Astérisque

JEAN-LOUIS VERDIER

Le théorème de Riemann-Roch pour les variétés algébriques éventuellement singulières (d'après P. Baum, W. Fulton et R. MacPherson)

Astérisque, tome 36-37 (1976), p. 5-20

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__36-37__5_0>

LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH POUR LES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES ÉVENTUELLEMENT SINGULIÈRES

[d'après P. BAUM, W. FULTON et R. MACPHERSON]

par Jean-Louis VERDIER

Dans cet exposé k désigne un corps, p sa caractéristique. On appelle <u>variété</u> un schéma de type fini et séparé sur k. Si X est une variété, on note $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural.

Dans ces notes, on ne fait qu'énoncer les résultats. On renvoit à la bibliographie pour les démonstrations.

1. Groupe de Chow

1.1 Soit X une variété. On appelle cycle de X une combinaison linéaire formelle finie à coefficients entiers de sous-variétés fermées intègres (i.e. irréductibles et réduites). Lorsqu'on gradue le groupe des cycles de X par la dimension (resp. codimension) on le note $Z_{\cdot}(X)$ (resp. $Z^{\cdot}(X)$).

1.2 Soient $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X dont le support est de dimension $\leq n$, $(s_i)_{i\in I}$ l'ensemble des points génériques des composantes irréductibles du support de $\mathcal{F}$ qui sont de dimension n. On pose

1.2.1 $$z_n(\mathcal{F}) = \sum_i \text{longueur}_{\mathcal{O}_{X,s_i}}(\mathcal{F}_{s_i}).\overline{s_i} \quad .$$

En particulier, pour toute sous-variété Y de X, on pose

1.2.2 $$[Y] = z_{\dim Y}(\mathcal{O}_Y) \; .$$

Le cycle $[X] \in Z_{\dim X}(X)$ est appelé le <u>cycle fondamental</u> de X.

1.3 (Image directe) Soient $f : X \to Y$ un morphisme <u>propre</u>, $W \subset X$ une sous-variété fermée intègre. L'image $f(W)$ munie de la structure réduite est une sous-variété intègre de Y . On pose

1.3.1 $$\begin{cases} f_*[W] = 0 & \text{si } \dim f(W) < \dim W , \\ f_*[W] = .\deg(f/W).[f(W)] & \text{si } \dim f(W) = \dim W , \end{cases}$$

où $\deg(f/W)$ est le degré générique de $f/W : W \to f(W)$. En prolongeant par linéarité, on obtient un homomorphisme $f_* : Z.(X) \to Z.(Y)$ homogène et de degré 0 , faisant de $X \mapsto Z.(X)$ un foncteur covariant pour les morphismes propres.

1.4 (Image inverse) Soient $f : X \to Y$ un morphisme plat à fibre de dimension $\leq d$, $W \subset Y$ une sous-variété fermée intègre de dimension n . On pose

1.4.1 $$f^*[W] = z_{n+d}(f^*\mathcal{O}_W) .$$

En étendant par linéarité, on obtient un morphisme $f^* : Z.(Y) \to Z.(X)$ homogène et de degré d et on fait de $X \mapsto Z.(X)$ un foncteur contravariant pour les morphismes plats.

1.5 Soient $W \subset X \times Y$ une sous-variété fermée intègre, plate sur Y pour la deuxième projection ; $\pi : W \to Y$ la restriction à W de la deuxième projection ; y_i , $i = 1 , 2$, deux points fermés de Y rationnels sur k . Posons $W_i = \pi^* y_i$. C'est une sous-variété de $X \times \{y_i\} = X$. On pose

1.5.1 $$\delta^Y_{y_1,y_2}(W) = [W_1] - [W_2] \in Z.(X) .$$

On dit qu'un cycle S de X est algébriquement équivalent à zéro s'il existe une courbe connexe C tel que S appartienne au sous-groupe engendré par les $\delta^C_{y_1,y_2}(W)$. Lorsqu'on peut prendre pour C la droite projective, on dit que S est rationnellement équivalent à zéro. On note $A.(X)$ (resp. $C.(X)$) le groupe gradué des classes de cycles modulo équivalence rationnelle (resp. algébrique). Le groupe $A.(X)$ est le groupe de Chow de X .

1.6 Les homomorphismes définis en 1.3 et 1.4 passent au quotient ([7]) et fournissent des homomorphismes encore notés

1.6.1 $$\begin{cases} f_* : A.(X) \to A.(Y) \\ f_* : C.(X) \to C.(Y) , \end{cases}$$

1.6.2
$$\begin{cases} f^* : A.(Y) \to A.(X) \\ f^* : C.(Y) \to C.(X) , \end{cases}$$

et faisant de $X \mapsto A.(X)$ (resp. $X \mapsto C.(X)$) un foncteur covariant pour les morphismes propres et contravariant pour les morphismes plats.

1.7 Soit U un ouvert de X . Posons $Y = X - U$. Notons $i : U \hookrightarrow X$ et $j : Y \hookrightarrow X$ les immersions canoniques. On a des suites exactes

$$0 \to Z.(Y) \xrightarrow{j_*} Z.(X) \xrightarrow{i^*} Z.(U) \to 0 ,$$
$$A.(Y) \xrightarrow{j_*} A.(X) \xrightarrow{i^*} A.(U) \to 0 ,$$
$$C.(Y) \xrightarrow{j_*} C.(X) \xrightarrow{i^*} C.(U) \to 0 .$$

1.8 Soit X une variété. Notons $K.(X)$ le groupe de Grothendieck des faisceaux cohérents sur X (modulo les relations données par les suites exactes). Ce groupe est filtré naturellement par la dimension des supports. On note $Gr_{top}\, K.(X)$ le gradué associé. Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X , on note $|\mathcal{F}|$ sa classe dans $K.(X)$. Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre, et un faisceau cohérent sur X . Posons

1.8.1
$$f_*|\mathcal{F}| = \Sigma (-1)^i \, |R^i f_* \mathcal{F}| .$$

On obtient ainsi, en prolongeant par additivité un homomorphisme $f_* : K.(X) \to K.(Y)$ respectant les filtrations et faisant de $X \mapsto K.(X)$ un foncteur pour les morphismes propres.

1.9 Soient $f : X \to Y$ un morphisme de <u>Tor-dimension finie</u> [3] et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur Y . On pose

$$f^*|\mathcal{F}| = \Sigma \, (-1)^i \, |\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)| .$$

On obtient ainsi, en prolongeant par additivité, un homomorphisme $f^* : K.(Y) \to K.(X)$, respectant les filtrations avec décalage lorsque f est plat, et faisant de $X \mapsto K.(X)$ un foncteur contravariant.

1.10 Il existe un et un seul homomorphisme $\sigma_X : Z.(X) \to Gr_{top}\, K.(X)$ fonctoriel pour les morphismes propres qui associe au cycle fondamental (1.2) la classe de $|\mathcal{O}_X|$. L'homomorphisme σ_X est surjectif. Il est fonctoriel pour les morphismes plats. Il annule les cycles rationnellement équivalents à zéro.

2. Intersection de cycles

2.1 Soient X une variété, Y une variété lisse, $f : X \to Y$ un morphisme, S et T deux sous-variétés fermées intègres de X et Y respectivement. On dit que S et T sont en bonne position si pour tout point $x \in S$ on a $\operatorname{codim}_x(S \cap f^{-1}(T), S) = \operatorname{codim}_{f(x)}(T, Y)$. Si S et T sont en bonne position, on pose [16]

2.1.1 $$[S]_f.[T] = \Sigma\ (-1)^i\, z_{\dim(S\cap f^{-1}(T))}(\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_T)) .$$

En prolongeant par bilinéarité la formule 2.1.1, on définit un produit $x \cdot_f y$ entre deux cycles x et y en bonne position i.e. tels que toutes les composantes de y soient en bonne position par rapport aux composantes de X.

2.2 Lorsque f est propre, on a la formule de projection [6]
$$f_*(x._f y) = f_*(x)._{id_Y}\, y .$$

2.3 Soient x et y deux cycles en bonne position, rationnellement (resp. algébriquement) équivalents à deux cycles x' et y' respectivement, eux-mêmes en bonne position. Alors $x._f y$ est rationnellement (resp. algébriquement) équivalent à $x'._f y'$.

2.4 Supposons que Y soit quasi-projective et lisse. Soient $(x_i)_{i\in I}$ une famille finie de cycles de X et y un cycle de Y. Il résulte du lemme de déplacement de Chow [15] qu'il existe un cycle y', rationnellement équivalent à y, qui soit en bonne position par rapport à chacun des x_i. On déduit de 2.3 une application bilinéaire homogène

2.4.1 $$A.(X) \times A^\cdot(Y) \to A.(X) ,$$

$(A_p \times A^q \to A_{p-q})$, notée $(x,y) \to (x._f y)$. Lorsque $X = Y$, $f = id$, on déduit de 2.4.1 une application bilinéaire homogène

2.4.2 $$A^\cdot(Y) \times A^\cdot(Y) \to A^\cdot(Y) .$$

On peut montrer [6] que 2.4.2 définit sur $A^\cdot(Y)$ une structure d'anneau commutatif gradué et que 2.4.1 définit sur $A.(X)$ une structure de $A^{\bullet}(Y)$-module gradué. L'anneau $A^{\bullet}(Y)$ est appelé l'<u>anneau de Chow</u>.

2.5 L'application $y \mapsto [X]._f y$ (2.4.1) est notée $f^* : A.(Y) \to A.(X)$ et coïncide lorsque f est plat avec (1.4). On en déduit lorsque X est <u>quasi-projective et lisse</u>, une application

2.5.1 $$f^* : A^{\bullet}(Y) \to A^{\bullet}(X)$$

qui est un homomorphisme d'anneaux et qui fait de $X \mapsto A^{\bullet}(X)$ un foncteur contravariant sur les variétés quasi-projectives et lisses.

2.6 Les applications 2.4.1 et 2.4.2 passent aux quotients et donnent des applications bilinéaires homogènes

2.6.1 $$\begin{cases} C.(X) \times C^{\bullet}(Y) \to C.(X) \\ C^{\bullet}(Y) \times C^{\bullet}(Y) \to C^{\bullet}(Y) , \end{cases}$$

définissant respectivement une structure d'anneau sur $C^{\bullet}(Y)$ et une structure de $C^{\bullet}(Y)$-module sur $C.(X)$ et faisant de $X \mapsto C^{\bullet}(X)$ un foncteur contravariant pour les morphismes entre varités lisses et quasi-projectives.

2.7 Soit X une variété. On note $K^{\bullet}(X)$ le groupe de Grothendieck des modules localement libres sur X . C'est un anneau pour le produit tensoriel. Il opère par produit tensoriel sur $K.(X)$. Soit $f : X \to Y$ un morphisme. L'image réciproque des modules localement libres donne un homomorphisme

2.7.1 $$f^* : K^{\bullet}(Y) \to K^{\bullet}(X) ,$$

qui fait de $X \mapsto K^{\bullet}(X)$ un foncteur contravariant. On a la <u>formule de projection</u> pour les morphismes <u>propres</u> [3]

2.7.2 $$f_*(a \otimes f^*b) = f_*a \otimes b .$$

Lorsque f est <u>propre</u> et de <u>Tor-dimension finie</u>, il existe un et un seul homomorphisme

2.7.3 $$f_* : K^{\bullet}(X) \to K^{\bullet}(Y) ,$$

tel que $f_*(f^*a \otimes b) = a \otimes f_*b$, $a \in K.(Y)$, $b \in K^{\bullet}(X)$, (cf. 1.9).

3. Spécialisation et morphisme de Gysin

3.1 Soient C une courbe lisse et connexe, $c_o \in C$ un point rationnel, $\pi : X \to C$ un morphisme plat, X_o la fibre de c_o, $f : X_o \hookrightarrow X$ l'injection canonique, W une sous-variété fermée intègre de X. Posons

3.1.1
$$\begin{cases} f^*[W] = 0 & \text{si } W \subset X_o \\ f^*[W] = [W \times_X X_o] & \text{si } W \not\subset X_o . \end{cases}$$

En prolongeant par linéarité, on obtient un homomorphisme homogène de degré -1

3.1.2
$$f^* : Z.(X) \to Z.(X_o) .$$

3.2 On a $f^*f_* = 0$ et on déduit de 1.7 et 3.1.2 un homomorphisme $Z.(X - X_o) \to Z.(X_o)$ compatible aux restrictions aux ouverts de C, d'où un homomorphisme $\varinjlim_{c_o \in U} Z.(\pi^{-1}(U) - X_o) \to Z.(X_o)$. Soit X_g la fibre de π au-dessus du point générique de C. On a un isomorphisme (avec décalage d'un degré) $\varinjlim_{c_o \in U} Z.(\pi^{-1}(U) - X_o) \xrightarrow{\sim} Z.(X_g)$; d'où un homomorphisme homogène et de degré 0

3.2.1
$$s^*_\pi : Z.(X_g) \to Z.(X_o)$$

appelé <u>homomorphisme de spécialisation</u>.

Les morphismes 3.1.2 et 3.2.1 sont compatibles avec l'équivalence rationnelle et algébrique ([7], [17]).

3.3 (Déformation au fibré normal) Soit $i : X \hookrightarrow Y$ un plongement fermé, localement intersection complète [3], de codimension d dans une variété <u>quasi-projective</u>. Notons N le fibré normal de X. Considérons la section nulle $X \hookrightarrow N$ et la projection $p : N \to X$. Il existe une variété M, un morphisme <u>plat</u> $M \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}_1$, un plongement $X \times \mathbb{A}_1 \hookrightarrow M$ tel que $\pi / X \times \mathbb{A}_1$ soit la deuxième projection, telle qu'il existe un $\mathbb{A}_1$-isomorphisme $(\pi^{-1}(\mathbb{A}_1 - \{0\}), X \times (\mathbb{A}_1 - \{0\}))$ sur $(Y \times (\mathbb{A}_1 - \{0\}), X \times (\mathbb{A}_1 - \{0\}))$ et un isomorphisme $(M_o, X \times \{0\})$ sur (N, X) .

3.4 L'homomorphisme $p^* : A.(X) \to A.(M)$ est un isomorphisme gradué de degré d (6.9). On a un homomorphisme de changement de corps de base $A.(Y) \xrightarrow{\gamma} A.(M_g)$. On appelle <u>homomorphisme de Gysin</u>, l'homomorphisme composé :

$$A.(Y) \xrightarrow{\gamma} A.(M_g) \xrightarrow{s_\pi^*} A.(M) \xrightarrow{p^{*-1}} A.(X) \ .$$

Cet homomorphisme ne dépend pas des constructions utilisées pour le définir [17]. On le note $f^* : A.(Y) \to A.(X)$. Il est homogène et de degré $-d$.

3.5 Soit $f : X \to Y$ localement intersection complète entre variétés quasi-projectives. Alors f se factorise en $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y \times P \overset{j}{\hookrightarrow} Y$, où i est un plongement, localement intersection complète et j est un morphisme lisse. On pose $f^* = i^* \circ j^* : A.(Y) \to A.(X)$ (cf. 3.4 et 1.6). C'est un homomorphisme homogène et de degré $d = \dim X - \dim Y$ qui ne dépend pas de la factorisation choisie. Cet nomomorphisme f^* appelé <u>homomorphisme de Gysin</u> fait de $X \mapsto A.(X)$ un foncteur contravariant pour les variétés quasi-projectives et les morphismes localement intersection complète. Il coïncide avec (2.5) lorsque Y est lisse et (1.4) lorsque f est plat. Il généralise 3.1.2.

4. Homologie

On note $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et pour toute k-variété X, on note $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$.

4.1 Soit ℓ un nombre premier, $\ell \neq p$. Pour tout entier n, notons $\mathcal{C}_{\bar{X},\ell^n}$ le complexe dualisant des $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$-faisceaux étales sur $\bar{X}$ [1]. D'après un résultat de Deligne [17], c'est un complexe dont la cohomologie est composée de faisceaux constructibles. Comme on a $\mathcal{C}_{\bar{X},\ell^n} \otimes \mathbb{Z}/\ell^{n-1}\mathbb{Z} = \mathcal{C}_{\bar{X},\ell^{n-1}}$, on obtient en passant à la limite un complexe de $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux constructibles [10] qui est un complexe dualisant pour les $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux constructibles et qui est noté $\mathcal{C}_{\bar{X}}$. On pose

$$H_i(X, \mathbb{Z}_\ell) = H^{-i}(\bar{X}, \mathcal{C}_{\bar{X}}) \ .$$

C'est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini et un $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-module. Les groupes $H_i(X, \mathbb{Z}_\ell)$ sont appelés les groupes d'homologie (localement finis) à coefficients dans $\mathbb{Z}_\ell$. Ils se comportent comme un foncteur covariant pour les morphismes propres. Ils sont duaux (au sens dérivé) des groupes de cohomologie à supports compacts $H^i_c(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell)$.

4.2 Lorsque $k = \mathbb{C}$, on note $H_i(X, \mathbb{Z})$ les groupes d'homologie singulière localement finie. Il résulte des théorèmes de triangulabilité de Łojasiewicz [13] que $H_i(X, \mathbb{Z})$ peut se calculer à la Borel-Moore [4]. On a des isomorphismes canoniques $H_i(X, \mathbb{Z}_\ell) = H_i(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ où le premier groupe est pris au sens étale et le deuxième au sens singulier.

Dans la suite, on note $\mathcal{A}$ un anneau isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell$, $\ell \neq p$ ou bien à $\mathbb{Z}_\ell$ ou $\mathbb{Z}$ lorsque $k = \mathbb{C}$. On note $H.(X)$ la théorie de l'homologie à coefficient dans $\mathcal{A}$, étale ou singulière suivant les cas et $H^\cdot(X)$, $H^\cdot_c(X)$ la théorie de la cohomologie correspondante.

4.3 Soient X une variété, $\pi : X \to C$ un morphisme plat sur une courbe lisse et connexe, $c_o \in C$ un point rationnel, X_o la fibre en c_o , X_g la fibre générique. En cohomologie étale, on a un homomorphisme de générisation $H^\cdot_c(X_o) \to H^\cdot_c(X_g)$, d'où par dualité, un homomorphisme de spécialisation $s^*_\pi : H.(X_g) \to H.(X_o)$.

4.4 Lorsque $k = \mathbb{C}$ et $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$, on peut montrer [17] que $R\pi_! \mathbb{Z}$ est un complexe constructible, ce qui entraîne qu'il existe un ouvert non vide $U \subset X$ sur lequel on a des systèmes locaux $u \mapsto H^i_c(X_u)$. On a donc une notion de fibre générale X_g , un homomorphisme de générisation $H^\cdot_c(X_o) \to H^\cdot_c(X_g)$ et par dualité un morphisme de spécialisation $s_\pi : H.(X_g) \to H.(X)$.

4.5 Soit $f : X \to Y$ un morphisme. Posons $d = \dim X - \dim Y$. On sait définir un homomorphisme image inverse ou encore un homomorphisme de Gysin $f^* : H.(Y) \to H_{\cdot+2d}(X)(d)$ (*) dans les cas suivants :

a) f plat,

b) Y lisse,

(*) La notation $H_i(X)(d)$ désigne la torsion à la Tate [1], triviale lorsque $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$.

c) f localement intersection complète, X et Y quasi-projectives.

4.6 Pour f plat, le morphisme f^* s'obtient en dualisant le morphisme trace $Rf_*\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (cf. [1], exp. XVIII, adapter la construction lorsque $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$).

4.7 Pour Y lisse, $H.(Y)$ est un module libre sur $H^\cdot(Y)$ de base $[Y]$ (5.1). Tout $\alpha \in H.(Y)$ s'écrit donc $\alpha = [Y] \frown D(\alpha)$. On pose $f^*(\alpha) = [X] \frown f^*(D(\alpha))$.

4.8 Pour définir f^* dans le cas localement intersection complète, il suffit, en vertu de 4.6, de le définir lorsque $f : X \to Y$ est un plongement. On utilise alors les notations de 3.3. Notons $\nu \in H^{2d}_X(N, \mathcal{A})$ la classe de Thom du fibré N. Le cap-produit $\frown \nu$ est un homomorphisme de $H.(N)$ dans $H.(X)$. On appelle homomorphisme de Gysin, l'homomorphisme composé

$$H.(Y) \xrightarrow{\gamma} H.(M_g) \xrightarrow{s^*_\pi} H.(N) \xrightarrow{\frown \nu} H.(X) .$$

5. Classe d'homologie associée à un cycle

On pose $\widetilde{H}_i(X) = H_{2i}(X)(-i)$, $\widetilde{H}^i(X) = H^{2i}(X)(i)$.

5.1 Soient X une variété de dimension d et $\mathrm{Irr}(\bar{X},d)$ l'ensemble des composantes irréductible de dimension d de $\bar{X}$. Le groupe $\widetilde{H}_d(X)$ est canoniquement isomorphe au $\mathcal{A}$-module libre de base e_Y , $Y \in \mathrm{Irr}(\bar{X},d)$. On pose

$$[X] = \sum_{Y \in \mathrm{Irr}(d,\bar{X})} n_Y e_Y ,$$

où n_Y est la multiplicité de Y dans $\bar{X}$. On appelle $[X]$ la classe fondamentale de X [5].

5.2 Il existe un et un seul homomorphisme fonctoriel pour les morphismes propres

5.2.1 $\quad cl_X : Z.(X) \to \widetilde{H}.(X)$,

homogène de degré 0 , qui associe au cycle fondamental la classe fondamentale. La classe d'un cycle algébriquement équivalent à 0 est nulle [17], d'où une application notée encore

5.2.2 $\quad cl_X : A.(X) \to \widetilde{H}.(X)$.

Lorsque X est lisse, $\widetilde{H}.(X)$ est un $\widetilde{H}^\cdot(X)$-module libre engendré par $[X]$ d'où

0 — 10

un homomorphisme

5.2.3 $$cl^X : A^{\cdot}(X) \to \widetilde{H}^{\cdot}(X) ,$$

tel que

$$cl_X([X].\beta) = [X] \frown cl^X\beta .$$

5.3 Lorsque X est lisse et quasi-projective, on a [17] :

5.3.1 $$cl^X(\alpha.\beta) = cl^X(\alpha) \smile cl^X(\beta) , \qquad \alpha , \beta \in A^{\cdot}(X) ,$$

et pour tout morphisme $Y \to X$, on a

5.3.2 $$cl_X(\alpha \cdot_f \beta) = cl_X(\alpha) \frown f^* cl^Y\beta , \qquad \alpha \in A.(Y) , \beta \in A^{\cdot}(X) .$$

5.4 L'homomorphisme cl_X commute aux images inverses par les morphismes plats et les morphismes localement intersection complète ((4.8), (4.6), (3.5), (1.6)). Il commute aux homomorphismes de spécialisations ((3.2) et (4.4)).

6. Opérateurs de Chern

6.1 Il existe une et une seule théorie des classes de Chern qui associe à toute variété X (resp. toute variété lisse et quasi-projective) et tout module localement libre E/X des classes de cohomologie (resp. des cycles) $c_i(E)$ dans $\widetilde{H}^{\cdot}(X)$ (resp. $A.(X)$) ([8] et [11]) telle qu'on ait, en posant $c.(E) = \Sigma c_i(E)$

(CH 1) $c.(f^*E) = f^*c.(E)$,

(CH 2) $c.(E) = c.(E') . c.(E'')$ pour toute suite exacte $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$,

(CH 3) Pour tout fibré inversible L , $c_o(L) = 1$, $c_i(L) = 0$ pour $i > 1$, $c_1(L)$ est la classe canonique de L dans $\widetilde{H}^1(X)$ (resp. $c_1(L) = [\mathrm{div}\ L]$) ,

Il résulte de l'unicité de la théorie que dans le cas lisse les classes de cohomologie associées aux cycles $c_i(E)$ sont les classes de Chern cohomologiques.

6.2 Soit X une variété quasi-projective. Introduisons une famille de variables $\underline{\underline{c}}_i(F)$, F module localement libre sur X , $1 \leq i \leq \mathrm{rang}(F)$ et soit $I \subset \mathbb{Z}[\{\underline{\underline{c}}_i(F)\}]$ l'idéal engendré par les relations R suivantes : un polynôme $P((\underline{\underline{c}}_i(F_j))_{j\in J}) \in R$ s'il existe une variété quasi-projective et lisse Y , un morphisme $f : X \to Y$, des fibrés E_j , $j \in J$, des isomorphismes $f^*E_j \simeq F_j$ tels que $P(c_i(E_j)) \in A^{\cdot}(Y)$ soit nul. Notons $A^{\cdot}Ch(X)$ l'anneau gradué quotient. C'est un foncteur contravariant en X . On l'appelle l'anneau des opérateurs de Chern.

6.3 Pour tout module localement libre F sur X , notons encore $c_i(F)$ l'image canonique dans $A^{\bullet}Ch(X)$ de $\underline{\underline{c}}_i(F)$. La correspondance $F \mapsto c.(F)$ possède les propriétés (CH 1) et (CH 2) de 6.1 [7].

6.4 Lorsque X est lisse, on a une injection canonique et fonctorielle de $A^{\bullet}Ch(X)$ dans $A^{\bullet}(X)$ qui identifie $A^{\bullet}Ch(X)$ au sous-anneau de $A^{\bullet}(X)$ engendré par les classes de Chern. Le quotient $A^{\bullet}(X)/A^{\bullet}Ch(X)$ est de torsion.

6.5 Il existe un et un seul homomorphisme d'anneaux homogène et de degré 0 , fonctoriel en X , $cl^X : A^{\bullet}Ch(X) \to \widetilde{H}^{\bullet}(X)$ qui coïncide lorsque X est lisse avec 5.2.3. Cet homomorphisme transforme les classes de Chern dans $A^{\bullet}Ch(X)$ en les classes de Chern cohomologiques.

6.6 On peut définir pour toute variété quasi-projective une et une seule structure de $A^{\bullet}Ch(X)$-module gradué sur $A_{.}(X)$ telle que

a) Pour tout morphisme $f : X \to Y$ dans une variété lisse, on ait

$$f^*(\beta).[X] = f^*(\beta.[Y]) , \qquad \beta \in A^{\bullet}Ch(Y) .$$

b) Pour tout morphisme $f : X \to Y$, on ait la formule de projection

$$f_*(f^*(\alpha).\beta) = \alpha.f_*\beta , \qquad \alpha \in A^{\bullet}Ch(Y) , \quad \beta \in A_{.}(X) .$$

6.7 Soit $f : X \to Y$ un morphisme. On a

$$f^*(\alpha).f^*(\beta) = f^*(\alpha.\beta) \qquad \alpha \in A^{\bullet}Ch(Y) , \quad \beta \in A_{.}(Y) ,$$

lorsque f est plat ou bien localement intersection complète ou bien encore lorsque Y est lisse.

6.8 Notons $U\,Ch^{\bullet}(X)$ l'anneau universel des valeurs d'une théorie des classes de Chern sur $K^{\bullet}(X)$ ([3]). Des formules universelles définissent un homomorphisme d'anneaux $U\,Ch : K^{\bullet}(X) \to U\,Ch^{\bullet}(X) \otimes \mathbb{Q}$, qui, composé avec l'homomorphisme canonique $U\,Ch^{\bullet}(X) \to A^{\bullet}\,Ch(X)$, donne un homomorphisme d'anneau dit homomorphisme de Chern

$$Ch : K^{\bullet}(X) \to A^{\bullet}Ch(X) \otimes \mathbb{Q} .$$

L'homomorphisme de Chern est un isomorphisme modulo torsion.

6.9 Soient E un fibré vectoriel sur X de rang d, $P(E) \xrightarrow{f} X$ le fibré projectif correspondant, $\xi = c_1(O(1)) \in A^{\cdot}Ch(P(E))$. L'homomorphisme $\bigoplus_{0}^{d-1} A_{\cdot}(X) \to A_{\cdot}(P(E))$ qui associe à $(a_1,\ldots,a_{d-1})$ l'élément $\Sigma f^*(a_i).\xi^i$ est un isomorphisme. Soit $\pi : E \to X$ la projection. L'homomorphisme $\pi^* : A.(X) \to A.(E)$ est un isomorphisme de degré d.

7. Théorème de Riemann-Roch

7.1 Soient $f : X \to Y$ un morphisme localement intersection complète entre variétés quasi-projectives, $T_f \in K^{\cdot}(X)$ le fibré tangent virtuel [3]. On définit par des polynômes universels en les classes de Chern de T_f un élément $\mathrm{Todd}(T_f)$ [9] $\in A^{\cdot}\,Ch(X) \otimes \mathbb{Q}$. On le note $\mathrm{Todd}(f)$ dans la suite.

7.2 (Théorème de Riemann-Roch [2]) Il existe un homomorphisme fonctoriel pour les morphismes propres entre variétés quasi-projectives

$$\tau_X : K.(X) \to A.(X) \otimes \mathbb{Q}$$

tel que

(RR 1) $\forall\, \alpha \in K.(X)$, $\beta \in K^{\cdot}(X)$

$$\tau_X(\alpha \otimes \beta) = \tau_X(\alpha)\cdot Ch(\beta) ,$$

(RR 2) Pour tout $f : X \to Y$ localement intersection complète, tout $\alpha \in K.(Y)$

$$f^*(\tau_Y(\alpha))\cdot \mathrm{Todd}(f) = \tau_X(f^*(\alpha)) ,$$

(RR 3) Pour tout $X = \mathbb{P}^n_k$, $\tau_X(|\mathcal{O}_X|) = [X]$ + termes de plus bas degré.

7.3 L'homomorphisme fonctoriel τ est uniquement déterminé par les propriétés (RR 1), (RR 3) pour $X = \mathrm{spec}\ k$, (RR 2) pour f immersion ouverte.

Il est aussi uniquement déterminé par les propriétés (RR 2) pour f immersion ouverte et (RR 3).

L'homomorphisme τ est un isomorphisme modulo torsion.

7.4 (Théorème de Riemann-Roch homologique) En composant l'homomorphisme τ_X (7.2) avec l'homomorphisme $cl_X : A.(X) \otimes \mathbb{Q} \to \widetilde{H}.(X) \otimes K$ où K est le corps des fractions de $\mathcal{A}$, on obtient un théorème de Riemann-Roch à valeurs homologiques.

7.5 Soient $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y$ une immersion fermée dans une variété lisse et quasi-projective, F un faisceau cohérent sur X . Posons $Ch_Y^X(F) = \tau_X(F) \underset{i}{\cdot} \mathrm{Todd}(Y)^{-1}$. En vertu de 7.2, on a

7.5.1 $$i_* Ch_Y^X(F) = Ch(i_*F)\cdot[Y] ,$$

et on appelle $Ch_Y^X(F)$ la <u>classe de Chern locale</u>.

7.6 (Construction de MacPherson) Nous allons donner une construction de la classe de Chern locale dans un cadre un peu plus général. Soit $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y$ une immersion fermée dans une variété irréductible $E_. = 0 \to E_n \xrightarrow{d_n} \dots \xrightarrow{d_1} E_o$ une résolution localement libre sur Y d'un faisceau i_*F où F est un faisceau cohérent sur X . Posons $e_i = \mathrm{rg}\, E_i$, $G = \prod_i G_i$ où G_i est la grassmannienne des sous-fibrés de rang e_i de $E_i \oplus E_{i-1}$, $\pi : G \to Y$ la projection canonique. Pour tout $\lambda \in \mathbb{A}^1$, notons $s_\lambda : Y \to G$ la section qui associe à tout $y \in Y$ l'élément $(\gamma(\lambda d i(y)))$ où $\gamma(f(y))$ désigne le graphe de l'homomorphisme f au point y . On obtient ainsi un plongement de $Y \times \mathbb{A}^1$ dans $G \times \mathbb{P}^1$. Notons W l'adhérence schématique de $Y \times \mathbb{A}^1$ dans $G \times \mathbb{P}^1$, $p : W \to \mathbb{P}^1$ le morphisme induit par la deuxième projection $W_\infty = p^{-1}(\infty) \subset G \times \infty = G$, $Z_\infty = [W_\infty] \in Z_.(G)$.

Le cycle Z_∞ admet une décomposition canonique $Z_\infty = Z + [Y_*]$ où Y_* est une variété irréductible telle que π induise un isomorphisme de $Y_* - \pi^{-1}(X)$ sur $Y - X$ et où Z est un cycle de $\pi^{-1}(X)$.

Pour tout i , notons ξ_i le fibré quotient canonique sur G_i et posons $\xi = \Sigma\,(-1)^i \xi_i \in A^{\cdot}Ch(G)$. Alors $Ch\, \xi \cdot Z \in A_.(\pi^{-1}(X))$. On a

7.6.1 $$Ch_Y^X(F) = \pi_*(Ch\, \xi \cdot Z) .$$

7.7 Supposons maintenant que dans 7.6, X soit localement intersection complète dans Y de fibré normal N et que F soit un fibré localement libre sur X . Alors Y_* est canoniquement isomorphe à l'éclaté de Y le long de X . Il existe un plongement $j : \mathrm{Proj}(N \oplus 1) \to G$ qui rende commutatif le diagramme

C -14

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Proj}(N \oplus 1) & \xrightarrow{j} & G \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X & \xrightarrow{i} & Y , \end{array}$$

où q est la projection canonique, telle que $Z = [j(\mathrm{Proj}(N \oplus 1))]$. On a $Y_* \times_G j(\mathrm{Proj}(N + 1)) \simeq \mathrm{Proj}(N)$. De plus

7.7.1 $$\mathrm{Ch}^Y_X(F) = \mathrm{Todd}(N)^{-1} \cdot (\mathrm{Ch}(F) \cdot [X]) .$$

7.8 (Théorème de Riemann-Roch Grothendieck [3]) Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et localement intersection complète entre variétés quasi-projectives. Il existe un et un seul homomorphisme de groupes $f_* : A^{\cdot}\mathrm{Ch}(X) \otimes \mathbb{Q} \to A^{\cdot}\mathrm{Ch}(Y) \otimes \mathbb{Q}$. tel que (2.7.3)

7.8.1 $$\mathrm{Ch}\, f_* \alpha = f_*(\mathrm{Ch}\, \alpha \cdot \mathrm{Todd}\, f) \quad , \qquad \alpha \in K^{\cdot}(X) .$$

L'homomorphisme f_* est <u>gradué</u> de degré $\dim X - \dim Y$. On a la formule de projection

7.8.2 $$f_* \alpha \cdot \beta = f_*(\alpha \cdot f^* \beta) \quad , \qquad \alpha \in A^{\cdot}\mathrm{Ch}(X) \otimes \mathbb{Q} \ , \quad \beta \in A_{\cdot}(Y) \otimes \mathbb{Q} .$$

7.9 Le carré suivant est commutatif ([2] dans le cas de la cohomologie singulière) :

7.9.1 $$\begin{array}{ccc} (A^{\cdot}\mathrm{Ch}\, X) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{cl^X} & H^{\cdot}(X) \otimes K \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ (A^{\cdot}\mathrm{Ch}\, Y) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{cl^Y} & H^{\cdot}(Y) \otimes K , \end{array}$$

où K désigne le corps des fractions de $\mathcal{A}$ et f_* l'homomorphisme déduit de l'homomorphisme de Gysin en homologie (4.8). La formule 7.8.1 est donc valable en cohomologie.

7.10 (Riemann-Roch sans dénominateurs) Soient $i : X \hookrightarrow X$ une immersion fermée localement intersection complète, de fibré normal N , F un fibré vectoriel sur X de rang r , q un entier, $q \geq \mathrm{codim}(X,Y) = d$, $P^d_q(T_o, T_1, \dots, T_{q-d}, U_1, \dots, U_{q-d})$ le polynôme universel à coefficients entiers introduit dans [12]. Il existe deux formules de Riemann-Roch sans dénominateurs possibles

7.10.1 $c_q(i_*F).\alpha = i_*(P_q^d(r, c_1(F), \dots, c_{q-d}(F), \dots, c_{q-d}(N)).i^*(\alpha)),\ \alpha \in A^{\bullet}_{\bullet}(Y)$,

7.10.2 $c_q(i_*F) = i_*(P_q(r, c_1(F), \dots, c_{q-d}(F), \dots, c_{q-d}(N))$,

où, dans 7.10.2, les classes de Chern sont cohomologiques et i_* est l'homomorphisme déduit de l'homomorphisme de Gysin homologique. La formule 7.10.1 a été démontrée dans [12] et [2] dans le cas X et Y lisses. La formule 7.10.2 est démontrée dans [2] dans le cas de la cohomologie singulière. Le rédacteur n'a pas vérifié ces formules dans le cas général.

7.11 (Cycle de Todd) Soit X une variété quasi-projective. On appelle <u>cycle de Todd</u> de X le cycle $\tau_X(\mathcal{O}_X) \in A.(X) \otimes \mathbb{Q}$. On le note $\tau(X)$. Si $f : X \to Y$ est un morphisme localement intersection complète, on a $\tau(X) = (\mathrm{Todd}\ f)f^*(\tau(Y))$. En particulier, si X est localement intersection complète, on a $\mathrm{Todd}(T_X)\cdot[X] = \tau(X)$. Il existe des exemples où $cl_X(\tau(X))$ n'est pas dans le sous-module $(\widetilde{H}^{\bullet}(X) \otimes K).[X] \subset \widetilde{H}_{\bullet}(X) \otimes K$. <u>A fortiori</u>, $\tau(X)$ n'est pas dans ce cas dans $A^{\bullet}Ch(X) \otimes \mathbb{Q} \cdot [X] \subset A_{\bullet}(X) \otimes \mathbb{Q}$. Il ne semble pas que $cl_X\ \tau(X)$ puisse s'exprimer simplement en fonction des classes de Chern homologiques [14].

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, J.-L. VERDIER, et al. - Théorie des topos et cohomogie étale des schémas, Tomes 1 à 3. Lect. Notes 269, 270, 305, Springer.

[2] P. BAUM, W. FULTON, R. MACPHERSON - Riemann-Roch for singular varieties, Publ. Math., I.H.E.S., 1975, n°45.

[3] P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK, L. ILLUSIE et al. - Théorie des Intersections et théorèmes de Riemann-Roch (S.G.A. 6), Lecture Notes in Maths., vol. 225, Springer.

[4] A. BOREL et J. C. MOORE, Homology theory for locally compact spaces, Mich. Math. J., t. 7, 1960, p. 137-159.

[5] A. BOREL et A. HAEFLIGER - Classe d'homologie fondamentale, Bull. Soc. Math. France, t. 89, 1961, p. 461-513.

[6] C. CHEVALLEY, A. GROTHENDIECK, J.-P. SERRE - Anneaux de Chow et applications, Séminaire C. Chevalley, 2e année (1958), Secrétariat Math. I.H.P.

[7] W. FULTON - Rational Equivalence on singular varieties, Publ. Math., I.H.E.S., 1975, n°45.

[8] A. GROTHENDIECK - La théorie des classes de Chern, Bull. Soc. Math. France, 86 (1958), p. 137-154.

[9] F. HIRZEBRUCH - Topological Methods in Algebraic Geometry, Springer.

[10] J.-P. JOUANOLOU - Thèse. Faculté des Sciences de Strasbourg.

[11] J.-P. JOUANOLOU - Cohomologie de quelques schémas classiques et théorie cohomologique des classes de Chern, S.G.A. 5, exp. VII, note miméographiée de l'I.H.E.S.

[12] J.-P. JOUANOLOU - Riemann-Roch sans dénominateurs, Inventiones Math., vol. 11 (1970), p. 15-26.

[13] S. ŁOJASIEWICZ - Ensembles semi-analytiques, Notes miméographiées de l'I.H.E.S.

[14] R. MACPHERSON - Chern classes for singular algebraic varieties, Ann. of Math.

[15] J. ROBERTS - Chow's Moving Lemma, Algebraic Geometry Oslo 1970, Proceedings of the 5th Nordic Summer-School in Mathematics, 89-96, Wolters-Noordhoff Publishing Groningen, The Netterlands.

[16] J.-P. SERRE - Algèbre locale et multiplicités, Lecture Notes in Mathematics, vol. 11, 2ème éd. 1965, Springer.

[17] Séminaire de l'E.N.S., 1974/75, Secrétariat Math. E.N.S., à paraître.