Astérisque

RENÉE ELKIK

L'équivalence rationnelle

Astérisque, tome 36-37 (1976), Séminaire Bourbaki, exp. nº II, p. 35-63
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__36-37__35_0>

L'ÉQUIVALENCE RATIONNELLE

par Renée ELKIK

On suppose fixé un corps de base k , et tous les schémas considérés dans la suite sont quasi-projectifs sur k , éventuellement singuliers.

Le faisceau structural d'un schéma X est noté O_X . Si X est intègre, le corps des fonctions rationnelles sur X est noté $R(X)$, et $O_{X,x}$ désigne l'anneau local en un point x de X .

On étudie le groupe des classes d'équivalence rationnelles de cycles algébriques sur X . Cet exposé est très fidèle au texte de W. Fulton : "Rational equivalence on singular varieties".

Dans une seconde partie, après un rappel de théorie des intersections, on considérera des schémas lisses sur k . Le groupe des classes de cycles algébriques gradué par la codimension est alors muni d'une structure d'anneau gradué augmenté [2].

I - Le groupe des cycles algébriques.

Pour tout schéma X , on appelle $Z(X)$ le groupe des cycles algébriques sur X , c'est-à-dire le groupe abélien libre construit sur les sous-schémas fermés intègres de X .

On peut munir $\mathbb{Z}(X)$ de deux graduations, on notera :

$$\mathbb{Z}_\bullet(X) = \bigoplus_i \mathbb{Z}(X) \ (\text{resp. } \mathbb{Z}^\bullet(X) = \bigoplus_i \mathbb{Z}^i(X))$$

$\mathbb{Z}_i(X)$ (resp. $\mathbb{Z}^i(X)$) étant engendré par les sous-schémas fermés de dimension (resp. de codimension) i . Etant donné un faisceau cohérent F sur X , on définit un cycle $Z(F)$ de la manière suivante : soient $(Y_i)_{i\in I}$ les composantes du support de F , y_i leur point générique respectif, on pose

$$Z(F) = \sum_{i\in I} \mathrm{Lg}_{O_{X,y_i}} F_{y_i} \cdot [Y_i] \quad .$$

Si $\dim \operatorname{Supp}(F) \leq i$, $Z_i(F)$ désigne la partie graduée de degré i de $Z(F)$, dans $\mathbb{Z}_{\bullet}(X)$. A tout sous-schéma fermé Y de X, on associe le cycle $[Y] = Z(O_Y)$. En particulier, à tout diviseur de Cartier effectif sur X. correspond un élément de $\mathbb{Z}^1(X)$. Cette application s'étend en un homomorphisme de groupe :

$$\operatorname{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}'(X)$$

noté $\qquad D \longrightarrow [D]$.

Propriétés fonctorielles.

a) Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre, V un sous-schéma fermé intègre de X et W son image dans Y.

Si $\dim W < \dim V$, on pose $f_*([V]) = 0$.

Si $\dim W = \dim V$, on pose $f_*([V]) = [R(V) : R(W)].[W]$.

En étendant par linéarité, on définit un morphisme gradué de degré 0 de $\mathbb{Z}_{\bullet}(X)$ dans $\mathbb{Z}_{\bullet}(Y)$ et $\mathbb{Z}_{\bullet}$ est un foncteur covariant de la catégorie des schémas et morphismes propres dans la catégorie des groupes abéliens gradués.

On peut noter que si $V = Z_i(F) \in Z_{\bullet}(X)$ on a :

$$f_*(V) = Z_i(f_*(F)) = \sum_j (-1)^j Z_i(R^j f_* F) .$$

b) $\mathbb{Z}$ a aussi des propriétés contravariantes pour les morphismes plats. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme plat de dimension relative d. On définit un homomorphisme $f^* : \mathbb{Z}_{\bullet}(Y) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\bullet}(X)$, gradué de degré d, par sa valeur sur les cycles associés aux sous-schémas fermés intègres de Y. Soit V un tel sous-schéma, alors

$$f^*[V] = [f^*(V)] = Z(f^*(O_V))$$

(avec $f^*[V] = 0$ si $f^*(V)$ est vide).

c) On a la propriété de commutativité suivante :

PROPOSITION 1.- <u>Soient</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>un morphisme plat</u>, $g : Y' \longrightarrow Y$ <u>un morphisme propre</u>. <u>On considère le produit fibré</u> $X' = X \times_Y Y'$ <u>et le diagramme</u>

cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

les deux applications $g'_* f'^*$ et $f^* g_*$ de $Z.(Y')$ dans $Z.(X)$ sont égales.

Proof.- Soit $y' \in \mathbb{Z}_i(Y')$; avec $y' = Z_i(F')$ et $\dim \mathrm{supp}(F') \leq i$, on a

$$f^* g_*(y') = \Sigma(-1)^j Z_{k+d}(f^* R^j g_* F')$$

et

$$g'_* f^*(y') = \Sigma(-1)^j Z_{k+d}(R^j g'_*(f'^* F'))$$

où d est la dimension relative de g . Puisque f est plat $f^* R^j g_* F' = R^j g'_*(f'^* F')$ [EGA III, 1.4.15].

Images de cycles associés à des diviseurs.

On se propose de montrer que la propriété d'être un cycle associé à un diviseur principal se conserve par image directe. On aura besoin du lemme suivant.

LEMME.- Soient A un anneau local noethérien intègre excellent de dimension 1 , K son corps des fractions, L une extension finie de K et B une A algèbre finie de corps des fractions L .

On désigne par N l'application norme $N : L^* \longrightarrow K^*$. Soit t un élément de B dont la norme $N(t)$ appartient à A . On a alors :

$$\lg_A A/_{N(t)A} = \lg_A B/_{tB} \; .$$

Proof.- On peut supposer A fini sur un anneau de valuation discrète R car on peut remplacer A par $\hat{A}$. Si le lemme est connu lorsque A est de valuation discrète, on a :

$$\lg_R(R_{|tB}) = \lg_R R/_{N_{A|R}}(N(t)) = \lg_R A/_{N(t)A} \; ,$$

ce qui implique le résultat.

Supposons donc que A est un anneau de valuation discrète. B est alors libre sur A . La matrice de l'endomorphisme, multiplication par t du A-module B peut être mise sous forme diagonale (Bourbaki, algèbre, ch. 7, § 4) en utilisant deux bases du A-module B , et le résultat est alors immédiat.

PROPOSITION 2.- Soient X et Y des schémas intègres de même dimension $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre surjectif. Soient $n = [R(X) : R(Y)]$ le degré des extensions génériques et $N : R(X)^* \longrightarrow R(Y)^*$ l'application norme.

i) Si $r \in R(X)^*$ on a

$$f_*[\mathrm{div}(r)] = [\mathrm{div}(N(r))] .$$

ii) Si D est un diviseur de Cartier sur Y

$$f_*[f^*D] = n[D] .$$

Proof.- On doit vérifier ces assertions aux points de hauteur 1 de Y . Soient y un tel point et $A = O_{Y_y}$. On peut faire le changement de base $\mathrm{Spec}\,A \longrightarrow Y$. Le morphisme $X \times_Y \mathrm{Spec}\,A \longrightarrow \mathrm{Spec}\,A$ est un morphisme propre à fibres finies, on a donc $X = \mathrm{Spec}\,B$ où B est une A-algèbre finie.

i) On peut multiplier r par $s \in A$, de façon à avoir $rS \in B$, $N(rs)$ Le lemme 1 permet d'affirmer que l'assertion i) est vraie pour s et rs , donc pour r .

ii) C'est encore une conséquence immédiate du lemme 1 , puisque $N(s) = s^n$ si $s \in A$.

PROPOSITION 3.- Soient X et Y des schémas intègres, $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre. On suppose maintenant $\dim X > \dim Y$, on a alors

$$f_*[\mathrm{div}(r)] = 0$$

pour tout $r \in R(X)^*$

Proof.- L'assertion est une conséquence triviale de la définition de f_* si $\dim Y < \dim X - 1$.

On peut donc supposer $\dim Y = \dim X - 1$ et on doit vérifier que la mul plicité du cycle $[Y]$ dans $f_*[\mathrm{div}(r)]$ est 0. L'assertion signifie que le degré du diviseur $\mathrm{div}(r)$ induit sur la fibre générique de f est nul, ce qui est bien connu puisque cette fibre est une courbe propre sur $R(Y)$.

PROPOSITION 4.- Soient X un schéma, $\varphi_i : X_i \longrightarrow X$ les différentes composantes irréductibles réduites de X et m_i leurs multiplicités respectives (on a $[X] = \Sigma m_i[X_i]$).

Soit D un diviseur de Cartier sur X. Alors $\varphi_i^* D$ est un diviseur de Cartier sur X_i et

$$[D] = \sum_i m_i \varphi_{i_*}[\varphi_i^* D] .$$

Proof.- On peut supposer, d'une part que X est le spectre d'un anneau local noétherien de dim 1, soit A ; d'autre part, que D est effectif défini par un élément t de A, non diviseur de 0.

Soient $(P_i)_{i=1,\dots,n}$ les idéaux premiers minimaux de A. On a $(0) = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$, où Q_i est un idéal P_i primaire. Soit $A_i = A/Q_i$. On considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} A_i \longrightarrow M \longrightarrow 0 ,$$

le conoyau M est de longueur finie. On a donc $\lg A/tA = \sum_i \lg A_i/tA_i$, et on est ramené à démontrer l'assertion dans le cas où l'anneau est irréductible. Soit P son idéal premier minimal. On démontre le résultat en utilisant une filtration de P par des idéaux, telle que les quotients successifs soient des $A|_P$ modules, génériquement de rang 1.

II - Le groupe de Chow.

Soit i un entier et considérons l'application

$$\bigoplus_Y R(Y)^* \longrightarrow \mathbb{Z}_i(X)$$
$$f \longrightarrow [\mathrm{div}\ f] ,$$

la sommation étant prise sur les sous-schémas fermés intègres de X de dimension $i+1$.

On dira qu'un cycle $z \in \mathbb{Z}_i(X)$ est rationnellement équivalent à 0 s'il appartient à l'image de cet homomorphisme. On désigne par $A_i(X)$ le quotient de $\mathbb{Z}_i(X)$ par le sous-groupe des cycles rationnellement équivalents à 0 .

Le groupe gradué $A_\bullet(X)$, ainsi obtenu, s'appelle le groupe des *classes de cycles* ou groupe *de Chow* de X .

PROPOSITION 1.- *Soient* $Y \xrightarrow{\pi} X$ *un morphisme propre,* D *un diviseur de Cartier principal sur* Y , $z = \pi_*([D])$. *Alors* z *est rationnellement équivalent à* 0 .

Proof.- La proposition 4 du paragraphe I permet de supposer Y intègre et le résultat est alors conséquence des proposition 2 et 3 du même paragraphe.

COROLLAIRE.- *Soit* $X \xrightarrow{f} Y$ *un morphisme propre. L'application* $f_* : \mathbb{Z}_\bullet(X) \longrightarrow \mathbb{Z}_\bullet(Y)$ *induit un homomorphisme* $A_\bullet(X) \longrightarrow A_\bullet(Y)$ *qu'on note encore* f_* *et* $A_\bullet$ *est un foncteur covariant pour les morphismes propres.*

On a de même :

PROPOSITION 2.- $A_\bullet$ *est un foncteur contravariant pour les morphismes plats.*

Proof.- Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

dans lequel f est un morphisme plat, g un morphisme propre, Y' désigne le produit fibré $X' \cdot_Y Y'$ et f' , g' les projections canoniques.

Soit D un diviseur principal sur X . D'après un résultat de I , $f^*g_*[D] = g'_*f'^*[D]$. $f^*(g_*[D])$ est donc l'image par un morphisme propre d'un cycle associé à un diviseur principal, ce qui démontre la proposition.

Suite exacte de Mayer-Vietoris.

PROPOSITION 3.- Soient $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte et $i : Y \hookrightarrow X$ l'immersion du fermé complémentaire de U. On a alors une suite exacte

$$A.(Y) \xrightarrow{i_*} A.(X) \xrightarrow{j^*} A.(U) \longrightarrow 0 \quad .$$

Proof.- Soient z un cycle sur X, qui devient rationnellement équivalent à 0 sur U, Z_i des sous-schémas fermés intègres de U et, pour tout i, r_{i_o} une fonction rationnelle sur Z_{i_o} tels que

$$j^*(Z) = \Sigma[\operatorname{div} r_{i_o}] \quad .$$

Soit Z_i l'adhérence de Z_{i_o} dans X. Alors r_{i_o} définit une fonction $r_i \in R(Z_i) = R(Z_{i_o})$ et le cycle $z - \Sigma[\operatorname{div} r_i] \in Z.(X)$ est un cycle qui a son support dans Y.

Un morphisme à valeurs dans Gr_{Top}.

Soient $K_o(X)$ le groupe de Grothendieck des faisceaux cohérents sur X et $Filt_i K_o(X)$ le sous-groupe de $K_o(X)$ engendré par les faisceaux dont le support a une dimension $\leq i$. On désigne par $Gr_{Top}(X)$ le gradué associé à $K_o(X)$ muni de cette filtration.

On peut montrer que $Filt_i K_o(X)$ est engendré par les classes des faisceaux structuraux des sous-schémas fermés intègres de X de dimension $\leq i$. On fait d'abord une récurrence sur i. Puis, par une série de dévissages, on montre que si F est un faisceau cohérent dont le support a pour dimension i, et tel que

$$Z_i(F) = \sum_j n_j[Y_j]$$

alors

$$(*) \qquad cl(F) \equiv \Sigma n_j cl(O_{Y_j}) \mod Filt_{i-1} K_o(X)$$

($cl(F)$ désigne la classe du faisceau F dans $K_o(X)$).

Si V est un sous-schéma fermé intègre de X de dimension i, on définit $\varphi([V])$ comme la classe de O_V dans $Filt_i K_o(X)$ modulo $Filt_{i-1} K_o(X)$. En étendant par linéarité, on définit un homomorphisme $\varphi : \mathbb{Z}.(X) \longrightarrow Gr_{Top}(X)$

Il résulte des remarques précédentes, d'une part que φ est surjectif, d'autre part que si V est un sous-schéma fermé, équidimensionnel de dimension i, alors $\varphi([V])$ est égal à la classe de O_V dans $\mathrm{Filt}_i K_o(X)$ modulo $\mathrm{Filt}_{i-1} K_o(X)$.

PROPOSITION 4.- φ <u>induit un morphisme de</u> $A_\circ(X)$ <u>dans</u> $Gr_{Top}(X)$.

<u>Proof</u>.- Soient en effet Y un sous-schéma fermé intègre de X de dimension $i+1$ et $D = \mathrm{Div}(r)$ le diviseur d'une fonction rationnelle sur Y . On peut écrire $D = D_1 - D_2$ avec D_j effectif. On a (avec des notations évidentes) les suites exactes suivantes de faisceaux cohérents sur O_Y donc sur O_X ,

$$0 \longrightarrow O_Y(-D_j) \longrightarrow O_Y \longrightarrow O_{D_j} \longrightarrow 0 \quad .$$

De plus $O_Y(-D_1) \simeq O_Y(-D_2)$.

Donc $cl(O_{D_1}) = cl(O_{D_2})$ dans $K_o(X)$.

Donc $\varphi([D]) = \varphi([D_1] - [D_2]) = 0$ dans $Gr_{Top}(X)$.

PROPOSITION 5.- φ <u>est covariant pour les morphismes propres</u>.

<u>Proof</u>.- Rappelons d'abord comment est défini $f_* : Gr_{Top}(X) \longrightarrow Gr_{Top}(Y)$ si $f : X \text{---} Y$ est propre.

L'application $f_!$ de $K_o(X)$ dans $K_o(Y)$ est définie par

$$f_!(cl(F)) = \sum_{j \geqslant o} (-1)^j cl(R^j f_* F) \quad .$$

Elle envoie $\mathrm{Filt}_i K_o(X)$ dans $\mathrm{Filt}_i K_o(Y)$, ce qui permet de définir $f_* : Gr_{Top}(X) \longrightarrow Gr_{Top}(Y)$.

La proposition résulte directement de l'explicitation de $f_*(Z_i(F))$ donnée au début du paragraphe I.

III - Théorie des intersections.

On donne seulement ici de brefs rappels et un formulaire. On renvoie à [3] pour les démonstrations.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de X dans un schéma lisse Y. On définit alors sur $A^{\bullet}(Y)$ [groupe des classes de cycles gradués par la codimension] une structure d'anneau gradué et sur $A_{\bullet}(X)$ une structure de $A^{\bullet}(Y)$-module.

Soient d'abord $x \in Z_p(X)$, $y \in \mathbb{Z}^q(Y)$ et soient $|x|$ et $|y|$ les supports respectifs de x et y. On dit que x et y se coupent proprement (sous-entendu : le long de f) si toutes les composantes irréductibles de l'intersection de $|x|$ et $f^{-1}(|y|)$ ont pour dimension $p-q$.

Dans ce cas, on définit le cycle intersection $x \underset{f}{\cdot} y \in Z_{p-q}(X)$ de la façon suivante : si $x = Z_p(F)$, $y = Z^q(G)$ avec F cohérent sur X et $\dim(\operatorname{supp} F) \leqslant p$, G cohérent sur Y et $\operatorname{codim}(\operatorname{supp} G) \geqslant q$ on pose :

$$x \underset{f}{\cdot} y = \sum_{i>0} (-1)^i Z_{p-q}(\operatorname{Tor}_i^{O_Y}(F,G)) .$$

On notera $f^*(y)$ pour $[X] \underset{f}{\cdot} y$.

<u>Quelques propriétés de l'intersection.</u>

On sous-entend toujours, dans ce paragraphe, que les cycles considérés dans les formules d'intersections se coupent proprement.

i) Soient $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ des morphismes, x, y, z des cycles sur X, Y, Z respectivement. On suppose Y et Z lisses, on a alors

$$x \underset{f}{\cdot} (y \underset{g}{\cdot} z) = (x \underset{f}{\cdot} y) \underset{gf}{\cdot} = (x \underset{gf}{\cdot} z) \underset{f}{\cdot} y .$$

ii) Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ des morphismes, x et z des cycles sur X et Z respectivement. On suppose Z non singulier et f propre alors

$$f_*(x \underset{gf}{\cdot} z) = f_*(x) \underset{g}{\cdot} z$$

(le cas particulier $y = z$, $g = id$ s'appelle formule de projection).

iii) Soient $f_1 : X \dashrightarrow Y_1$, $f_2 : X \longrightarrow Y_2$ des morphismes, y_1 , y_2 , x

des cycles sur Y_1, Y_2, X respectivement. On suppose Y_1 et Y_2 lisses et soit $f = (f_1, f_2) : X \longrightarrow Y_1 \underset{k}{\times} Y_2$. Alors

$$(x \underset{f_1}{\cdot} y_1) \underset{f_2}{\cdot} y_2 = (x \underset{f_2}{\cdot} y_2) \underset{f}{\cdot} y_1 = x \underset{f}{\cdot} (y_1 \times y_2) \quad .$$

iv) Soit

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

un diagramme cartésien, avec g propre, Y et Y' . Soit y' un cycle sur Y' . Alors

$$g'_* f'^* y' = f^* g_* y' \quad .$$

Indiquons seulement que i) résulte des suites spectrales des Tm triples, ii) et iv) des suites spectrales reliant $R^{\bullet}f_*(\mathrm{Tor}_{\bullet}^{O_Y}(F,G)$ et $\mathrm{Tor}_{\bullet}^{O_Y}(R^{\bullet}j_*F,G)$ [EGA III. 6, 9.8].

Pour établir iii), on utilise la suite spectrale $\mathrm{Tor}_{\bullet}^{O_{Y_1}}(F,G_1),G_2)$ convergeant vers $\mathrm{Tor}_{\bullet}^{O_{Y_1} \otimes O_{Y_2}}(F,G_1 \otimes G_2)$.

THÉORÈME 1.- <u>Un cycle</u> $x \in Z_i(X)$ <u>est rationnellement équivalent à</u> 0 <u>ssi. il existe un cycle</u> $z \in Z_{i+1}(X \times \mathbb{P}_1)$ <u>tel que</u> $x = p_{1*}(z \underset{p_2}{\cdot} ([0] - [\infty]))$ <u>où</u> p_1 , p_2 <u>désignent les projections de</u> $X \times \mathbb{P}_1$ <u>respectivement sur</u> X et $\mathbb{P}_1$.

<u>Proof</u>.- Si $z \in Z_{i+1}(X \times \mathbb{P}_1)$ il est évident que x , défini par la formule précédente est rationnellement équivalent à 0 .

Soient alors Y un sous-schéma fermé intègre de X , $f \in R(Y)^*$ et $x = [\operatorname{div} f]$. Soit $\Gamma \subset X \times \mathbb{P}_1$ le graphe de l'application rationnelle $f : Y \cdots \longrightarrow \mathbb{P}_1$. Γ définit un cycle z de $X \times \mathbb{P}_1$ et $z \underset{p_2}{\times} ([0] - [\infty])$ est égal au diviseur de f sur Γ ; sa projection par p_1 égale à $[\operatorname{div} f] = x$ comme il résulte de la proposition 2 de I.

PROPOSITION.- <u>Soit</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>un morphisme, avec</u> Y <u>lisse. Soient</u> $x \in Z_p(X)$,

$y \in Z^q(Y)$ des cycles se coupant proprement. Alors,

i) $y \approx 0 \Longrightarrow x \underset{f}{\bullet} y \sim 0$

ii) $x \approx 0 \Longrightarrow x \underset{f}{\bullet} y \sim 0$.

i) On peut supposer $x = [X]$ avec X intègre. On veut montrer $f^*(y) \sim 0$. Soit $z \in Y \underset{k}{\times} \mathbb{P}_1$ tel que, si $D = [0] - [\infty]$ on ait $y = p_{1x}[z \underset{p_2}{\bullet} ([D])$, et considérons le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{f'} & Y \times \mathbb{P}_1 \\ \downarrow{\scriptstyle p_1'} & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Alors,

$$\begin{aligned} f^*(y) &= f^* p_{1*}(z \underset{p_2}{\bullet} D) = p'_{1*} f'^*(z \underset{p_2}{\bullet} D) \\ &= p'_{1*}(f'^*(z) \underset{p_2\ f'}{\circ} D) \sim 0 \ . \end{aligned}$$

ii) On peut supposer X intègre et $x = [\operatorname{div} r]$, $r \in R(X)^*$, et on peut supposer que r définit un morphisme $r : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$. On a

$$x = [X] \underset{r}{\bullet} D \ , \quad x \underset{f}{\circ} y = ([X] \underset{r}{} D) \underset{f}{\circ} y = ([X] \underset{f}{\circ} y) \underset{r}{\circ} D \ ,$$

et par suite $x \underset{f}{\bullet} y \sim 0$ d'après i).

Pour pouvoir définir une action de $A^\bullet(Y)$ sur $A_\bullet(X)$, il nous reste à montrer que si $x \in Z_\bullet(X)$, $y \in Z^\bullet(Y)$, il existe dans la classe d'équivalence rationnelle de y un cycle qui coupe x proprement.

<u>Moving lemma</u>.- Soient un schéma lisse Y et un cycle $y \in Z^q(Y)$. Soient pour tout $i \in [1 \ldots n]$ un morphisme $f_i : X_i \longrightarrow Y$ et un cycle x_i sur X_i . Alors, il existe $y \in Z^q(Y)$ rationnellement équivalent à y et qui coupe proprement chacun des x_i .

<u>Proof</u>.- On peut supposer $x_i = [X_i]$ et X_i intègre. On peut alors décomposer Y en une union disjointe de sous-schémas localement fermés W_j , tels que la restriction de chaque f_i à chaque W_j soit équidimensionnelle.

D'après l'exposé 1 (prop. 1.2) il existe alors un cycle y' rationnellement équivalent à y et qui intersecte proprement chacun des $\bar{W}_j$. y' répond alors à la question. En effet, soit y un point générique d'une composante irréductible de $f^{-1}(y') \cap X_i$. On veut montrer qu'on a $\dim O_{X_y} \geqslant q$. On peut supposer f_i dominant et soit e la dimension de sa fibre générique. Soit $\xi = f_i(y)$ et supposons que $\xi \in W_j$. Soient ξ_j le point générique de W_j et $h = \dim O_{Y_j}$. On a, par hypothèse, sur y' :

$$\dim O_{Y_\xi} \geqslant h + q .$$

De plus [EGA IV, 5.6.5],

$$\dim O_{X_y} = \dim O_{Y_\xi} + e - (\dim f_i^{-1}(\xi)) .$$

On doit donc montrer

$$\dim (f_i^{-1}(\xi)) \leqslant h + e .$$

Et il suffit, pour cela, de démontrer

$$\dim(f_i^{-1}(\xi_j)) \leqslant h + e .$$

Mais le même résultat de EGA IV, appliqué au point générique (soit y_j) de la composante irréductible de dimension maximale de la fibre en ξ_j, donne

$$\dim O_{X_{y_j}} = \dim O_{Y_{\xi_j}} + e - \dim f_i^{-1}(\xi_j)$$

et donc

$$0 \leqslant h + e - \dim f_i^{-1}(\xi_j) .$$

Il résulte de ce qui précède que, lorsque Y est un schéma lisse, $\Lambda^\bullet(Y)$ est muni d'une structure d'anneau commutatif gradué à élément unité $(x.y = x \cdot_{id} y$, $1_Y = [Y])$ et sur la catégorie des schémas quasi-projectifs lisses sur k, $Y \longrightarrow \Lambda^\bullet(Y)$ est un foncteur contravariant en anneaux gradués $\Lambda^\bullet(Y)$ est l'anneau de Chow de Y. Si X est un schéma éventuellement singulier, muni d'un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$, $\Lambda_\bullet(X)$ est un $\Lambda^\bullet(Y)$ module gradué.

On notera que si $f : X \longrightarrow Y$ est plat, la définition de f^* coïncide avec celle donnée au I (propriétés fonctorielles b).

IV- Calcul de l'anneau de Chow d'un fibré projectif sur un schéma lisse.

Les schémas considérés dans ce paragraphe seront, excepté dans le lemme 1, supposés lisses sur k.

LEMME 1.- *Si A_n est l'espace affine de dimension n sur k et p la projection $X \times A_n \longrightarrow X$, l'homomorphisme $p^* : A.(X) \longrightarrow A.(X \times A_n)$ est surjectif.* (On verra ailleurs que c'est un isomorphisme).

Il suffit de le démontrer pour $n = 1$. On raisonne par récurrence sur la dimension de X. On peut supposer X intègre. On démontre que, pour tout sous-schéma fermé intègre Z de $X \times A_n$ sa classe z dans $A.(X \times A_n)$ est dans l'image de p^*.

Si la clôture de l'image de Z dans X est de dimension strictement inférieure à celle de X, cela résulte de l'hypothèse de récurrence. Sinon Z rencontre la fibre générique de p.

Si Z contient cette fibre, on a $[Z] = p^*([X])$. Sinon Z découpe sur cette fibre un diviseur principal, soit $[\operatorname{div} r]$, $r \in R[A_1 \times_R K]$ où K est le corps des fonctions de X.

On peut considérer r comme fonction rationnelle sur $X \times A_1$ et $[Z] - [\operatorname{div} r]$ est un cycle équivalent à Z dont le support ne recontre pas la fibre générique, donc z est dans l'image de p^* par hypothèse de récurrence.

LEMME 2.- *Soient E un faisceau localement libre de rang $r+1$ sur X et $\mathbb{P}(E) = P$, le fibré projectif associé à E. Soit ξ la classe de la section hyperplane de P (diviseur correspondant au faisceau inversible canonique $O_{\mathbb{P}}(1)$). Alors les éléments $\xi^0 = 1_P$, ξ, $\xi^2 \ldots$, ξ^r de $A^\bullet(P)$ sont*

<u>linéairement indépendants sur</u> $A^\bullet(X)$.

<u>Proof</u>.- On a $\pi_*(\xi^i) = 0$, $\forall i \in [0,r-1]$. Ceci est clair pour des raisons de dimension.

On a d'autre part $\pi_*(\xi^r) = 1_X$. En effet toujours pur des raisons de dimension, on peut dire a priori : $\pi_*(\xi^1) = n.1_X$, $n \in \mathbb{Z}$.

Pour calculer n , on peut se restreindre à un ouvert U de X sur lequel le faisceau E est libre. On a alors

$$P_{|U} = P^r_k \underset{k}{\times} U \quad ;$$

et l'assertion résulte facilement de l'assertion correspondante pour P^r_k .

Soit alors $\Sigma\pi^*(a_i)\xi^i = 0$, $a_i \in A^i(X)$ une relation linéaire minimale entre les ξ^i sur $A^\bullet(X)$. Quitte à la multiplier par une puissance de ξ , on peut supposer que son degré en ξ est r .

On en déduit par projection

$$\begin{aligned} 0 &= \Sigma a_i \pi_*(\xi^i) \qquad \text{(formule de projection)} \\ &= a_r \pi_*(\xi^r) = a_r \end{aligned}$$

Ceci contredit la minimalité de la relation et achève la démonstration du lemme.

LEMME 3.- <u>Sous les hypothèses du lemme</u> 2, <u>supposons</u> E <u>libre sur</u> X . <u>Alors l'algèbre</u> $A^\bullet(P)$ <u>est engendrée par</u> ξ <u>sur</u> $A^\bullet(X)$ <u>et l'on a un isomorphisme</u>

$$A^\bullet(P) \xleftarrow{\sim} A^\bullet(X)[T]/_{T^{i+1}}$$

<u>envoyant</u> T <u>sur</u> ξ .

<u>Proof</u>.- On a $E = O_X^{r+1}$, $P = P^r_k \underset{k}{\times} X$, et on raisonne par récurrence sur r .

On peut plonger $\mathbb{P}(O_X^r) = P^{r-1} \underset{k}{\times} X$ dans P par une immersion fermée j telle que $j_*(1_{\mathbb{P}(O_X^r)}) = \xi$.

Le complémentaire U , de cette section hyperplane s'identifie à $X \times A^r$.

La suite exacte de Mayer Vietoris s'écrit :

$$A.(\mathbb{P}(O_X^r)) \xrightarrow{j_*} A.(P) \xrightarrow{i^*} A.(X \quad A^r) \longrightarrow 0$$

où i est l'immersion ouverte : $X \times A^r = U \longrightarrow X$; d'autre part, $j^*(\xi)$ est égal à la classe de la section yperplane sur $\mathbb{P}(\mathcal{O}_X^r)$.

D'après l'hypothèse de récurrence, l'image de j_* est donc contenue dans $\xi A^\bullet(P)$ et $j_* j^*(\xi^r) = \xi^{r+1} = 0$.

D'après le lemme 1, la flèche $i^*\pi^*(A^\bullet(X)) \longrightarrow A_\bullet(X.A^r)$ est surjective. Il résulte de ceci que $A^\bullet(P)$ est un quotient de l'algèbre $A^\bullet(X)[T]/_{T^{r+1}}$, et le lemme 3 est alors conséquence immédiate du lemme 1 .

THÉORÈME 1.- Les hypothèses et les notations sont celles du lemme 2. Alors l'homomorphisme de $A^\bullet(X)$ algèbres

$$A^\bullet(X)[T] \longrightarrow A^\bullet(P)$$

envoyant T sur ξ est surjectif.

Son noyau est engendré par un polynome unitaire de degré $r+1$ en T .

On procède d'abord à une récurrence sur la dimension du schéma X pour montrer que les classes $\xi^0 = 1, \xi', \dots, \xi^r$ forment un système de générateur du $A^\bullet(X)$ module $A^\bullet(P)$.

Soient U un ouvert de X sur lequel E est libre, Y le fermé complémentaire de U dans X .

On écrit Y comme union disjointe de sous-schémas localement fermés, lisses

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$$

et on pose

$$X_i = X - \bigcup_{j>i} Y_j \quad .$$

L'assertion est vraie pour $X_o = U$ d'après le lemme 3. On la démontre pour X_i par récurrence sur i , en utilisant les suites exactes de Mayer Vietoris

$$A^\bullet(P|_{Y_i}) \longrightarrow A^\bullet(P|_{X_i}) \longrightarrow A^\bullet(P|_{X_{i-1}}) \longrightarrow 0$$

$$A^\bullet(Y_i) \longrightarrow A^\bullet(X_i) \longrightarrow A^\bullet(X_{i-1}) \longrightarrow 0$$

Par hypothèse de récurrence sur la dimension $A^\bullet(P/_{Y_i})$ est engendré sur $A^\bullet(Y_i)$

par la restriction à $A^\bullet(P|_{Y_i})$ de $\xi^o, \ldots \xi^i$.

Par hypothèse de récurrence sur i, il en est de même de $A^\bullet(P|_{X_{i-1}})$ au-dessus de $A^\bullet(X_{i-1})$. Et le résultat pour $A^\bullet(X_i)$ s'en déduit. On peut donc écrire de manière unique (l'unicité résulte du lemme 2) ξ^{r+1} comme combinaison linéaire à coefficient dans $A^\bullet(X)$ des classes $\xi^o, \ldots, \xi^r$.

Soit $\xi^{i+1} = \sum_{i=1}^{r+1} a_i \xi^{r+1-i}$, $a_i \in A^i(X)$ (identique à son image réciproque).

Il est clair que le noyau de l'homomorphisme $A^\bullet(X)[T] \longrightarrow A^\bullet(P)$ défini dans l'énoncé, est engendré par $T^{r+1} - \sum_{i=1}^{1+i} a_i T^{r+1-i}$.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> $f : V(E) \longrightarrow X$, <u>le fibré vectoriel associé à</u> E, <u>alors</u> $f^* : A^\bullet(X) \longrightarrow A^\bullet(V(E))$ <u>est un isomorphisme</u>.

<u>Proof</u>.- On applique le théorème à $(P(E \oplus O_X)$ dans lequel se plonge par une immersion ouverte $V(E)$. Le fermé complémentaire de $V(\ )$ dans $\mathbb{P}(E \oplus O_X)$ est une section hyperplane et s'identifie à $\mathbb{P}(E)$.

On déduit alors le corollaire du théorème 2 et de la suite de Mayer Vietoris

$$A^\bullet(P(E)) \longrightarrow A^\bullet(P(E + O_X)) \longrightarrow A^\bullet(V(E)) \longrightarrow 0 .$$

V - <u>Classes de Chern</u> : <u>cas libre</u>.

Soient E un faisceau localement libre de rang $r+1$ sur X et $E^\vee$ son dual. Soit ξ la classe de la section hyperplane dans $A^\bullet(P(E^\vee))$. Le noyau de l'homomorphisme surjectif

$$\begin{aligned} A^\bullet(X)[T] &\longrightarrow A^\bullet(P(E^\vee)) \\ T &\longrightarrow \xi \end{aligned}$$

est engendré, d'après le théorème 2, par une relation qu'on écrit sous la forme

$$\sum_{i=o}^{r+1} C_i(E) T^{r+1-i} , \text{ avec } C_i(E) \in A^i(X) , \quad C_o(E) = 1_X .$$

DÉFINITION.- $C_i(E)$ <u>s'appelle la</u> i^e <u>classe de Chern de</u> E.

Le passage au fibré dual est justifié par la proposition suivante :

PROPOSITION 1.- Soient L un faisceau inversible sur X, D le diviseur correspondant à L. Alors $c_1(L) = [D]$.

Proof.- Clair.

Note.- De manière générale on parlera dans la suite des classes de Chern d'un faisceau, sans préciser leur nombre en convenant que les classes de Chern d'indice supérieur au rang sont nulles.

THÉORÈME 1.- Premières propriétés des classes de Chern.

X et Y désignent des schémas libres sur k, E, E', E'' des faisceaux localement lisses sur X de rang respectif r, r', r''.

i) Fonctorialité.

Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme, on a dans $A^{\bullet}(Y)$, $\forall i \geqslant 0$

$c_i(f^*(E)) = f^*(c_i(E))$.

ii) Additivité.

Soit $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ une suite exacte alors

$$\forall n \geqslant 0 \quad , \quad c_n(E) = \sum_{i=0}^{n} c_i(E')c_{n-i}(E'') \; .$$

Si on considère, pour tout faisceau F, l'élément $c(F) = \sum_{i \geqslant 0} c_i(F) \in A^{\bullet}(X)$ ceci peut encore s'énoncer $c(E) = c(E').c(E'')$.

iii) Soient s et s' deux sections, $O_X \longrightarrow E$. Elles définissent deux sections qu'on note encore s et s' du schéma $V(E^{\vee})$ au-dessus de X. On a alors $s'^*s_*[1_X] = c_r(E)$.

En particulier, si s est une section réguliere c'est-à-dire si le support du conoyau de la flèche duale $E^{\vee} \longrightarrow O_X$ est purement de codimension r. Le cycle des zéros de s, c'est-à-dire le cycle de X associé à ce conoyau a pour classe $c_r(E)$.

Avant de démontrer ce théorème énonçons le :

Splitting principle.- Il existe un schéma Y et un morphisme propre et lisse $f : Y \longrightarrow X$, tel que :

i) $f^*A^\bullet(X) \longrightarrow A^\bullet(Y)$ soit injectif.

ii) Il existe sur Y une filtration de $f^*(E)$ par des faisceaux localement libres, dont les quotients successifs sont localement libres de rang 1.

D'après le théorème 2, $\pi^* : A^\bullet(X) \longrightarrow A^\bullet(P(E))$ est injectif. D'autre part, $\pi^*(E)$ est munie d'une filtration $0 \leqslant E_1 \leqslant \pi^*(E)$ dont le premier quotient est le faisceau $O_{\mathbb{P}}(1)$. Il suffit de répéter cette construction pour obtenir le résultat.

Démonstration du théorème.

i) Clair.

ii) Utilisant le splitting principle, on peut supposer E' et E'' donc E munis d'une filtration dont les quotients successifs sont localement libres de rang 1. Il suffit donc de démontrer ii) en supposant $rg(E'') = 1$.

Soient π le morphisme structural $P(E^\vee) = P \longrightarrow X$, ξ la classe du faisceau inversible $O_{\mathbb{P}}(1)$ et j l'immersion fermée $P(E'^\vee) \longrightarrow P$. $j^*(O_{\mathbb{P}}(1))$ est égal au faisceau inversible sur $P(E'^\vee)$.

On a d'autre part $j_*(1_{P(E'')}) = C_1(E'') + \xi$. En effet le morphisme $\pi^*(E'') \longrightarrow O_P(1)$ composé de l'injection $\pi^*(E''^\vee) \longrightarrow \pi^*(E^\vee)$ et de la surjection canonique $\pi^*(E) \longrightarrow O_{\mathbb{P}}(1)$ permet de définir une section $O_P \longrightarrow E''^\vee \otimes O_P(1)$ et le fermé défini par les zéros de cette section est exactement $P[E'^\vee]$ et l'assertion résulte donc de la proposition 1. On a alors dans $A^\bullet(P)$

$$0 = j_*\left(\sum_{i=o}^{r-1} C_i(E')\xi^{r-i-1}\right) = \sum_{i=o}^{r-1} C_i(E')\xi^{r-i-1}(j_*1_{P(E'^\vee)})$$

$$= \sum_{o}^{r-1} C_i(E')\xi^{r-i-1}(\xi + C_i(E''))$$

et ceci est nécessairement égal à $\sum_{o}^{r} C_i(E).\xi^{r-i}$ ce qui démontre l'assertion ii) pour E.

iii) On remarque tout d'abord que $s^!_*[1_X]$ ne dépend pas de s' dans $A^\bullet(V(E^\vee))$ car deux sections du fibré sont équivalentes. $s^!_1[1_X]$ et $s^!_2[1_X]$

correspondant au cycle induit sur les fibres en 0 et 1 par l'immersion

$$X \times A_1 \longrightarrow Y \times A$$
$$(x,\lambda) \longrightarrow (\lambda s_1'(x) + (1-\lambda)s_2'(x),\lambda) \quad .$$

De la même façon $s^* : A^{\bullet}(V(E\ )) \longrightarrow A^{\bullet}(X)$ ne dépend pas de s .

On peut en effet considérer

$$X \xrightarrow{j_i} X \times A_1 \longrightarrow Y$$
$$(x,\lambda) \longrightarrow \lambda s_1(x) + (1-\lambda)s_2(x)$$

où j_i $(i = 0,1)$ est l'immersion $x \longrightarrow (x,i)$ et L on sait qu'on a $j_1^* = j_2^* = (\pi^*)^{-1}$ où π est la projection canonique $X.A_1 \longrightarrow X$.

On démontrera donc iii) sous la forme $\epsilon^*\epsilon_*[1_X] = C_1(E)$, où ϵ désigne la section nulle.

Utilisant le splitting principle et la fonctorialité des classes de Chern, on peut de plus supposer qu'on a sur X une suite exacte

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E'' \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

avec $rg(E'') = 1$, et démontrer l'assertion iii) par récurrence sur le rang du faisceau considéré. On peut donc supposer iii) vrai pour E' (l'assertion dans le cas où $rgE = 1$ n'est autre que la proposition 1).

On peut enfin faire le changement de base $X \longleftarrow V(E'^{\vee})$ (corollaire au théorème 1 du § I).

On a alors le diagramme : (en posant $Y = V(E'^{\vee})$)

$$\begin{tikzcd}
& V(E^{\vee}) \times Y \times V(E'^{\vee}) \arrow[d, shift right] & \\
V(E''\ ) \times Y \arrow[dr] & V(E\ ) \times Y \arrow[l, "\pi"'] \arrow[u, shift right, "\Delta'"'] \arrow[d] & y \times Y = V(E'^{\vee}) \times Y \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, dashed] \\
& Y \arrow[ur, bend right, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

où π (resp. j) désigne le morphisme (resp l'immersion) correspondant à l'homomorphisme de faisceaux $E''^{\vee} \longrightarrow E^{\vee}$ (resp. $E^{\vee} \longrightarrow E'^{\vee} \longrightarrow 0$) et où Δ désigne la section diagonale et Δ' son image réciproque.

On désigne par ε , (resp. ε', ε'') la section nulle de E (resp. E' , resp. E'') (indépendant du schéma de base), on a alors dans $A^\bullet(V(E^\vee) \times Y)$:

$$\pi^* \varepsilon''_*[1_Y] \cdot \varepsilon'^* \Delta^!_*(1_{V(E^\vee) \times Y}) = \varepsilon_*(1_Y) \quad .$$

En effet, on vérifie directement sur leurs équations locales que les fermés, correspondant à ces deux cycles, sont les mêmes.

On a alors

$$\begin{aligned} \varepsilon^* \varepsilon_*(1_Y) &= \varepsilon^* \pi^* \varepsilon''_* 1_Y) . \varepsilon^* \varepsilon'^* \Delta^!_*(1_{V(E^\vee)} \times Y) \\ &= \varepsilon''^*, \varepsilon''_*(1_Y) . \varepsilon^* \varepsilon'^* \Delta^!_K(1_{V(E^\vee)} \times Y) \quad . \end{aligned}$$

Le premier terme de ce produit est égal à $C_1(E'')$ et $\varepsilon'^* \Delta^!_K(1_{V(E^\vee) \times Y})$ est égal à $C_{r-1}(E'')$ par hypothèse de récurrence.

On a donc

$$\begin{aligned} \varepsilon^* \varepsilon_*(1_Y) &= C_1(E'') . C_{r-1}(E') \\ &= C_r(E) \end{aligned}$$

d'après ii), ce qui termine la démonstration.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> $X \overset{j}{\hookrightarrow} J$ <u>une immersion de schémas lisses</u>. <u>On a</u>

$$j^* j_* x = x \wedge C_r(N) \quad , \quad \forall x \in A.X$$

<u>où</u> N <u>désigne le filtre normal</u>, r <u>son rang et</u> $C_r(N)$ <u>sa</u> r^e <u>classe de Chern</u>.

On démontre (exp. 6) qu'il existe un plongement i de $X \times A_1$ dans une variété lisse M , munie d'un morphisme plat $p : M \longrightarrow A_1$ tel que $p \circ i$ induise la seconde projection et tel que, pour tout point t de A_1 différent de l'origine, le plongement induit sur la fibre soit le plongement donné de X dans Y et qu'au point 0 ce soit le plongement de X dans le fibré normal de l'immersion j par la section nulle.

L'énoncé est alors conséquence de l'assertion iii) du théorème précédent.

<u>Remarques</u>.

1) La propriété ii) signifie que les classes de Chern d'un faisceau localement libre E ne dépendent que de la classe $cl(E)$ de E dans $K^\bullet(X)$,

et l'application $cl(E) \longrightarrow c(E)$ s'étend en un homomorphisme du groupe additif $K^\bullet(X)$ dans le groupe multiplicatif des éléments de $A^\bullet(X)$ dont la composante de degré 0 est 1.

2) Etant donnés trois entiers i, r, s, il existe un polynôme universel à coefficients entiers, $P_i \in Z[X_1 \ldots X_i, Y_1 \ldots Y_i]$ tel que si E, F sont des faisceaux localement libres sur X de rang respectif r et s, la i^e classe de Chern du produit tensoriel $E \otimes F$ soit égale à

$$P_i[C_1(E), \ldots C_i(E), C_1(F), \ldots C_i(F)] .$$

En effet, il résulte du splitting principle qu'on peut supposer que la classe de E (resp. de F) dans $K^\bullet(X)$ est somme de r (resp. s) classes de faisceaux inversibles soient $L_1 \ldots L$ (resp. $N_1, \ldots N_s$). On a alors

$$cl(E \otimes F) = \sum_{i,j} cl(L_i) cl(N_j) .$$

Associons à tout faisceau F son polynome de Chern C^t appartenant à $A^\bullet(X)[t]$ anneau de polynome en une variable sur X et défini par :

$$C^t(F) = \sum_{i=o}^{rg(F)} C_i(F) t^i$$

On a :

$$C^t(E) = \sum_{i=o}^{r} C_i(E) t^i = \prod_{i=o}^{r} (1 + a_i t)$$

$$C^t(F) = \sum_{i=o}^{s} C_i(F) t^i = \prod_{i=o}^{s} C_i(F) t^i = \prod_{i=o}^{s} (1 + b_i t)$$

où a_i (resp. b_i) est la première classe de Chern de L_i (resp. N_i).

D'autre part

$$C^t(E \otimes F) = \prod_{\substack{i=o \\ j=o}}^{r,s} C^t(L_i \otimes N_j)$$

$$\prod_{i,j=o}^{r,s} (1 + (a_i + b_j) t) .$$

Les coefficients de ce polynôme sont des fonctions symétriques des a_i et des b_j et s'expriment par des polynômes universels en les classes de Chern de E et F .

Le même raisonnement permet d'affirmer qu'il existe des polynomes universels à coefficient dans $\mathbb{Z}$ donnant l'expression des classes de Chern des puissances extérieures de E en fonction des classes de Chern de E . On montre facilement aussi qu'on a

$$c_i(E^{\vee}) = (-1)^i c_i(E) \quad .$$

VI - Classes de Chern. Cas d'un schéma singulier.

X désigne de nouveau un schéma éventuellement singulier sur k . On se propose d'associer à tout faisceau localement libre sur X des classes de Chern, opérant sur le groupe de Chow $A_{\bullet}(X)$.

PROPOSITION 1.- *Soit* E *un faisceau cohérent localement libre sur* X . *Il existe un plongement* $j : X \longrightarrow Y$, *avec* Y *lisse sur* k *et un faisceau localement libre* F *sur* Y *tels que* $j^*F \simeq E$.

On démontre la proposition, plus précise, suivante :

PROPOSITION 2.- *Soit* $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$, *une suite exacte de faisceaux localement libres sur* X . *Il existe un plongement* $j : X \longrightarrow Y$, *dans une variété lisse* Y *et une suite exacte* $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ *de faisceaux localement libres sur* Y , *tels que l'image réciproque de cette suite par* j *soit isomorphe à la suite donnée sur* X .

Proof.- On plonge X dans un espace projectif sur k . Soit $i : X \hookrightarrow P = P_k^n$ l'immersion. Pour m suffisamment grand, il existe une surjection

$$O_P^N \longrightarrow E(m) \longrightarrow 0 \quad , \qquad (E(m) = E \otimes O_P(m)) \quad .$$

Soient G la variété de drapeaux représentant les quotients successifs de rang e = rang de E , et e'' = rang de E'' du faisceau libre de rang N , et soit $O_G^N \longrightarrow \xi \longrightarrow \xi''$ l'objet universel sur G .

Il existe un morphisme $f : X \longrightarrow G$, correspondant à la suite $O_X^N \longrightarrow E(m) \longrightarrow E''(m)$ sur X . Soient $M = P \times G$ et j le morphisme graphe

$$\begin{aligned} j : X &\longrightarrow P \times G = M \\ x &\longrightarrow (i(x), f(x)) \end{aligned}$$

Soient sur M

$$F = p_1^*(O(-m)) \otimes p_2^*(\xi)$$

$$F'' = p_1^*(O(-m)) \otimes p_2^*(\xi'')$$

$$F' = \operatorname{Ker}(F \longrightarrow F'')$$

(p_1, p_2 désignent les projections).

La suite exacte $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ induit sur X la suite donnée.

PROPOSITION 3.- <u>Soit</u> $j : X \hookrightarrow Y$ <u>une immersion de</u> X <u>dans le schéma lisse</u> Y , <u>et soient</u> F <u>et</u> F' <u>deux faisceaux localement libres tels que</u> j^*F <u>et</u> j^*F' <u>soient isomorphes</u>. <u>Soient</u> i <u>un entier</u>, $C_i(F)$ <u>et</u> $C_i(F')$ <u>les classes de Chern de rang</u> i <u>de</u> F <u>et</u> F' . $C_i(F)$ <u>et</u> $C_i(F')$ <u>ont même action sur</u> $A_\bullet(X)$.

<u>Proof</u>.- On peut supposer X fermé dans Y . Comme les classes de Chern d'un produit tensoriel sont données par des formules universelles, on peut remplacer F et F' par $F \otimes L$ et $F' \otimes L$, pour tout faisceau inversible L sur Y . Quitte à choisir L suffisamment ample, on peut supposer qu'il existe une surjection $O_Y^N \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow 0$.

Soit I l'idéal définissant X dans Y . On peut encore supposer $H^1(Y, I \otimes F') = 0$. Si φ désigne l'isomorphisme donné : $\varphi : j^*F \longrightarrow j^*F'$ et $\bar{\pi}$ la surjection induite sur X par π , le composé de ces deux morphismes définit une surjection : $O_X^N \longrightarrow j^*F' \longrightarrow 0$. L'hypothèse faite sur $H^1(Y, I \otimes F')$ permet de la relever en un morphisme $O_Y^N \longrightarrow F'$ qu'on peut supposer surjectif, quitte à remplacer Y par un voisinage ouvert de X .

On a alors un diagramme

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & F \arrow[r] & 0 \\ O_Y^N \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & \\ & F' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

et sur X un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & j^*F \arrow[dd, "\wr\,\varphi"] \\ O_X^N \arrow[ur, "j^*\pi"] \arrow[dr, "j^*\pi"'] & \\ & j^*F' \end{tikzcd}$$

Si G désigne la grassmannienne des quotients de rang $n = \mathrm{rang}(F)$ du faisceau libre de rang N , π et π' correspondent alors à des flèches f , et f' de Y dans G et la commutativité du diagramme précédent implique qu'on aura $j \circ f = j \circ f'$.

Si ξ désigne le quotient universel sur G , on a pour tout $x \in A_{\bullet}(X)$

$$x \underset{j}{\cdot} c_i(F) = x \underset{j\circ f}{\cdot} c_i(\xi) = x \underset{j\circ f}{\cdot} c_i(\xi) = x . c_i(F')$$

ce qui achève la démonstration.

Supposons maintenant qu'on ait deux plongements $j : X \hookrightarrow Y$, $j' : X \hookrightarrow Y'$, avec F (resp. F') sur Y (resp. Y') induisant un faisceau isomorphe à E sur X , alors les classes de Chern de F et F' ont même action sur $A_{\bullet}(X)$. Ceci résulte trivialement de la proposition précédente si on introduit l'immersion de X dans le produit $Y \underset{k}{\times} Y'$ et les deux faisceaux $p_1^*(F)$, $p_2^*(F')$. On peut donc associer à E des opérateurs sur $A_{\bullet}(X)$ dits opérateurs de Chern.

THÉORÈME 1.- <u>Groupe de Chow d'un fibré projectif</u>.

Soient E un faisceau localement libre de rang $r+1$ sur un schéma X et $\pi_X : P_X = \mathbb{P}_X(E) \longrightarrow X$ le fibré projectif correspondant.

Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme avec Y lisse, F un faisceau localement libre sur Y tel que $f^*F = E$. (On sait qu'il existe un tel Y grâce à la proposition 1). Soient $\pi_Y : P_Y = \mathbb{P}_Y(F) \longrightarrow Y$ le fibré projectif associé à F et ξ la classe de la section hyperplane dans $A^{\bullet}(P_Y)$. Alors

i) Les puissances de ξ définissent des opérateurs sur $A_{\bullet}(P_X)$ qui ne dépendent pas de Y et F .

ii) L'homomorphisme de $A^\bullet(P_Y)$ modules

$$A_\bullet(X) \underset{A^\bullet(Y)}{\otimes} A^\bullet(P_Y) \longrightarrow A_\bullet(P_X)$$

est un isomorphisme.

iii) Si on identifie compte tenu de i) les ξ^i à des opérateurs sur $A_\bullet(P_X)$ on a une décomposition en somme directe

$$A_\bullet(P_X) = \bigoplus_{i=0}^{r} \xi^i . A_\bullet(X)$$

(dans le membre de droite on identifie par abus de langage un cycle de X à son image réciproque par π_X)

et $$\pi_*(\xi^i . x) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < r \\ x & \text{si } i = r \end{cases}$$

pour tout $x \in A_\bullet(X)$.

<u>Proof</u>.-

i) C'est clair par fonctorialité.

ii), iii) Soit $j : V \hookrightarrow X$ l'inclusion d'un sous-schéma fermé intègre de X . On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} P_V \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\pi_V"] & P_X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\pi_X"] & P_Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\ V \arrow[r, hook, "j"] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

(avec des notations évidentes).

Par formule de projection :

$$j'_*(\xi^i \underset{f' \circ j'}{\circ} [P_V]) = \xi^i \underset{f'}{\circ} j'_* [P_V]$$

et le second membre est égal à

$$\xi^i \underset{f'}{\circ} \pi_X^*([V]) \quad .$$

On a donc

$$j_* \circ \pi_{V_*}(\xi^i \underset{f' \circ j'}{\bullet} [P_V]) = \pi_{X_*} \; j'_*(\xi^i \underset{f' \; j'}{\bullet} [P_V] = \pi_{X*}(\xi^i \underset{f'}{\circ} \pi_X^*[V]) \quad .$$

Pour des raisons de dimension, on a donc

$$\pi_*(\xi^i \; \pi_X^*[V]) = 0 \quad , \quad \forall i < r$$

et $$\pi_*(\xi^r \cdot \pi_X^*[V]) = n[V] \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad .$$

Pour calculer n , il suffit de se placer au voisinage du point générique de V , on peut donc supposer V lisse et on sait alors que $n = 1$.

Ceci démontre la deuxième partie de iii).

Par un argument semblable à celui employé dans le lemme 2 de I , on en déduit l'injectivité du morphisme

$$\Lambda_\bullet(X) \underset{\Lambda^\bullet(Y)}{\otimes} \Lambda^\bullet(P_Y)$$

et il suffit pour terminer la démonstration du théorème de montrer que les $\xi^i\, \Lambda_\bullet(X)$ engendrent $\Lambda_\bullet(P_X)$. On le démontre par récurrence sur la dimension de X . On peut donc supposer l'assertion vraie pour Z support du lieu singulier de X sur k . Elle est d'autre part vraie pour $U = X - Z$ qui est lisse sur k , d'après les résultats de I . Il suffit, alors, d'utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris :

$$\begin{array}{l} \Lambda_\bullet(Z) \longrightarrow \Lambda_\bullet(X) \longrightarrow \Lambda_\bullet(U) \longrightarrow 0 \\ \Lambda_\bullet(P_Z) \longrightarrow \Lambda_\bullet(P_X) \longrightarrow \Lambda_\bullet(P_U) \longrightarrow 0 \end{array} \quad .$$

COROLLAIRE.- <u>Soient</u> E <u>un faisceau localement libre sur</u> X <u>et</u> $\pi : V(E) \longrightarrow X$ <u>le fibré vectoriel associé à</u> E <u>l'homomorphisme</u> $\pi^* : \Lambda_\bullet(X) \longrightarrow \Lambda_\bullet(V(E))$ <u>est un isomorphisme</u>.

<u>Proof</u>.- La démonstration peut être calquée sur celle du corollaire du théorème 1 de I .

<u>Anneau de Chern d'un schéma</u>.

On vient de montrer qu'on peut associer à tout faisceau localement libre sur X des opérateurs sur $\Lambda_\bullet(X)$.

Pour généraliser au ces des schémas singuliers la théorie de l'anneau de Chow, on aimerait définir un foncteur contravariant de la catégorie des schémas quasi-projectifs sur k dans la catégorie des anneaux gradués $X \longrightarrow \Lambda^\bullet\mathrm{Ch}(X)$ qui ait les propriétés suivantes.

1) $A^{\bullet}Ch(X)$ opère sur $A_{\bullet}(X)$:

$$ACh^{p}(X) \otimes A_{q}(X) \longrightarrow A_{q-p}(X)$$

de telle sorte qu'on ait la formule de projection :

$$f_{*}(x \circ f^{*}(y)) = f_{*}(x).y$$

pour $f : X \longrightarrow Y$ propre, $y \in A^{\bullet}Ch(Y)$, $x \in A_{\bullet}(X)$.

2) Il existe une "théorie des classes de Chern à valeur dans $A^{\bullet}Ch$ " .

3) La théorie restreinte à la catégorie des schémas lisses coïncide avec celle de l'anneau de Chow.

On ne sait pas définir un foncteur contravariant qui remplisse la troisième condition. Mais on construit de manière purement formelle un foncteur $A^{\bullet}Ch$ qui satifera aux deux premières.

Soient X un schéma de la catégorie considérée, E_X l'ensemble des classes à isomorphisme près de faisceaux localement libres. On désigne par $[F]$ la classe du faisceau F et on associe à cette classe un ensemble fini d'indices $\{C_1(F),\ldots,C_r(F)\}$, où $r = rgF$, et on considère l'algèbre des polynômes sur $\mathbb{Z}$ construite sur l'ensemble des $C_i(F)$.

Soit $\mathcal{A}^{\bullet}(X) = \mathbb{Z}[(C_i(F))_{[F]\in E_X, i\in[1,rkF]}]$, cette algèbre. On désigne par $A^{\bullet}Ch(X)$ un quotient de cette algèbre construit de la manière suivante. Si on se limite à la catégorie des schémas lisses, il existe un homomorphisme fonctoriel de $\mathcal{A}^{\bullet}$ dans $A^{\bullet}$. Pour tout Y lisse, désignons par I_Y son noyau. Pour tout X éventuellement singulier, désignons par I_X l'idéal de $\mathcal{A}^{\bullet}(X)$ engendré par tous les $f^{*}I_Y$ où $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme avvaleur dans un schéma lisse Y .

On définit $A^{\bullet}Ch(X)$ par

$$A^{\bullet}Ch(X) = \mathcal{A}^{\bullet}(X)|_{I_X} .$$

On désigne encore par $C_i(E)$ l'image de $C_i(E)$ des $A^{\bullet}Ch$ et on l'appelle la i^{e} classe de Chern de E .

Ces classes de Chern vérifient la propriété d'additivité du théorème 1 de II, et les classes de Chern d'un produit tensoriel ou d'une puissance extérieure s'obtiennent par les formules universelles habituelles.

Lorsque Y est lisse, on obtient clairement pour $A^{\bullet}Ch(Y)$ la partie de $A^{\bullet}(Y)$ engendrée par les classes de Chern qui s'identifie à torsion près avec $A^{\bullet}(Y)$ (ceci est une conséquence de Riemann-Roch non singulier).

Le caractère de Chern.

On peut de la manière habituelle définir un homomorphisme d'anneau, appelé caractère de Chern

$$ch : K^{o}(X) \longrightarrow A^{\bullet}Ch_{Q}(X) \quad .$$

Notons tout d'abord que l'additivité des classes de Chern permet d'étendre la définition des classes de Chern à tout élément de $K^{\bullet}(X)$.

Pour $x \in K^{o}(X)$ notons alors $c(x)$ le polynome de $A^{\bullet}Ch(X)(t)$:

$$c(x) = \sum_{o}^{\infty} c_i(x)t^i$$

(on peut voir que c'est effectivement un polynome et non une série parce qu'il en est ainsi dans le cas lisse).

Ecrivons

$$c(x) = \prod_{i=o}^{\infty} (1 + a_i t) \quad .$$

On définit alors

$$\begin{aligned} ch(x) &= \sum_i (e^{a_i} - 1) + rg(x) \\ & \sum_i \Big(\sum_{j \geq 1} \frac{a_i^n}{n!} \Big) + rg(x) \end{aligned}$$

Ceci est bien défini dans $A^{\bullet}ch(X)$, car le théorème des fonctions symétriques affirme que $ch(x)$ s'exprime en fonction des $c_i(x)$. On vérifie aisément que c'est un homomorphisme d'anneaux.

De plus l'homomorphisme $ch : K^{o}(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow A^{\bullet}Ch_{\mathbb{Q}}(X)$ est un isomorphisme. On déduit en effet aisément ceci de l'assertion correspondante, connue, dans le cas des schémas lisses.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUM, FULTON, MacPHERSON - Riemann-Roch for singular varieties, Publ. Math., I.H.E.S., 1975, n°45.

[2] Anneaux de Chow, Séminaire Chevalley (1958).

[3] J.P. SERRE - Algèbre locale. Multiplicités, Springer Lecture notes 11 (1965).