i}(z) = 0$, sinon.

En prolongeant par additivité, on définit donc un homomorphisme de groupe :

$$\tilde{i} : Z.X \longrightarrow Z.D .$$

Nous allons montrer que $\tilde{i}$ passe à l'équivalence rationnelle et permet de définir $i^* : A.X \longrightarrow A.D$.

Remarque.- Lorsque X est régulier, l'homomorphisme i^* ainsi défini coïncide avec l'image inverse, puisque lorsque z n'est pas continu dans D, $i^*(z)$ est bien défini par la formule des Tor. D'autre part, avoir supposé que $\tilde{i}(z)$

est nul lorsque z est contenu dans D est bien naturel car avec les hypothèses faites sur D , z est alors rationnellement équivalent à un cycle qui ne coupe pas D .

3. Propriétés de $\tilde{i}$.

Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas, D un diviseur effectif sur Y défini par une fonction régulière dans un voisinage de D et tel que le diviseur f^*D soit défini.

Soient $i : D \longrightarrow Y$, $j : f^*D \longrightarrow X$ les inclusions, $g : f^*D \longrightarrow D$ le morphisme induit par f

a) Si f est propre, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z.X & \xrightarrow{f_*} & Z.Y \\ {\scriptstyle\tilde{j}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{i}} \\ Z.(f^*D) & \xrightarrow{g_*} & Z.D \end{array}$$

est commutatif.

b) Si f est plat, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z.Y & \xrightarrow{f^*} & Z.X \\ {\scriptstyle\tilde{i}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{j}} \\ Z.D & \xrightarrow{g^*} & Z.(f^*D) \end{array}$$

est commutatif.

c) $\tilde{i}.i_* = 0$.

Démonstration.

a) Soit $[V]$ un cycle irréductible sur X . V est continu dans le support de f^*D si et seulement si $f(V)$ est contenu dans le support de D , et dans ce cas : $g_*\tilde{j}[V] = \tilde{i}f_*[V] = 0$.

Sinon, on calcule $\tilde{i}$ et $\tilde{j}$ à l'aide de la formule des Tor, et le calcul fait dans le cas régulier reste valable ici et prouve le résultat.

b) Soit $[W]$ un cycle irréductible sur Y , de codimension k .

A cause de la platitude de f et de l'irréductibilité de W , W est contenu dans le support de D si et seulement si $f^{-1}(W)$ est contenu dans le support de f^*D , et dans ce cas : $\tilde{j}f^*[W] = g^*\tilde{i}[W] = 0$.

Sinon : $g^*\tilde{i}[W] = Z^k[g^*i^*(O_W)]$

$$\tilde{j}f^*[W] = Z^k[j^*f^*(O_W)]$$

et les deux cycles de droite sont égaux.

c) est vrai par construction.

Soient C une courbe lisse sur k , $f : X \longrightarrow C$ un morphisme plat. Soient t un point fermé de C , X_t la fibre de ce point, et $i : X_t \longrightarrow X$ l'inclusion

$$\begin{array}{ccc} X_t & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \{t\} & \longrightarrow & C \end{array}$$

X_t est donc un diviseur sur X , de self-intersection nulle, et d'après ce qui précède, il existe un homomorphisme de groupes, gradué de degré -1

$$\tilde{i} : Z.X \longrightarrow Z.X_t \quad .$$

4. PROPOSITION.- $\tilde{i}$ <u>est compatible avec l'équivalence rationnelle et l'équivalence algébrique</u>.

Rappelons tout d'abord la définition de l'équivalence algébrique.

DEFINITION.- Soient X un schéma quasi-projectif sur k , z un cycle sur X . On dit que Z est algébriquement équivalent à 0 sur X s'il existe une courbe Σ , et deux points fermés σ_1 et σ_2 de Σ , un cycle z sur $X \times \Sigma$, tels que si $p_1 : X \times \Sigma \longrightarrow X$ et $p_2 : X \times \Sigma \longrightarrow \Sigma$ sont les deux projections, $Z \underset{p_2}{\bullet} \sigma_1$ et $Z \underset{p_2}{\bullet} \sigma_2$ soient définis, et $z = p_1{}_*(Z \underset{p_2}{\bullet} ([\sigma_1] - [\sigma_2]))$.

La définition de l'équivalence rationnelle est la même en changeant Σ en $\mathbb{P}^1$. Nous ne ferons qu'une démonstration en indiquant, sinnécessaire, ce qui distingue l'équivalence rationnelle de l'équivalence algébrique.

a) <u>Réduction au cas</u> X <u>irréductible</u>.

On peut supposer que X est irréductible, et qu'il existe un morphisme $\alpha : X \longrightarrow \Sigma$ tel que $z = \alpha^*[D]$ où $[D] = [\sigma_1] - [\sigma_2]$.

En effet, on veut montrer que, pour tout cycle irréductible Z sur $X \times \Sigma$, $\tilde{i}p_1{*}(Z \underset{p_2}{\cdot} [D])$ est équivalent à 0 .

Soient $j : X_t \times \Sigma \longrightarrow X \times \Sigma$, $\lambda : Z \longrightarrow X \times \Sigma$, $\lambda_t : Z_t \longrightarrow X_t \times \Sigma$ et $j' : Z_t \longrightarrow Z$ les inclusions

$$\begin{tikzcd}
Z_t \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\lambda_t"'] & Z \arrow[d, "\lambda"] & \\
X_t \times \Sigma \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p_{1t}"'] & X \times \Sigma \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & \Sigma \\
X_t \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] & \\
(t) \arrow[r] & C &
\end{tikzcd}$$

$$\tilde{i}.p_*(Z \underset{p_2}{\cdot} [D]) = p_{1_t}{*} . \tilde{j}(Z \underset{p_2}{\cdot} [D])$$

- Si Z ne domine pas C , $Z \underset{p_2}{\cdot} [D]$ est contenu dans des fibres de fp_1 , donc son image par $\tilde{j}$ est nulle.

- Sinon $\tilde{j}(Z \underset{p_2}{\cdot} [D]) = \tilde{j}(\lambda_*[Z] \underset{p_2}{\cdot} [D]) = \tilde{j}\lambda_*([Z] \underset{p_2\lambda}{\cdot} [D]) = \lambda_t{*}\tilde{j}'([Z] \underset{p_2\lambda}{\cdot} [D])$

donc on est ramené à montrer que $\tilde{j}'([Z] \underset{p_2\lambda}{\cdot} [D])$ est équivalent à 0 .

b) <u>Supposons</u> X <u>irréductible</u>.

f et α définissent un morphisme $(f,\alpha) : X \longrightarrow C \times \Sigma$. Si (f,α) n'est pas dominant, l'image de X dans $C \times \Sigma$ est une courbe qui domine C et Σ , donc l'image réciproque de D dans cette courbe est formée de points, et $\alpha^*[D]$ est contenu dans des fibres de f , donc $\tilde{i}\alpha^*[D]$ est nul.

c) <u>Supposons</u> X <u>irréductible et</u> (f,α) <u>dominant</u>.

LEMME 2.- <u>Soient</u> X <u>et</u> S <u>deux variétés irréductibles</u>, $f : X \longrightarrow S$ <u>un</u>

<u>morphisme dominant quasi-projectif</u>. <u>Soit</u> $r = \dim X - \dim S$. <u>Alors il existe des variétés</u> V , X' , <u>des morphismes</u> ρ , Ψ <u>propres et birationnels</u>, <u>un morphisme</u> F <u>plat</u>, <u>tels que le diagramme</u> :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{F} & V \\ {\scriptstyle\Psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

<u>soit commutatif</u>. <u>Alors, pour tout point</u> v <u>de</u> V , <u>la dimension de</u> $F^{-1}(v)$ <u>soit inférieure ou égale à</u> r .

<u>De plus</u>, <u>si</u> S <u>est une surface lisse</u>, <u>on peut supposer que</u> V <u>est aussi lisse</u>.

La démonstration du lemme sera faite ultérieurement.

d) Quitte à remplacer X par X' , on peut donc supposer que (f,α) se factorise :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "{(f,\alpha)}"'] & V \arrow[d, "\rho"] \\ & C \times \Sigma \end{tikzcd}$$

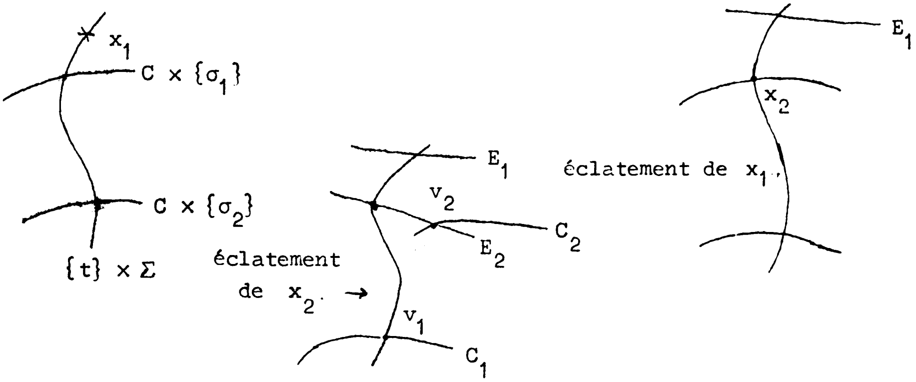
où ρ et F sont des morphismes ayant les propriétés du lemme, et où V est une surface lisse, donc obtenue à partir de $C \times \Sigma$ en éclatant un nombre fini de points fermés

$$\alpha^*[D] = F^*\rho^*[C \times \{\sigma_1\}] - F^*\rho^*[C \times \{\sigma_2\}] \ .$$

Le diviseur $\rho^*[C \times \{\sigma_1\}]$ (resp. $\rho^*[C \times \{\sigma_2\}]$) est formé du transformé propre C_1 de $C \times \{\sigma_1\}$ (resp. C_2 de $C \times \{\sigma_2\}$) et de composantes ayant pour support des diviseurs exceptionnels, donc qui ont pour image dans C des points, et qui n'interviendront pas dans le calcul de $\tilde{i}$. On est ramené à montrer que $\tilde{i}[F^*C_1]$ et $\tilde{i}[F^*C_2]$ sont équivalents.

Soit $E = \rho^*[\{t\} \times \Sigma]$ le transformé total de $\{t\} \times \Sigma$, qui est formé de son transformé propre et de droites exceptionnelles. E est connexe et coupe transversalement chaque courbe C_1 et C_2 en un seul point simple. C'est en effet une propriété vraie dans $C \times \Sigma$ et qui est conservée par chaque éclatement car, ou bien on éclate un point de la fibre $\{t\} \times \Sigma$ qui n'est pas un point d'intersection avec les sections $C \times \{\sigma_1\}$ et $C \times \{\sigma_2\}$ et rien n'est changé au voisinage de ces intersections, ou bien on éclate un point d'intersection, et puisque ce point est simple sur la section $C \times \{\sigma_i\}$ $(i = 1$ ou $2)$, le transformé propre de cette section est transversal au diviseur exceptionnel.

ex. :



LEMME 3.- <u>Soit</u> Δ <u>une courbe lisse sur</u> V <u>qui coupe</u> E <u>transversalement en un point simple</u> v . <u>Soit</u> L <u>la composante de</u> E <u>qui contient</u> v . <u>Soient</u>

$$X_L = F^*[L] \quad ,$$

$$X_\Delta = F^*[\Delta] \quad ,$$

<u>et</u> F_L <u>la restriction de</u> F <u>à</u> X_L <u>de sorte qu'on a le diagramme cartésien suivant</u>

$$\begin{tikzcd} X_L \arrow[r, "F_L"] \arrow[d] & L \arrow[d] \\ X \arrow[r, "F"] & V \end{tikzcd}$$

<u>alors</u> $\tilde{i}[X_\Delta] = F_L^*[v]$.

<u>Démonstration</u>.-

$F^*[\Delta]$ est bien défini puisque Δ est un diviseur, X est irréductible et

F dominant.

$F_L^*[v]$ est défini si la codimension dans X_L de $F^{-1}(v)$ est égale à 1, ce qui est vérifié à cause de la propriété des fibres de F.

Alors
$$\tilde{i}[X_\Delta] = \Sigma(-1)^i Z^1 \operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_{X_\Delta}, O_{X_t}) \quad ,$$
$$F_L^*[v] = \Sigma(-1)^i Z^1 \operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_{X_L}, O_{\{v\}}) \quad ,,$$
or
$$\operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_{X_\Delta}, O_{X_t}) = \operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_{X_\Delta}, O_{X_E}) = \operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_{X_\Delta}, O_{X_L})$$
et puisque L et Δ se coupent transversalement en v et que F est équidimensionnel :
$$\operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_{X_\Delta}, O_{X_L}) = \operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_{\{v\}}, O_{X_L}) \quad .$$
Il reste donc, pour terminer, à démontrer que les deux cycles $F_{L_1}^*[v_1]$ et $F_{L_2}^*[v_2]$, où L_1 (resp. L_2) est la composante de E qui coupe C_1 (resp. C_2) en v_1 (resp. v_2), sont algébriquement équivalents (resp. rationnellement équivalents, si $\Sigma = \mathbb{P}^1$), ce qui découlera du lemme suivant :

LEMME 4.- <u>Tous les cycles</u> $F_L^*[v]$ <u>définis comme précédemment sont algébriquement équivalents</u> (<u>resp.</u> <u>rationnellement équivalents si</u> $\Sigma = \mathbb{P}^1$).

Tous les points v appartenant à la même composante L (qui est soit une droite, soit une courbe isomorphe à Σ) sont algébriquement équivalents par définition, et le sont même rationnellement si $\mathbb{P}^1 = \Sigma$. Il suffit donc de voir que si v est le point d'intersection de deux composantes L et L' :
$$\operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_{\{v\}}, O_{X_L}) = \operatorname{Tor}^{O_X}(O_{\{v\}}, O_{X_{L'}})$$
égalité qui est vraie car L et L' sont transversales en v.

e) <u>Démonstration du lemme</u> 2.

En prenant la clôture de X dans un espace projectif sur S, on se réduit au cas où X est un fermé dans $\mathbb{P}^n \times S$.

Il existe un ouvert S_o de S au-dessus duquel X est plat, et détermine donc un morphisme de S_o dans le schéma de Hilbert de l'espace projectif $\mathbb{P}_n$, soit $H(\mathbb{P}_n)$

$$C_o : S_o \longrightarrow H(\mathbb{P}^n) \quad .$$

Soit V la clôture du graphe de C_o dans $S \times H(\mathbb{P}^n)$, qui est propre sur S, puisque $H(\mathbb{P}^n)$ est un schéma dont les composantes sont projectives. (Si S est une surface lisse, on peut choisir pour V une surface obtenue à partir de S par une suite finie d'éclatements de points fermés, puisqu'on arrive par cette méthode à "lever l'indétermination" de n'importe quelle application rationnelle de V dans un schéma propre sur k). Soient $\rho : V \longrightarrow S$ et $C : V \longrightarrow H(\mathbb{P}^n)$ les deux projections. C définit un sous-schéma fermé X' de $\mathbb{P}^n \times V$, plat sur V, qui coïncide avec X sur S_o. Puisque X' est plat sur V, ses composantes irréductibles dominent V, et puisqu'au-dessus de l'ouvert S_o de V il n'y a qu'une composante X' est l'adhérence de $X \times_S S_o$ dans $\mathbb{P}^n \times V$.

On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Psi"'] & V \arrow[d, "\rho"] \\ X \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

qui possèdes les propriétés cherchées.

5. **DÉFINITION.**– <u>On appelle homomorphisme de Gysin, l'homomorphisme de groupes déduit de</u> $\tilde{i}$ <u>par passage au quotient. On le notera</u> $i^* : A.X \longrightarrow A.X_t$.

<u>Propriétés de</u> i^* .

1) Il est compatible avec les morphismes propres et plats.

2) Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de X dans un schéma régulier Y, alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} A^{\bullet}(Y) \otimes A.(X) \arrow[r] \arrow[d, "1 \otimes i^*"] & A.(X) \arrow[d, "i^*"] \\ A^{\bullet}(Y) \otimes A.(X_t) \arrow[r] & A.(X_t) \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont définies par l'intersection, commute.

1) est une conséquence des propriétés de $\tilde{i}$ pour les cycles.

2) il suffit de prendre un cycle irréductible sur X , $x = [V]$.

Soit y un cycle sur Y , tel que $x \cdot_f y$ et $\tilde{i}(x) \cdot_f y$ soient définis

– si V est contenu dans X_t , $\tilde{i}(x \cdot_f y) = \tilde{i}(x) \cdot_f y = 0$;

– sinon, on se ramène au cas où $V = X$. Alors on peut bouger y dans sa classe d'équivalence de manière que $f^{-1}(y)$ ne soit pas continu dans X_t .

L'égalité :

$$\tilde{i}([X] \cdot_f y) = \tilde{i}[X] \cdot_f y$$

est alors une conséquence d'un calcul sur les Tor , fait dans le cas régulier.

<u>Cas particulier</u>.

Soient C une courbe non-singulière rationnelle, X un schéma. $X \times C$ est alors plat sur C , et les résultats précédents permettent de définir pour chaque point t un morphisme de Gysin : $i_t^* : A.(X \times C) \longrightarrow A.X$.

Ces morphismes ne dépendent pas du point t de C choisi. En effet, on a vu que dans le cas où $Y = A^1$, le morphisme

$$A.X \otimes A.Y \longrightarrow A.(X \times Y)$$
$$[V] \otimes [W] \longrightarrow [V \times W]$$

est surjectif.

Donc tout cycle de $X \times Y$ a un représentant de la forme $[x \times Y]$

et $\quad i_t^*[x \times Y] = x$ quel que soit t .

Par la même occasion, on montre que le morphisme ci-dessus est injectif, puisqu'en le composant avec n'importe quel i_t^* , on obtient un morphisme injectif.

COROLLAIRE.– <u>Si</u> $Y = A^n$ <u>est l'espace affine</u>, <u>pour tout schéma</u> X

$$A.X \otimes A.Y \longrightarrow A.(X \times Y)$$

<u>est un isomorphisme</u>.

§ 2. Spécialisation.

Dans ce paragraphe, tous les anneaux et schémas sont noethériens et excellents. Soient R un anneau de valuation discrète, k son corps résiduel, K son corps de fractions. Soient X un schéma plat et quasi-projectif sur R, X_k sa fibre spéciale, X_K sa fibre générique, i et j les inclusions :

$$\begin{array}{ccccc} X_k & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & X_K \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \\ k & \longrightarrow & R & \longleftarrow & K \end{array}$$

Les arguments du paragraphe précédent s'étendent au cas où $C = \operatorname{Spec} R$, et où $C \times \mathbb{P}^1$ et V sont considérées comme des surfaces authentiques (cf. Abhyanbar, "Resolution of singularities of arithmetical surfaces" ; Safarevitch, "Lectures on minimal models"). On obtient donc un homomorphisme de Gysin :

$$i^* : A.X \longrightarrow A.X_k \quad \text{de degré } -1 .$$

On a vu d'autre part qu'il existe une suite exacte dite de Mayer-Vietoris, relative à tout ouvert U d'un schéma noethérien excellent X, qui s'écrit ici

$$A.X_k \xrightarrow{i_*} A.X \xrightarrow{j^*} A.X_K \longrightarrow 0$$

où i_* est de degré 0 et j^* de degré -1.

Puisque $i^*i_* = 0$, il existe un homomorphisme unique $\sigma_X : A.X_K \longrightarrow A.X_k$, qui conserve les degrés et qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A.X & \xrightarrow{j^*} & A.X_K \\ {\scriptstyle i^*}\downarrow & \swarrow {\scriptstyle \sigma_X} & \\ A.X_k & & \end{array}$$

σ_X est l'homomorphisme de spécialisation.

Propriétés.

1) Soit f un morphisme de R-schémas plats et quasi-projectifs.

Si f est propre, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A.X_K & \xrightarrow{f_{K*}} & A.Y_K \\ {\scriptstyle \sigma_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_Y} \\ A.X_k & \xrightarrow[f_{k*}]{} & A.Y_k \end{array}$$

où les notations ont un sens évident, commute.

Si f est plat, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \Lambda.Y_K \arrow[r, "f_K^*"] \arrow[d, "\sigma_Y"] & \Lambda.X_K \arrow[d, "\sigma_X"] \\ \Lambda.Y_k \arrow[r, "f_k^*"] & \Lambda.X_k \end{tikzcd}$$

commute.

C'est une conséquence immédiate du paragraphe 1.

2) Soient R' un anneau de valuation discrète qui domine R , k' son corps résiduel, K' son corps de fractions, X un schéma plat quasi-projectif sur R , $X_{R'}$ le schéma obtenu par changement de base

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X_{R'} \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "f'"] \\ R & R' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \Lambda.X_K \arrow[r, "g_K^*"] \arrow[d, "\sigma_X"'] & \Lambda.X_{K'} \arrow[d, "\sigma_{X_{K'}}"] \\ \Lambda.X_k \arrow[r, "g_k^*"] & \Lambda.X_{k'} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

C'est une conséquence de 1.

Cas où R est hensélien. Spécialisation des fibres géométriques.

Soit $\bar{K}$ (resp. $\bar{k}$) une clôture algébrique de K (resp. k) . On considère le système inductif formé de tous les anneaux R_i normaux finis sur R , contenus dans $\bar{K}$. Puisque R est hensélien, un tel anneau est intègre et local, donc est un anneau de valuation discrète.

Ce système est inductif puisque si R' et R'' sont deux tels anneaux, $R' \otimes_R R''$ est décomposé en ses composants locaux. En normalisant la composante de $R' \otimes_R R''$ qui contient l'image réciproque du seul élément de Spec $\bar{K}$ par le morphisme $R' \otimes_R R'' \longrightarrow \bar{K}$, on obtient un élément du système qui domine R' et R'' .

Soient K_i le corps de fractions de R_i , k_i son corps résiduel. On obtient, pour tout couple (i,j) tel que $R_i \subset R_j$, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A.X_{K_i} \arrow[r] \arrow[drr] \arrow[dd] & A.X_{K_j} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& & A.X_{\bar{K}} \\
A.X_{k_i} \arrow[r] \arrow[drr] & A.X_{k_j} \arrow[dr] & \\
& & A.X_{\bar{k}}
\end{tikzcd}$$

D'où un homomorphisme : $\varinjlim_i A(X_{K_i}) \longrightarrow A.X_{\bar{K}}$.

C'est un <u>isomorphisme</u> :

- tout cycle de $X_{\bar{K}}$ est défini par un nombre fini d'équations, donc provient de l'image d'un cycle sur un certain X_{R_i} ;
- si un cycle est équivalent à 0 dans $X_{\bar{K}}$, cette équivalence est définie par des fermés de $X_{\bar{K}}$ et des fonctions rationnelles sur ces fermés, qui se relèvent à un certain X_{R_i} .

On obtient alors un homomorphisme de spécialisation des fibres géométriques :

$$A.X_{\bar{K}} \longrightarrow A.X_{\bar{k}} \quad .$$

II. - TRANSFORMATIONS NATURELLES DU FONCTEUR DE CHOW.

Dans cette partie, nous travaillerons dans la catégorie des variétés projectives sur un corps.

On définit un foncteur covariant de cette catégorie dans <u>Ab</u> par :

$$H.X = A.X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \quad .$$

Ce foncteur possède la propriété suivante dont la démonstration est due à A. Landman :

PROPOSITION.- <u>Soit</u> $\alpha : H. \longrightarrow H.$ <u>une transformation naturelle de foncteurs.</u>

Si pour tout entier n

$$\alpha(\mathbb{P}^n) : H_\bullet(\mathbb{P}^n) \longrightarrow H_\bullet(\mathbb{P}^n)$$
$$[\mathbb{P}^n] \longrightarrow [\mathbb{P}^n] + \text{termes de degré} \neq n$$

alors α est l'identité.

Remarque.- Soient X un objet de la catégorie, V une sous-variété irréductible de X ; alors $\alpha(X)[V] = \alpha(V)[V]$ par naturalité.

Donc :

- il suffira d'étudier les éléments $\alpha(V)[V]$ que nous noterons abusivement par $\alpha[V]$;
- α ne peut pas augmenter les degrés.

Démonstration de la proposition.

Soit $\beta = \alpha - \mathrm{Id}$.

1) $\beta[\mathbb{P}^n] = 0$.

Soit H la variété linéaire de $\mathbb{P}^n$ qui intervient dans $\beta[\mathbb{P}^n]$ avec le plus haut degré -qui est par hypothèse différent de n -

$$\beta[\mathbb{P}^n] = sH + \text{termes de plus bas degré.}$$

Supposons que H soit donné par les équations $T_r = \dots = T_n = 0$, $r \leq n$; soit f le morphisme : $\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ défini sur les algèbres de polynômes par

$$K[T_o,\dots,T_n] \longrightarrow k[T_o,\dots,T_n]$$
$$T_i \longrightarrow T_i^2$$

alors $f_*[\mathbb{P}^n] = \deg[K(t_1,\dots,t_n)/K(t_1^2,\dots,t_n^2)][\mathbb{P}^n] = d[\mathbb{P}^n]$

$f_*[H] = \deg[K(t_1,\dots,t_{r-1})/K(t_1^2,\dots,t_{r-1}^2)][H] = e[H]$, $e \neq d$

puisque β est un morphisme de foncteurs :

$$f_*(\beta[\mathbb{P}^n]) = \beta(f_*[\mathbb{P}^n])$$

or $f_*(\beta[\mathbb{P}^n]) = sf_*[H] + \text{termes de plus bas degré}$

puisque f_* ne peut pas augmenter le degré

et $\beta(f_*[\mathbb{P}^n]) = \beta(\alpha[\mathbb{P}^n]) = ds[H] + \text{termes de plus bas degré}$

et nécessairement s est nul.

2) $\beta[X] = 0$, pour toute variété irréductible X .

Soit X irréductible et projective de dimension n . Grâce au lemme de normalisation, on construit un morphisme $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ fini et séparable. Soient X' , obtenue en normalisant X dans une extension de $K(X)$ galoisienne sur $K(\mathbb{P}^n)$ de groupe G , et $\sigma : X' \longrightarrow X$. Puisque X' est fini sur X :

$$\sigma_*\beta[X'] = \beta\sigma_*[X] = \lambda\beta[X] \quad .$$

Il suffit donc de montrer que $\beta[X']$ est nul, donc on peut remplacer X par X' .

LEMME.- <u>Soit</u> c <u>un cycle sur</u> X . <u>Alors</u> $f^*f_*c = \sum_{g \in G} g_*c$.

Alors puisque $f_*\beta[X] = \beta(f_*[X])$

$$f_*\beta[X] = 0$$

$$f^*f_*\beta[X] = 0$$

$$\sum_{g \in G} g_*\beta[X] = 0$$

mais $\quad g_*\beta[X] = \beta g_*[X] = \beta[X]$ donc $\beta[X] = 0$.

<u>Démonstration du lemme.</u>

Soient V une variété irréductible de X , W son image dans $\mathbb{P}^n$. Soient H le sous-groupe de G qui laisse V globalement invariant, et $V_o = V$, $V_1, \ldots, V_r$ toutes les variétés distinctes transformées de V par G .

$f_i : V_i \longrightarrow \mathbb{P}^n$ la restriction de f à V_i

$$[V_i] = g_{i*}[V]$$

$$f^*f_*[V] = \sum_{i=1}^{r} f_i^*f_*[V] = \sum_{i=1}^{r} f_i^*(f_*g_i^{-1}{}_*[V_i]) = \sum_{i=1}^{r} f_i^*f_{i_*}[V_i]$$

et

$$\sum_{g \in G} g_*[V] = \sum_{i=1}^{r} \sum_{g \in g_iH} g_*[V] \quad .$$

Il suffit donc de montrer que : $f_i^*f_{i_*}[V_i] = \sum_{g \in g_iH} g_*[V]$

$$\sum_{g \in g_iH} g_*[V] = \sum_{h \in H} (g_ihg_i^{-1})_*[V_i] = \# H.[V_i]$$

puisque $g_ihg_i^{-1}$ laisse V_i invariant.

L'égalité en découle puisque $\# H = \deg(V_i:W)$