Astérisque

BERNARD ANGENIOL

Théorème de finitude en cohomologie étale (d'après P. Deligne)

Astérisque, tome 36-37 (1976), p. 152-162
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__36-37__152_0>

THÉORÈME DE FINITUDE EN COHOMOLOGIE ÉTALE

(d'après P. DELIGNE)

par Bernard ANGENIOL

Dans le paragraphe 0 , nous rappelons quelques notions étudiées en détail dans S.G.A. 4, comme les faisceaux constructibles, les théorèmes de changement de base pour un morphisme propre, de finitude dans le cas propre. Dans le paragraphe 1, nous démontrons le théorème de finitude lorsque la base est un corps. Dans le paragraphe 2, nous traitons le cas où la base est un schéma excellent de dimension 1. Enfin, dans le paragraphe 3, nous démontrons un théorème de bidualité locale. Tous ces résultats sont dus à P. Deligne.

0. Faisceaux constructibles.

Tous les faisceaux étudiés dans cet exposé sont des faisceaux de torsion (S.G.A. 4, IX, 1).

0.1. DÉFINITION.- *Soit* Λ *un anneau. Soit* X *un schéma. Un faisceau de* Λ*-modules sur* X *est dit constructible si pour tout ouvert affine* U *inclus dans* X *, il existe une décomposition de* U *en réunion d'un nombre fini de sous-schémas constructibles localement fermés réduits* U_i *telle que le faisceau, restreint à* U_i *soit localement constant, de valeur de présentation finie.*

Un complexe est dit constructible s'il est borné et si sa cohomologie est constructible.

On notera que cette définition ne dépend que de la structure réduite de X .

0.2. PROPOSITION (S.G.A. 4, IX, 2.4, 2.6, 2.8).- *Soit* Λ *un anneau noethérien.*

(i) *Soient* f *un morphisme de schémas de* X *dans* Y *et* F *un faisceau de*

Λ-modules sur Y . Alors, si F est constructible, f^*F est constructible. Si de plus, f est surjectif et de présentation finie, alors, si f^*F est constructible, F est constructible.

(ii) Une limite projective ou inductive finie de faisceaux constructibles est constructible. En particulier, les noyaux, conoyaux et images de morphismes de faisceaux constructibles sont constructibles.

(iii) Si on a une suite exacte de faisceaux $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$, et si M' et M'' sont constructibles, alors M est constructible.

0.3. Théorème de changement de base pour un morphisme propre (S.G.A. 4, XII).- Soit

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

un diagramme cartésien de schémas avec f propre. Soit F un faisceau abélien de torsion sur X . Alors, le morphisme naturel $\theta^q : g^*(R^qf_*F) \longrightarrow R^qf'_*(g'^*F)$ est bijectif pour chaque $q \geq 0$.

N.B.- Il est clair que l'on peut se passer de l'hypothèse f propre si l'on suppose g étale. (Ce résultat reste vrai si l'on suppose g seulement lisse, et F de ℓ-torsion, où ℓ est inclus dans le complémentaire des caractéristiques résiduelles de S (S.G.A. 4, XVI)).

0.4.-Théorème de finitude dans le cas propre (S.G.A. 4, XIV).- Soit f un morphisme de schémas de X dans S , propre et de présentation finie. Soit Λ un anneau noethérien à gauche qui est une $\mathbb{Z}/(n)$-algèbre pour un n convenable. Soit F un faisceau de Λ-modules constructible sur X . Alors, le faisceau R^qf_*F est également constructible, pour tout q positif ou nul.

0.5. Nous utiliserons aussi des résultats de dualité établis dans S.G.A. 4, XVIII. Nous suivrons les notations et conventions (twist à la Tate, décalage, fonctorialité extraordinaire, etc...) de loc. cit.

1. Théorème de finitude sur un corps.

Nous fixons un anneau A noethérien à gauche qui est une $\mathbb{Z}/(n)$-algèbre pour un n convenable. Tous les faisceaux considérés dans la suite de l'exposé seront des faisceaux de A-modules.

1.1. THÉORÈME.- Soit f un morphisme de X dans Y, morphisme de schémas de type fini sur un corps k. Si F est un faisceau constructible sur X, alors, pour tout i positif ou nul, $R^i f_* F$ est encore constructible.

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension n de X.

1.1.1. Réductions.- On peut supposer

a) k algébriquement clos.

Supposons le résultat connu pour une extension finie et séparable k' de k. Posant $X' = X \times_k k'$, $Y' = Y \times_k k'$, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Alors, si F est constructible, p^*F est constructible, et $R^i f'_*(p^*F)$ l'est aussi par hypothèse sur k'. De plus, puisque q est étale, on a $R^i f'_*(p^*F) = q^*(R^i f_* F)$, et puisque q est fini et surjectif, $R^i f_* F$ est aussi constructible.

Or, si on connaît le résultat pour la clôture algébrique de k, on le connait aussi pour sa clôture séparable (la cohomologie étale est invariante par changement de base purement inséparable), et comme cette clôture séparable est limite inductive d'extensions finies séparables de k, on a le résultat pour k d'après ce qui précède.

b) k *algébriquement clos*, X *et* Y *réduits*.

La notion de constructibilité ne dépend que de la structure réduite.

c) k *algébriquement clos*, X *et* Y *réduits*, Y *affine*.

L'assertion est locale sur Y .

d) k *algébriquement clos*, X et Y *réduits et affines*.

Soit $\underline{\underline{U}}$ un recouvrement affine de X . Alors, la suite spectrale de Leray associée au recouvrement $\underline{\underline{U}}$, $E_2^{pq} = H^p(\underline{\underline{U}}, \mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(\underline{\underline{U}},F)$ a ses termes constructibles, donc son aboutissement aussi.

e) k *algébriquement clos*, X *et* Y *réduits*, f *immersion ouverte de* X *affine dans* Y *quasi-projectif*.

X et Y étant affines, f est affine de type fini, donc quasi-projectif, et se factorise donc en $f' \circ j$, où j est une immersion ouverte de X dans un Y' quasi-projectif, et où f' est un morphisme projectif de Y' dans Y . Alors, si F est constructible, Rj_*F l'est aussi par hypothèse, et $R(f' \circ j)_*F = Rf'_*(Rj_*F)$ l'est aussi par le théorème de finitude dans le cas propre.

f) k *algébriquement clos*, X *et* Y *réduits*, f *immersion ouverte de* X *affine dans* Y *projectif*.

Soit v une inclusion de Y quasi-projectif dans Y' projectif. Alors, le théorème étant supposé vrai pour $v \circ f$, $R(v \circ f)_*F$ est constructible. Or, puisque v est une immersion, on a $v^*(R(v \circ f)_*F) = Rf_*F$. Par conséquent, Rf_*F est constructible.

g) k *algébriquement clos*, X *et* Y *réduits*, F *localement constant*, f *une immersion ouverte de* X *lisse dans* Y *projectif irréductible*.

Soit U un ouvert de X assez petit pour être lisse et pour que F soit localement constant sur U , et soit u l'injection canonique de U dans X . Si le résultat est connu pour $f \circ u$, alors $R(f \circ u)_*(u^*F)$ est constructible. Donc, puisque f est une immersion ouverte, $Ru_*u^*F = f^*(R(f \circ u)_*(u^*F))$ est constructible. Or, on a un triangle distingué $G \longrightarrow F \longrightarrow Ru_*u^*F$ où G est un faisceau à support de dimension $< n$, et est donc constructible puisque F et Ru_*u^*F le sont. Donc par hypothèse de récurrence, Rf_*G est constructible, et comme $Rf_*(Ru_*u^*F) = R(f\circ u)_*u^*F$ est aussi constructible, Rf_*F est aussi constructible. En décomposant X en ses composantes irréductibles, on se ramène au cas X connexe et comme l'image de X est contenue dans une composante irréductible de Y , on peut supposer Y irréductible.

1.1.2. LEMME.- On suppose le théorème établi en dimension $< n$. Alors, si f est une immersion ouverte de X de dimension $\leqq n$ dans Y intègre, si F est constructible sur X , R^if_*F a un sous-faisceau constructible G^i tel que les sections locales de R^if_*F/G^i soient toutes à support fini.

On peut supposer Y quasi-fini sur l'espace affine $\mathbb{A}^n$ (on recouvre Y par un nombre fini d'ouverts affines Y_j , et en admettant le lemme lorsque Y est affine, on construit des sous-faisceaux G^i_j vérifiant les propriétés du lemme sur Y_j et prolongés par zéro en dehors de Y_j , et on prend pour G^i la somme des G^i_j dans R^if_*F). On peut donc supposer Y affine et le lemme de normalisation nous permet de supposer Y quasi-fini sur $\mathbb{A}^n$.

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rr, "F"] & & Y \arrow[d] \\
X_\eta \arrow[ur, "p"] \arrow[rr, "F_\eta"'] & & Y_\eta \arrow[ur, "q"] \arrow[d] & A^n \arrow[d, "p_j"] \\
 & & \eta = \mathrm{Speck}(T) \arrow[r] & A^1
\end{tikzcd}$$

où p_j est la j^{eme} projection de $\mathbb{A}^n$ dans $\mathbb{A}^1$, où η est le point générique de $\mathbb{A}^1$, et où X_η et Y_η sont $X \times_{\mathbb{A}^1} \eta$ et $Y \times_{\mathbb{A}^1} \eta$ respectivement. On a la relation $q^*(Rf_*F) = Rf_{\eta*}(p^*F)$. De plus, puisque X_η est de dimension inférieure ou égale à $n-1$ sur η , l'hypothèse de récurrence s'applique et $R^if_*F/Y_\eta = q^*(R^if_*F)$ est constructible.

Soit G'^i_j un faisceau constructible sur Y qui induise R^if_*F sur Y_η .

Par passage à la limite, le morphisme $G_j^{!i}/Y_\eta \longrightarrow R^i f_* F/Y_\eta$ se prolonge à l'image inverse d'un ouvert U de $\mathbb{A}^1$. Soit u l'inclusion de U dans Y. Soit $G_j^{!'i} = u_! u^* G_j^{!i}$; du morphisme de $u^* G_j^{!i}$ dans $u^* R^i f_* F$, on déduit un morphisme de $G_j^{!'i}$ dans $R^i f_* F$. Soit enfin G_j^i l'image de ce morphisme, constructible car quotient d'un faisceau constructible. Si l'on désigne par G^i la somme des G_j^i dans $R^i f_* F$, le quotient $R^i f_* F/G^i$ a pour chaque j une restriction nulle à Y_η. Pour tout j, le support de chacune de ses sections locales est contenu dans l'image réciproque d'un nombre fini d'hyperplans parallèles au j^{eme} hyperplan de coordonnées, et est donc fini, d'où le lemme.

1.1.3. Achevons la démonstration du théorème dans le cas auquel on s'était ramené.

Nous noterons $\sim$ la relation = modulo un faisceau constructible.

a) $H^i(X,F) \sim 0$ car c'est le dual de $H_c^{2n-i}(X,F(n))$ par dualité de Poincaré et $H_c^{2n-i}(X,F(n)) \sim 0$ par le théorème de finitude pour les morphismes propres.

b) Avec les notations du lemme 1.1.2, le théorème de finitude pour les morphismes propres nous donne, puisque Y est propre : $H^p(Y,R^q f_* F) \sim H^p(Y,R^q f_* F/G^q)$. Or, $R^q f_* F/G^q$ étant un faisceau en gratte-ciel, on a $H^p(Y,R^q f_* F/G^q) = 0$ si $p \neq 0$ et $\bigoplus_{\substack{y \in Y \\ y \text{ fermé}}} (R^q f_* F/G^q)_y$ si $p = 0$.

c) En utilisant la suite spectrale $H^p(Y,R^q f_* F) \Longrightarrow H^{p+q}(X,F)$ et le a), on déduit du b) : $\bigoplus_{\substack{y \in Y \\ y \text{ fermé}}} (R^q f_* F/G^q)_y \sim H^q(X,F) \sim 0$. Par conséquent $R^q f_* F/G^q \sim 0$ et d'après le lemme 1.1.2 $R^q f_* F \sim R^q f_* F/G^q \sim 0$, ce qui achève la démonstration du théoreme 1.1.1.

1.2. COROLLAIRE.- Soit X un schéma de type fini sur un corps K. Si F et G sont deux faisceaux constructibles sur X, alors $R\mathcal{H}om(F,G)$ est aussi constructible.

Par dévissage, on peut supposer que F est un faisceau localement constant sur un ouvert U d'un fermé Y de X, et prolongé par 0 en dehors de U. On note j l'immersion fermée de Y dans X. On a alors : $R\mathcal{H}om(F,G) = j_*R\mathcal{H}om(j^*F,R\Gamma_Y(G))$. (En prenant une résolution injective de G, on se ramène, pour vérifier cette relation, au cas où G est injectif, et l'égalité est alors évidente).

Pour nous ramener au cas où Y est égal à X, il nous faut montrer que $R\Gamma_Y(G)$ est constructible. Or, si l'on note i l'immersion ouverte de $X-Y$ dans X, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Gamma_Y(G) \longrightarrow G \longrightarrow i_*i^*G \longrightarrow R^1\Gamma_Y(G) \longrightarrow 0 \quad ,$$

et pour tout $n \geqslant 2$, les isomorphismes $R^{n-1}i_*i^*G \simeq R^n\Gamma_Y(G)$. Puisque G est constructible, et que par le théorème, les $R^{n-1}i_*i^*G$ le sont aussi, on en déduit que les $R^n\Gamma_Y(G)$ sont aussi constructibles.

On suppose donc maintenant que U est un ouvert de X, et on note u l'immersion ouverte de U dans X. Alors, puisque F est nul en dehors de U, on a $R\mathcal{H}om(F,G) = Ru_*R\mathcal{H}om(u^*F,u^*G)$. Enfin pour vérifier que $Ru_*R\mathcal{H}om(u^*F,u^*G)$ est constructible, on peut, puisque l'assertion est locale, quitte à se placer dans des voisinages étales convenables, supposer F constant, et dans ce cas l'assertion est triviale.

1.3. COROLLAIRE.- Soit f un morphisme de X dans Y, schémas de type fini sur un corps k. Alors, $Rf^!$ transforme un complexe constructible en un complexe constructible.

En remarquant que la constructibilité est une propriété locale, et que $Rf^!$ se construit localement, on peut supposer X et Y affines, et factoriser $f = q\circ i$, où i est une immersion fermée de X dans $\mathbb{A}^n_Y$, et où q est un morphisme lisse de $\mathbb{A}^n_Y$. Alors, on a $Rq^!F = q^*(F)(n)[2n]$ qui est constructible, et $Ri^!(Rq^!F) = R\Gamma_X(Rq^!F)$ est aussi constructible par un raisonnement analogue à celui de la démonstration du corollaire 1.2.

On suppose dans la suite que $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2. THÉORÈME.- Soit S un schéma de dimension 1, excellent. Soit f de X dans Y un morphisme de S-schémas de type fini. Alors, si F est un faisceau constructible sur X, les $R^i f_* F$ sont encore constructibles.

2.1. On note a (resp. b) le morphisme structural de X dans S (resp. de Y dans S). On procède encore par récurrence sur la dimension relative de X par rapport à S. Le cas où X est au-dessus d'un point fermé résulte du théorème 1.1. Dès lors, on peut supposer, comme dans le théorème 1.1, que f est une immersion ouverte de X lisse sur S dans Y propre sur S, et que F est localement constant. De plus, quitte à prendre au voisinage de tout point de S, des voisinages étales et à passer à la limite, on se ramène au cas où S est le spectre d'un anneau local excellent hensélien de dimension 1.

Soit Σ le faisceau constant A sur S. En désignant par G le dual de F, la bidualité sur les fibres nous donne $F = R\mathcal{H}om(G, a^*(\Sigma)(n)[2n])$, où G est encore localement constant.

De plus, par dualité de Poincaré, on a :

$$Ra_*F = Ra_*R\mathcal{H}om(G, a^*(\Sigma)(n)[2n]) = R\mathcal{H}om(Ra_!G, \Sigma) .$$

Or, $Ra_!G$ est constructible par le théorème de finitude pour les morphismes propres.

Pour montrer que Ra_*F est constructible, il reste donc à montrer que si H est un faisceau constructible sur S, et Σ un faisceau constant sur S, alors $R\mathcal{H}om(H, \Sigma)$ est constructible.

Distinguons deux cas :

2.1.1. H a un support de dimension 1.

Par dévissage, on peut encore supposer H localement constant sur un ouvert U de S et nul en dehors. Alors, si j est l'immersion de U dans S, on a $R\mathcal{H}om(H, \Sigma) = Rj_*R\mathcal{H}om(j^*H, j^*\Sigma)$. Puisque j^*H est localement constant, et que $j^*\Sigma$ est constant, $R\mathcal{H}om(j^*H, j^*\Sigma)$ est localement constant, et le fait que $Rj_*R\mathcal{H}om(j^*H,Rj^*\Sigma)$ est constructible résulte alors du lemme suivant :

2.1.1.1. LEMME.- Soient s le point fermé de S , i l'immersion de $S-s$ dans S . Si J est localement constant sur $S-s$, alors, Ri_*J est constructible.

Avant de démontrer le lemme 2.1.1.1, considérons le second cas 2.1.2. H a pour support le point fermé s de S .

On note encore i l'immersion de $S-s$ dans S . On a

$$R\mathcal{H}om(H,\Sigma) = R\mathcal{H}om(H_s,R\Gamma_s(\Sigma)) \quad .$$

Donc $R\mathcal{H}om(H,\Sigma)$ est constructible si $R\Gamma_s(\Sigma)$ l'est, et la démonstration du corollaire 1.2 montre que $R\Gamma_s(\Sigma)$ est constructible si et seulement si $Ri_*i^*\Sigma$ est constructible, ce qui résulte du lemme 2.1.1.1.

Démonstration du lemme 2.1.1.1.

Tout d'abord, on peut supposer S irréductible, les composantes irréductibles de $S-s$ étant aussi ses composantes connexes.

De plus, on peut supposer S normal (mais non nécessairement local). On remplace S par son normalisé S' qui est fini sur S (S est excellent). Soient $s'_1,\dots,s'_m$ l'image réciproque de s par le morphisme π de S' dans S π étant un isomorphisme en dehors de $s'_1,\dots,s'_m$, on se ramène donc au cas S normal donc régulier.

Dès lors, J est un module de type fini sur le point générique de S et $(R^qi_*J)_s = H^k(Gal,J)$ est de type fini, ce qui montre le lemme.

On a donc montré que sous les hypothèses du théorème 2, Ra_*F est un faisceau constructible.

2.2. On applique le même argument que dans le théorème 1.1 pour prouver que R^if_*F a un sous-faisceau constructible G^i tel que le support de toute section locale de R^if_*F/G^i soit fini sur S .

Pour cela, on applique l'hypothèse de récurrence avec pour base $S(Z)$.

(Si $S = \operatorname{Spec} A$, A anneau local irréductible d'idéal maximal M , on pose $S(Z) = \operatorname{Spec} A(Z)$, où $A(Z) = A[Z](T^{-1})$, T étant la partie multiplicative formée des polynomes de $A[Z]$ divisibles par aucun des éléments de M). En clair, on se localise au point générique de la fibre fermée du morphisme de $\mathbb{A}^1_S$ dans S . On a donc le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[d] \\
X_\eta \arrow[ur, "p"] \arrow[rr, "f_\eta"] & & Y_\eta \arrow[ur, "q"] \arrow[d] & \mathbb{A}^n_S \arrow[d, "p_j"] \\
 & & \eta = S(Z) \arrow[r] & \mathbb{A}^1_S
\end{tikzcd}$$

Le processus de la démonstration est exactement le même que dans la démonstration du lemme 1.1.2.

On sait aussi, d'après le théorème 1.1, que, au-dessus du point générique de S , $R^i f_* F$ est constructible. On se ramène donc au cas où les supports des sections locales de $R^i f_* F/G^i$ sont des ensembles finis de points fermés.

2.3. Dès lors, puisque $Ra_* F$ est constructible, les mêmes arguments globaux qu'au 1.1.3 s'appliquent et achèvent la démonstration.

3. Bidualité locale.

Soient S le spectre d'un anneau de Dedekind excellent, et X un S-schéma de type fini. Alors, appelons complexe dualisant sur X le complexe $K_X = Rf^! \Sigma$, où f est le morphisme structural de X dans S , et où Σ est le faisceau constant Λ sur S .

Pour tout complexe K , on pose $DK = R\mathcal{H}om(K, K_X)$, DK étant appelé le dual de K . On dispose d'un homomorphisme canonique

(3.1) $$K \longrightarrow DDK \quad .$$

3.2. THÉORÈME.- Lorsque K est constructible, l'homomorphisme (3.1) est un quasi-isomorphisme.

3.2.1. On procède par récurrence sur la dimension relative de X sur S. Comme le problème est local sur X, on peut tout d'abord supposer que X est affine sur S puisque X est projectif sur S. Par le même argument que précédemment, on se ramène à supposer le mapping cylinder δ de (3.1) de sections locales à support fini sur S.

3.2.2. De plus, pour X propre sur S, on a $Rf_*DDK = DRf_*DK \cong DDRf_*K = Rf_*K$ par bidualité sur S.

Dès lors, on a $Rf_*\delta = 0$, et, d'après 3.2.1, $\delta = 0$.