Astérisque

JEAN LANNES
FRANÇOIS LATOUR

Forme quadratique d'enlacement et applications

Astérisque, tome 26 (1975)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__26__1_0>

© Société mathématique de France, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 3

CHAPITRE I. Fibrations stables et $SG_{(2)}$ - trivialisations 12

CHAPITRE II. Enlacement rationnel 18

CHAPITRE III. Construction d'une forme quadratique associée à la forme d'enlacement d'une variété de dimension 4k-1 , $SG_{(2)}$ - trivialisée 27

CHAPITRE IV. Changement de trivialisations 44

CHAPITRE V. Construction sur une flèche 51

CHAPITRE VI. Relations entre la forme d'intersection rationnelle d'une variété de dimension 4k et la forme d'enlacement de son bord ou la forme quadratique d'enlacement de son bord, dans le cas où ce dernier est $SG_{(2)}$ - trivialisé 54

CHAPITRE VII. Invariant λ et applications 62

CHAPITRE VIII. (Λ, Λ') - sphères 74

APPENDICE. Formule de Milgram 86

BIBLIOGRAPHIE 88

SUMMARY 89

INTRODUCTION (*)

Variétés et formes bilinéaires.

Soit M une variété différentiable compacte orientée sans bord de dimension n.

Dans le cas où n est pair, $n = 2\ell$, notons $L_\ell(M)$ la partie libre du groupe d'homologie $H_\ell(M;\mathbb{Z})$; le groupe $L_\ell(M)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini. La forme d'intersection de la variété M est une forme bilinéaire $(-1)^\ell$-symétrique :

$$L_\ell(M) \times L_\ell(M) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(x,y) \longrightarrow x.y$$

Cette forme peut être définie à l'aide du cup-produit en cohomologie :

$$H^\ell(M;\mathbb{Z}) \otimes H^\ell(M;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2\ell}(M;\mathbb{Z}) \quad .$$

La théorie de la dualité de Poincaré (1900) montre qu'elle est non dégénérée c'est-à-dire qu'elle induit un isomorphisme du module $L_\ell(M)$ sur son dual $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}[L_\ell(M),\mathbb{Z}]$. Quand ℓ est impair on considère également la forme (symétrique) d'intersection modulo 2 :

$$H_\ell(M;\mathbb{Z}/2) \times H_\ell(M;\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \quad .$$

Elle est encore non dégénérée.

Dans le cas où n est impair, $n = 2\ell + 1$, notons $T_\ell(M)$ la partie de torsion de $H_\ell(M;\mathbb{Z})$, c'est un groupe abélien fini. La forme d'enlacement de M est une forme $(-1)^{\ell+1}$-symétrique :

$$T_\ell(M) \times T_\ell(M) \xrightarrow{e} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad .$$

Cette forme peut être définie à l'aide du cup-produit suivant :

$$H^\ell(M;\mathbb{Z}) \otimes H^{\ell+1}(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2\ell+1}(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \quad .$$

Elle est toujours non dégénérée (dualité de Poincaré) c'est-à-dire qu'elle induit un

---

(*) L'éditeur remercie les auteurs d'avoir fait précéder leur texte d'une introduction qui permettra au lecteur non spécialiste de placer ce travail dans sa perspective historique.

isomorphisme du groupe fini $T_\ell(M)$ sur son dual de Pontryagin $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}[T_\ell(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$.

Cobordisme et groupes de Witt.

On distingue quatre cas suivant la classe de la dimension n de M modulo 4 , dans deux d'entre eux les formes ci-dessus conduisent à des invariants de cobordisme.

1) $n = 4k$. On dit que le $\mathbb{Z}$-module $L_{2k}(M)$ muni de la forme bilinéaire symétrique d'intersection est un b-module. Si M est une variété-bord, $L_{2k}(M)$ est un b-module neutre : il contient un facteur direct qui est son propre orthogonal ; on obtient donc un invariant de cobordisme en considérant la classe du b-module $L_{2k}(M)$ dans le groupe de Witt $W(\mathbb{Z})$ qui est grosso modo la collection de tous les b-modules sur $\mathbb{Z}$ modulo la collection des b-modules neutres. Comme l'homomorphisme de signature $W(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme, l'invariant défini précédemment n'est pas autre chose qu'un entier relatif, noté $I(M)$, qu'on appelle la signature de la variété M (Thom 1950).

2) $n = 4k + 2$. On a cette fois un b-espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2$ à savoir $H_{2k+1}(M;\mathbb{Z}/2)$. Malheureusement quand M est orientée ce b-espace est neutre.

3) $n = 4k - 1$. On dit que le groupe abélien fini $T_{2k-1}(M)$ muni de la forme d'enlacement (symétrique) est un e-module sur $\mathbb{Z}$; un e-module est neutre s'il contient un sous-module qui est son propre orthogonal. Le groupe de Witt $W(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ correspondant à ces notions est encore, grosso modo, la collection de tous les e-modules sur $\mathbb{Z}$ modulo la collection des e-modules neutres. La classe du e-module $T_{2k-1}(M)$ dans $W(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ n'est pas invariante par un cobordisme ordinaire, plus précisément toute classe de $W(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ peut être représentée par une variété bord.

4) $n = 4k + 1$. Le groupe de Witt adéquat est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$, la classe de $T_{2k}(M)$ dans ce groupe est l'invariant de cobordisme de De Rham.

Variétés stablement trivialisées et formes quadratiques.

On suppose maintenant que la variété M est munie d'une trivialisation stable t de son fibré tangent τ_M . C'est-à-dire qu'on se donne un isomorphisme t de la somme de Whitney $\tau_M \oplus \epsilon^p$ sur ϵ^{n+p} , ϵ^m désignant le fibré trivial de dimension m.

1) $n = 4k$. L'existence de t entraîne $x.x \equiv 0 \pmod 2$ pour tout x dans $L_{2k}(M)$, la forme d'intersection est associée à la forme quadratique $q(x) = \frac{1}{2}\, x.x$, on dit alors que $L_{2k}(M)$ est un q-module. On en déduit que la signature de M est divisible par 8 . En fait puisque M est sans bord et que son fibré tangent est stablement trivial la formule d'Hirzebruch (1955) montre que $I(M) = 0$ (ce phénomène disparait si on affaiblit la notion de trivialisation stable).

2) $n = 4k+2$. En 1960 Kervaire a montré que la donnée de t permet de définir une forme quadratique $q : H_{2k+1}(M;\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ associée à la forme d'intersection modulo 2 . Si M est le bord d'une variété munie d'une trivialisation stable qui induit celle de M le q-espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2$ $H_{2k+1}(M;\mathbb{Z}/2)$ est neutre : il contient un sous-espace qui est son propre orthogonal et qui est isotrope. Le groupe de Witt quadratique $WQ(\mathbb{Z}/2)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$ par l'invariant de Arf , l'invariant de Arf du q-espace $H_{2k+1}(M;\mathbb{Z}/2)$ est l'invariant de Kervaire du couple (M,t) , il ne dépend que de la classe de cobordisme trivialisé de ce couple. On ne connait pas encore toutes les dimensions pour lesquelles il existe des variétés (M,t) d'invariant de Kervaire non nul. L'importance historique de cet invariant est grande, il a permis en particulier à Kervaire d'exhiber une variété pseudo-linéaire de dimension 10 qui n'admet pas de structure différentiable.

3) $n = 4k+1$. L'existence de t implique $e(x,x) = 0$ pour tout x dans $T_{2k}(M)$ et la nullité de l'invariant de De Rham. En fait l'existence de t entraîne que M borde (Thom, Wall... 1960).

4) Soit (M,t) une variété stablement parallélisée de dimension $4k-1$. Soient X une variété de dimension $2k-1$ et $f : X \longrightarrow M$ un plongement tel que $f_*[X] \in T_{2k-1}(M)$ Si a est un champ de vecteurs normal à $f(X)$ dans M , par translation le long de a , on obtient un nouveau plongement $f^a : X \longrightarrow M$, isotope à f . Si le champ a ne s'annule jamais $f(X)$ et $f^a(X)$ sont disjoints. Dans ce cas on peut former un enlacement rationnel $E(f,f^a)$ tel que

$$E(f,f^a) \equiv e(f_*[X], f_*[X]) \mod \mathbb{Z} \ .$$

La parallélisation stable t permet de distinguer une famille de champs de vecteurs

normaux ne s'annulant pas de sorte que si a et a' sont dans cette famille

$$E(f,f^a) - E(f,f^{a'}) \in 2\,\mathbb{Z} \quad .$$

Cela est le premier point de la construction d'une forme quadratique $q_t : T_{2k-1}(M) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ associée à la forme d'intersection et qui vérifie

$$q_t(f_*[X]) = \frac{1}{2}\,E(f,f^a) \quad , \text{ pour } a \text{ dans la famille distinguée par } t \ .$$

Le second point est le résultat de la théorie du cobordisme qui assure que tout élément de $T_{2k-1}(M)$ d'ordre une puissance de 2 peut s'écrire sous la forme précédente, $f_*[X]$.

On considère $WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ le groupe de Witt des formes quadratiques : $q : C \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ où C est un groupe abélien fini ; la classe de $q_t : T_{2k-1}(M) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, notée $[T_{2k-1}(M),q_t] \in WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ n'est pas un invariant de cobordisme stablement trivialisé (contrairement à ce qui se passe pour l'invariant de Kervaire).

<u>Relations entre les invariants d'une variété de dimension</u> $4k$ <u>et ceux de son bord</u>.

Soit b une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie E ; soit P un réseau (de dimension maximale) de E , inclus dans son dual $P^{\#}$, la forme b induit une forme symétrique non dégénérée $P^{\#}/P \otimes P^{\#}/P \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et on montre que cela définit un homomorphisme δ du groupe de Witt $W(\mathbb{Q})$ dans le groupe de Witt $W(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$. En fait, on a une suite exacte $0 \longrightarrow W(\mathbb{Z}) \longrightarrow W(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\delta} W(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$ scindée par la signature $I : W(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Z} \simeq W(\mathbb{Z})$.

Soit N une variété de dimension $4k$, de bord M ; la forme d'intersection $b : H_{2k}(N;\mathbb{Q}) \otimes H_{2k}(N;Q) \longrightarrow Q$ n'est pas forcément non dégénérée, on peut néanmoins considérer la classe dans $W(\mathbb{Q})$ de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée induite par b sur $H_{2k}(N;\mathbb{Q})/\mathrm{Rad}(b)$. Il est une conséquence de la dualité de Poincaré que l'image par l'homomorphisme δ de cette classe est l'opposée de la classe $[T_{2k-1}(M),e] \in W(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$.

Si $WQ(\mathbb{Q})$ est le groupe de Witt quadratique de Q , on a aussi un morphisme naturel $\delta : WQ(\mathbb{Q}) \longrightarrow WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ et la suite

$$0 \longrightarrow WQ(\mathbb{Z}) \longrightarrow WQ(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\delta} WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

est encore exacte mais n'est plus scindable. En fait on construit (à l'aide de sommes de Gauss) un homomorphisme $\gamma : WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}/8$, et l'on a pour tout x de $WQ(Q)$ la formule, $I(x) \equiv \gamma\delta(x) \mod 8$, qui détermine la nature de l'extension de $WQ(Q,\mathbb{Z})$ par $\mathbb{Z} \rtimes WQ(\mathbb{Z})$ précédente (cette formule (Braun, Van der Blij) montre en particulier que la signature d'une forme bilinéaire symétrique unimodulaire à coefficients entiers et paire, est divisible par 8).

Si (N,T) est une variété stablement parallélisée de dimension $4k$, de bord (M,t) (avec $t = T_{|M}$) , la classe de $H_{2k}(N;\mathbb{Q})/\mathrm{Rad}(b)$ dans $WQ(\mathbb{Q})$ a comme image par δ l'opposée de la classe $[T_{2k-1}(M),q_t] \in WQ(Q,\mathbb{Z})$. En prenant la signature on en déduit la formule : $I(N) = -A(M,t) \mod 8$, où l'on note $A(M.t) = \gamma[T_{2k-1}(M),q_t] \in \mathbb{Z}/8$.

Cela pose naturellement le problème de savoir quel est le lien (modulo 8) entre $I(N)$ et $A(M,t)$ lorsqu'on ne suppose plus que la variété N soit stablement parallélisée (mais où on conserve cette hypothèse sur le bord).

Dans le cas où $\partial N = M$ est vide, on a la formule de Hirzebruch $I(N) = \langle L,[N]\rangle$ où L est la classe caractéristique de Hirzebruch du fibré tangent de N .

Dans le cas où $N = M$ est non vide et est muni d'une parallélisation stable t , l'élément de $\mathbb{Z}/8$: $I(N) + A(M,t)$ peut se calculer comme somme de deux termes : le premier est $\langle L^t,[N]\rangle$ où L^t est la classe de Hirzebruch relative définie par la trivialisation dt de $\tau_{N|M}$, le second se calcule explicitement à l'aide de l'invariant d'Adams de la variété stablement parallélisée (M,t) . Il résulte des calculs d'Adams que, pour $k \geqslant 3$, le second terme est nul et qu'on a la formule

$$I(N) \equiv \langle L^t,[N]\rangle - A(M,t) \mod 8 .$$

RÉSUMÉ DU PRÉSENT TRAVAIL

Ce travail étudie quelques propriétés des variétés fermées de dimension $4k - 1$, munies d'une $SG_{(2)}$-trivialisation de leur fibré tangent. Intuitivement un fibré vectoriel est $SG_{(2)}$-trivialisé quand on s'est donné une trivialisation homotopique d'un multiple impair de ce fibré, une définition précise de cette notion se trouve dans le chapitre 1.

Il est une conséquence de la dualité de Poincaré que la classe dans le groupe de Witt, $W(\mathbb{Q})$, de la régularisée de la forme d'intersection rationnelle d'une variété compacte orientée de dimension $4k$, N, ne dépend, modulo $W(\mathbb{Z})$, que de son bord, ∂N. D'autre part le quotient $W(\mathbb{Q})/W(\mathbb{Z})$ est identifié dans [A] avec un groupe de Witt, $W(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$, de groupes finis munis de formes d'enlacement. Cette conjonction s'éclaire en considérant la forme d'enlacement du bord ∂N. Si en outre la variété N est $SG_{(2)}$-trivialisée, on vérifie à l'aide des formules de Wu que la classe dans le groupe de Witt quadratique, $WQ(\mathbb{Q})$, de la forme quadratique associée à la forme bilinéaire précédente ne dépend, modulo $WQ(\mathbb{Z})$, que du bord muni de la $SG_{(2)}$-trivialisation induite. Le quotient $WQ(\mathbb{Q})/WQ(\mathbb{Z})$ est identifié dans [A] avec un groupe de Witt, $WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$, de groupes finis munis de formes quadratiques d'enlacement. Ceci conduit à construire une forme quadratique associée à la forme d'enlacement d'une variété fermée de dimension $4k - 1$, $SG_{(2)}$-trivialisée. Le matériel nécessaire à cette construction, développée au chapitre 3, est entreposé aux chapitres 1 et 2.

Dans [D] J. MORGAN et D. SULLIVAN donnent des constructions analogues avec des SO-trivialisations.

On définit dans [A] à l'aide de sommes de Gauss, méthode inaugurée par E. BROWN [B], une application γ de $WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ dans le groupe μ_8 des racines 8èmes de l'unité telle que l'homomorphisme :

$$WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{oubli} \oplus \gamma} W(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \oplus \mu_8$$

est un isomorphisme. On est donc amené à associer à une variété fermée, M^{4k-1}, munie d'une $SG_{(2)}$-trivialisation t, un "invariant de Arf" $A(M,t)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}/8$.

Soient Λ, Λ' deux anneaux de fractions de $\mathbb{Z}$, au chapitre 8 on étudie le groupe, $\Theta_n^{\Lambda,\Lambda'}$, des Λ-sphères, Λ'-parallélisées ((Λ,Λ')-sphères), de dimension n, à H_Λ-cobordisme Λ'-parallélisé près (la notion de Λ'-parallélisation d'un fibré vectoriel correspond approximativement à celle de parallélisation d'un multiple par un entier inversible dans Λ', elle est définie dans [A]). Ce chapitre fait largement référence au travail [A] de J. BARGE, P. VOGEL et des auteurs.

Si X^{4k-1} est une (Λ,Λ')-sphère avec $\frac{1}{2} \notin \Lambda'$, le groupe $H_{2k-1}(X;\mathbb{Z})$ est d'après le chapitre 3 munie d'une forme quadratique d'enlacement, ceci donne un homomorphisme qe :

$$\Theta_{4k-1}^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \quad .$$

On construit d'autre part un homomorphisme β :

$$\Theta_{4k-1}^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

de la façon suivante : si une (Λ,Λ')-sphère X^{4k-1} est le bord d'une variété Y^{4k},

$$\beta(X) = I(Y) - \langle L, [Y] \rangle \quad ,$$

L étant la classe de Hirzebruch relative, dans $H^{4k}(Y,X;\mathbb{Q})$, définie par la Λ'-trivialisation t de X.

Lorsque $\frac{1}{2} \notin \Lambda'$ le nombre rationnel $L^t = \langle L,[Y] \rangle$ appartient à $\mathbb{Z}_{(2)}$ et β est à valeurs dans $\mathbb{Z}_{(2)}$, on peut donc réduire β modulo 8 :

$$\rho_8\beta : \Theta_{4k-1}^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \mathbb{Z}/8 \quad .$$

Quel est le rapport entre les deux homomorphismes $\rho_8\beta$ et qe ?
La réponse est fournie par l'étude d'une situation plus générale qui est faite au chapitre 7 où l'on obtient :

THÉORÈME.- Dès que $k \geqslant 3$ la signature d'une variété compacte orientée, N^{4k}, dont le bord est $SO_{(2)}$-trivialisée vérifie la congruence modulo 8 :

$$I(N) \equiv \rho_8(L^t) - A(\partial N, t) \quad .$$

Pour ce faire on considère d'abord le cas SO-trivialisé. On montre grâce au chapitre préparatoire 5, dont l'un des ingrédients essentiels est la relation entre somme de Gauss et signature modulo 8 récemment soulignée par J. MILGRAM, que l'expression (où $M = \partial N$) :

$$\lambda(M,t) = \frac{1}{8}\,(I(N) - L^t) + \frac{1}{8}\,A(M,t) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

définit un homomorphisme $\lambda : \Omega^{fr}_{4k-1} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui est relié à l'invariant d'Adams $e_{\mathbb{C}}$ par la formule :

$$\lambda = 2^{2k-2}(2^{2k-1} - 1)e_{\mathbb{C}} \quad .$$

Il résulte alors des calculs d'Adams que pour $k \geqslant 3$ la partie paire de λ est nulle.

Au chapitre 4 on montre que la forme quadratique d'enlacement d'une variété de dimension $4k-1$, $SG_{(2)}$-trivialisée, ne dépend pas de la $SG_{(2)}$-trivialisation si k n'est pas une puissance de 2 et on donne des contre-exemples à cette assertion dans le cas contraire. Une conséquence du théorème ci-dessus est que l'invariant de Arf d'une variété M^{4k-1}, $SO_{(2)}$-trivialisée, ne dépend pas de la $SO_{(2)}$-trivialisation si $k \geqslant 3$.

La construction du chapitre 3 est généralisée au chapitre 5 pour construire une forme quadratique $q^b : T_{2k}(f) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ où f est une application $M \longrightarrow L$ recouverte par un SG-morphisme $b : \tau_M \longrightarrow \tau_L$. Le fait qu'on ait effectué ces constructions avec la catégorie homotopique comme catégorie de fibrés, permettra d'obtenir l'invariant A d'une donnée de chirurgie, lorsque le but est $SG_{(2)}$-trivialisé, comme différence d'invariants A de la source et du but.

Ce point de vue homotopique sera systématiquement exploité dans un travail faisant suite à celui-ci.

Une partie des résultats a été annoncée dans [C].

Orsay, Juillet 1974.

RÉFÉRENCES :

[A] J. BARGE, J. LANNES, F. LATOUR et P. VOGEL, Λ-sphères, à paraître aux Annales de l'E.N.S.

[B] E. BROWN, Generalizations of the Kervaire invariant, Ann. of Maths 95 (1972), 368-383.

[C] J. LANNES et F. LATOUR, Signature modulo 8 des variétés de dimension $4k$ dont le bord est stablement parallélisé. Note aux C.R.A.S.

[D] J. MORGAN and D. SULLIVAN, The transversality characteristic class and linking cycles in surgery theory (à paraître).

CHAPITRE I

FIBRATIONS STABLES ET $SG_{(2)}$-TRIVIALISATIONS

Pour fixer les notations nous commençons par rappeler quelques définitions et résultats sur les fibrations sphériques de dimension n .

1.1.- Une fibration sphérique de dimension n , ξ , de base X est une fibration de Hurewicz $p : E(\xi) \longrightarrow X$ telle que la fibre $p^{-1}(x)$ ait le type d'homotopie de la sphère S^{n-1} .

Soit $T\xi$ le complexe de Thom associé à ξ ; une orientation de ξ est une classe $U_\xi \in H^n(T\xi ; \mathbb{Z})$ qui par restriction donne un générateur de $H^n(\Sigma p^{-1}(x), \mathbb{Z})$, pour tout $x \in X$.

Dans tout ce qui suit, on appelle $SG(n)$-fibré une fibration sphérique de dimension n , orientée.

Soient ξ_o et ξ_1 deux $SG(n)$-fibrés de base X_o et X_1 respectivement. Un morphisme $\alpha : \xi_o \longrightarrow \xi_1$ au-dessus d'une application $f : X_o \longrightarrow X_1$ est la donnée d'une application $\alpha : E(\xi_o) \longrightarrow E(\xi_1)$ fibrée au-dessus de f et telle que l'application $T\alpha : T\xi_o \longrightarrow T\xi_1$ qui s'en déduit ait la propriété $Tf^* U_{\xi_1} = U_{\xi_o}$. On note ϵ^n le $SG(n)$-fibré trivial $X \times S^{n-1} \xrightarrow{pr} X$. On a

THÉORÈME de DOLD.- <u>Il existe un morphisme</u> $\xi \longrightarrow \epsilon^n$ <u>si et seulement si</u> $E(\xi)$ <u>a le même type d'homotopie fibrée que</u> $X \times S^{n-1}$.

On dit que deux morphismes α_o , $\alpha_1 : \xi \longrightarrow \eta$ sont équivalents s'il existe un morphisme β du $SG(n)$-fibré $\xi \times I$ sur $X \times I$ dans η étendant α_o sur $X \times 0$ et α_1 sur $X \times 1$.

1.2.- Rappelons le <u>théorème de classification de Stasheff</u> [14].- <u>Il existe un</u> CW <u>complexe dénombrable</u> $BSG(n)$ <u>et un</u> $SG(n)$-<u>fibré</u> $\gamma(n)$ <u>de base</u> $BSG(n)$ <u>tels que, pour tout</u> $SG(n)$-<u>fibré</u> ξ <u>de base un</u> CW-<u>complexe, il existe un morphisme</u>

$\xi \longrightarrow \gamma(n)$; <u>de plus deux tels morphismes sont équivalents</u>.

On sait que $\Omega BSG(n)$ a le type d'homotopie du H-espace $SG(n)$ des applications de degré 1 de S^{n-1} dans S^{n-1} (la loi de H espace étant la composition des applications).

Si ξ est un $SG(n)$-fibré de base X et ξ' un $SG(n')$-fibré de même base on a un $SG(n+n')$-fibré $\xi \oplus \xi'$ obtenu en faisant le joint dans chaque fibre.

On choisit des classifiants $BSG(n)$ avec $BSG(n) \hookrightarrow BSG(n+1)$ tels que $\gamma(n+1)|BSG(n) = \gamma(n) \oplus \epsilon^1$.

On note $BSG = \bigcup BSG(n)$ avec la topologie faible, alors ΩBSG a le type d'homotopie de $SG = \bigcup SG(n)$ ou $SG(n) \hookrightarrow SG(n+1)$ par suspension.

1.3.- <u>On appelle</u> SG-<u>fibré de base</u> X <u>la donnée</u> $(\xi_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in A}$ où ξ_α est un $SG(n_\alpha)$-fibré de base X et $\varphi_{\alpha,\beta}$ est un morphisme (au-dessus de id_X) : $\xi_\alpha \oplus \epsilon^p \longrightarrow \xi_\beta \oplus \epsilon^q$ avec $n_\alpha + p = n_\beta + q$, avec $\varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\gamma}$ en ce sens que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \xi_\alpha \oplus \epsilon^N \arrow[rr] \arrow[dr] & & \xi_\beta \oplus \epsilon^{N'} \arrow[dl] \\ & \xi_\gamma \oplus \epsilon^{N''} & \end{tikzcd}$$

est commutatif (on a ajouté assez de facteurs triviaux ϵ^1 pour que le diagramme ait un sens).

<u>Exemples</u>.- On considère un $SG(n)$-fibré ξ comme un SG-fibré en prenant A réduit à un seul élément.

Soit M une variété, on a un SG fibré ν_M en prenant comme ensemble d'indice A l'ensemble des plongements de M dans des espaces euclidiens.

Soient $\xi = (\xi_i, \varphi_{i,j})_{i,j \in I}$ un SG-fibré de base X et $\xi' = (\xi'_{i'}, \varphi'_{i',j'})_{i',j' \in I'}$ un SG-fibré de base X' , on appelle SG-morphisme de ξ dans ξ' la donnée d'une application notée "'" de I dans I' $(i \mapsto i')$ et pour chaque $i \in I$, d'un $SG(n_i + p_i)$-morphisme

$$\psi_i : \xi_i \oplus \epsilon^{p_i} \longrightarrow \xi'_{i'} \oplus \epsilon^{p'} \quad \text{avec} \quad p' = n_i + p_i - n'_{i'}$$

vérifiant la condition de compatibilité suivante : si on prend N_i , N_j , N'_i , N'_j assez grands pour que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \xi_i \oplus \epsilon^{N_i} & \xrightarrow{\psi_i} & \xi'_{i'} \oplus \epsilon^{N'_i} \\ \varphi_{ij} \downarrow & & \downarrow \varphi'_{i'j'} \\ \xi_j \oplus \epsilon^{N_j} & \xrightarrow{\psi_j} & \xi'_{j'} \oplus \epsilon^{N'_j} \end{array}$$

ait un sens (on a confondu ψ_i avec $\psi_i \oplus \mathrm{Id}$ ... etc.), alors il est commutatif. Il faut remarquer que tous les morphismes ψ_i sont au-dessus de la même application $f : X \longrightarrow X'$.

On a une notion d'image réciproque d'un SG-fibré par une application continue et de somme de Whitney de deux SG-fibrés.

On dit que deux SG-morphismes ψ_o et $\psi_1 : \xi \longrightarrow \eta$ sont équivalents s'il existe un SG-morphisme ψ du SG-fibré $\xi \times I$ sur $X \times I$ dans η étendant ψ_o sur $X \times 0$ et ψ_1 sur $X \times 1$.

Un corollaire du théorème de Dold est le résultat suivant : si ξ et η sont deux SG-fibrés de même base X et $\alpha : \xi \longrightarrow \eta$ un SG-morphisme au-dessus de l'identité de X , il existe un SG-morphisme $\beta : \eta \longrightarrow \xi$ tel que $\beta.\alpha$ est équivalent au morphisme identique de ξ , et $\alpha.\beta$ équivalent au morphisme identique de η . De plus deux tels morphismes β et β' sont équivalents.

1.4.- <u>Construction $\gamma(f)$ et classification des SG-fibrés sur un complexe fini.</u>

Soient X un complexe fini et f une application continue $X \longrightarrow BSG$. Soit $I = \{ n \in \mathbb{N} / f(X) \subset BSG(n) \}$, comme X est fini I est non vide. Pour $n \in I$, on pose $f_n : X \longrightarrow BSG(n)$ tel que $f = s_n \circ f_n$ où s_n est l'inclusion de $BSG(n)$ dans BSG . On définit un SG-fibré de base X noté $\gamma(f)$ en considérant pour $n \in I$ le $SG(n)$-fibré $f_n^*(\gamma(n))$, les morphismes $\varphi_{i,j}$ étant induits par l'identification :

$$f_{n+1}^*(\gamma(n+1)) = f_n^*(\gamma(n+1) | BSG(n)) = f_n^*(\gamma(n)) \oplus \epsilon^1 \quad .$$

Cette construction $\gamma(f)$ remplace celle de l'image réciproque du fibré universel qui est inapplicable ici car il n'existe pas de SG-fibré γ de base BSG dont la restriction à chaque $BSG(n)$ soit le SG-fibré $\gamma(n)$.

1.5.- Théorème de classification.

Soit ξ un SG-fibré de base un complexe fini X , il existe une application $c : X \longrightarrow BSG$ et un SG-morphisme (au-dessus de l'identité) $C : \xi \longrightarrow \gamma(c)$. On a une unicité à équivalence près, en le sens suivant : si $c_o, c_1 : X \longrightarrow BSG$ sont deux applications, C_o , C_1 deux SG-morphismes $C_i : \xi \longrightarrow \gamma(c_i)$, il existe une homotopie $d : X \times I \longrightarrow BSG$ entre c_o et c_1 et un SG-morphisme $D : \xi \times I \longrightarrow \gamma(d)$ étendant C_o sur $X \times 0$ et C_1 sur $X \times 1$.

De plus, on a une forme relative : si A est un sous-complexe de X et si (c',C') est une classification de $\xi_{|A}$ il existe une classification (c,C) de ξ étendant (c',C') .

1.6.- Soit $\ell : BSG \longrightarrow BSG_{(2)}$ une application de $\mathbb{Z}_{(2)}$- localisation. On note $p : E \longrightarrow BSG$ l'image réciproque par ℓ de la fibration de l'espace des chemins sur $BSG_{(2)}$; E est donc la fibre homotopique de la localisation ℓ et la fibre de la fibration p est $\Omega(BSG_{(2)}) \simeq (\Omega BSG)_{(2)} = SG_{(2)}$ le $\mathbb{Z}_{(2)}$ localisé du H espace SG .

Soit ξ un SG-fibré de base le complexe fini X ; on considère les couples (u,U) où $u : X \rightarrow E$ et U est un SG-morphisme $\xi \longrightarrow \gamma(p \circ u)$. Sur cet ensemble on met la relation d'équivalence $(u_o,U_o) \sim (u_1,U_1)$ s'il existe une homotopie $v : X \times I \longrightarrow E$ entre u_o et u_1 et un SG-morphisme $V : \xi \times I \longrightarrow \gamma(p \circ v)$ étendant U_i sur $X \times i$. On note $TSG_{(2)}(\xi)$ l'ensemble quotient, ses éléments sont appelés $SG_{(2)}$-trivialisations du SG-fibré ξ .

1.7.- Soit (c,C) une classification du SG-fibré ξ . A tout relèvement $u : X \rightarrow E$ de c , on associe la $SG_{(2)}$-trivialisation de ξ qui comprend le

couple (u,C) . On peut adapter les arguments de Browder [5] pour montrer que cela définit une bijection (dépendant de (c,C))

$$\{\text{classe d'homotopie verticale de relèvements de } c\} \longrightarrow TSG_{(2)}(\xi) \ .$$

Or $p : E \longrightarrow BSG$ est une fibration principale sous l'action du H-espace $SG_{(2)} \simeq \Omega(BSG_{(2)})$ donc le groupe des classes d'homotopie $[X,SG_{(2)}]$ agit sur $\{$cl. homotopie verticale de relèvements de c$\}$ qui est ou vide ou un $[X,SG_{(2)}]$-espace affine. Par composition on obtient une action de $[X,SG_{(2)}]$ sur $TSG_{(2)}(\xi)$ que l'on peut décrire directement comme suit : si la $SG_{(2)}$-trivialisation t comprend le couple (u,U) , $x.t$ est la classe de (u',U) où u' est un relèvement de $p.u$ correspondant à l'action de x sur u . $TSG_{(2)}(\xi)$ est ou vide ou bien un $[X,SG_{(2)}]$-espace affine.

1.8.- Classes caractéristiques relatives.

Soient (Y,X) une paire de complexes finis, ζ un SG-fibré sur Y et $t \in TSG_{(2)}(\zeta|_X)$. Représentons t par un couple (u,U) . Le théorème de classification assure qu'il existe une classification (c,C) de ζ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "c"] & BSG \\ X \arrow[u, hook] \arrow[r, "u"] & E \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Le couple (c,u) détermine en cohomologie un morphisme

$$(c,u)^* : H^*(p\,;A) \longrightarrow H^*(Y,X\,;A) \ .$$

Une nouvelle application du théorème de classification montre que ce morphisme $(c,u)^*$ ne dépend que de ζ et de t .

Si A est un $\mathbb{Z}_{(2)}$-module, $\pi_i E \otimes A = 0$ pour $i \geqslant 1$ donc la suite spectrale de la fibration p montre que $\bar{j}^* : H^*(p;A) \longrightarrow \tilde{H}^*(BSG;A)$ est un isomorphisme. Si $x \in H^n(BSG;A)$ on note $x^t = (c,u)^*\bar{j}^{*-1}x \in H^n(Y,X;A)$.

DÉFINITION 1.8.- Soient ζ un SG-fibré sur le complexe fini Y et $X \subset Y$; soit A un $\mathbb{Z}_{(2)}$-module. Il existe une application

$$\begin{array}{ccc} H^n(BSG\,;A) \times TSG_{(2)}(\zeta|_X) & \longrightarrow & H^n(Y,X\,;A) \\ (x \quad , \quad t) & \longmapsto & x^t \end{array}$$

qui vérifie $j^*x^t = x(\zeta)$ dans $H^n(Y;A)$.

<u>Remarque</u> 1.9.- Toutes les sorites précédentes sont valables dans la catégorie des fibrés vectoriels orientés, d'où notion de SO-fibré, de $SO_{(2)}$-trivialisation d'un SO-fibré. En particulier toute variété différentiable orientée est munie d'un SO-fibré ν_X .

CHAPITRE II

ENLACEMENT RATIONNEL

Dans la suite, et sauf mention du contraire, variété voudra dire variété différentiable compacte et orientée.

2.1.- Soient M une variété fermée de dimension $4k-1$, $[M] \in H_{4k-1}(M;\mathbb{Z})$ sa classe fondamentale et $\omega_M \in H^{4k-1}(M \times M, M \times M - \Delta_M ; \mathbb{Z})$ sa classe d'orientation

Pour toute paire (A,B) de sous-espaces de M (avec $B \subset A$) et tout groupe abélien G, on note D (ou encore D_M) l'homomorphisme :

$$D : H_p(M - B, M - A ; G) \longrightarrow H^{4k-p-1}(A,B ; G)$$

défini par $D_M(x) = \omega'/x$ (slant product) où $\omega' \in H^{4k-1}(A \times (M-B), A \times (M-A) \cup B \times (M-B) ; \mathbb{Z})$ est la restriction de ω_M.

On rappelle que si A et B sont compacts et si la flèche naturelle $\varinjlim H^*(U,V ; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(A,B ; \mathbb{Z})$ est un isomorphisme (où la limite inductive est prise sur le système de voisinages (U,V) de la paire (A,B)), alors D est un isomorphisme. En particulier $D_M([M]) = 1 \in H^0(M ; \mathbb{Z})$.

2.2.- Nous notons génériquement $T_p(X)$ le sous-groupe de torsion de $H_p(X ; \mathbb{Z})$. Sur $T_{2k-1}(M)$ nous avons une forme bilinéaire symétrique non dégénérée à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, notée

$$e : T_{2k-1}(M) \otimes T_{2k-1}(M) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui possède la propriété (caractéristique) :

$$e(\partial x, y) = \langle D(x), y \rangle \quad \forall x \in H_{2k}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \ \forall y \in T_{2k-1}(M)$$

où $\partial : H_{2k}(M ; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow T_{2k-1}(M) \subset H_{2k-1}(M ; \mathbb{Z})$ est le connectant de la suite exacte de coefficients $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ et $\langle , \rangle$ est l'accouplement de Kronecker $H^{2k-1}(M ; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes H_{2k-1}(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

2.3.- Soient X_i $(i = 0,1)$ deux variétés fermées de dimension $2k-1$, et $f_i : X_i \longrightarrow M$ deux applications ; on note $x_i = f_{i*}[X_i] \in H_{2k-1}(M;\mathbb{Z})$. On fait les deux hypothèses :

1) $x_i \in T_{2k-1}(M)$ $(i = 0,1)$.

2) $f_o(X_o) \cap f_1(X_1) = \emptyset$.

On va alors définir un nombre rationnel $E(f_o,f_1) \in \mathbb{Q}$ dont la réduction dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sera $e(x_o,x_1)$.

La condition 2) permet de considérer f_o comme une application $\bar{f}_o : X_o \longrightarrow M - f_1(X_1)$; soit $\bar{x}_o \in H_{2k-1}(M - f_1(X_1) ; \mathbb{Q})$ l'image par $\bar{f}_o$ de $[X_o]$. Nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_{2k}(M;\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d, "D_M"] & H_{2k}(M,M-f_1(X_1);\mathbb{Q}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "D_M"] & H_{2k-1}(M-f_1(X_1);\mathbb{Q}) \arrow[r] & H_{2k-1}(M;\mathbb{Q}) \\
H^{2k-1}(M,\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[dr, "f_1^*"'] & H^{2k-1}(f_1(X_1);\mathbb{Q}) \arrow[d, "f_1^*"] & H_{2k-1}(X_o;\mathbb{Q}) \arrow[u, "\bar{f}_{o*}"] \arrow[ur, "f_{o*}"'] & \\
& H^{2k-1}(X_1;\mathbb{Q}) & &
\end{tikzcd}$$

Comme $f_{o*} : H_{2k-1}(X_o;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_{2k-1}(M;\mathbb{Q})$ est nulle, il existe x'_o, $x'_o \in H_{2k}(M,M - f_1(X_1) ; \mathbb{Q})$ telle que $\bar{x}_o = \partial x'_o$.

Le nombre rationnel $\langle f_1^* D_M x'_o , [X_1] \rangle$ ne dépend pas du choix de x'_o car la flèche $f_1^* : H^{2k-1}(M;\mathbb{Q}) \longrightarrow H^{2k-1}(X_1;\mathbb{Q})$ est nulle d'après l'hypothèse 1). On pose $E(f_o,f_1) = \langle f_1^* D x'_o , [X_1] \rangle$ qu'on appelle enlacement rationnel de f_o et f_1.

2.4.- <u>Remarque</u> : $E(f_o,f_1)$ ne dépend que de la classe d'homologie de l'application $\bar{f}_o : X_o \longrightarrow M - f_1(X_1)$, en particulier $E(f_o,f_1)$ est nul si la variété singulière (X_o,f_o) est décomposée.

LEMME 2.5.- $E(f_o,f_1) = E(f_1,f_o)$.

<u>Démonstration</u>.- On a le diagramme commutatif suivant où les groupes d'homologie et de cohomologie sont à coefficients rationnels et où les flèches non notées sont induites par les inclusions :

$$\begin{tikzcd}
H_{2k-1}(X_o) \arrow[r, "f_{o*}"] \arrow[dr, "\bar{f}_{o*}"'] & H_{2k-1}(f_o(X_o)) \arrow[r, "D"] \arrow[d] & H^{2k}(M,M-f_o(X_o)) \arrow[d] & H^{2k-1}(M-f_o(X_o)) \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, "\bar{f}_1^*"] \arrow[d] & H^{2k-1}(X_1) \\
& H_{2k-1}(M-f_1(X_1)) \arrow[r, "D"] & H^{2k}(M,f_1(X_1)) & H^{2k-1}(f_1(X_1)) \arrow[l, "\delta"'] \arrow[ur, "f_1^*"'] & \\
& & H_{2k}(M,M-f_1(X_1)) \arrow[ul, "\partial"] \arrow[ur, "D"'] & &
\end{tikzcd}$$

$E(f_o,f_1)$ est calculé en regardant l'image de $[X_o]$ par le chemin externe inférieur; d'après la commutativité du diagramme c'est la même chose que par le chemin horizontal, or ce chemin horizontal est le transposé de celui qui sert à calculer $E(f_1,f_o)$, d'où le résultat.

LEMME 2.6.- $E(f_o,f_1) \equiv e(x_o,x_1) \pmod{\mathbb{Z}}$.

<u>Démonstration</u>.- Soit $\bar{x}_o = \bar{f}_{o*}[X_o] \in H_{2k-1}(M-f_1(X_1) ; \mathbb{Z})$; nous avons $E(f_o,f_1) = \langle Dy,x_1' \rangle$ où $y \in H_{2k}(M,M-f_1(X_1);\mathbb{Q})$ est tel que $\partial y = \bar{x}_o \otimes 1$ et x_1' est l'image de $[X_1]$ dans $H_{2k-1}(f_1(X_1) ; \mathbb{Z})$. Or $e(x_o,x_1) = \langle Dz,x_1 \rangle$ avec $z \in H_{2k}(M ; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et $z = x_o$, ou bien encore $e(x_o,x_1) = \langle D\bar{z},x_1' \rangle$ où $\bar{z}$ est l'image de z dans $H_{2k}(M,M-f_1(X_1) ; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Soit $\bar{y}$ l'image de y dans $H_{2k}(M,M-f_1(X_1) ; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$; il nous faut montrer que $\langle D(\bar{y} - \bar{z}),x_1' \rangle = 0$; comme $x_1 \otimes 1 = 0$ dans $H_{2k-1}(M;\mathbb{Q})$ il suffit de montrer que $\bar{y} - \bar{z}$ est dans l'image de la composée

$$H_{2k}(M;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_{2k}(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{2k}(M,M-f_1(X_1) ; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \quad .$$

C'est exactement ce que dit la première partie du lemme homologique suivant, dont nous laissons la vérification au lecteur. (La seconde partie est placée là pour utilisation ultérieure).

LEMME 2.7.- Soit

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_1^1 \arrow[r, "\alpha^1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & C_2^1 \arrow[r, "\beta^1"] \arrow[d, "\alpha_2"] & C_3^1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1^2 \arrow[r, "\alpha^2"] \arrow[d, "\beta_1"] & C_2^2 \arrow[r, "\beta^2"] \arrow[d, "\beta_2"] & C_3^2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1^3 \arrow[r, "\alpha^3"] \arrow[d] & C_2^3 \arrow[r, "\beta^3"] \arrow[d] & C_3^3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif dans la catégorie des modules différentiels, avec lignes et colonnes exactes. Notons $\alpha^1 \ldots$ les homomorphismes induits en homologie, ∂^i le connectant de la $i^{\text{ième}}$ ligne, ∂_j le connectant de la $j^{\text{ième}}$ colonne.

1) Les deux applications de $\mathrm{Ker}[\alpha_2\alpha^1 : HC_1^1 \longrightarrow HC_2^2]$ dans $\mathrm{Coker}[\beta_3\beta^2 : HC_2^2 \longrightarrow HC_3^3]$ données par $\beta^3 \circ (\partial_2)^{-1} \circ \alpha^1$ et $\beta_3 \circ (\partial^2)^{-1} \circ \alpha_1$ sont égales.

2) Les deux applications de $\mathrm{Ker}[\alpha_3\beta_1 : HC_2^1 \longrightarrow HC_3^2]$ dans $\mathrm{Coker}[\partial^3\beta_3 : HC_3^2 \longrightarrow HC_1^3]$ données par $\partial^3 \circ (\partial_3)^{-1} \circ \beta^1$ et $\beta_1 \circ (\alpha^2)^{-1} \circ \alpha_2$ sont opposées.

2.8.- On se place dans la situation suivante :

N est une variété de dimension $4k$ de bord ∂N, $[N]$ est la classe fondamentale dans $H_{4k}(N, \partial N ; \mathbb{Z})$ avec $\partial[N] = [\partial N]$ dans $H_{4k-1}(\partial N ; \mathbb{Z})$,
$\omega_N \in H^{4k}(N \times N, N \times N - \Delta_N ; \mathbb{Z})$ est la classe d'orientation.

Soient Y_i $(i = 0,1)$ deux variétés de dimension $2k$ de bord X_i ;
$F_i : Y_i \longrightarrow N$ deux applications, on suppose :

1) $F_i(X_i) \subset \partial N$ et $F_i^{-1}(\partial N) = X_i$; on pose $f_i = F_i|X_i : X_i \longrightarrow \partial N$;

2) qu'il existe des colliers $u_i : X_i \times [0,1[\longrightarrow Y_i$ et $v : \partial N \times [0,1[\longrightarrow N$ tels que $F_i(u_i(x,t)) = v(f_i(x),t)$. Il en résulte que l'inclusion $F_i(Y_i) - \partial N \hookrightarrow F_i(Y_i)$ est une équivalence d'homotopie ;

3) $f_o(X_o) \cap f_1(X_1) = \phi$.

Remarque.- Par approximation par des applications différentiables et utilisation du théorème de transversalité, on peut toujours approximer deux applications de

paires $F_i : (Y_i, X_i) \longrightarrow (N, \partial N)$ par deux applications qui vérifient les trois conditions ci-dessus.

2.9.- Nous allons définir un nombre d'intersection $I(F_o, F_1) \in \mathbb{Z}$. Grâce aux conditions 1) et 3), on peut considérer l'application F_o comme une application de paires $\bar{F}_o : (Y_o, X_o) \longrightarrow (N, N - F_1(Y_1))$. On pose $\bar{y}_o = \bar{F}_{o*}[Y_o]$. D'après la condition 2) l'inclusion induit un isomorphisme :

$$H_{2k}(N - \partial N, N - F_1(Y_1) - \partial N ; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} H_{2k}(N, N - F_1(Y_1) ; \mathbb{Z})$$

nous notons D'_N la composée

$$H_{2k}(N, N - F_1(Y_1) ; \mathbb{Z}) \xleftarrow{\simeq} H_{2k}(N - \partial N, N - F_1(Y_1) - \partial N ; \mathbb{Z}) \xrightarrow{D_N} H^{2k}(F_1(Y_1) \cup \partial N, \partial N ; \mathbb{Z}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{2k}(F_1(Y_1), f_1(X_1) ; \mathbb{Z})$$

où D_N est obtenue par slant-product par la restriction de ω_N à $(F_1(Y_1) \cup \partial N, \partial N) \times (N - \partial N, N - \partial N - F_1(Y_1))$ et la dernière flèche est induite par l'inclusion. On pose $I(F_o, F_1) = \langle D'_N \bar{y}_o , y'_1 \rangle$ où y'_1 est l'image de $[Y_1]$ dans $H_{2k}(F_1(Y_1), f_1(X_1) ; \mathbb{Z})$.

Par une démonstration analogue à celle de 2.5 on voit que $I(F_o, F_1) = I(F_1, F_o)$.

2.10.- <u>On fait l'hypothèse de position générale suivante</u> :

Pour tout couple $(P_o, P_1) \in Y_o \times Y_1$ tel que $F_o(P_o) = F_1(P_1) = Q$ il existe une carte $\beta : I^{2k} \times I^{2k} \longrightarrow N$ avec $\beta(0,0) = Q$ et deux cartes orientées $\alpha_i : I^{2k} \to Y_i$ avec $\alpha_i(0) = P_i$ et $F_o(\alpha_o(t)) = \beta(t, 0)$ et $F_1(\alpha_1(t)) = \beta(0, t)$. Il en résulte qu'il n'existe qu'un nombre fini de tels couples. On suppose en outre que si $Q \in F_o(Y_o) \cap F_1(Y_1)$, $F_o^{-1}(Q)$ et $F_1^{-1}(Q)$ n'ont qu'un seul élément.

On pose $\epsilon(P_o, P_1) = +1$ si l'orientation de la carte β coïncide avec l'orientation de N, sinon on pose $\epsilon(P_o, P_1) = -1$.

LEMME 2.10.- <u>Avec les hypothèses précédentes, on a</u>

$$I(F_o, F_1) = \Sigma \epsilon (P_o, P_1)$$

<u>la somme portant sur les couples</u> $(P_o, P_1) \in Y_o \times Y_1$ <u>tels que</u> $F_o(P_o) = F_1(P_1)$.

<u>Démonstration</u>.- Soient $\{Q^1,\dots,Q^n\} = F_o(Y_o) \cap F_1(Y_1)$ et $P_i^j = F_i^{-1}(Q^j)$. On choisit les cartes α_i^j et β^j de sorte que leurs images soient deux à deux disjointes. On a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H_{2k}(Y_o,X_o) \arrow[d] \arrow[dr, "\bar{F}_{o*}"] & & & H^{2k}(F_1(Y_1),f_1(X_1)) \\
H_{2k}(Y_o,Y_o - \bigcup_j \alpha_o^j(\mathring{I}^{2k})) \arrow[r] & H_{2k}(N,N-F_1(Y_1)) \arrow[rr, "D'"] & & H^{2k}(F_1(Y_1),F_1(Y_1) - \bigcup_j \alpha_1^j(\mathring{I}^{2k})) \arrow[u] \arrow[d, leftrightarrow, "\approx", "\Sigma\alpha_{1*}^j"'] \\
\bigoplus_j H_{2k}(I^{2k}\times 0,\partial I^{2k}\times 0) \arrow[r] \arrow[u, "\approx", "\Sigma\alpha_{o*}^j"'] & \bigoplus_j H_{2k}(I^{2k}\times I^{2k}, I^{2k}\times I^{2k} - 0\times I^{2k}) \arrow[u, "\Sigma\beta_*^j"'] \arrow[rr, "\oplus D'"] & & \bigoplus_j H^{2k}(0\times I^{2k}, 0\times\partial I^{2k})
\end{tikzcd}$$

La partie de gauche du diagramme est commutative par contre pour chaque j le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^{2k}(N,N-F_1(Y_1)) \arrow[r, "D'"] & H^{2k}(F_1(Y_1),f_1(X_1)) \\
H_{2k}(I^{2k}\times I^{2k}, I^{2k}\times I^{2k} - 0\times I^{2k}) \arrow[r, "D'"] \arrow[u, "\beta_*^j"] & H^{2k}(0\times I^{2k}, 0\times\partial I^{2k}) \arrow[u, "\alpha_{1*}^j"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif ou anticommutatif selon que β^j transporte l'orientation de $I^{2k} \times I^{2k}$ sur l'orientation induite de N ou non, c'est-à-dire suivant le signe de $\epsilon(P_o^j,P_1^j)$.

2.11.- En plus des hypothèses de 2.8 on suppose :

4) $f_{i*}[X_i] \in T_{2k-1}(\partial N)$.

Nous allons calculer d'une autre manière $I(F_o,F_1)$. Soient $y_i = F_{i*}[Y_i] \in H_{2k}(N,\partial N;\mathbb{Z})$; comme $y_i \in T_{2k-1}(\partial N)$ il existe $z_i \in H_{2k}(N;\mathbb{Q})$ tels que $j_*z_i = y_i \otimes 1$ dans $H_{2k}(N,\partial N;\mathbb{Q})$ où $j : N \hookrightarrow (N,\partial N)$. Le nombre rationnel d'intersection $z_o.z_1$ ne dépend pas de la choix de z_o et z_1 car $(i_*x).z_1 = (i_*x).y_1 = (j_*i_*x).z_1 = 0.z_1 = 0$ (avec $i : \partial N \hookrightarrow N$). On le note $y_o.y_1$.

PROPOSITION 2.11.- <u>Avec les notations et hypothèses précédentes on a</u>

$$I(F_o,F_1) = y_o.y_1 + E(f_o,f_1) \quad .$$

<u>Démonstration</u>.- Soient k l'inclusion $(\partial N, \partial N - f_1(X_1)) \hookrightarrow (N, \partial N - f_1(X_1))$ et ℓ l'inclusion $(N, \partial N - f_1(X_1)) \hookrightarrow (N, N - F_1(Y_1))$.

Soit $\bar{\bar{y}}_o$ l'image de $[Y_o]$ par $F_o : (Y_o, X_o) \longrightarrow (N, \partial N - f_1(X_1))$ on a $\ell_* \bar{\bar{y}}_o = \bar{y}_o$ et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & H_{2k}(\partial N, \partial N - f_1(X_1); \mathbb{Q}) \arrow[dl, "k_*"'] \arrow[d] \\
H_{2k}(N; \mathbb{Q}) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, equal] & H_{2k}(N, \partial N - f_1(X_1); \mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d] & H_{2k-1}(\partial N - f_1(X_1); \mathbb{Q}) \arrow[d] \\
H_{2k}(N; \mathbb{Q}) \arrow[r] & H_{2k}(N, \partial N; \mathbb{Q}) \arrow[r] & H_{2k-1}(\partial N; \mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

Pour tout choix de $\bar{x}_o$ dans $H_{2k}(\partial N, \partial N - f_1(X_1); Q)$ relevant $\bar{f}_{o*}[X_o]$, $k_* \bar{x}_o$ est nul dans $H_{2k}(N, \partial N; \mathbb{Q})$, on peut donc choisir un relevé z_o de y_o dans $H_{2k}(N, \mathbb{Q})$ de sorte que $\bar{\bar{y}}_o = k_* \bar{x}_o + j_* z_o$.

Soit, avec des abus de notations évidents $\bar{y}_o = k_* \bar{x}_o + j_* z_o$ dans $H_{2k}(N, N - F_1(Y_1); \mathbb{Q})$. Or le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_{2k}(N; \mathbb{Q}) \arrow[r, "D'_N"] \arrow[d, "j_*"] & H^{2k}(N, \partial N; \mathbb{Q}) \arrow[r] & H^{2k}(F_1(Y_1), f_1(X_1); \mathbb{Q}) \arrow[d, equal] \\
H_{2k}(N, N - F_1(Y_1); \mathbb{Q}) \arrow[r, "D'_N"] & H^{2k}(F_1(Y_1) \cup \partial N, \partial N; Q) \arrow[r] & H^{2k}(F_1(Y_1), f_1(X_1); \mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

donc $\langle D'_N j_* z_o, y'_1 \rangle = y_o \cdot y_1$.

Le diagramme suivant est aussi commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_{2k}(N, N - F_1(Y_1); \mathbb{Q}) \arrow[r, "D'_N"] & H^{2k}(F_1(Y_1) \cup \partial N, \partial N; \mathbb{Q}) \arrow[r] & H^{2k}(F_1(Y_1), f_1(X_1); \mathbb{Q}) \\
H_{2k}(\partial N \times I, (\partial N - f_1(X_1)) \times I; \mathbb{Q}) \arrow[u, "\text{collier}"] \arrow[r, "D'_{\partial N \times I}"] & H^{2k}(f_1(X_1) \times (I, \partial I); \mathbb{Q}) \arrow[r] & H^{2k-1}(f_1(X_1); \mathbb{Q}) \arrow[u, "\delta"'] \arrow[d, equal] \\
H_{2k}(\partial N, \partial N - f_1(X_1); \mathbb{Q}) \arrow[u] \arrow[rr, "D_{\partial N}"] & & H^{2k-1}(f_1(X_1); \mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

donc $\langle D'_N k_* \bar{x}_o, y'_1 \rangle = \langle D_M \bar{x}_o, x'_1 \rangle = E(f_o, f_1)$, d'où le résultat puisque $\bar{y}_o = k_* \bar{x}_o + j_* z_o$.

Remarque.- La formule 2.11 entraîne d'après 2.6 :

$$y_o \cdot y_1 \equiv - e(\partial y_o, \partial y_1) \pmod{\mathbb{Z}} \quad .$$

Les conséquences de cette relation (vraie sous la seule hypothèse que ∂y_o et ∂y_1 sont de torsion) seront étudiées en 6.3.

2.12.- On suppose que Y est une variété de dimension $2k$ de bord X, et $F : (Y,X) \longrightarrow (N,\partial N)$ une immersion générique transverse au bord et telle que $f = F_{|X} : X \longrightarrow \partial N$ soit un plongement. Soient ν_F le fibré normal de F et $\nu_f = \nu_F|_X$ le fibré normal de f ; soit $G : (E(\nu_F), E(\nu_f)) \longrightarrow (N,\partial N)$ une immersion prolongeant F sur la section nulle, injective sur chaque fibre et dont la restriction à $E(\nu_f)$ donne un voisinage tubulaire du polongement f.

On appelle traverse à f toute section a du fibré ν_f telle que $a(x) \neq 0$ pour tout x dans X. On note f^a la composée $X \xrightarrow{a} E(\nu_f) \xrightarrow{G|} \partial N$, c'est un plongement isotope à f et

$$f(X) \cap f^a(X) = \emptyset \quad .$$

Soit A une section du fibré ν_F étendant la traverse a et générique en le sens suivant : la section A est transverse à la section nulle et les zéros de A sont distincts des points doubles de l'immersion générique F. On sait qu'il existe toujours de telles extensions A. On note $F^A : Y \longrightarrow N$ la composée $G.A$; il est clair que la généricité de F et de A assure que les hypothèses 2.8 sont vérifiées pour les immersions F et F^A. Si on suppose en outre que $f_*[X] \in T_{2k-1}(\partial N)$ (donc aussi $f^a_*[X] \in T_{2k-1}(\partial N)$) la proposition 2.11 nous donne la formule

2.13. $\quad I(F,F^A) = y.y + E(f,f^a) \quad .$

2.14.- Nous allons calculer $I(F,F^A)$ directement à partir de l'immersion F et de la traverse a à f.

Soit $c(a) \in H^{2k}(Y,X ; \pi_{2k-1}(\mathbb{R}^{2k} - 0)) = H^{2k}(Y,X ;\mathbb{Z})$ l'obstruction à étendre a en une traverse à F.

A tout point double P de l'immersion générique F, on associe $\epsilon(P) = \pm 1$ suivant que la somme directe des orientations des deux nappes de $F(Y)$ en P coïncide ou non avec l'orientation de N ; on pose $\sigma(F) = \sum_P \epsilon(P)$.

PROPOSITION 2.14.- <u>On a la formule</u> $y.y + E(f,f^a) = 2\sigma(F) + \langle c(a),[Y]\rangle$.

<u>Démonstration</u>.- Considérons A comme un plongement de (Y,X) dans $(E(\nu_F),E(\nu_f))$ et $A_o : (Y,X) \longrightarrow (E(\nu_F),E(\nu_f))$ le plongement correspondant à la section nulle ; $A(X) \cap A_o(X) = \emptyset$ car a est une traverse et une méthode similaire à celle de 2.10 montre que $I(A,A_o) = \langle c(a),[Y]\rangle$. Les points de $F(Y) \cap F^A(Y)$ sont de deux sortes : d'abord les zéros de la section A (et il est clair que leur contribution à la somme de 2.10 est exactement $I(A,A_o)$) ; ensuite les autres points apparaissent par paires et sont associés aux points doubles de l'immersion générique F ; leur contribution à $I(F,F^A)$ est $2\sigma(F)$. La formule 2.14 résulte alors de 2.10 et 2.13.

2.15.- On revient à la considération d'une variété M fermée de dimension $4k-1$. Soit $f : X^{2k-1} \longrightarrow M$ un plongement d'une variété fermée X (pas nécéssairement un bord) tel que $f_*[X] \in T_{2k-1}(M)$. Si a est une traverse a f on définit, comme précédemment, le plongement $f^a : X \longrightarrow M$ et on a un enlacement $E(f,f^a)$.

Nous voulons étudier comment $E(f,f^a)$ dépend de la traverse a. Soient a_o et a_1 deux traverses à f ; sur la variété $X \times I$ de bord $X \times 1 \cup (-X \times 0)$ on considère le fibré $\nu_f \times I$, on définit une section jamais nulle a de ce fibré sur $\partial(X \times I)$ par la formule $a(x) = a_1(x)$ sur $X \times 1$ et $a(x) = a_o(x)$ sur $X \times 0$. On définit $d(a_o,a_1) \in H^{2k-1}(X;\mathbb{Z})$ par la formule $c(a) = d(a_o,a_1) \times i$ dans $H^{2k}(X \times (I,\partial I);\mathbb{Z})$ où i est le générateur de $H^1(I,\partial I;\mathbb{Z})$ compatible avec l'orientation ; $d(a_o,a_1)$ est l'obstruction à ce que les traverses a_o et a_1 soient homotopes parmi les traverses à f.

PROPOSITION 2.15.- <u>On a la formule</u> $E(f,f^{a_1}) - E(f,f^{a_o}) = \langle d(a_o,a_1),[X]\rangle$.

<u>Démonstration</u>.- C'est une conséquence directe de 2.14 appliqué aux variétés $N = M \times I$, $Y = X \times I$ et au plongement $F : Y \longrightarrow N$ donné par $F(x,t) = (f(x),t)$.

CHAPITRE III

CONSTRUCTION D'UNE FORME QUADRATIQUE ASSOCIÉE A LA FORME D'ENLACEMENT D'UNE VARIÉTÉ DE DIMENSION $4k-1$, $SG_{(2)}$-TRIVIALISÉE

Considérons, comme dans 2.15, deux traverses a_o et a_1 à un plongement $f : X^{2k-1} \longrightarrow M^{4k-1}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\langle d(a_o, a_1), [X] \rangle \equiv 0 \pmod 2$;

(ii) $\frac{1}{2} E(f, f^{a_o}) \equiv \frac{1}{2} E(f, f^{a_1}) \pmod{\mathbb{Z}}$.

La relation, définie par (i), partage les traverses en deux classes ; distinguer l'une d'entre elles nous donne un élément de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dont le double est $e(f_*[X]; f_*[X])$, cette idée est à la base de la construction d'une forme quadratique $q : T_{2k-1}(M) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ associée à la forme d'enlacement.

3.1.- Nous nous proposons de décrire une méthode pour distinguer l'une des classes dans le cas où la variété M est SO-parallélisée, i.e. munie d'un SO-morphisme de son fibré tangent τ_M sur le fibré nul de base M .

Nous appelons réduction du SO-fibré normal ν_X à la dimension ℓ , la donnée r , d'un $SO(\ell)$-fibré ξ de base X et d'un SO-morphisme Φ , du SO-fibré sous-jacent à ξ , sur ν_X .

Nous avons un SO-morphisme :

$$\nu_X \simeq \nu_f \oplus f^*\nu_M$$

la SO-parallélisation de M induit donc un SO-morphisme de ν_X sur ν_f . La donnée supplémentaire d'une traverse a détermine une réduction, $r(a)$, de ν_X à la dimension $2k-1$.

Soient r_o et r_1 deux réductions de ν_X à la dimension $2k-1$. Elles seront dites homotopes, s'il existe une réduction R de $\nu_X \times I$ à la dimension $2k-1$ telle que

$$R|X \times \{0\} = r_o \quad \text{et} \quad R|X \times \{1\} = r_1 \ .$$

REMARQUE 3.1.- Soient $r_o = (\xi_o, \Phi)$ une réduction de ν_X à la dimension $2k-1$, ξ_1 un $SO(2k-1)$-fibré et φ un $SO(2k-1)$-morphisme : $\xi_o \longrightarrow \xi_1$. La réduction $r_1 = (\xi_1, \Phi \circ \varphi)$ est homotope à r_o.

<u>Démonstration</u>.- On construit par recollement, à l'aide de φ, un $SO(2k-1)$-fibré η de base $X \times I$ tel que $\eta|_{X \times \{0\}} = \xi_o$ et $\eta|_{X \times \{1\}} = \xi_1$. De la même façon, on construit un SO-morphisme $\psi : \nu_X \times I \longrightarrow \eta$ qui induit φ et $\Phi \circ \varphi$ sur $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ respectivement.

La notion de classe d'homotopie de réduction d'un SO-fibré à la dimension ℓ est donc la "notion stable" qui correspond à celle de classe d'homotopie de $(n-\ell)$-champ d'un fibré vectoriel de dimension n.

L'obstruction $d(r_o, r_1)$ à construire une homotopie entre deux réductions r_o et r_1 (leur différence au sens de la théorie de l'obstruction) se trouve dans $H^{2k-1}(X ; \pi_{2k-1}[SO/SO(2k-1)]) = H^{2k-1}(X ; \mathbb{Z}/2)$. L'homomorphisme de stabilisation :

$$\pi_{2k-1}[SO(2k)/SO(2k-1)] \longrightarrow \pi_{2k-1}[SO/SO(2k-1)]$$

est la réduction modulo 2 :

$$\rho_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2 .$$

Avec cette notation, nous avons :

$$d[r(a_o), r(a_1)] = \rho_2[d(a_o, a_1)] .$$

La relation d'équivalence entre les traverses à f définie par :

(iii) $r(a_o)$ et $r(a_1)$ homotopes

est donc plus fine que celle définie précédemment (c'est la même si X est connexe). La classe d'homotopie de la réduction de ν_X donnée par un plongement de X dans $\mathbb{R}^{4k-2}$ ne dépend pas du choix de ce plongement (classification des immersions), ceci assure la cohérence de la définition suivante :

DÉFINITION 3.2.- <u>Une traverse à</u> f, a, <u>est distinguée si la classe d'homotopie de la réduction</u> $r(a)$ <u>de</u> ν_X <u>à la dimension</u> $2k-1$ <u>qu'elle détermine coïncide avec celle que donne un plongement de</u> X <u>dans</u> $\mathbb{R}^{4k-2}$.

REMARQUE 3.3.- Si X est le bord d'une variété Y la réduction distinguée de ν_X à la dimension $2k-1$ est celle qui s'étend en une réduction de ν_Y à la dimension $2k-1$ (classification des immersions).

PROPOSITION 3.4.- Soit M^{4k-1} une variété fermée SO-parallélisée, il existe une et une seule forme quadratique $q : T_{2k-1}(M) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ associée à la forme d'enlacement telle que pour tout plongement $f : X^{2k-1} \longrightarrow M^{4k-1}$, tel que $f_*[X]$ est de torsion et toute traverse à f distinguée, a, on a :

$$q(f_*[X]) \equiv \frac{1}{2} E(f, f^a) \pmod{\mathbb{Z}} .$$

La démonstration de cette proposition sera donnée en 3.14. En effet, nous allons construire une forme quadratique associée à la forme d'enlacement dans le cas où l'on se donne une $SG_{(2)}$-trivialisation (voir chapitre I) du SG-fibré sous-jacent à τ_M. La généralisation due à l'apparition des SG-fibrés sera utilisée dans le chapitre V, celle due à la localisation sera en particulier utilisée dans le chapitre VIII. La technique de construction s'inspire de la remarque 3.3.

Nous commençons par la description d'une situation qui nous sera utile par la suite.

3.5.- Soit N une variété de dimension $4k$ de bord ∂N. Nous nous donnons un diagramme commutatif, où la flèche verticale de droite est la fibration introduite en 1.6 :

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "c"] & BSG \\ \partial N \arrow[u, hook] \arrow[r, "u"] & E \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd}$$

et un SG-morphisme, C, du SG-fibré sous-jacent à τ_N sur $\gamma(c)$ (voir chap. I). La restriction de C à $\tau_{N|\partial N}$ donne un SG-morphisme U du SG-fibré sous-jacent à $\tau_{\partial N}$ sur $\gamma(p \circ u)$. La donnée (u,U) est appelée un $SG_{(2)}$-parallélisation de ∂N, nous notons t la $SG_{(2)}$-trivialisation qu'elle représente.

Soient Y et Z deux variétés de dimension $2k$ de bord commun X et un

diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook] & N \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \partial N \arrow[d, "u"] \\ Z \arrow[r, "H"] & E \end{tikzcd}$$

où F est une immersion générique transverse au bord et f un plongement.

Le SG-morphisme U induit un SG-morphisme V :

$$\nu_f \longrightarrow [\nu_Z \oplus \gamma(p \circ H)]\big|_X \quad .$$

Le SG-fibré $\nu_Z \oplus \gamma(p \circ H)$ admet des réductions (même définition qu'en 3.1 en remplaçant SO par SG) à la dimension $2k-1$, soit R l'une d'entre elles. La restriction de R à X induit, grâce à V , une réduction r du SG-fibré sous-jacent à ν_f à la dimension $2k-1$; soit a une traverse à f compatible avec r.

LEMME 3.5.- <u>L'obstruction</u> $c(a)$ <u>à étendre</u> a <u>en une traverse à</u> F <u>vérifie</u> :

$$\langle c(a),[Y]\rangle \equiv \langle v_{2k}^t , F_*[Y]\rangle \pmod 2$$

<u>la classe</u> v_{2k}^t <u>étant la classe de</u> Wu <u>relative définie par la</u> $SG_{(2)}$-<u>trivialisation</u>, t , <u>de</u> ∂N .

<u>Démonstration</u>.- L'homomorphisme naturel :

$$\pi_{2k-1}[SO(2k)/SO(2k-1)] \longrightarrow \pi_{2k-1}[SG/SG(2k-1)]$$

est encore la réduction modulo 2 :

$$\rho_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2$$

et nous avons en notant $c(r)$ l'obstruction à étendre r en une réduction de ν_F sur Y :

$$c(r) = \rho_2[c(a)] \quad .$$

Nous devons donc calculer $\langle c(r),[Y]\rangle$.

Le SG-fibré sous-jacent à $F^*\tau_N$ sur Y et le SG-fibré $\gamma(p \circ H)$ sur Z se recollent à l'aide du SG-morphisme U en un SG-fibré, ξ , sur la variété fermée $P = Y \underset{X}{\cup} (-Z)$.

Les applications $c \circ F : Y \longrightarrow BSG$ et $p \circ H : Z \longrightarrow BSG$ se recollent en une une application $d : P \longrightarrow BSG$ telle que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "d"] & BSG \\ Z \arrow[u, hook] \arrow[r, "H"] & E \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif. De plus le SG-morphisme C induit un SG-morphisme $D : \xi \longrightarrow \gamma(d)$.

Soient i et j respectivement les inclusions de paires : $(Y,X) \longrightarrow (P,Z)$ et $(P,\emptyset) \longrightarrow (P,Z)$. Soit $c(R)$ l'obstruction à étendre R en une réduction sur P, du SG-fibré $\xi \oplus \nu_P$, à la dimension $2k-1$, nous avons par naturalité :

$$c(r) = i^*c(R) \quad \text{et} \quad w_{2k}(\xi \oplus \nu_P) = j^*c(R)$$

et donc

$$\langle c(r),[Y] \rangle = \langle c(R), i_*[Y] \rangle .$$

Or par excision :

$$i_*[Y] = j_*[P]$$

d'où $\langle c(r),[Y] \rangle = \langle c(R), j_*[P] \rangle = \langle w_{2k}(\xi \oplus \nu_P), [P] \rangle$.

Soit encore : $\langle c(r),[Y] \rangle = \langle Sqv(\xi \oplus \nu_P),[P] \rangle$

$$= \langle v(\xi \oplus \nu_P) \smile v(\tau_P), [P] \rangle$$

$$= \langle v(\xi \oplus \nu_P \oplus \tau_P), [P] \rangle$$

$$= \langle v_{2k}(\xi), [P] \rangle .$$

Soit v'_{2k} la classe de Wu relative dans $H^{2k}(P,Z;\mathbb{Z}/2)$ définie par la $SG_{(2)}$-trivialisation de $\xi|_Z$ donnée par la restriction du SG-morphisme D à $\xi|_Z$ (voir 1.8), nous avons encore par naturalité :

$$v_{2k}(\xi) = j^*v'_{2k} \quad \text{et} \quad i^*v'_{2k} = F^*v^t_{2k} .$$

Nous en déduisons :

$$\langle c(r),[Y] \rangle = \langle v^t_{2k}, F_*[Y] \rangle .$$

D'après 2.14 dans le cas où la classe $f_*[X]$ est de torsion, nous obtenons en notant y la classe $F_*[Y]$:

FORMULE 3.6.- $y.y + E(f,f^a) \equiv \langle v^t_{2k}, y \rangle \pmod 2$.

3.7.- Considérons maintenant une variété sans bord de dimension $4k-1$, M , munie d'une $SG_{(2)}$-parallélisation (u,U) .

Soit comme précédemment un diagramme commutatif où f est un plongement :

$$3.7. \qquad \begin{array}{ccc} X^{2k-1} & \xrightarrow{f} & M \\ \updownarrow & & \downarrow u \\ Z^{2k} & \xrightarrow{H} & E \end{array} \qquad (\partial Z = X) \ .$$

Nous dirons qu'une traverse à f , a , est adaptée à un tel diagramme si elle est compatible avec une réduction à la dimension $2k-1$, r , du SG-fibré sous-jacent à ν_f obtenue à l'aide de U et d'une réduction à la dimension $2k-1$, R de $\nu_Z \oplus \gamma(p \circ H)$.

Nous supposons désormais que la classe $x = f_*[X]$ est de torsion.

PROPOSITION 3.7.- <u>Soit</u> a <u>une traverse adaptée à un diagramme du type précédent, la classe dans</u> $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ <u>de</u> $\frac{1}{2}E(f,f^a)$ <u>ne dépend que de la classe de bordisme de</u> (X,f) <u>dans</u> $\Omega_{2k-1}(M)$.

<u>Démonstration</u>.- Soient $(Z_i,X_i,H_i,f_i,R_i,a_i)$, $i = 0,1$, deux données comme ci-dessus.

Posons $N = M \times I$, $\partial N = (M \times \{1\}) \amalg [-(M \times \{0\})]$, $Z = Z_0 \amalg Z_1$, $X = X_0 \amalg X_1$, $H = H_0 \amalg H_1$, $f = f_0 \amalg f_1$.

Prenons pour c et C respectivement les composés :

$$M \times I \xrightarrow{\text{projection } \pi} M \xrightarrow{u} E$$

$$\tau_{M \times I} \xrightarrow{\sim} \pi^* \tau_M \xrightarrow{\pi^* U} \gamma(p \circ u \circ \pi) \ .$$

Notons encore $u : \partial N \longrightarrow E$ la somme $u \amalg u$.

Si les classes de bordisme de (X_0,f_0) et (X_1,f_1) sont égales il existe une variété Y de bord $X_1 \amalg (-X_0)$ et une immersion générique transverse au bord F : $Y \longrightarrow N$ prolongeant f (position générale).

Nous avons donc complètement retrouvé la situation décrite en 3.5, dans ce cas-çi v^t_{2k} est nulle et nous avons en appliquant 3.6 :

$$E(f_1,f_1^{a_1}) - E(f_0,f_0^{a_0}) \equiv 0 \pmod{2\mathbb{Z}} \ .$$

3.8.- Notons h la composition :

$$\Omega_{2k}(u) \longrightarrow \Omega_{2k-1}(M) \longrightarrow H_{2k-1}(M)$$

et $\bar{\Omega}_{2k}(u)$ le sous-groupe $h^{-1}[T_{2k-1}(M)]$.

La classe dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de $\frac{1}{2}E(f,f^a)$ ne dépend a fortiori que de la classe de bordisme du diagramme 3.7 dans $\bar{\Omega}_{2k}(u)$. Par un argument de position générale et d'extension des homotopies toute classe de bordisme peut être représentée par un tel diagramme, nous avons donc défini une application $\bar{q} : \bar{\Omega}_{2k}(u) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

PROPOSITION 3.8.- <u>L'application</u> $\bar{q}$ <u>vérifie</u> :

(i) $2\bar{q}(b) = e[h(b),h(b)]$.

(ii) $\bar{q}(b_o + b_1) = \bar{q}(b_o) + \bar{q}(b_1) + e[h(b_o),h(b_1)]$.

(iii) Si $n \in \mathbb{Z}$, $\bar{q}(nb) = n^2\bar{q}(b)$.

<u>Démonstration</u>.- La propriété (i) résulte de 2.6.

Toujours par position générale et extension des homotopies, nous pouvons représenter les classes b_o et b_1 par deux diagrammes :

$$(D_i) \qquad \begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_i} & M \\ \downarrow & & \downarrow u \\ Z_i & \xrightarrow{H_i} & E \end{array} \qquad i = 0,1$$

tels que $f_o(X_o)$ et $f_1(X_1)$ soient disjoints.

La classe $b_o + b_1$ est représentée par :

$$(D) \qquad \begin{array}{ccc} X_o \amalg X_1 & \xrightarrow{f_o \amalg f_1} & M \\ \downarrow & & \downarrow u \\ Z_o \amalg Z_1 & \xrightarrow{H_o \amalg H_1} & E \end{array}$$

et si a_o et a_1 sont deux traverses adaptées à D_o et D_1 , $a_o \amalg a_1$ est une traverse au plongement $f_o \amalg f_1$ adaptée à D . Nous avons par définition de l'enlacement rationnel :

$$E[f_o \amalg f_1,(f_o \amalg f_1)^{(a_o \amalg a_1)}] = E(f_o,f_o^{a_o}) + E(f_1,f_1^{a_1}) + E(f_o,f_1^{a_1}) +$$

$$+ E(f_o^{a_o}, f_1)$$

soit encore d'après 2.4 :

$$E[f_o \amalg f_1 , (f_o \amalg f_1)^{(a_o \amalg a_1)}] = E(f_o, f_o^{a_o}) + E(f_1, f_1^{a_1}) + 2E(f_o, f_1) \quad .$$

La propriété (ii) est alors conséquence de 2.6. La formule (iii) se démontre par récurrence à l'aide de (i) et (ii).

3.9.- Soient Z_o une variété à bord de dimension $\ell_o < 2k$, de bord X_o et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X_o \arrow[r, "f_o"] \arrow[d, hook] & M \arrow[d, "u"] \\ Z_o \arrow[r, "H_o"] & E \end{tikzcd}$$

Soit X_1 une variété sans bord de dimension $\ell_1 = 2k - \ell_o$, appelons respectivement f et H les composées :

$$X_o \times X_1 \xrightarrow{pr_o} X_o \xrightarrow{f_o} M$$

$$Z_o \times X_1 \xrightarrow{pr_o} X_o \xrightarrow{H_o} E$$

nous obtenons un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X = X_o \times X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & M \arrow[d, "u"] \\ Z = Z_o \times X_1 \arrow[r, "H"] & E \end{tikzcd}$$

qui sera dit décomposé, dans ce cas la classe $f_*[X]$ est nulle.

LEMME 3.9.- <u>Si une classe</u> b <u>de</u> $\bar{\Omega}_{2k}(u)$ <u>est représentée par un diagramme décomposé, alors</u> $\bar{q}(b)$ <u>est nul.</u>

<u>Démonstration</u>.- De la même façon qu'en 3.8, nous pouvons, sans perdre de généralité, supposer que f_o est un plongement.

Donnons-nous une réduction du fibré vectoriel ν_{f_o} à la dimension $\ell_o - 1$

compatible avec une réduction à cette dimension de $\nu_{Z_o} \oplus \gamma(p \circ H_o)$:

$$\nu_{f_o} \xrightarrow{\sim} \bar{\nu}_{f_o} \oplus \epsilon^{2\ell_1+1}$$

avec dimension de $\bar{\nu}_{f_o} = \ell_o - 1$.

Il en résulte un difféomorphisme φ :

$$E(\nu_{f_o}) \xrightarrow{\sim} E(\bar{\nu}_{f_o}) \times \mathbb{R}^{2\ell_1} \times \mathbb{R} \ .$$

Soient $i_o : X_o \longrightarrow E(\bar{\nu}_{f_o})$ le plongement associé à la section nulle, f_1 un plongement de X_1 dans $\mathbb{R}^{2\cdot 1}$ et J l'application :

$$X_o \times X_1 \times I \longrightarrow E(\bar{\nu}_{f_o}) \times \mathbb{R}^{2\ell_1} \times \mathbb{R}$$
$$(x_o , x_1 , s) \longmapsto (i_o(x_o), sf_1(x_1), 0) \ .$$

La composition K :

$$X \times I \xrightarrow{J} E(\bar{\nu}_{f_o}) \times \mathbb{R}^{2\ell_1} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi^{-1}} E(\nu_{f_o}) \xrightarrow{F_o} M$$

où F_o est un voisinage tubulaire de f_o est une homotopie de f à plongement $\tilde{f}$.

Comme la paire (Z,X) vérifie la propriété d'extension des homotopies, il existe une homotopie d'origine H , $L : Z \times I \longrightarrow E$ telle que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "K"] \arrow[d, hook] & M \arrow[d, "u"] \\ Z \times I \arrow[r, "L"] & E \end{tikzcd}$$

Pour $s = 1$, nous obtenons le diagramme :

$$(\tilde{D}) \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, hook] & M \arrow[d] \\ Z \arrow[r, "\tilde{H}"] & E \end{tikzcd}$$

du type de ceux étudiés en 3.7 qui représente la classe de bordisme b .

Notre construction donne un isomorphisme de fibrés vectoriels :

$$K^*\tau_M \xrightarrow{\sim} [pr_o^*(\tau_X \oplus \bar{\nu}_{f_o}) \oplus pr_1^* \epsilon^{2\ell_1} \oplus \epsilon] \times I \ .$$

Nous en déduisons un isomorphisme :

$$\nu_{\tilde{f}} \xrightarrow{\sim} (pr_o^* \bar{\nu}_{f_o} \oplus pr_1^* \nu_{f_1}) \oplus \epsilon \ .$$

Soient a la traverse à $\tilde{f}$ correspondant au facteur ε et $\tilde{r}$ la réduction du SG-fibré sous-jacent à $\nu_{\tilde{f}}$ associée.

Considérons le SG-fibré $\eta = (\nu_Z \times I) \oplus \gamma(p \circ L)$ de base $Z \times I$, à l'aide de K^*U nous avons une réduction S de $\eta_{|X \times I}$ à la dimension $2k-1$:

$$\eta_{|X \times I} \xrightarrow{\sim} \text{SG-fibré sous-jacent à } pr_0^* \bar{\nu}_{f_0} \oplus pr_1^* \nu_{f_1} .$$

Par construction $S_{|X \times \{0\}}$ s'étend sur $Z \times \{0\}$, il n'y a donc pas d'obstruction à étendre $\tilde{r}$ (abus de langage) en une réduction $\tilde{R}$ sur $Z \times \{1\}$. La traverse a est par conséquent adaptée au diagramme $\tilde{D}$.

Comme $\tilde{f}$ est homotope à f dans $M - \tilde{f}^a(X)$, $E(\tilde{f}, \tilde{f}^a)$ est nul.

COROLLAIRE 3.10.- <u>Il existe une et une seule forme quadratique</u> $q : T_{2k-1}(M) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ <u>associée à la forme d'enlacement telle que pour toute classe</u> b <u>de bordisme dans</u> $\bar{\Omega}_{2k}(u)$ <u>on ait</u> : $q[(h(b)] = \bar{q}(b)$.

<u>Démonstration</u>.- Considérons le diagramme commutatif où la ligne inférieure est exacte

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega_{2k}(u) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{2k-1}(M) \arrow[d] & \\
H_{2k}(E) \arrow[r] & H_{2k}(u) \arrow[r] & H_{2k-1}(M) \arrow[r] & H_{2k-1}(E)
\end{tikzcd}$$

en tensorisant par $\mathbb{Z}_{(2)}$ nous avons :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_{(2)} \otimes \Omega_{2k}(u) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}_{(2)} \otimes \Omega_{2k-1}(M) \arrow[d] \\
\mathbb{Z}_{(2)} \otimes H_{2k}(u) \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{Z}_{(2)} \otimes H_{2k-1}(M)
\end{tikzcd}$$

où les deux flèches verticales sont surjectives [7] et la flèche horizontale inférieure est un isomorphisme.

Il en résulte que l'homomorphisme :

$$id \otimes h : \mathbb{Z}_{(2)} \otimes \bar{\Omega}_{2k}(u) \longrightarrow \mathbb{Z}_{(2)} \otimes T_{2k-1}(M)$$

est surjectif.

Unicité.- D'après ce qui précède, pour tout x de $T_{2k-1}(M)$, il existe un entier n, impair, tel que $n(x) = h(b)$. Comme n^2 et 2 sont premiers entre eux, le système

$$2q(x) = e(x,x)$$
$$n^2 q(x) = \bar{q}(b)$$

ne peut avoir qu'une solution.

Existence.- Le e-module $T_{2k-1}(M)$ (terminologie de [3 Appendice]) se décompose en la somme orthogonale :

$$[\mathbb{Z}_{(2)} \otimes T_{2k-1}(M)] \oplus [\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \otimes T_{2k-1}(M)]$$

soit encore :

$$T^{o}_{2k-1}(M) \oplus T^{1}_{2k-1}(M) \quad .$$

Sur $T^{1}_{2k-1}(M)$ la forme d'enlacement prend ses valeurs dans la composante impaire de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui est un $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$-module. Aussi si $x \in T^{1}_{2k-1}(M)$ nous prenons $q(x) = \frac{1}{2}\, e(x,x)$.

Notons $\tilde{h}$ l'homomorphisme surjectif :

$$\mathbb{Z}_{(2)} \otimes \bar{\Omega}_{2k}(u) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes h} T^{o}_{2k-1}(M) \quad .$$

D'après la propriété (iii) de 3.8, il existe une unique forme $\mathbb{Z}_{(2)}$-quadratique, $\tilde{q}$, définie sur $\mathbb{Z}_{(2)} \otimes \bar{\Omega}_{2k}(u)$ à valeurs dans la composante 2-primaire de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{(2)} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ telle que :

$$\tilde{q}(1 \otimes b) = 1 \otimes \bar{q}(b) \quad .$$

Elle vérifie : $\tilde{q}(\beta_o + \beta_1) = \tilde{q}(\beta_o) + \tilde{q}(\beta_1) + e[\tilde{h}(\beta_o), \tilde{h}(\beta_1)]$.

Soient $x \in T^{o}_{2k-1}(M)$ et $\beta \in \mathbb{Z}_{(2)} \otimes \bar{\Omega}_{2k}(u)$ tel que $x = \tilde{h}(\beta)$, la valeur de $\tilde{q}(\beta)$ est indépendante du choix de β. En effet, d'après Conner et Floyd [7] le noyau de $\tilde{h}$ est engendré sur $\mathbb{Z}_{(2)}$ par les classes de diagrammes décomposés auxquelles nous appliquons le lemme 3.9. Nous posons donc $q(x) = \tilde{q}(\beta)$.

3.11.- Considérons à nouveau une variété à bord N^{4k} avec les données de 3.5.

Soient $y \in H_{2k}(N,\partial N)$ tel que ∂y soit de torsion et α l'élément de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ représenté par : $\frac{1}{2}\, y.y + q(\partial y) - \frac{1}{2} \langle v^t_{2k}, y \rangle$.

Nous savons déjà que $2\alpha = 0$ (en fait on ne le montre qu'en 6.4, mais le début du chapitre 6 se suffit à lui-même).

Quitte à multiplier la classe y par un nombre impair n nous pouvons reconstituer la situation de 3.5 et appliquer la formule 3.6, nous en déduisons $n^2\alpha = 0$, α est donc nul :

3.11.- $$\frac{1}{2}\, y.y + q(\partial y) = \frac{1}{2} \langle v^t_{2k}, y \rangle \quad .$$

3.12.- Soient (u_o,U_o) et (u_1,U_1) deux $SG_{(2)}$-parallélisations qui définissent la même $SG_{(2)}$-trivialisation de M , elles permettent de construire deux formes quadratiques associées à la forme d'enlacement, respectivement q_o et q_1 . Prenons $N = M \times I$, $\partial N = (M \times \{1\}) \amalg [-(M \times \{0\})]$, il existe une application $w : M \times I \longrightarrow E$ et un SG-morphisme W de $\tau_M \times I$ sur $\gamma(p \circ w)$ qui étendent respectivement $u_o \amalg u_1$ et $U_o \amalg U_1$. En prenant enfin le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \times I \arrow[r, "p \circ w"] & BSG \\ \partial(M \times I) \arrow[u, hook] \arrow[r, "u_o \amalg u_1"] & E \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd}$$

nous avons retrouvé la situation de 3.11. Dans ce cas $v^t_{2k} = 0$ et l'application de la formule 3.11 nous donne

PROPOSITION 3.12.- <u>La forme quadratique</u> q <u>construite à l'aide d'une</u> $SG_{(2)}$ - <u>parallélisation</u> (u,U) <u>ne dépend que de la</u> $SG_{(2)}$-<u>trivialisation</u> t <u>qu'elle représente</u>.

Nous noterons désormais q^t cette forme quadratique marquant ainsi sa dépendance à l'égard de t .

Nous pouvons reformuler 3.11 :

PROPOSITION 3.13.- Soit N une variété de dimension $4k$ dont le bord est muni d'une $SG_{(2)}$-trivialisation t. Soit $y \in H_{2k}(N,\partial N)$ telle que y soit de torsion nous avons dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{2}\, y.y + q^t(\partial y) = \frac{1}{2} \langle v^t_{2k}, y \rangle \quad .$$

(La classe v^t_{2k} est un relevé de la classe de Wu compatible avec q^t selon la terminologie de [6]).

3.14.- Nous sommes maintenant en mesure de donner une démonstration de la proposition 3.4 (notre long détour n'était bien sûr pas nécessaire).

La SO-trivialisation de M induit une $SG_{(2)}$-trivialisation que nous notons encore t.

Soient $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^{4k-2}$ et $A : \mathbb{R}^{4k-1} \longrightarrow M$ deux plongements ; nous supposons $A(\mathbb{R}^{4k-1}) \cap f(X) = \emptyset$. La composition :

$$X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^{4k-2} \hookrightarrow \mathbb{R}^{4k-1} \xrightarrow{A} M$$

définit un plongement $\bar{f}$ de X dans M et un isomorphisme de son fibré normal $\nu_{\bar{f}}$ sur $\nu_\varphi \oplus \epsilon$, soit $\bar{a}$ la traverse à $\bar{f}$ correspondante.

Considérons la variété $Z = X \times I$ de bord $X' = [-(X \times \{0\})] \amalg (X \times \{1\})$ et le plongement $f' = \bar{f} \amalg f$ de X' dans M. Si a est une traverse distinguée, il existe une réduction R de $\nu_Z \times I$ à la dimension $2k-1$ qui induit $r(\bar{a})$ sur $X \times \{0\}$ et $r(a)$ sur $X \times \{1\}$.

Or
$$f'_*[X'] = f_*[X] - \bar{f}_*[X]$$
$$= f_*[X] \quad .$$

Nous avons donc (pour retrouver la situation de 3.7, prendre en particulier les applications u et H constantes) :

$$q^t(f_*[X]) = \frac{1}{2}\, E[(\bar{f} \amalg f), (\bar{f} \amalg f)^{\bar{a} \amalg a}] \qquad (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z})$$
$$= \frac{1}{2}\, E(f, f^a) \quad .$$

En effet : $E(\bar{f}, \bar{f}^{\bar{a}})$ est nul parce que $\bar{f}$ est homotope à une constante dans

$M - \bar{f}^{\bar{a}}(X)$, $E(f,\bar{f})$ et $E(f,\bar{f}^{\bar{a}})$ sont nuls pour des raisons analogues.

Nous avons donc démontré l'existence, l'unicité résulte du fait que toute classe d'homologie de $T_{2k-1}(M)$ possède un multiple impair représentable par une variété plongée.

<u>Les exemples</u> $\mathbb{R}P_3$, $\mathbb{R}P_7$.

3.15.- Soient X un groupe de Lie compact de dimension $2k-1$ et $\xi = (M, \ ,B)$ un X-fibré principal différentiable où M est une variété fermée connexe de dimension $4k-1$ et B une variété fermée (connexe) de dimension $2k$. Soient $A : M \times X \longrightarrow M$ l'action (à droite) de X sur M et m un point de M , nous notons f_m le plongement :

$$X \longrightarrow M$$
$$x \longrightarrow A(m,x) \quad .$$

Soient m_o et m_1 deux points de M , les deux applications f_{m_o} et f_{m_1} sont homotopes. En effet, soit $\mu(t)$ un chemin joignant m_o à m_1 l'application :

$$X \times I \longrightarrow M$$
$$(x,t) \longrightarrow A(\mu(t),x)$$

est une homotopie de f_{m_o} à f_{m_1} .

La classe $(f_m)_*[X]$ est donc indépendante du choix de m nous la notons $[\xi]$. Nous supposons désormais que $[\xi]$ est de torsion.

Un argument analogue au précédent montre que si m'_o et m'_1 sont deux points de M tels que $p(m'_o)$ et $p(m'_1)$ sont distincts de $p(m)$ les deux applications :

$$X \xrightarrow{f_{m_i}} M - f_m(X) \quad , \quad i = 0, 1$$

sont homotopes, nous en déduisons que l'enlacement rationnel $E(f_m , f_{m'})$ ne dépend pas du choix des points m et m' tels que $p(m) \neq p(m')$, nous le notons $\ell(\xi)$.

<u>Exemples</u>.- Pour les fibrations de Hopf : $S^{4k-1} \longrightarrow S^{2k}$, $k = 1, 2$, l'enlacement ℓ est égal à 1 .

Soit F un sous-groupe fini distingué de X , le X-fibré principal ξ induit

un (X/F)-fibré principal $\xi' = (M/F\ ,\ p'\ ,\ B)$; soit π le revêtement $M \longrightarrow M/F$, nous avons : $(\# F)[\xi'] = \pi_*[\xi]$ et la classe $[\xi']$ est encore de torsion. De même :

$$(\# F)\ell(\xi') = \ell(\xi) \quad .$$

<u>Exemples</u>.- Dans le cas des S^{2k-1}-fibrés principaux de Hopf , $k = 1\ ,\ 2$, nous prenons $F = \{\pm 1\}$. Nous obtenons alors des $\mathbb{R}P_{2k-1}$-fibrés principaux : $\mathbb{R}P_{4k-1} \longrightarrow S^{2k}$. Ici la classe $[\xi]$ est le générateur de $H_{2k-1}(\mathbb{R}P_{4k-1}\ ;\mathbb{Z})$ et l'enlacement $\ell(\xi)$ vaut $\frac{1}{2}$.

3.16.- Soient e l'élément neutre de X , $\mathfrak{X}$ son algèbre de Lie et α le morphisme de fibrés vectoriels :

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathfrak{X} & \longrightarrow & \tau_M \\ (m,y) & \longrightarrow & \frac{\partial A}{\partial X}(m,e)(y) \end{array}$$

sur chaque fibre α est injectif.

La différentielle de l'application p induit un morphisme de fibrés vectoriels, surjectif sur chaque fibre, $\beta : \tau_M \longrightarrow p^*\tau_B$ tel que la suite :

$$3.16 \qquad 0 \longrightarrow M \times \mathfrak{X} \xrightarrow{\alpha} \tau_M \xrightarrow{\beta} p^*\tau_B \longrightarrow 0$$

est exacte.

Nous nous donnons maintenant une SO-trivialisation de la variété B , à l'aide de 3.16, nous obtenons une SO-trivialisation t de la variété M ($\mathfrak{X}$ est orientée) nous nous proposons de calculer $q^t([\xi])$.

La différentielle de p donne un isomorphisme de fibrés vectoriels :

$$\nu_{f_m} \xrightarrow{\sim} X \times T_{p(m)}B$$

soient a une traverse à f_m correspondant à un champ de vecteur constant non nul dans $X \times T_{p(m)}B$, $r(a)$ la réduction de ν_X à la dimension $2k-1$ qui lui est associée, d la différence dans $H^{2k-1}(X\ ;\mathbb{Z}/2)$ entre $r(a)$ et la réduction distinguée, et $\varepsilon = \langle d,[X]\rangle$. On vérifie : $E(f_m,f_m^a) = \ell(\xi)$, nous avons donc

d'après 3.4, 2.15 et 3.1 :

$$q^t([\xi]) = \frac{1}{2}\ell(\xi) + \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

La réduction $r(a)$ est associée à l'isomorphisme de fibres vectoriels :

$$\tau_X \oplus \varepsilon^{2k-1} \xrightarrow{\sim} \varepsilon^{4k-2}$$

que donne la parallélisation de groupe de Lie : $\tau_X \longrightarrow X \times \mathfrak{X}$ la classe d peut donc être obtenue de la façon suivante : soit φ un plongement de X dans $\mathbb{R}^{4k-2}$, à l'aide de la parallélisation de X et de la différentielle de φ on construit une application $\Phi : X \longrightarrow SO/SO(2k-1)$; la différence d est la classe de Φ dans $[X, SO/SO(2k-1)] = H^{2k-1}(X ; \mathbb{Z}/2)$, elle ne dépend que du groupe de Lie X (pas nécessairement orienté), il en est de même de ε que nous noterons $\varepsilon(X)$.

<u>Remarque</u>.- La parallélisation de X induit une application maximale de τ_X dans $\mathbb{R}^{4k-2}$ et donc une classe d'homotopie régulière d'immersion, $\varepsilon(X)$ est le nombre de points doubles modulo 2 de cette classe d'immersion.

Nous reformulons :

3.17.- $$q^t([\xi]) = \frac{1}{2}\ell(\xi) + \frac{1}{2}\varepsilon(X) \quad .$$

Il est à remarquer que la SO-trivialisation de B n'intervient pas dans notre calcul.

<u>Exemples</u>.- En appliquant 3.17 aux fibrations de Hopf, nous obtenons :

$$\varepsilon(S^1) = \bar{1} \quad , \quad \varepsilon(S^3) = \bar{1} \quad .$$

3.18.- Si $n \equiv 2,3 \pmod 4$, $SO(n)$ est de dimension impaire et nous avons :

LEMME 3.18.- <u>Si</u> $n \equiv 2,3 \pmod 4$:

$$\varepsilon[SO(n)] = \begin{cases} \bar{1} & \text{pour } n = 2 \\ \bar{0} & \text{pour } n \geqslant 3 \end{cases} \quad .$$

<u>Démonstration</u>.- En prenant les $(n-1)$ premières colonnes d'une matrice orthogonale, nous avons un plongement ϖ de $SO(n)$ dans $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, on vérifie qu'ici l'application Φ est la composée :

$$SO(n) \xrightarrow{\Delta} SO[n(n-1)] \longrightarrow SO \longrightarrow SO/SO[\frac{n(n-1)}{2}]$$

où Δ est l'application :

$$\alpha \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{pmatrix} .$$

L'application Φ est donc homotope à la composée :

$$SO(n) \xrightarrow{P_{n-1}} SO(n) \xrightarrow{s} SO \longrightarrow SO/SO[\frac{n(n-1)}{2}]$$

où P_{n-1} est l'application : $\alpha \longrightarrow \alpha^{n-1}$ et s la stabilisation.

Si $n = 2$, $\varepsilon[SO(2)] = \bar{1}$.

Si $n \geqslant 3$, nous avons $n \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$ et Φ est homotope à l'application constante : $\varepsilon[SO(n)] = \bar{0}$.

3.19.- <u>Applications</u>. Si t est une SO-trivialisation de $\mathbb{RP}_{4k-1}$, $k = 1,2$, déduite de sa structure de $\mathbb{RP}_{2k-1}$-fibré principal, nous avons en notant x le générateur de $H_{2k-1}(\mathbb{RP}_{4k-1} ; \mathbb{Z})$:

$$q^t(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{si } k = 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } k = 2 \end{cases} .$$

Considérons la fibration : $SO(n-1) \longrightarrow SO(n) \longrightarrow S^{n-1}$, à la SO-trivialisation de S^{n-1} induite par celle de D^n nous faisons correspondre par le procédé, décrit en 3.16, une SO-trivialisation de $SO(n)$; on vérifie qu'elle diffère de celle de groupe de Lie par la classe de la stabilisation s dans $[SO(n),SO]$. Appelons t_o la SO-trivialisation de groupe de Lie de $SO(3) = \mathbb{RP}_3$, l'étude qui va être faite au chapitre IV montrera :

$$q^{t_o}(x) = \frac{1}{4} .$$

CHAPITRE IV

CHANGEMENT DE TRIVIALISATIONS

4.1.- Soient t_o et t_1 deux $SG_{(2)}$-trivialisations de τ_M ; nous voulons comparer les constructions du chapitre précédent associées respectivement à t_o et t_1.

Soit $\varphi : M \longrightarrow SG_{(2)}$ une application telle que $t_1 = [\varphi].t_o$ (on a représenté par . l'action du groupe $[M,SG_{(2)}]$ sur $TSG_{(2)}(\tau_M)$).

PROPOSITION 4.1.- <u>Pour tout</u> $x \in T_{2k-1}(M)$ <u>on a</u>

$$q^{t_1}(x) - q^{t_o}(x) = e(D^{-1}\varphi^*(\beta\sigma v_{2k}),x)$$

<u>où</u> v_{2k} <u>est la classe de</u> Wu <u>dans</u> $H^{2k}(BSG_{(2)} ; \mathbb{Z}/2)$, σ <u>l'homomorphisme suspension</u> : $H^{2k}(BSG_{(2)} ; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^{2k-1}(SG_{(2)} ;\mathbb{Z}/2)$, β <u>le Bockstein de la suite exacte</u> $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$ <u>et</u> D^{-1} <u>l'isomorphisme de dualité</u> $D^{-1} : H^{2k}(M ; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{2k-1}(M ;\mathbb{Z})$.

<u>Démonstration</u>.- On considère la variété $N = M \times I$; on choisit comme $SG_{(2)}$-trivialisation de $\partial(M \times I)$, t_1 sur $M \times 0$ et t_o sur $M \times 0$; on a alors la classe $v^t_{2k} \in H^{2k}(M \times (I,\partial I) ; \mathbb{Z}/2)$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^{2k-1}(SG_{(2)};\mathbb{Z}/2) \arrow[d, "\varphi^*"'] & H^{2k}(BSG_{(2)},*;\mathbb{Z}/2) \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\varphi}^*"'] & H^{2k}(BSG,E;\mathbb{Z}/2) \arrow[d] \\
H^{2k-1}(M ; \mathbb{Z}/2) \arrow[r, dash, "\simeq"] & H^{2k}(\Sigma M_+,* ; \mathbb{Z}/2) & H^{2k}(M \times (I,\partial I) ; \mathbb{Z}/2) \arrow[l, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

où $\bar{\varphi}$ est la composée $\Sigma M_+ \xrightarrow{\Sigma\varphi} \Sigma SG_{(2)} \longrightarrow BSG_{(2)}$.

On a donc $v^t_{2k} = (\varphi^*\sigma v_{2k}) \times \iota^*$ où ι^* est le générateur de $H^1(I,\partial I ;\mathbb{Z}/2)$. Soient ι_* le générateur de $H_1(I,\partial I ; \mathbb{Z}/2)$ et ϵ la classe fondamentale dans $H_o(\partial I ;\mathbb{Z}/2)$. La proposition 3.13 nous donne

$$\forall x \in T_{2k-1}(M) , \quad q^t(x \times \epsilon) = \frac{1}{2}\langle v^t_{2k} , x \times \iota_* \rangle = \frac{1}{2}\langle \varphi^*\sigma v_{2k},x \rangle = e(D^{-1}\beta\varphi^*\sigma v_{2k},x)$$

et donc $q^{t_1}(x) - q^{t_o}(x) = e(D^{-1}\varphi^*\beta\sigma v_{2k} , x)$.

4.2.- Notations. Soient $w_i \in H^i(BSG_{(2)}\,;\mathbb{Z}/2)$ les classes de Stiefel-Whitney universelles, et $h_i = \sigma w_{i+1} \in H^i(SG_{(2)}\,;\mathbb{Z}/2)$. Les formules de Wu donnant $Sq^j w_{i+1}$ se transforment par σ en $Sq^j h_i = \binom{i}{j} h_{i+j}$. En particulier

$$Sq^1 h_{2j-1} = h_{2j} \quad \text{et} \quad h_\ell = (h_1)^\ell$$

si ℓ est une puissance de 2 .

Soient w la classe de Stiefel-Whitney totale et v la classe de Wu totale, on a $w = Sqv$ et donc si on écrit formellement $w = \prod_i (1 + x_i)$ on a $v = \prod_i Q(x_i)$ avec $Q(X) = 1 + \sum_{\alpha \geq 0} X^{2^\alpha}$.

Si on écrit $v_\ell = a_\ell w_\ell +$ décomposables, on a la relation

$$\Sigma a_\ell X^\ell = Q(X) \frac{d}{dX} \left(\frac{X}{Q(X)}\right)$$

l'anneau de base étant $\mathbb{Z}/2$ on a $Q(X) + [Q(X)]^2 = X$ et $Q'(X) = 1$ donc $\Sigma a_\ell X^\ell = Q(X)$ donc v_ℓ = décomposable si $\ell \neq 2^P$, $v_\ell = w_\ell +$ décomposable si $\ell = 2^P$. Comme la suspension σ est nulle sur les décomposables, la formule 4.1 devient :

$$q^{t_1}(x) - q^{t_0}(x) = 0 \quad \text{si} \quad k \neq 2^P$$
$$= e(D^{-1}\varphi^*(\beta h_{2k-1}), x) \quad \text{si} \quad k = 2^P \quad .$$

PROPOSITION 4.3.- Soit M une variété fermée de dimension $4k-1$, avec $k \neq 2^P$, $SG_{(2)}$-trivialisable. La forme quadratique q^t est indépendante du choix de la $SG_{(2)}$-trivialisation t .

4.4.- Définition de $A(M,t)$. Soit M^{4k-1} une variété sans bord et $t \in TSG_{(2)}(\tau_M)$; notons $T = T_{2k-1}(M)$. (T, q^t) est un q.e-module sur $\mathbb{Z}$ (notations de [3 appendice]). Considérons la somme de Gauss :

$$\frac{1}{\sqrt{\# T}} \sum_{x \in T} e^{2i\pi q^t(x)} \quad .$$

Elle est égale à $\gamma(T, q^t)$ où γ est l'homomorphisme $WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \longrightarrow \mu_8$ est construit dans [3] (avec μ_8 le groupe des racines huitièmes de l'unité). Cela assure la cohérence de la :

DÉFINITION 4.4.- $A(M,t)$ <u>est l'élément de</u> $\mathbb{Z}/8$ <u>défini par</u>

$$e^{2i\pi \frac{A(M,t)}{8}} = \frac{1}{\sqrt{\#T}} \sum_{x \in T} e^{2i\pi q^t(x)} .$$

4.5.- Dans la fin de ce chapitre, nous supposons <u>que</u> k <u>est une puissance de</u> 2 : $k = 2^p$.

Nous nous intéressons à la façon dont $A(M,t)$ dépend de la $SG_{(2)}$-trivialisation t . Les formules 4.2 et 4.4 nous donnent

4.5. $$\frac{1}{8}\left[A(M,t_1) - A(M,t_o)\right] = - q^{t_o}(D^{-1}\varphi^*\beta h_{2k-1}) .$$

Comme βh_{2k-1} est d'ordre 2 on a

$$A(M,t_1) - A(M,t_o) \in \mathbb{Z}/4 \subset \mathbb{Z}/8 .$$

4.6.- <u>Nous allons calculer</u> $2[A(M,t_1) - A(M,t_o)] \in \mathbb{Z}/2 \subset \mathbb{Z}/8$ <u>d'une façon qui ne fait plus intervenir la forme quadratique.</u>

En considérant h_{2k-1} comme une classe de cohomologie à coefficients $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ grâce à l'inclusion $\mathbb{Z}/2 \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, il vient

$$2q^{t_o}(D^{-1}\varphi^*\beta h_{2k-1}) = e(D^{-1}\varphi^*\beta h_{2k-1}, D^{-1}\varphi^*\beta h_{2k-1}) = \langle \varphi^*(h_{2k-1} \cup \beta h_{2k-1}), [M] \rangle .$$

Or

$$Sq^1 h_{2k-1} = h_{2k} = (h_1)^{2k} = Sq^1[(h_1)^{2k-1}] \quad \text{car} \quad k = 2^p$$

donc $h_{2k-1} = (h_1)^{2k-1} + \rho_2(u)$ où $u \in H^{2k-1}(SG_{(2)} ; \mathbb{Z}/4)$ et

$$\rho_2 : H^{2k-1}(SG_{(2)} ; \mathbb{Z}/4) \longrightarrow H^{2k-1}(SG_{(2)} ; \mathbb{Z}/2)$$

est la réduction mod 2 donc dans $H^{4k-1}(SG_{(2)} ; \mathbb{Z}/2)$ on a

$$h_{2k-1} \cup \beta h_{2k-1} = (h_1)^{2k-1} \cup Sq^1 h_{2k-1} + \rho_2(u \cup \beta h_{2k-1}) = (h_1)^{4k-1} + \rho_2(v)$$

où $v = u \cup \beta h_{2k-1}$ est une classe d'ordre 2 dans $H^{4k-1}(SG_{(2)} ; \mathbb{Z}/4)$.

Soit $\mu \in H^{4k-1}(M ; \mathbb{Z}/4)$ le générateur dual de la classe fondamentale, comme v est d'ordre 2 on a $\varphi^* v = 0$ ou 2μ et $\langle \varphi^*\rho_2 v, [M] \rangle = \rho_2 \langle \varphi^* v, [M] \rangle = 0$ donc

4.6. $$2[A(M,t_1) - A(M,t_o)] = \langle (\varphi^* h_1)^{4k-1}, [M] \rangle \quad k = 2^p .$$

PROPOSITION 4.7.- Soit M une variété fermée de dimension $4k-1$ avec $k \geqslant 3$, SG trivialisable. **Alors** $2A(M,t) \in \mathbb{Z}/4$ est indépendant du choix de la $SG_{(2)}$-trivialisation t.

Démonstration.- Raisonnons par l'absurde ; soit $\varphi : M \longrightarrow SG_{(2)}$ tel que $\varphi^* h_1^{4k-1} \neq 0$ dans $H^{4k-1}(M ; \mathbb{Z}/2)$. Soit $\psi : SG_{(2)} \longrightarrow \mathbb{RP}_\infty = K(\mathbb{Z}/2, 1)$ l'application qui classifie h_1 i.e. $h_1 = \psi^* w_1$; l'application $\psi \circ \varphi : M \longrightarrow \mathbb{RP}_\infty$ induit donc des injections $H^p(\mathbb{RP}_\infty, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^p(M ; \mathbb{Z}/2)$ pour $p \leqslant 4k-1$, l'application

$$(\psi \circ \varphi)_* : H_{4k-1}(M ; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{4k-1}(\mathbb{RP}_\infty, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2$$

est donc non nulle. Or $\mathbb{RP}_{4k-1}$ est le $4k-1$ squelette de $\mathbb{RP}_\infty$ dans la décomposition cellulaire standard, il existe donc des applications $f : M \longrightarrow \mathbb{RP}_{4k-1}$ telles que $\psi \circ \varphi$ et $i \circ f$ soient homotopes où i est l'inclusion $\mathbb{RP}_{4k-1} \longrightarrow \mathbb{RP}_\infty$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & H_{4k-1}(M,\mathbb{Z}) \arrow[dl, "f_*"'] \arrow[dr, "(\psi \circ \varphi)_*"] & \\
\mathbb{Z} \simeq H_{4k-1}(\mathbb{RP}_{4k-1} ; \mathbb{Z}) \arrow[rr, "i_*"] & & H_{4k-1}(\mathbb{RP}_\infty, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2
\end{tikzcd}$$

où i_* est la réduction modulo 2 ; f est donc de degré impair. Or on peut modifier f de la façon suivante : soit $p : S^{4k-1} \longrightarrow \mathbb{RP}_{4k-1}$ le revêtement universel, p est de degré 2 et $i \circ p$ est homotope à zéro; si on appelle f' la composée

$$M \xrightarrow{\simeq} M \# S^{4k-1} \xrightarrow{f \# p} \mathbb{RP}_{4k-1}$$

on a $\deg f' = \deg f + 2$. On peut donc supposer que f est de degré 1. Or M est SG-trivialisable, l'existence d'une application de degré 1 entre M et $\mathbb{RP}_{4k-1}$, entraine que $\mathbb{RP}_{4k-1}$ est SG-trivialisable.

Or $$\widetilde{J}(\mathbb{RP}_{4k-1}) \simeq \widetilde{KO}(\mathbb{RP}_{4k-1}) \simeq \mathbb{Z}/2^{a(k)}\mathbb{Z}$$

où $a(k)$ est défini par $a(1) = 2$, $a(2) = 3$ et $a(k+2) = a(k) + 3$ et la classe

du fibré linéaire ζ est un générateur [9]. La relation $\tau \oplus \varepsilon^1 = 4k\zeta$ montre alors que $\mathbb{R}P_{4k-1}$ n'est SG-trivialisable que si $k = 1$ ou 2. Cela achève la démonstration.

<u>Remarque</u> 4.8.- Une étude plus détaillée des $SG_{(2)}$-trivialisations montre que la proposition 4.7 est valable si on suppose seulement que M est $SG_{(2)}$-trivialisable.

PROPOSITION 4.9.- <u>Soit</u> $M = \mathbb{R}P_3$ <u>ou</u> $\mathbb{R}P_7$; <u>il existe deux</u> SO-<u>trivialisations</u> t_o <u>et</u> t_1 <u>de</u> τ_M <u>telles que</u>

$$A(M,t_1) - A(M,t_o) = 1/4 \in \mathbb{Z}/4 \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad .$$

<u>Démonstration</u>.- Soit $\bar{\delta}_n : S^n \longrightarrow SO(n+1)$ l'application définie par $\bar{\delta}_n(x) = \sigma(x).\sigma(x_o)^{-1}$ où $\sigma(x)$ est la symétrie par rapport à l'hyperplan orthogonal à x et x_o le point base $(1,0,\dots 0)$ de S^n ; comme $\bar{\delta}_n(-x) = \bar{\delta}_n(x)$ cela définit une application $\delta_n : \mathbb{R}P_n \longrightarrow SO(n+1)$. Le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}P_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, hook] & SO(n+1) \arrow[d, hook] \\
\mathbb{R}P_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & SO(n+2)
\end{tikzcd}$$

est commutatif ; on a donc une application $\delta : \mathbb{R}P_\infty \longrightarrow SO$.

On vérifie que $(J.\delta)^* h_1 = w_1$ où $J : SO \longrightarrow SG_{(2)}$ est l'oubli. Soit $\varphi : M \longrightarrow SO$ l'application composée $\delta.i$; soit t_o une SO-trivialisation de τ_M ($\mathbb{R}P_3$ et $\mathbb{R}P_7$ sont SO-trivialisables) et $t_1 = [\varphi].t_o$. On a

$$2[A(M,t_1) - A(M,t_o)] = 1/2 \in \mathbb{Z}/2 \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

et donc (par un bon numérotage de t_o et t_1), $A(M,t_1) - A(M,t_o) = 1/4$.

4.10.- On se restreint maintenant à deux $SG_{(2)}$-trivialisations t_o et t_1 telles que $t_1 = [\varphi].t_o$ où φ se factorise en

$$M \xrightarrow{\bar{\varphi}} SO_{(2)} \xrightarrow{J} SG_{(2)}$$

(on dira que l'on a un $SO_{(2)}$ changement de $SG_{(2)}$-trivialisations. C'est en particulier le cas si t_o et t_1 sont induites par des $SO_{(2)}$-trivialisations). On note $\bar{h}_i = J^*h_i \in H^i(SO_{(2)}\,;\mathbb{Z}/2)$; toutes les relations montrées précédemment sont encore valables en remplaçant h_i par $\bar{h}_i$ et φ par $\bar{\varphi}$. La différence entre les deux situations vient du fait que dans $H^*(SO_{(2)}\,;\mathbb{Z}_{(2)})$ tout élément de torsion est d'ordre 2.

On considère β comme le bockstein associé à la suite exacte de coefficients $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{(2)} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_{(2)} \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$. Dans $H^{4k-1}(SO_{(2)}\,;\mathbb{Z}_{(2)})$ on a

$$\beta\bar{h}_{2k-1} = (\beta\bar{h}_1)^k \quad , \quad k = 2^p$$

en effet la réduction modulo 2 de ces deux classes est la même car

$$Sq^1\bar{h}_{2k-1} = \bar{h}_{2k} = (\bar{h}_2)^k \quad \text{et} \quad Sq^1\bar{h}_1 = \bar{h}_2$$

donc $\beta\bar{h}_{2k-1} - (\beta\bar{h}_1)^k$ est un double, c'est aussi une classe de torsion donc d'après la structure de la torsion de $H^*(SO_{(2)}\,;\mathbb{Z}_{(2)})$, elle est nulle.

<u>Remarque</u> 4.11.- Cette formule est fausse dans $H^*(SG_{(2)}\,;\mathbb{Z}_{(2)})$. Par exemple βh_3 et $(\beta h_1)^2$ sont distincts. En effet

$$(\beta h_1)^2 = \beta(h_1 \cup \beta h_1) = \beta(h_1 \cup Sq^1 h_1) = \beta(h_1^3)$$

donc si $\beta h_3 = (\beta h_1)^2$ on aurait $h_3 - h_1^3 = \rho_2(x)$ avec $x \in H^3(SG_{(2)}\,;\mathbb{Z}_{(2)})$. Considérons la composition $g : S^3 \xrightarrow{f} SO \longrightarrow SG_{(2)}$ où f correspond au fibré de Hopf stable sur S^4, ξ. On aurait encore $\Sigma^{-1}w_4(\xi) = g^*h_3 = g^*(h_3 - h_1^3)$ $= \rho_2(g^*x) = 0$ car x est de torsion. Impossible, puisque $w_4(\xi) \neq 0$.

PROPOSITION 4.12.- <u>Soient</u> M <u>une variété fermée de dimension</u> $4k-1$ (<u>avec</u> $k = 2^p$), t_o <u>et</u> t_1 <u>deux</u> $SG_{(2)}$-<u>trivialisations de</u> M <u>telles que</u> $t_1 = [J.\bar{\varphi}].t_o$ <u>avec</u> $\bar{\varphi} : M \longrightarrow SO_{(2)}$. <u>On a</u>

$$q^{t_1}(x) - q^{t_o}(x) = e(D^{-1}(\varphi^*\beta\bar{h}_1)^k, x) \quad .$$

<u>En particulier</u>, <u>si</u> $H_1(M,\mathbb{Z})$ <u>n'a pas de</u> 2-<u>torsion</u> $q^{t_1} = q^{t_o}$.

4.13.- Pour conclure ce chapitre, nous allons construire en toutes dimensions $4k-1$ avec $k = 2^p$ un exemple de variété M avec $H_1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$ et deux SO-trivialisations t_o et t_1 telles que $q^{t_o} \neq q^{t_1}$.

Soit $M^{4k-1} \longrightarrow \mathbb{R}P_{2k}$ le fibré en sphères associé à un fibré vectoriel ξ de dimension $2k$, non orientable sur $\mathbb{R}P_{2k}$. Nous considérons $\bar{\varphi} : M \longrightarrow SO_{(2)}$ comme la composée :

$$M \xrightarrow{p} \mathbb{R}P_{2k} \xrightarrow{i} \mathbb{R}P_{\infty} \xrightarrow{\delta} SO \longrightarrow SO_{(2)} \quad .$$

Pour que $(\bar{\varphi}^*\beta\bar{h}_1)^k \neq 0$ dans $H^{2k}(M,\mathbb{Z})$ il suffit que $p^* : H^{2k}(\mathbb{R}P_{2k};\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2k}(M;\mathbb{Z})$ soit injective. Or dans la suite spectrale de la fibration p nous n'avons que deux lignes :

$$E_2^{p,o} = H^p(\mathbb{R}P_{2k};\mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad E_2^{p,2k-1} = H^p(\mathbb{R}P_{2k};\tilde{\mathbb{Z}})$$

où le système de coefficients est tordu, donc par dualité de Poincaré $E_2^{p,2k-1} = H_{2k-p}(\mathbb{R}P_{2k};\mathbb{Z})$. Par raison de dimension, il ne peut y avoir qu'une différentielle non nulle $d_{2k} : E_{2k}^{o,2k-1} \longrightarrow E_{2k}^{2k,o}$, or

$$E_{2k}^{o,2k-1} = E_2^{o,2k-1} = H_{2k}(\mathbb{R}P_{2k};\mathbb{Z}) = 0$$

la suite spectrale est donc dégénérée et $p^* : H^*(\mathbb{R}P_{2k};\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(M;\mathbb{Z})$ est injective.

Reste à choisir le fibré ξ de sorte que M soit SO-trivialisable ; c'est possible de nombreuses façons. La plus simple est de prendre pour ξ le fibré normal d'un plongement de $\mathbb{R}P_{2k}$ dans $\mathbb{R}^{4k}$ et donc pour M le bord du voisinage tubulaire de ce plongement.

<u>Remarque</u> 4.14.- On verra plus loin(7.21) que si $\dim M \neq 3,7$ et si t_o et t_1 sont deux $SO_{(2)}$-trivialisations de M , on a

$$A(M,t_1) = A(M,t_o) \quad .$$

CHAPITRE V

CONSTRUCTION SUR UNE FLÈCHE

5.1.- On considère la situation suivante : M et L deux variétés fermées de dimension $4k-1$, $f : M \longrightarrow L$ une application continue, ξ un SG-fibré de base L et $b : \tau_M \longrightarrow \xi$ un SG-morphisme au-dessus de f .

Sur $T_{2k}(f)$ sous-groupe de torsion du groupe d'homologie $H_{2k}(f;\mathbb{Z})$ on a une forme bilinéaire symétrique e à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$: si on appelle $\partial : H_{2k}(f;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{2k-1}(M;\mathbb{Z})$ le connectant de la suite exacte d'homologie de l'application f , on pose $e(x,y) = e_M(\partial x, \partial y)$ où $e_M : T_{2k-1}(M) \otimes T_{2k-1}(M) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est la forme d'enlacement de la variété M (en général e est dégénérée).

La donnée supplémentaire du SG-morphisme b va nous permettre de construire une forme quadratique $q^b : T_{2k}(f) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ associée à la forme bilinéaire e . La construction est analogue à celle de la forme q^t du chapitre III, lorsque la variété M est munie d'une $SG_{(2)}$-trivialisation représentée par la $SG_{(2)}$-parallélisation (u,U) .

L'application $f : M \longrightarrow L$ va jouer le rôle de $u : M \longrightarrow E$, ξ (ou plutôt $f^*\xi$) le rôle de $\gamma(p,u)$ et b le rôle de $U : \tau_M \longrightarrow \gamma(p,u)$.

5.2.- Soient h le morphisme de Hurewicz $h : \Omega_{2k}(f) \longrightarrow H_{2k}(f;\mathbb{Z})$ et $\bar{\Omega}_{2k}(f) = h^{-1}T_{2k}(f)$, c'est le sous-groupe des classes de bordisme de diagrammes commutatifs :

$$(\alpha) \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, leftrightarrow] & L \\ X \arrow[r, "\varphi"] & M \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

où Y est une variété de dimension $2k$, φ un plongement (position générale) et l'image de $[Y]$ dans $H_{2k}(f;\mathbb{Z})$ est de torsion.

On considère le SG-fibré $\zeta = \nu_Y \oplus \psi^*\xi$ sur Y ; le SG-morphisme b induit

un morphisme $\zeta|X \longrightarrow \nu_\varphi$; une traverse a au plongement φ détermine donc une réduction à la dimension $2k-1$, $\Gamma(a)$, de $\zeta|X$.

On dit que a est une traverse adaptée au diagramme (α), si la réduction $\Gamma(a)$ qu'elle définit s'étend en une réduction à la dimension $2k-1$ de ζ sur Y.

LEMME 5.3.- La classe dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ du nombre rationnel $\frac{1}{2}E(\varphi,\varphi^a)$ ne dépend pas de la traverse adaptée a, et définit une application $\bar{q} : \bar{\Omega}_{2k}(f) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

La démonstration est tout à fait analogue à celle développée en détail au chapitre III aussi nous ne nous étendons pas.

De même, en utilisant le fait que l'homomorphisme de Hurewicz $h : \bar{\Omega}_{2k}(f) \longrightarrow T_{2k}(f)$ est surjectif sur la 2-composante, on montre comme au chapitre III :

THÉORÈME 5.4.- Il existe une et une seule forme quadratique

$$q^b : T_{2k}(f) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

associée à la forme bilinéaire e et telle que, pour tout diagramme (α) de 5.2 et toute traverse a adaptée à (α), on ait

$$q^b(h(\alpha)) \equiv \frac{1}{2}E(\varphi,\varphi^a) \quad , \quad (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}) \quad .$$

Remarque 5.5.- Si β est un SG-morphisme $\xi \longrightarrow \xi'$ au-dessus de 1_L, on peut considérer la donnée $(f,\xi',\beta.b)$. On a l'identité

$$q^{\beta.b} = q^b \quad .$$

5.6.- Nous nous limitons désormais au cas où f est une application de degré 1. Dans ce cas, l'homomorphisme de Gysin $f_! : H_p(L;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_p(M;\mathbb{Z})$ scinde la suite exacte d'homologie de l'application f, le morphisme $\partial : H_{p+1}(f) \longrightarrow H_p(M)$ est donc injectif et on a une décomposition en somme directe $H_{2k-1}(M) = H_{2k}(f) \oplus H_{2k-1}(L)$ et une décomposition en somme orthogonale $T_{2k-1}(M) = T_{2k}(f) \oplus T_{2k-1}(L)$. La forme bilinéaire e est alors non dégénérée et on peut calculer

$$A(f,b) = A(T_{2k}(f),q^b) \in \mathbb{Z}/8 \quad .$$

LEMME 5.7.- Soit $b : \tau_M \longrightarrow \xi$ un SG-morphisme au-dessus d'une application de degré 1 $f : M \longrightarrow L$. Il existe un SG-morphisme $\bar{b} : \tau_M \longrightarrow \tau_L$ au-dessus de f,

<u>le morphisme</u> $\bar{b}$ <u>est bien défini à équivalence près par la donnée</u> (ξ, b) . <u>De plus</u>

$$A(f,b) = A(f,\bar{b}) \quad .$$

<u>Démonstration</u>.- Considérons un SG-fibré η de base L et un SG-morphisme $\alpha : \xi \oplus \eta \longrightarrow \epsilon$ (on sait qu'il existe de tels couples) ; il existe alors un morphisme $b' : \nu_M \longrightarrow \eta$ tel que la composée $\alpha.(b \oplus b')$ est équivalente à la trivialisation canonique de $\tau_M \oplus \nu_M$.

Comme b' est au-dessus de f qui est de degré 1 , Tb' induit une S-réduction de l'espace de Thom L^{η^p} et donc [18] un SG-morphisme $\gamma : \nu_L \longrightarrow \eta$. La composée $\alpha.(1 \oplus \gamma)$ est une trivialisation de $\xi \oplus \nu_L$, il existe donc un morphisme $\beta : \xi \longrightarrow \tau_L$ tel que si $\delta : \tau_L \oplus \nu_L \longrightarrow \epsilon$ est la trivialisation canonique, alors $\delta.(\beta \oplus 1)$ est équivalent à $\alpha.(1 \oplus \gamma)$.

On vérifie que deux morphismes β construits comme ci-dessus sont équivalents ; on pose $\bar{b} : \tau_M \longrightarrow \tau_L$ comme étant la composée $\beta.b$, la classe d'equivalence de $\bar{b}$ ne dépend que du triple (f,ξ,b) .

La remarque 5.5. assure que $q^b = q^{\bar{b}}$ donc $A(f,b) = A(f,\bar{b})$.

CHAPITRE VI

RELATIONS ENTRE LA FORME D'INTERSECTION RATIONNELLE D'UNE VARIÉTÉ DE DIMENSION 4k ET LA FORME D'ENLACEMENT DE SON BORD OU LA FORME QUADRATIQUE D'ENLACEMENT DE SON BORD DANS LE CAS OÙ CE DERNIER EST $SG_{(2)}$ - TRIVIALISÉ

Nous reprenons, dans ce chapitre, les notations et la terminologie de l'appendice de [3].

6.1.- Soient N une variété de dimension $4k$ de bord ∂N, i et j les inclusions : $\partial N \longrightarrow N$ et $(N,\phi) \longrightarrow (N,\partial N)$, du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^{2k-1}(\partial N;\mathbb{Q}) \arrow[r] & H^{2k}(N,\partial N;\mathbb{Q}) \arrow[r] & H^{2k}(N;\mathbb{Q}) \arrow[r] & H^{2k}(\partial N;\mathbb{Q}) \\
H_{2k}(\partial N;\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[u, "\wr D"] & H_{2k}(N;\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[u, "\wr D"] & H_{2k}(N,\partial N;\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[u, "\wr D"] & H_{2k-1}(\partial N;\mathbb{Q}) \arrow[u, "\wr D"]
\end{tikzcd}$$

où lignes et colonnes sont exactes et où les flèches verticales sont les isomorphismes de Poincaré, nous déduisons la suite exacte :

$$H_{2k}(\partial N;\mathbb{Q}) \xrightarrow{i_*} H_{2k}(N;\mathbb{Q}) \longrightarrow H^{2k}(N;\mathbb{Q}) \xrightarrow{i^*} H^{2k}(\partial N;\mathbb{Q}) \quad .$$

Soit encore

$$H_{2k}(\partial N;\mathbb{Q}) \xrightarrow{i_*} H_{2k}(N;\mathbb{Q}) \xrightarrow{b} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}[H_{2k}(N;\mathbb{Q}),\mathbb{Q}] \xrightarrow{i_*^t} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}[H_{2k}(\partial N;\mathbb{Q}),\mathbb{Q}] .$$

La forme d'intersection rationnelle est représentée par l'application b, elle induit sur le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $E(N) = \mathrm{coker}\, i_*$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée à valeurs dans $\mathbb{Q}$ qui est la "régularisée" en un sens évident de celle définie sur $H_{2n}(N;\mathbb{Q})$.

6.2.- Considérons deux variétés N_o^{4k} et N_1^{4k} de bord commun M^{4k-1} et la variété fermée $R^{4k} = (-N_o) \underset{M}{\cup} N_1$, en notant $[E]$ la classe de Witt d'un b-espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, E, nous avons :

LEMME 6.2.- (Novikov). Dans $W(\mathbb{Q})$:

$$[E(R)] = [E(N_1)] - [E(N_o)] \quad .$$

Démonstration.- Soit I l'image de : $H_{2k}(M;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_{2k}(R;\mathbb{Q})$, on vérifie que

le sous-module I est contenu dans son orthogonal et que le b-espace vectoriel $I^{\perp}/I$ est isométrique à la somme orthogonale $(-E(N_o)) \oplus E(N_1)$ (le symbole $(-E(N_o))$ désigne le b-espace vectoriel obtenu en changeant le signe de la forme bilinéaire défini sur $E(N_o)$).

Comme le b-espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, $E(R)$, est le tensorisé par $\mathbb{Q}$ du b-module sur $\mathbb{Z}$, $H_{2k}(R;\mathbb{Z})$, le lemme précédent a pour conséquence, outre la relation entre les signatures de N_o, N_1 et R, l'égalité dans le groupe $W(\mathbb{Q};\mathbb{Z})$:

$$\delta([E(N_o)]) = \delta([E(N_1)]) \quad .$$

L'élément $\delta([E(N)])$ de $W(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ ne dépend donc que du bord ∂N de la variété N, nous nous proposons de préciser cette dépendance.

6.3.- Nous avons vu (chapitre II) que le sous-groupe de torsion de $H_{2k-1}(\partial N;\mathbb{Z})$, $T_{2k-1}(\partial N)$, est un e-module sur $\mathbb{Z}$. Notons encore $[C]$ la classe dans $W(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ d'un e-module C.

PROPOSITION 6.3.- (Comparer [3-4.5]). <u>La forme d'intersection rationnelle d'une variété N^{4k} et la forme d'enlacement de son bord sont reliées par la formule dans</u> $W(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$:

$$\delta([E(N)]) + [T_{2k-1}(\partial N)] = 0 \quad .$$

<u>Démonstration</u>.- Soit P le réseau sur $E(N)$ image de la composée :

$$H_{2k}(N;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{2k}(N;\mathbb{Q}) \longrightarrow E(N) \quad .$$

Comme $P.P \subset \mathbb{Z}$ le réseau P est un $\tilde{b}$-module sur $\mathbb{Z}$ et la classe dans $W(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ du e-module coker P est $\delta([E(N)])$.

Considérons d'autre part le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & H^{2k}(\partial N;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^{2k+1}(N,\partial N;\mathbb{Z}) \\ & & \uparrow \wr D & & \uparrow \wr D \\ H_{2k}(N,\partial N;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\partial} & H_{2k-1}(\partial N;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_*} & H_{2k-1}(N;\mathbb{Z}) \end{array} \quad .$$

En prenant les composantes de torsion et en utilisant le théorème des coefficients

universels pour la cohomologie nous obtenons :

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{T_{2k-1}(\partial N)} \arrow[r, "\widehat{\mathrm{Tors}(\partial)}"] & \widehat{T_{2k}(N,\partial N)} \\
T_{2k}(N,\partial N) \arrow[r, "\mathrm{Tors}(\partial)"] & T_{2k-1}(\partial N) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "\mathrm{Tors}(i_*)"] & T_{2k-1}(N) \arrow[u, "\wr"]
\end{tikzcd} \quad .$$

(Nous avons noté $\wedge$ le foncteur de la catégorie des groupes abéliens finis dans elle-même $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\ \ ,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et le symbole $T_\ell(\ \ )$ est une abréviation du symbole $\mathrm{Tors}[H_\ell(\ \ ;\mathbb{Z})]$).

La flèche verticale de gauche est l'isomorphisme associé à la forme d'enlacement de $T_{2k-1}(\partial N)$.

Appelons I le sous-module $\mathrm{Im}[\mathrm{Tors}(\partial)]$ de $T_{2k-1}(\partial N)$, le diagramme ci-dessus montre :

$$I^{\perp} = \ker[\mathrm{Tors}(i_*)] \quad \text{et} \quad I \subset I^{\perp} \quad .$$

La proposition 6.3 est une conséquence de [3-A-1.12] et du lemme suivant :

LEMME 6.4.- <u>Les deux</u> e-<u>modules</u> coker P <u>et</u> $I^{\perp}/I$ <u>sont anti-isométriques</u>.

<u>Démonstration</u>.- Dans le diagramme ci-après, que l'on obtient à l'aide de la dualité de Poincaré et des coefficients universels et où le symbole $L_\ell(\ \ )$ est une abréviation du symbole $H_\ell(\ \ ;\mathbb{Z})/\mathrm{Tors}[H_\ell(\ \ ;\mathbb{Z})]$, les colonnes et la ligne du milieu sont exactes.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
T_{2k}(N) \arrow[r] \arrow[d] & T_{2k}(N,\partial N) \arrow[r] \arrow[d] & T_{2k-1}(\partial N) \arrow[r] \arrow[d] & T_{2k-1}(N) \arrow[d] \\
H_{2k}(N) \arrow[r] \arrow[d] & H_{2k}(N,\partial N) \arrow[r] \arrow[d] & H_{2k-1}(\partial N) \arrow[r] \arrow[d] & H_{2k-1}(N) \arrow[d] \\
L_{2k}(N) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}[L_{2k}(N),\mathbb{Z}] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}[L_{2k}(\partial N),\mathbb{Z}] \arrow[r] \arrow[d] & L_{2k-1}(N) \arrow[d] \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

Nous pouvons considérer chaque ligne comme un complexe différentiel et le diagramme comme une suite exacte courte de complexes différentiels, il en résulte un isomorphisme:

$$\mathrm{Ker}\ \gamma/\mathrm{Im}\ \beta \longrightarrow I^{\perp}/I \quad .$$

Le premier sous-module est isomorphe au conoyau de l'homomorphisme $\tilde{b} : P \longrightarrow \mathrm{Hom}(P,\mathbb{Z})$ associé à la structure de $\tilde{b}$-module de P , or la définition du réseau dual $P^{\#}$ donne un isomorphisme $P^{\#} \longrightarrow \mathrm{Hom}(P,\mathbb{Z})$ tel que le triangle ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\tilde{b}"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Hom}(P,\mathbb{Z}) \\ P^{\#} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

nous avons donc un isomorphisme φ :

$$P^{\#}/P \longrightarrow I^{\perp}/I \quad .$$

Pour la démonstration que φ est une anti-isométrie, nous renvoyons à [3 - chap. IV], cette démonstration utilise essentiellement le point 2 du lemme 2.7.

<u>Remarque</u> 6.5.- Il sera commode par la suite de considérer le réseau P comme le quotient du groupe $H_{2k}(N)$ par le sous-groupe engendré par $T_{2k}(N)$ et $i_*[H_{2k}(\partial N)]$ et le réseau dual P comme le quotient $\partial^{-1}[T_{2k-1}(\partial N)]/T_{2k}(N,\partial N)$ du sous-groupe $\partial^{-1}[T_{2k-1}(\partial N)]$ de $H_{2k}(N,\partial N)$. L'inclusion $P \hookrightarrow P^{\#}$ est alors induite par l'homomorphisme $j_* : H_{2k}(N) \longrightarrow H_{2k}(N,\partial N)$, l'accouplement : $P \otimes P \longrightarrow \mathbb{Z}$ par la forme d'intersection entière sur $H_{2k}(N)$, et l'accouplement : $P^{\#} \otimes P^{\#} \longrightarrow \mathbb{Q}$ par celui décrit en 2.11.

Nous supposons maintenant que le bord ∂N est muni d'une $SG_{(2)}$-trivialisation t Le b-espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, $E(N)$, est aussi un q-espace vectoriel, $T_{2k-1}(\partial N)$ est un qe-module (chap. III), quel rapport existe-t-il entre les classes de Witt de $E(N)$ et $T_{2k-1}(\partial N)$, $[E(N)]$ et $[T_{2k-1}(\partial N)]$ respectivement dans $WQ(\mathbb{Q})$ et $WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$?

Nous nous bornons à donner la réponse dans le cas où la classe de Wu relative, v^t_{2k} , est la réduction modulo 2 d'une classe entière V de $H^{2k}(N,\partial N;\mathbb{Z})$. Pour

ceci, nous aurons besoin du lemme algébrique ci-dessous.

6.6.- Soient E un q-espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ et P un réseau sur E tel que $P.P \subset \mathbb{Z}$, P est un $\tilde{b}$-module sur $\mathbb{Z}$ et $P^{\#}/P$ un e-module sur $\mathbb{Z}$.

Soit u un élément de P tel que $x.x \equiv u.x \pmod 2$ (l'existence d'un tel élément est immédiate si $\mathbb{F}_2 \otimes P$ est non dégénérée, dans le cas contraire il suffit de décomposer $\mathbb{F}_2 \otimes P$ en la somme orthogonale de son noyau et d'un b-espace vectoriel sur $\mathbb{F}_2$ pour s'en convaincre). L'application :

$$P^{\#} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$\xi \longrightarrow \frac{1}{2}(\xi.\xi - u.\xi)$$

induit une application $q_u : P^{\#}/P \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui est une forme quadratique associée à la forme d'enlacement du e-module $P^{\#}/P$.

Soient C_u le qe-module $(P^{\#}/P , q_u)$, $[E]$ et $[C_u]$ les classes de E et C_u dans $WQ(\mathbb{Q})$ et $WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ respectivement, δ l'homomorphisme "conoyau" : $WQ(\mathbb{Q}) \longrightarrow WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$. L'application : $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow \frac{1}{2}x^2$ est une forme quadratique, qui fait de $\mathbb{Q}$ un q-espace vectoriel que nous notons $\langle 1 \rangle$ (c'est la notation, correspondant au b-espace vectoriel sous-jacent, de [10]).

FORMULE 6.7.- $\delta([E]) = [C_u] + (u.u)\delta(\langle 1 \rangle)$.

<u>Démonstration</u>.- Soit P_o le sous-module de P formé des éléments x tels que $x.x = 0 \pmod 2$, $q(P_o)$ est contenu dans $\mathbb{Z}$ et $P_o^{\#}/P_o$ est un qe-module dont la classe dans $WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ est $\delta([E])$.

Considérons la somme orthogonale de qe-modules :

$$C = P_o^{\#}/P_o \oplus (-C_u) .$$

Soient s et s' les surjections canoniques : $P_o^{\#} \longrightarrow P_o^{\#}/P_o$ et $P^{\#} \longrightarrow P^{\#}/P$, le sous-module $J = \{(s(\xi),s'(\xi)) ; \xi \in P^{\#}\}$ de C est égal à son orthogonal (voir [3-A-1.9]).

Pour tout $z \in J$, nous avons :

$$q(z) = [s(\tfrac{u}{2}), 0] \cdot z \quad .$$

Or

$$q[(s(\tfrac{u}{2}), 0)] = \frac{u \cdot u}{8} \quad .$$

La démonstration s'achève en appliquant [3-A-2.8 et A-2.9].

6.8.- Nous reprenons les notations de 6.3.

Soit $x \in I \subset T_{2k-1}(\partial N)$, il existe $y \in T_{2k}(N, \partial N)$ tel que $x = \partial y$ et nous avons d'après 3.13 :

$$\begin{aligned} q^t(x) &= \tfrac{1}{2}\langle v^t_{2k}, y\rangle \\ &= \text{classe dans } \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ de } \tfrac{1}{2}\langle V, y\rangle \\ &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Le sous-module I du qe-module $T_{2k-1}(\partial N)$ est donc isotrope au sens quadratique et la classe dans $WQ(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ du qe-module $I^{\perp}/I$ est celle de $T_{2k-1}(\partial N)$ (version quadratique de [3-A-1.12]).

La classe d'homologie $D^{-1}V \in H_{2k}(N ; \mathbb{Z})$ a la propriété suivante :

$\forall z \in H_{2k}(N;\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} (D^{-1}V).z &= \langle V \cup Dz, [N]\rangle \\ &\equiv \langle v^t_{2k} \cup Dz, [N]\rangle \quad (\text{mod } 2) \\ &\equiv \langle (j^* v^t_{2k}) \cup Dz, [N]\rangle \quad (\text{mod } 2) \\ &\equiv \langle v_{2k}(N) \cup Dz, [N]\rangle \quad (\text{mod } 2) \\ &\equiv \langle Dz \cup Dz, [N]\rangle \quad (\text{mod } 2) \\ &\equiv z.z \quad (\text{mod } 2) \end{aligned}$$

Soit u l'image de $D^{-1}V$ dans P , nous avons donc pour tout élément ζ de P la congruence (voir 6.5) :

$$u.\zeta \equiv \zeta.\zeta \quad (\text{mod } 2)$$

et la formule 3.13 s'écrit (voir 6.5) :

pour tout $\eta \in P^{\#}$, $\quad \frac{1}{2}\eta.\eta - \frac{1}{2}u.\eta \equiv -q^t[\varphi(\eta)] \quad (\text{mod } \mathbb{Z})$.

Il en résulte en appliquant 6.7 :

PROPOSITION 6.9.- Si la classe v^t_{2k} est la réduction modulo 2 d'une classe entière V, nous avons dans $WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$:

$$\delta([E(N)]) + [T_{2k-1}(\partial N)] = \langle V \cup V, [N] \rangle \delta(\langle 1 \rangle) \quad .$$

Nous notons $I(N)$ la signature de la variété N. En utilisant la formule de Milgram (voir appendice) et la proposition 6.9, nous obtenons (comparer [6]) :

COROLLAIRE 6.10.- Si la classe v^t_{2k} est la réduction modulo 2 d'une classe entière V, la signature modulo 8 de la variété N se calcule par la formule dans $\mathbb{Z}/8$:

$$I(N) + A(\partial N, t) = \langle V \cup V, [N] \rangle \quad .$$

COROLLAIRE 6.11.- Si la $SG_{(2)}$-trivialisation, t, de ∂N s'étend en une $SG_{(2)}$-trivialisation de N nous avons :

dans $WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$, $\delta([E(N)]) + [T_{2k-1}(\partial N)] = 0$

dans $\mathbb{Z}/8$, $I(N) + A(\partial N, t) = 0$.

Démonstration.- Ici $v^t_{2k} = 0$ et nous prenons $V = 0$.

Remarque.- Reprenons les notations du lemme 6.2 et supposons que M est muni d'une $SG_{(2)}$-trivialisation qui s'étend sur N_o et N_1 , la variété R est alors $SG_{(2)}$-trivialisée et le groupe $H_{2k}(R;\mathbb{Z})$ est un q-module sur $\mathbb{Z}$ $(v_{2k}(R) = 0)$. Nous déduisons du lemme 6.2 (l'oubli $WQ(\mathbb{Q}) \longrightarrow W(\mathbb{Q})$ est un isomorphisme) que l'image dans $WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ de $[E(N)]$ ne dépend que du bord $SG_{(2)}$-trivialisé, ∂N , le corollaire 6.11 précise cette dépendance.

6.12.- Nous dirons que deux variétés sans bord $SG_{(2)}$-trivialisées (M_o^{4k-1}, t_o) et (M_1^{4k-1}, t_1) sont cobordantes par un $H_{\mathbb{Q}}$-cobordisme $SG_{(2)}$-trivialisé, s'il existe N , $H_{\mathbb{Q}}$-cobordisme entre M_o et M_1 et une $SG_{(2)}$-trivialisation de N qui induit t_o et t_1 sur M_o et M_1 .

COROLLAIRE 6.12.- Si deux variétés $SG_{(2)}$-trivialisées (M_o^{4k-1}, t_o) et (M_1^{4k-1}, t_1) sont cobordantes par un $H_{\mathbb{Q}}$-cobordisme $SG_{(2)}$-trivialisé, les classes dans $WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$

<u>des</u> qe-<u>modules</u> $T_{2k-1}(M_o)$ <u>et</u> $T_{2k-1}(M_1)$ <u>sont égales</u>.

<u>Démonstration</u>.- Nous appliquons 6.11, dans le cas ci-dessus $E(N)$ est le q-espace vectoriel sur Q nul et le qe-module $T_{2k-1}(\partial N)$ est la somme orthogonale des qe-modules $T_{2k-1}(M_1)$ et $(-T_{2k-1}(M_o))$.

CHAPITRE VII

INVARIANT λ ET APPLICATIONS

7.1.- Soit M une variété fermée de dimension $4k-1$, munie d'une SO-trivialisation t. La variété M est un bord, choisissons une variété N dont M est le bord ; la SO-trivialisation t fournit une classe d'isomorphisme de SO-fibrés, τ^t, sur N/M. On note L la classe de Hirzebruch et $I(N)$ la signature de N.

LEMME 7.1.- Le nombre rationnel

$$I(N) - \langle L(\tau^t), [N] \rangle$$

est indépendant du choix de N.

Démonstration.- Considérons deux variétés N_o et N_1 dont M est le bord et la variété fermée $R = (-N_o) \underset{M}{\cup} N_1$. En représentant la SO-trivialisation par une SO-parallélisation de M, nous obtenons deux SO-fibrés $\hat{\tau}_o$ et $\hat{\tau}_1$ sur N_o/M et N_1/M ; nous avons :

$$\langle L(\tau_R), [R] \rangle = \langle L(\tau_1), [N_1] \rangle - L(\hat{\tau}_o), [N_o] \rangle.$$

D'autre part d'après 6.2 :

$$I(R) = I(N_1) - I(N_o) .$$

La démonstration s'achève en appliquant la formule d'Hirzebruch à la variété fermée R.

7.2.- Nous notons $\lambda(M,t)$ l'élément de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ représenté par

$$\frac{1}{8}\left(I(N) - \langle L(\tau^t), [N] \rangle\right) + \frac{A(M,t)}{8} .$$

LEMME 7.3.- Si la variété M, munie de sa SO-trivialisation t, est le bord d'une variété SO-trivialisée, l'invariant $\lambda(M,t)$ est nul.

Démonstration.- Dans ce cas $\langle L(\tau^t), [N] \rangle = 0$ et d'après 6.11 :

$$I(N) \equiv -A(M,t) \quad (\text{mod. } 8) .$$

Comme λ vérifie $\lambda((M_o,t_o) \amalg (M_1,t_1)) = \lambda(M_o,t_o) + \lambda(M_1,t_1)$ nous avons défini un homomorphisme (que nous notons encore λ) du groupe de cobordisme

SO-trivialisé Ω^{fr}_{4k-1} dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Remarque 7.4.- Soit M^{4k-1} une sphère d'homotopie SO-trivialisée qui borde une variété N^{4k} ; en faisant correspondre à la classe de M dans le groupe θ^{fr}_{4k-1} des sphères d'homotopie SO-trivialisées à h-cobordisme SO-trivialisé près, le nombre rationnel $I(N) - \langle L(\tau^t), [N] \rangle$, on définit un homomorphisme $\alpha : \theta^{fr}_{4k-1} \to \mathbb{Q}$ tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \theta^{fr}_{4k-1} & \xrightarrow{\text{oubli}} & \Omega^{fr}_{4k-1} \\ \downarrow \alpha/8 & & \downarrow \lambda \\ \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

est commutatif.

Considérons le groupe P_{4k} d'obstruction à la chirurgie de Kervaire-Milnor et l'homomorphisme de signature $\sigma : P_{4k} \to \mathbb{Z}$, le diagramme précédent se complète en :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & P_{4k} & \to & \theta^{fr}_{4k-1} & \to & \Omega^{fr}_{4k-1} & \to & 0 \\ & & \downarrow \sigma/8 & & \downarrow \alpha/8 & & \downarrow \lambda & & \\ 0 & \to & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \to & 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes et la flèche $\sigma/8$ un isomorphisme. Quand on identifie le groupe $\mathrm{Ext}(\Omega^{fr}_{4k-1}, P_{4k})$ avec le groupe $\mathrm{Hom}(\Omega^{fr}_{4k-1}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ l'extension $0 \to P_{4k} \to \theta^{fr}_{4k-1} \to \Omega^{fr}_{4k-1} \to 0$ correspond à l'homomorphisme λ .

7.5.- Nous nous proposons maintenant d'exprimer l'invariant λ à l'aide de l'invariant d'Adams $e_{\mathbb{C}}$ [2].

Représentons t par une SO-parallélisation ; une SO-parallélisation de M fait de M une variété stablement presque complexe ; soit maintenant N une variété stablement presque complexe dont M munie de cette structure est le bord. La SO-parallélisation de M donne un U-fibré $\hat{\tau}_c$ sur N/M , la classe de

U-isomorphisme de cet U-fibré ne dépend que de t, nous la notons τ_c^t. La classe d'isomorphisme du SO-fibré sous-jacent à $\hat{\tau}_c$ est τ^t.

LEMME 7.6.- <u>Il existe une classe</u> $C \in H^{4k}(BU\,;\mathbb{Q})$ <u>telle que</u> $\lambda(M,t)$ <u>soit la réduction dans</u> $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ <u>du nombre rationnel</u>

$$<C(\tau_c^t),[N]>.$$

<u>Démonstration</u>.- Soient r l'application d'oubli $BU \to BO$ et V_k une classe de $H^{2k}(BU\,;\mathbb{Z})$ dont la réduction mod. 2 est r^*v_{2k}. Alors $v_{2k}^t = v_{2k}(\tau^t) = \rho_2[V_k(\tau_c^t)]$. D'après 6.10, nous avons l'égalité dans $\mathbb{Z}/8$:

$$I(N) + A(M,t) =< V_k(\tau_c^t) \cup V_k(\tau_c^t),[N] .$$

Nous prenons $C = -\frac{1}{8}\, r^* L_k + \frac{1}{8}\,(V_k \cup V_k)$.

COROLLAIRE 7.7.- <u>L'invariant</u> λ <u>est nul sur le noyau de l'invariant d'Adams</u> $e_{\mathbb{C}}$.

<u>Démonstration</u>.- Si $e_{\mathbb{C}}(M,t) = 0$, il existe une variété fermée stablement presque complexe N' qui a les mêmes nombres de Chern que N [8], en particulier $< C(\tau_c^t), [N] > =< C(\tau_{N'}), [N'] >$. Or d'après 6.10, pour une variété fermée stablement presque complexe le nombre $< C(\tau_{N'}), [N']>$ est entier.

THÉORÈME 7.8.- <u>L'invariant</u> λ <u>s'exprime à l'aide de l'invariant d'Adams</u> $e_{\mathbb{C}}$ <u>par la formule</u> :

$$\lambda = 2^{2k-2}\,(2^{2k-1} - 1)\, e_{\mathbb{C}} .$$

<u>Démonstration</u>.- Le groupe Ω^{fr}_{4k-1} se décompose en la somme directe ([2] et la démonstration de la conjecture d'Adams [12],[16]) : $\mathrm{Im}\, J \oplus \mathrm{Ker}\, e'_{\mathbb{R}}$ où J est l'homomorphisme de Hopf- Whitehead : $\pi_{4k-1}(SO) \to \Omega^{fr}_{4k-1}$ et $e'_{\mathbb{R}}$ est l'invariant introduit par Adams dans [2]. On a $e_{\mathbb{C}} = a_k e'_{\mathbb{R}}$ où $a_k = 1$ si k est pair et $a_k = 2$ si k est impair et donc dans tous les cas $\mathrm{Ker}\, e'_{\mathbb{R}} \subset \mathrm{Ker}\, e_{\mathbb{C}}$. D'après 7.7, il suffit de comparer λ et $e_{\mathbb{C}}$ sur l'image de J. Soient $\alpha \in \pi_{4k-1}(SO)$ et ξ_α la classe d'isomorphisme de SO-fibrés sur S^{4k} qui lui est associée, nous

notons $p_k(\alpha)$ le nombre entier $< p_k(\xi_\alpha), [S^{4k}] >$. Choisissons le générateur α_o de $\pi_{4k-1}(SO)$ tel que $p_k(\alpha_o) = (-1)^k a_k(2k-1)!$, nous avons dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$:

$$\lambda(J\alpha_o) = -\frac{1}{8}\frac{2^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!} B_k(-1)^k a_k(2k-1)! = 2^{2k-2}(2^{2k-1}-1)(-1)^{k-1}\frac{a_k B_k}{4k} .$$

Or [2] $\qquad e_{\mathbb{R}}(J\alpha_o) = (-1)^{k-1}\frac{B_k}{4k}$

soit encore $\qquad e_{\mathbb{C}}(J\alpha_o) = (-1)^{k-1}\frac{a_k B_k}{4k}$.

<u>Remarque</u> 7.9.- On vérifie, par inspection, que la classe $C - 2^{2k-2}(2^{2k-1}-1)T_{2k} \in H^{4k}(BU;\mathbb{Q})$ (T_{2k} désigne la classe de Todd de degré $4k$) est décomposable. En utilisant la définition de $e_{\mathbb{C}}$ de Conner-Floyd [8] , il en résulte que la composition :

$$\pi_{4k-1}(U) \to \pi_{4k-1}(SO) \xrightarrow{J} \Omega^{fr}_{4k-1} \xrightarrow{\lambda - 2^{2k-2}(2^{2k-1}-1)e_{\mathbb{C}}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est nulle. Comme le conoyau de la première flèche est $\mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z}$, cela redémontre le Théorème précédent si k est pair et pourra permettre au lecteur méfiant de vérifier dans tous les cas l'exactitude du signe qui intervient dans 7.8.

7.10.- Décomposons les invariants λ et $e_{\mathbb{C}}$ en partie paire et partie impaire $\lambda = \lambda^o + \lambda^1$ et $e_{\mathbb{C}} = e^o_{\mathbb{C}} + e^1_{\mathbb{C}}$. Les invariants λ^o et $e^o_{\mathbb{C}}$ sont à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_{(2)} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(2)}$ et λ^1 et $e^1_{\mathbb{C}}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

Un théorème de Stong [15, p. 215] montre que 8λ coïncide avec $-e^1_{\mathbb{C}}$, soit encore $8\lambda^o = 0$ et $8\lambda^1 = -e^1_{\mathbb{C}}$ ou $\lambda^1 = -\frac{1}{8}e^1_{\mathbb{C}}$.

Redémontrons ces résultats. La classe L de Hirzebruch est dans l'image de l'homomorphisme $H^*(BO;\mathbb{Z}_{(2)}) \to H^*(BO;\mathbb{Q})$; le nombre rationnel $L^t = < L(\tau^t), [N] >$ est donc dans $\mathbb{Z}_{(2)}$ ce qui montre que $8\lambda^o = 0$.

Soit d^1_k le plus grand diviseur impair de $\mathrm{den}\left(\frac{B_k}{k}\right)$, les calculs d'Adams [2] montrent que $d^1_k e^1_{\mathbb{C}} = 0$. Or d'après le théorème de Von Staudt [1] :

$$2^{2k} - 1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ d^1_k)$$

d'où $\qquad (2^{2k}-1)^2 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ d^1_k)$

$$8(2^{2k-2}(2^{2k-1} - 1)) + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } d_k^1)$$

et en utilisant 7.8 : $\quad 8\lambda^1 = -e_{\mathbb{C}}^1$.

7.11.- Toujours d'après Adams [2] , on a, en notant $v_2(k)$ la valuation 2-adique de l'entier k :

$$a_k^{-1}\, 2^{3+v_2(k)}\, e_{\mathbb{C}}^o = 0 \ .$$

Nous en déduisons à l'aide de 7.8 :

Pour $k = 1$ ou 2 , $\qquad 4\,\lambda_o = 0$

(on vérifie par inspection que $2\,\lambda_o$ est l'invariant de Hopf).

Pour $k \geqslant 3$, comme $2k - 2 \geqslant 3 + v_2(k)$: $\quad \lambda_o = 0$

il en résulte, en notant $\rho_8 : \mathbb{Z}_{(2)} \to \mathbb{Z}/8$ la réduction mod. 8 .

THÉORÈME 7.11.- <u>Dès que</u> $k \geqslant 3$ <u>la signature d'une variété</u> N^{4k} <u>dont le bord est SO-trivialisé vérifie la congruence</u>

$$I(N) \equiv \rho_8(L^t) - A(\partial N, t) \qquad (\text{mod. } 8) \ .$$

7.12.- <u>Extension aux</u> $SO_{(2)}$-<u>trivialisations</u>.

Soit M^{4k-1} une variété sans bord munie d'une $SO_{(2)}$-trivialisation t (i.e. M est $E^{\mathbb{Z}_{(2)}}$-orientée au sens de [3]). Comme ses classes de Stiefel-Whitney sont nulles la variété M borde ; soit N^{4k} une variété dont elle est le bord. On a défini dans 1.9 des classes de Pontryagin relatives $p_i \in H^{4i}(N,M\,;\mathbb{Z}_{(2)})$, nous pouvons donc étendre la définition du nombre rationnel L^t dans le cas où t n'est plus qu'une $SO_{(2)}$-trivialisation ; nous avons toujours $L^t \in \mathbb{Z}_{(2)}$. Comme la $SO_{(2)}$-trivialisation induit une $SG_{(2)}$-trivialisation, considérons l'élément de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{8}\,(I(N) - L^t) + \frac{A(M,t)}{8} \ .$$

Il ne dépend pas du choix de N , en effet le lemme 7.1 se généralise au cas où M est seulement $E^{\mathbb{Q}}$-orientée (terminologie de [3]). Par le même argument qu'en 7.2,

il ne dépend que de la classe de M dans le groupe de cobordisme des variétés $SO_{(2)}$-trivialisées, $\Omega^{\mathbb{Z}_{(2)}}_{4k-1}$ (notation de [3] où les groupes Ω_n sont déterminés). Nous avons donc défini un homomorphisme μ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Omega^{fr}_{4k-1} \arrow[rr] \arrow[dr, "\lambda"'] & & \Omega^{\mathbb{Z}_{(2)}}_{4k-1} \arrow[dl, "\mu"] \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale est l'homomorphisme d'oubli.

En tensorisant ce diagramme par $\mathbb{Z}_{(2)}$, nous obtenons

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{(2)} \otimes \Omega^{fr}_{4k-1} \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathbb{Z}_{(2)} \otimes \lambda"'] & & \mathbb{Z}_{(2)} \otimes \Omega^{\mathbb{Z}_{(2)}}_{4k-1} \arrow[dl, "\mathbb{Z}_{(2)} \otimes \mu"] \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(2)} & \end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale est un isomorphisme [3, ch. 5] . Or pour $k \geqslant 3$, le morphisme $\mathbb{Z}_{(2)} \otimes \lambda$ est nul, il en est donc de même de $\mathbb{Z}_{(2)} \otimes \mu$. Il en résulte que le th. 7.11 reste vrai si nous remplaçons "... SO-trivialisation..." par "... $SO_{(2)}$-trivialisation..." .

7.13. <u>Remarque</u>.- Nous donnerons en 8.15 une interprétation du morphisme $\mu \in \mathrm{Hom}(\Omega^{\mathbb{Z}_{(2)}}_{4k-1}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ analogue à celle de 7.4.

7.14.- <u>Extension au cas des variétés</u> PL .

Soit M^{4k-1} une variété PL orientée compacte sans bord, on considère son microfibré tangent τ_M comme un SG-fibré et soit $t \in TSG_{(2)}(\tau_M)$. Nous allons voir, rapidement. comment modifier les arguments des chapitres précédents, pour construire une forme quadratique $q^t : T_{2k-1}(M) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ associée à la forme d'enlacement.

On peut, sans restreindre la généralité, supposer que $k \geqslant 2$. Soit $f : X^{2k-1} \to M^{4k-1}$ un plongement (forcément localement plat puisque la codimension $2k \geqslant 4$). Soit ν_f le block bundle normal de ce plongement, $E(\nu_f)$ son espace total identifié avec un voisinage régulier de $f(X)$. Soit $a : X \to E(\nu_f)$

une section sphérique de ν_f au sens de Rourk -Sanderson ([13], ch. 4) (il en existe car on est dans le domaine stable).

On considère le plongement $f^a : X \to M$ obtenu en composant a avec l'identification de $E(\nu_f)$ avec un voisinage régulier de $f(X)$, on a $f(X) \cap f^a(X) = \emptyset$.

D'autre part, d'après [13] la section sphérique a définit une réduction de ν_f à la dimension $2k - 1$ (dans la catégorie des block-bundles) et en considérant ν_f comme un $SG(2k)$ fibré une réduction de ν_f à la dimension $2k - 1$ comme considérée en 3.1.

Soient N^{4k} une variété PL de bord ∂N, $F : Y^{2k} \to N$ une immersion localement plate, en position générale et dont la restriction à $X = \partial Y$ est un plongement $f : X \to \partial N$.

Soit a une section sphérique de ν_f. Comme on est dans le domaine métastable les obstructions géométriques à étendre a en une section de ν_F sont nulles et la seule obstruction est l'obstruction homotopique

$$c(a) \in H^{2k}(Y, X ; \pi_{2k-1}(S^{2k-1})) = H^{2k}(Y, X ; \mathbb{Z}) .$$

On peut alors démontrer comme en 2.14 la formule

$$y.y + E(f,f^a) = 2\sigma(F) + \langle c(a), [Y] \rangle .$$

Le reste de la construction de la forme q^t se répète alors mot pour mot. On a en particulier pour toute variété PL M^{4k-1} et tout $t \in TSG_{(2)}(\tau_M)$ un invariant $A(M,t) \in \mathbb{Z}/8$.

7.15.- Par analogie avec [3], on définit $\Omega_n^\Lambda(PL)$ comme le groupe de cobordisme E^Λ-orienté de variétés PL E-orientées de dimension n, où maintenant $E^\Lambda \to BSPL$ est la fibre de la Λ localisation : $BSPL \to BSPL$.

THÉORÈME 7.15.- <u>Pour</u> $n \geqslant 1$:

(i) $\Omega_n^\Lambda(PL)$ <u>est un groupe fini</u>.

(ii) <u>L'homomorphisme d'oubli</u> $\Omega_n^{\mathbb{Z}}(PL) \to \Omega_n^\Lambda(PL)$ <u>induit un isomorphisme</u>

$$\Lambda \otimes \Omega_n^{\mathbb{Z}}(PL) \to \Lambda \otimes \Omega_n^{\Lambda}(PL) .$$

(iii) <u>L'homomorphisme d'oubli</u> $\Omega_n^{fr} = \Omega_n^{\mathbb{Z}}(diff) \to \Omega_n^{\mathbb{Z}}(PL)$ <u>est un isomorphisme</u>.

<u>Démonstration</u>.- Le groupe $\Omega_n^{\Lambda}(PL)$ se calcule à l'aide de l'isomorphisme de Thom-Pontryagin valable dans la catégorie PL . Les parties (i) et (ii) résultent alors de calculs homotopiques identiques à ceux de ([3] ch. 5).

La partie (iii) résulte du théorème de lissage de Cairns-Hirsh-Milnor

7.16.- Nous allons définir un morphisme

$$\mu : \Omega_{4k-1}^{\mathbb{Z}(2)}(PL) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .$$

Soit M^{4k-1} une variété PL fermée et t une $SPL_{(2)}$-trivialisation de τ_M (ou ce qui est la même chose une $E^{\mathbb{Z}(2)}$-orientation).

Soit N^{4k} une variété PL telle que ∂N soit formé de m exemplaires de M . A partir des classes de Thom-Hirzebruch $L_i \in H^{4i}(BPL ; \mathbb{Q})$ et de la $SPL_{(2)}$-trivialisation t , on définit comme en 1.9 $L^t(N) \in \mathbb{Q}$.

L'extension manifeste du lemme 7.1 montre que $\frac{1}{m}(I(N) - L^t(N))$ ne dépend que de (M,t) et comme en 7.3 :

$$\frac{1}{8m}(I(N) - L^t(N)) + \frac{A(M,t)}{8} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

ne dépend que de la classe de (M,t) dans $\Omega_{4k-1}^{\mathbb{Z}(2)}(PL)$.

Comme $\Omega_{4k-1}^{\mathbb{Z}(2)}(PL)$ est un groupe de torsion, cela définit une application $\mu : \Omega_{4k-1}^{\mathbb{Z}(2)}(PL) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui est un homomorphisme.

PROPOSITION 7.16.- <u>Si</u> $k \geqslant 3$ <u>la partie paire de</u> μ

$$\mu^o : \Omega_{4k-1}^{\mathbb{Z}(2)}(PL) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(2)}$$

<u>est nulle</u>.

<u>Démonstration</u>.- L'homomorphisme μ^o est déterminé par sa restriction à $\mathbb{Z}_{(2)} \otimes \Omega_{4k-1}^{\mathbb{Z}(2)}(PL)$; nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{(2)} \otimes \Omega^{fr}_{4k-1} \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\lambda^o"'] & & \mathbb{Z}_{(2)} \otimes \Omega^{\mathbb{Z}_{(2)}}_{4k-1}(PL) \arrow[dl, "\mu^o"] \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(2)} & \end{tikzcd}$$

Or λ^o est nul pour $k \geqslant 3$ (7.11) et le morphisme d'oubli σ est un isomorphisme d'après 7.15.

7.17.- Soit N^{4k} une variété PL de dimension $4k$ $(k \geqslant 3)$ et t une $SPL_{(2)}$-trivialisation de $\tau_{\partial N}$. La proposition précédente nous montre d'abord que $8\,\mu^o(M,t) = 0$ donc que $L^t(N) \in \mathbb{Z}_{(2)}$ (ce qui était clair en utilisant les classes $\mathcal{L}_i \in H^{4i}(BSPL\,;\mathbb{Z}_{(2)})$ de Morgan-Sullivan [11] plutôt que les classes de Thom-Hirzebruch) et on a la formule

$$(7.17) \qquad I(N) \equiv \rho_8(L^t(N)) - A(\partial N, t) \quad (\text{mod. } 8)\ .$$

7.18.- <u>Changement de trivialisation, 2.</u>

Nous allons utiliser la formule (7.17) pour comparer $A(M,t_o)$ et $A(M,t_1)$ lorsque t_o et t_1 sont deux $SPL_{(2)}$-trivialisations de τ_M. Soit $N = M \times I$, t la $SPL_{(2)}$-trivialisation de ∂N qui est t_1 sur $M \times 1$ et t_o sur $M \times 0$; nous avons pour $k \geqslant 3$:

$$A(M,t_1) - A(M,t_o) = +\ \rho_8(L^t(N))\ .$$

Si $\varphi : M \to SPL_{(2)}$ est tel que $t_1 = [\varphi].t_o$, il est clair que

$$L^t(N) = \langle \varphi^* \sigma L_k, [M] \rangle$$

où $\sigma : H^{4k}(BSPL_{(2)}\,;\mathbb{Q}) \to H^{4k-1}(SPL_{(2)}\,;\mathbb{Q})$ est l'homomorphisme de suspension.

7.19.- Nous étudions d'abord le cas d'une variété différentiable M^{4k-1} et de deux SO-trivialisations de τ_M grâce au :

LEMME 7.19.- <u>Soit M^{4k-1} une variété différentiable fermée stablement parallélisable. Soit ξ un fibré vectoriel sur ΣM_+ ; on a</u>

$$\langle p_k(\xi), \Sigma[M] \rangle \equiv 0 \qquad (\text{mod. } a_k(2k-1)!\ )$$

où $a_k = 2$ si k est impair et $a_k = 1$ si k est pair.

Démonstration.- C'est une extension de la démonstration de Bott [4] dans le cas des sphères. La construction de Thom-Pontryagin et une trivialisation de ν_M fournissent $f : S^{2n} \to \Sigma^{2n-4k} \Sigma M_+$ de degré 1. Notons B l'homomorphisme de périodicité de Bott. Nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} K_{\mathbb{C}}(\Sigma M_+) & \xrightarrow{B} & \tilde{K}_{\mathbb{C}}(\Sigma^{2n-4k} M_+) & \xrightarrow{f^*} & \tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{2n}) \\ \downarrow \mathrm{ch} & & \downarrow \mathrm{ch} & & \downarrow \mathrm{ch} \\ \tilde{H}^*(\Sigma M_+ ; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\Sigma} & \tilde{H}^*(\Sigma^{2n-4k} \Sigma M_+ ; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{f^*} & \tilde{H}^*(S^{2n} ; \mathbb{Q}) . \end{array}$$

Comme f est de degré 1, l'image par f^* du réseau $\tilde{H}^{2n}(\Sigma^{2n-4k} \Sigma M_+ ; \mathbb{Z})$ est le réseau $\tilde{H}^{2n}(S^{2n} ; \mathbb{Z})$; or on sait que $\mathrm{ch}(\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{2n}))$ $\tilde{H}^{2n}(S^{2n} ; \mathbb{Z})$, donc la composante de dimension $2n$ de $\mathrm{ch}(\tilde{K}_{\mathbb{C}}(\Sigma^{2n-4k} \Sigma M_+))$ est entière, et donc par commutativité, pour tout fibré complexe η sur ΣM_+, on a $< \mathrm{ch}\, \eta , \Sigma [M] > \in \mathbb{Z}$, or comme ΣM_+ est une suspension on a

$$\mathrm{ch}\, \eta = \dim \eta + c_1(\eta) + \ldots + \frac{1}{(2k-1)!} c_{2k}(\eta)$$

donc $< c_{2k}(\eta) , \Sigma M >$ est divisible par $(2k-1)!$. Le lemme en découle aussitôt.

Si $\varphi : M \to SO$, on a

$$< \varphi^* \sigma L_k , [M] > = 2^{2k}(2^{2k-1} - 1) \frac{B_k}{(2k)!} < \varphi^* \sigma p_k , [M] >$$

puisque σ est nul sur les décomposables et le lemme 7.19 montre que $< \varphi^* \sigma p_k , [M] >$ est divisible par $a_k(2k-1)!$.

Le théorème de Von Staudt [1] montre alors que $< \varphi^* \sigma L_k , [M] >$ est divisible (dans $\mathbb{Z}_{(2)}$) par 2^{α_k} où $\alpha_k = 2k - 1$ si k est impair et $2k - 2 - v_2(k)$ si k est pair, donc est divisible par 8 si $k \geq 3$.

7.20.- Etudions le cas général.

Nous considérons l'application $\delta : \mathbb{R}P_\infty \to SO$ de 4.9. comme allant dans $SPL_{(2)}$; soit $\bar{h}_1$ le générateur de $H^1(SPL_{(2)} , \mathbb{Z}/2)$ et $\Psi : SPL_{(2)} \to \mathbb{R}P_\infty$ qui classi-

fie $\bar{h}_1$; $\Psi . \delta$ est homotope à l'identité de $\mathbb{R}P_\infty$.

Soient t_o et t_1 deux $SPL_{(2)}$-trivialisations de τ_M , et $\varphi : M \to SPL_{(2)}$ telle que $t_1 = [\varphi] . t_o$, soient φ_o la composée $\delta\Psi\varphi : M \to SPL_{(2)}$ et $\varphi_1 : M \to SPL_{(2)}$ telle que $[\varphi] = [\varphi_o] + [\varphi_1]$ dans le groupe $[M, SPL_{(2)}]$.

Soit $t' = [\varphi_o] . t_o$, on a $t_1 = [\varphi_1] . t'$.

Or $\varphi_o^* \bar{h}_1 = \varphi^* \bar{h}_1$ dans $H^1(M ; \mathbb{Z}/2)$ donc $\varphi_1^* \bar{h}_1 = 0$ car la classe $\bar{h}_1$ de dimension 1 est primitive ; donc d'après 7.22, $q^{t_1} = q^{t'}$ et $A(M, t_1) = A(M, t')$.

D'autre part, lorsque $k > 3$,

$$A(M, t') - A(M, t_o) = \rho_8(< \varphi_o^* \sigma L_k , [M] >) ,$$

or $\varphi_o^* \sigma L_k = (\Psi \circ \varphi)^*(\delta^* \sigma L_k)$ et $\delta^* \sigma L_k \in H^{4k-1}(\mathbb{R}P_\infty ; \mathbb{Q}) = 0$, donc $A(M, t') = A(M, t_o)$. On a donc montré :

THÉORÈME 7.21.- <u>Soient</u> M <u>une variété fermée</u> (PL <u>ou différentiable</u>) <u>de dimension</u> $4k - 1$, t_o <u>et</u> t_1 <u>deux</u> $SPL_{(2)}$-<u>trivialisations de</u> τ_M . <u>Lorsque</u> $k \geqslant 3$, <u>on a</u> :

$$A(M, t_o) = A(M, t_1) .$$

7.22.- <u>Extension de 4.12 à</u> $SPL_{(2)}$.

Soient $\mathcal{L}_n \in H^{4n}(BSPL ; \mathbb{Z}_{(2)})$ les classes de Morgan-Sullivan [11] ; en utilisant le calcul de $\rho_4(\mathcal{L}_n)$ donné dans [6, Corollaire 6.5], il vient, si k est une puissance de 2 , que dans $H^{4k-1}(SPL_{(2)} ; \mathbb{Z}/4]$ on a

$$\rho_4(\sigma \mathcal{L}_k) = i_2(h_{4k-1} + h_{2k} \cup h_{2k-1})$$

où i_2 est le morphisme $H^{4k-1}(\ ; \mathbb{Z}/2) \to H^{4k-1}(\ ; \mathbb{Z}/4)$ et $h_i = \sigma w_{i+1}$.

Il en découle que $h_{4k-1} + h_{2k} \cup h_{2k-1}$ est la réduction modulo 2 d'une classe de $H^{4k-1}(SPL_{(2)} ; \mathbb{Z}_{(2)})$ et donc que

$$\beta h_{4k-1} = \beta(h_{2k} \cup h_{2k-1}) = (\beta h_{2k-1})^2$$

d'où par récurrence $\beta h_{4k-1} = (\beta h_1)^{2k}$ dans $H^{4k}(SPL_{(2)} ; \mathbb{Z}_{(2)})$. Cette formule suffit pour étendre 4.12 à $SPL_{(2)}$.

Remarque 7.23.- Par une méthode analogue, en utilisant les résultats de Kirby-Siebenmann sur la triangulation, les résultats précédent peuvent s'étendre aux variétés topologiques.

CHAPITRE VIII

(Λ, Λ') - SPHÈRES

Soient Λ et Λ' deux anneaux de fractions de $\mathbb{Z}$.
La notion de $E^{\Lambda'}$-orientation d'un SO-fibré est définie dans [3]. Pour la cohérence de la terminologie de ce travail, nous remplaçons ce terme par celui de Λ'-parallélisation, une classe d'homotopie de Λ'-parallélisation étant appelée une Λ'-trivialisation.

Deux Λ-sphères, Λ'-parallélisées (par abréviation (Λ, Λ')-sphères), X_o et X_1 sont $H_{\Lambda,\Lambda'}$-cobordantes, s'il existe une variété Y telle que :

(i) $\partial Y = (-X_o) \cup X_1$;

(ii) $H_*(Y, X_i ; \Lambda) = 0$, $i = 0,1$;

(iii) Y est munie d'une Λ'-parallélisation qui prolonge celle de X_o et X_1.

Nous notons $\Theta_n^{\Lambda,\Lambda'}$ l'ensemble des classes de (Λ, Λ')-sphères, de dimension n, à $H_{\Lambda,\Lambda'}$-cobordisme près ; c'est un groupe pour la somme connexe.

L'objet de ce chapitre est l'étude du groupe $\Theta_n^{\Lambda,\Lambda'}$, il y sera largement fait référence à [3].

<u>Première approche dans le cas</u> $\Lambda \subset \Lambda'$.

8.1.- En considérant les Λ'-trivialisations de la sphère S^n nous obtenons un homomorphisme :

$$\pi_n(SO) \otimes \Lambda' \longrightarrow \Theta_n^{\Lambda,\Lambda'} .$$

Une Λ-sphère possède en dehors d'un point une Λ-trivialisation, et a fortiori une Λ'-trivialisation, bien déterminée (voir 8.18 ou [3]), l'obstruction à étendre cette Λ'-trivialisation donne un homomorphisme :

$$\Theta_n^{\Lambda} \longrightarrow \pi_{n-1}(SO) \otimes \Lambda' .$$

On vérifie que la suite :

8.2.- $$\cdots \longrightarrow \pi_n(SO) \otimes \Lambda' \longrightarrow \Theta_n^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \Theta_n^{\Lambda} \longrightarrow \pi_{n-1}(SO) \otimes \Lambda' \longrightarrow \Theta_{n-1}^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \cdots$$

est exacte.

8.3.- <u>Exemple</u> $(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$.- Soit X^{4k-1} une $(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$-sphère, il existe une variété Y^{4k} et un entier m (1 ou 2) tel que : $\partial Y = mX$. A l'aide de la $\mathbb{Q}$-trivialisation de X, nous définissons, comme en 7.12, un nombre rationnel L^t , $\frac{1}{m}[I(Y) - L^t]$ ne dépend que de X et est invariant par $H_{\mathbb{Q},\mathbb{Q}}$-cobordisme. Nous avons défini une application β :

$$\Theta_{4k-1}^{\mathbb{Q},\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q} \quad .$$

L'expression de la classe L , en fonction des classes de Pontryagin, montre qu'il existe un nombre rationnel non nul, s_k , tel que commute le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \pi_{4k-1}(SO) \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & \Theta_{4k-1}^{\mathbb{Q},\mathbb{Q}} \\ p_k \otimes \mathbb{Q} \downarrow \wr & & \downarrow \beta \\ \mathbb{Q} & \xrightarrow[\sim]{\times (-s_k)} & \mathbb{Q} \end{array}$$

où $p_k : \pi_{4k-1}(SO) \longrightarrow \mathbb{Z}$ est l'homomorphisme décrit en 7.8. . Il en résulte que la flèche horizontale du haut est injective.

Nous obtenons :

PROPOSITION 8.4.- <u>Les homomorphismes</u> :

<u>Pour</u> $n \not\equiv -1 \pmod 4$ $\qquad \Theta_n^{\mathbb{Q},\mathbb{Q}} \xrightarrow{\text{oubli}} \Theta_n^{\mathbb{Q}}$

<u>Pour</u> $n \equiv -1 \pmod 4$ $\qquad \Theta_n^{\mathbb{Q},\mathbb{Q}} \xrightarrow{\text{oubli} \oplus \beta} \Theta_n^{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}$

<u>sont des isomorphismes</u>.

<u>Deuxième approche dans le cas</u> $\Lambda \supset \Lambda'$.

Nous nous proposons de comparer le groupe $\Theta_n^{\Lambda,\Lambda'}$ au groupe de cobordisme $\Omega_n^{\Lambda'}$ des variétés Λ'-parallélisées [3] et d'étudier pour ceci le groupe de cobordisme relatif.

8.5.- Nous considérons les variétés Y^n , Λ'-parallélisées dont le bord est une Λ-sphère. Un cobordisme entre deux telles variétés est un cobordisme Λ'-parallélisé entre Y_o et Y_1 induisant un $H_{\Lambda,\Lambda'}$-cobordisme entre Y_o et Y_1 . Nous notons $P_n^{\Lambda,\Lambda'}$ l'ensemble de ces variétés à cobordisme près, c'est un groupe pour la somme connexe et nous avons une longue suite exacte (les flèches sont claires) :

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1}^{\Lambda,\Lambda'} \xrightarrow{b} \Theta_n^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \Omega_n^{\Lambda'} \longrightarrow P_n^{\Lambda,\Lambda'} \xrightarrow{b} \Theta_{n-1}^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \cdots$$

Le groupe P_n^{Λ} de [3] est le groupe $P_n^{\Lambda,\Lambda}$. Pour $n = 2\ell$, la composition :

$$P_{2\ell}^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow P_{2\ell}^{\Lambda} \xrightarrow{\tau} WQ(\Lambda_\ell) \qquad \text{(voir [3-§2])}$$

est encore notée τ.

PROPOSITION 8.6.- <u>Pour</u> $n = 2\ell+1$ <u>le groupe</u> $P_n^{\Lambda,\Lambda'}$ <u>est nul. Pour</u> $n = 2$, $n \neq 4$, <u>l'homomorphisme</u> τ :

$$P_{2\ell}^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow WQ(\Lambda_\ell)$$

<u>est un isomorphisme.</u>

<u>Démonstration</u>.- On adapte la démonstration de [3] en remarquant :

- pour $m > 0$, $\pi_m(E^{\Lambda'}) \otimes \Lambda = 0$;
- dans [3-3.7] on montre en fait que l'application : $P_{4k}^{\Lambda,\mathbb{Z}} \longrightarrow WQ(\Lambda)$ est surjective.

8.7.- La composition : $\Theta_{4k-1}^{\Lambda,\Lambda'} \xrightarrow{\text{oubli}} \Theta_{4k-1} \xrightarrow{e} W(\Lambda,\mathbb{Z})$ (voir [3-4.7]) est encore notée e.

Soit X^{4k-1} une $(\mathbb{Q},\mathbb{Z}_{(2)})$-sphère, nous avons vu au chapitre III que le groupe $H_{2k-1}(X;\mathbb{Z})$ est un qe-module sur $\mathbb{Z}$ dont la classe dans $WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ ne dépend d'après 6.12 que de celle de X dans $\Theta_{4k-1}^{\mathbb{Q},\mathbb{Z}(2)}$. Ceci nous donne un homomorphisme, qe :

$$\Theta_{4k-1}^{\mathbb{Q},\mathbb{Z}(2)} \longrightarrow WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) .$$

Si $\frac{1}{2} \notin \Lambda'$ la composition :

$$\Theta_{4k-1}^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \Theta_{4k-1}^{\mathbb{Q},\mathbb{Z}(2)} \xrightarrow{qe} WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$$

induit une application, notée encore qe, du groupe $\Theta_{4k-1}^{\Lambda,\Lambda'}$ dans le sous-groupe $WQ(\Lambda,\mathbb{Z})$ de $WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ engendré par les classes des qe-modules C tels que $\Lambda \otimes C = 0$. (Dans les définitions précédentes l'inclusion $\Lambda \supset \Lambda'$ n'est pas requise). Il résulte de 6.11 :

PROPOSITION 8.8.- Si $\frac{1}{2} \notin \Lambda'$ le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} P_{4k}^{\Lambda,\Lambda'} & \xrightarrow{\ b\ } & \Theta_{4k-1}^{\Lambda,\Lambda'} \\ \downarrow \tau & & \downarrow qe \\ WQ(\Lambda) & \xrightarrow{\ \delta\ } & WQ(\Lambda,\mathbb{Z}) \end{array}$$

est anticommutatif (voir [3-§A-2.] pour la définition de la flèche δ).

8.9.- Si $\frac{1}{2} \notin \Lambda'$ (resp. $\frac{1}{2} \in \Lambda'$) nous notons $\tilde{\Theta}_{4k-1}^{\Lambda,\Lambda'}$ le noyau de l'homomorphisme qe (resp. e) . De même, nous notons suivant ces deux cas $\tilde{P}_{4k}^{\Lambda,\Lambda'}$ le noyau de la composée:

$$P_{4k}^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow WQ(\Lambda) \longrightarrow WQ(\Lambda, \mathbb{Z})$$

ou de

$$P_{4k}^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow WQ(\Lambda) \longrightarrow W(\Lambda,\mathbb{Z}) \quad .$$

D'après 8.8 et [3-4.8] l'application b induit une application toujours notée

$$b : \tilde{P}_{4k}^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \tilde{\Theta}_{4k-1}^{\Lambda,\Lambda'} \quad .$$

Posons, si $n \not\equiv 0 \pmod 4$:

$$\tilde{P}_n^{\Lambda,\Lambda'} = P_n^{\Lambda,\Lambda'} \quad \text{et} \quad \tilde{\Theta}_{n-1}^{\Lambda,\Lambda'} = \Theta_{n-1}^{\Lambda,\Lambda'}$$

nous pouvons énoncer :

PROPOSITION 8.9.- La suite :

$$\cdots \longrightarrow \tilde{P}_{n+1}^{\Lambda,\Lambda'} \xrightarrow{\ b\ } \tilde{\Theta}_n^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \Omega_n^{\Lambda'} \longrightarrow \tilde{P}_n^{\Lambda,\Lambda'} \xrightarrow{\ b\ } \tilde{\Theta}_{n-1}^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \cdots$$

est exacte.

8.10.- Soit Λ'' l'anneau des fractions de $\mathbb{Z}$ caractérisé par $\Lambda' \cap \Lambda'' = \mathbb{Z}$ et $\Lambda' + \Lambda'' = \mathbb{Q}$ (nous dirons que Λ'' est le complémentaire de Λ'), on vérifie par inspection que l'homomorphisme :

$$\Lambda'' \otimes \tilde{P}_n^{\Lambda,\Lambda'} \xrightarrow{\ \Lambda'' \otimes \text{oubli}\ } \Lambda'' \otimes \tilde{P}_n^{\mathbb{Q},\mathbb{Q}}$$

est un isomorphisme pour $n \neq 4$.

Nous en déduisons à l'aide de [3-§5] et du lemme des cinq :

THÉORÈME 8.10.- Pour $n \neq 3$ l'application d'oubli donne un isomorphisme :

$$\Lambda'' \otimes \tilde{\Theta}_n^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \Lambda'' \otimes \tilde{\Theta}_n^{\mathbb{Q},\mathbb{Q}} \quad .$$

8.11.- Nous notons, comme en 7.4, Θ_n^{fr} le groupe des sphères d'homotopie SO-parallélisée et P_n le groupe d'obstruction à la chirurgie de Kervaire-Milnor. Nous nous proposons, à présent, d'étudier l'application :

$$\Lambda' \otimes \Theta_n^{fr} \xrightarrow{\Lambda' \otimes \text{oubli}} \Lambda' \otimes \tilde{\Theta}_n^{\Lambda,\Lambda'} \quad .$$

Si $\frac{1}{2} \in \Lambda'$, on vérifie sans peine que :

$$\Lambda' \otimes P_n \xrightarrow{\Lambda' \otimes \text{oubli}} \Lambda' \otimes \tilde{P}_n^{\Lambda,\Lambda'}$$

est un isomorphisme pour $n \neq 4$.

Si $\frac{1}{2} \notin \Lambda'$ et $\frac{1}{2} \notin \Lambda$, nous avons deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} P_{4k} \arrow[rr, "\text{oubli}"] \arrow[dr, "\sim"'] & & \tilde{P}_{4k}^{\Lambda,\Lambda'} \arrow[dl, "\sim"] \\ & WQ(\mathbb{Z}) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P_{4k+2} \arrow[rr, "\text{oubli}"] \arrow[dr, "\sim"'] & & P_{4k+2}^{\Lambda,\Lambda'} \arrow[dl, "\sim"] \\ & WQ(\mathbb{F}_2) & \end{tikzcd}$$

dans lesquels les flèches obliques sont des isomorphismes ($k \neq 1$ pour le premier).
Si $\frac{1}{2} \notin \Lambda'$ et $\frac{1}{2} \in \Lambda$ le premier diagramme demeure mais cette fois $P_{4k+2}^{\Lambda,\Lambda'} = 0$.
Toujours d'après le lemme des cinq et [3-§5], nous obtenons :

THÉORÈME 8.12.- <u>Dans les cas</u> : $\frac{1}{2} \in \Lambda'$ <u>ou</u> $\frac{1}{2} \notin \Lambda'$ <u>et</u> $\frac{1}{2} \notin \Lambda$ <u>l'application d'oubli donne, si</u> $n \neq 3$, <u>un isomorphisme</u> :

$$\Lambda' \otimes \Theta_n^{fr} \longrightarrow \Lambda' \otimes \tilde{\Theta}_n^{\Lambda,\Lambda'} \quad .$$

Reste le cas $\frac{1}{2} \notin \Lambda'$ et $\frac{1}{2} \in \Lambda$. Dans [3], on définit une généralisation de l'invariant de Kervaire qui est la composition :

$$\Omega_{4k+2}^{\Lambda'} \longrightarrow A_{4k+2}^{\Lambda'} \longrightarrow P_{4k+2}^{\Lambda'} \xrightarrow{\tau} WQ(\mathbb{F}_2) = \mathbb{Z}/2 \quad .$$

Notons K la composée : $\Theta_{4k+2}^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \Omega_{4k+2}^{\Lambda'} \longrightarrow \mathbb{Z}/2$. On a aussi l'application

de Kervaire : $\mathbb{Z}/2 = P_{4k+2} \xrightarrow{b} \Theta^{fr}_{4k+1}$. Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 8.13.- <u>Dans le cas</u> $\frac{1}{2} \notin \Lambda'$ <u>et</u> $\frac{1}{2} \in \Lambda$ <u>l'application</u>

$$\Lambda' \otimes \Theta^{fr}_n \longrightarrow \Lambda' \otimes \tilde{\Theta}^{\Lambda,\Lambda'}_n$$

<u>est un isomorphisme si</u> $n \equiv 0$, -1 (mod 4) et $n \neq 3$. <u>La suite</u>

$$0 \longrightarrow \Theta^{fr}_{4k+2} \longrightarrow \Theta^{\Lambda,\Lambda'}_{4k+2} \xrightarrow{K} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{b} \Theta^{fr}_{4k+1} \longrightarrow \Theta^{\Lambda,\Lambda'}_{4k+1} \longrightarrow 0$$

<u>devient exacte quand on la tensorise par</u> Λ' .

<u>Remarque</u> 8.14.- La flèche K peut être aussi décrite par la composition suivante :

$$\Theta^{\Lambda,\Lambda'}_{4k+2} \longrightarrow \Omega^{\Lambda'}_{4k+2} \longrightarrow \Lambda' \otimes \Omega^{\Lambda'}_{4k+2} \simeq \Lambda' \otimes \Omega^{fr}_{4k+2} \xrightarrow{\Lambda' \otimes (\text{Invariant de Kervaire})} \mathbb{Z}/2 .$$

D'après [5], la flèche K est nulle si $(k+1)$ n'est pas une puissance de 2.

8.14.- <u>Mode d'emploi des théorèmes précédents</u>.- Pour tout $n \neq 3$, nous avons d'après 8.10 un isomorphisme : $\mathbb{Q} \otimes \tilde{\Theta}^{\Lambda,\Lambda'}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q} \otimes \tilde{\Theta}^{\mathbb{Q},\mathbb{Q}}_n$.

Si $n \not\equiv -1$ (mod 4) , le groupe $\Theta^{\Lambda,\Lambda'}_n$ est de torsion. Ses composantes p-primaires, p inversible dans Λ' , sont celles du groupe $\Theta^{\mathbb{Q},\mathbb{Q}}_n$, i.e. du sous-groupe de torsion de Ω^{SO}_n . Ses composantes p-primaires, p non inversible dans Λ' , se calculent à l'aide de celles du groupe Θ^{fr}_n .

Si $n = 4k-1$, les deux applications α et β définies respectivement en 7.4 et 8.3 induisent deux applications :

$$\Lambda' \otimes \Theta^{fr}_{4k-1} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$\Lambda'' \otimes \tilde{\Theta}^{\mathbb{Q},\mathbb{Q}}_{4k-1} \longrightarrow \mathbb{Q} \quad .$$

Pour $k \neq 1$, le groupe $\tilde{\Theta}^{\Lambda,\Lambda'}_{4k}$ est isomorphe au produit fibré :

$$(\Lambda' \otimes \Theta^{fr}_{4k-1}) \times_{\mathbb{Q}} (\Lambda'' \otimes \tilde{\Theta}^{\mathbb{Q},\mathbb{Q}}_{4k-1})$$

$(\tilde{\Theta}^{\mathbb{Q},\mathbb{Q}}_{4k-1} \simeq \tilde{\Theta}^{\mathbb{Q}}_{4k-1} \oplus \mathbb{Q}$ d'après 8.4).

8.15. <u>Exemple</u> $(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$.- Suites exactes :

$$0 \longrightarrow \Theta^{fr}_{4k-1} \longrightarrow \Theta^{\mathbb{Q},\mathbb{Z}}_{4k-1} \longrightarrow WQ(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

et
$$0 \longrightarrow \Theta^{fr}_{4k+2} \longrightarrow \Theta^{\mathbb{Q},\mathbb{Z}}_{4k+2} \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \Theta^{fr}_{4k+1} \longrightarrow \Theta^{\mathbb{Q},\mathbb{Z}}_{4k+1} \longrightarrow 0 \quad .$$

<u>Exemple</u> $(\mathbb{Q},\mathbb{Z}_{(2)})$. Suite exacte :
$$0 \longrightarrow \tilde{P}^{\mathbb{Q},\mathbb{Z}_{(2)}}_{4k} \longrightarrow \tilde{\Theta}^{\mathbb{Q},\mathbb{Z}_{(2)}}_{4k-1} \longrightarrow \Omega^{\mathbb{Z}_{(2)}}_{4k-1} \longrightarrow 0$$

Soit $\sigma : \tilde{P}^{\mathbb{Q},\mathbb{Z}_{(2)}}_{4k} \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'homomorphisme de signature, si $k \neq 1$ l'application $\frac{\sigma}{8}$ est un isomorphisme de $\tilde{P}^{\mathbb{Q},\mathbb{Z}_{(2)}}_{4k}$ sur $\mathbb{Z}$. Quand on identifie $\mathrm{Ext}(\Omega^{\mathbb{Z}_{(2)}}_{4k-1}, \tilde{P}^{\mathbb{Q},\mathbb{Z}_{(2)}}_{4k})$ avec $\mathrm{Hom}(\Omega^{\mathbb{Z}_{(2)}}_{4k-1}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ cette extension correspond à l'homomorphisme μ défini en 7.12.

8.16.- Toujours dans l'hypothèse $\Lambda \supset \Lambda'$, étudions l'application d'oubli σ_n : $\Theta^{\Lambda,\Lambda'}_n \longrightarrow \Theta^{\Lambda}_n$. Pour ceci nous utilisons l'échelle (dimensions exceptionnelles exclues) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & P^{\Lambda,\Lambda'}_{n+1} & \longrightarrow & \Theta^{\Lambda,\Lambda'}_n & \longrightarrow & \Omega^{\Lambda'}_n & \longrightarrow & P^{\Lambda,\Lambda'}_n & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow \wr & & \downarrow \sigma_n & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \wr & \\
\cdots \longrightarrow & P^{\Lambda}_{n+1} & \longrightarrow & \Theta^{\Lambda}_n & \longrightarrow & A^{\Lambda}_n & \longrightarrow & P^{\Lambda}_n & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

et la suite exacte :
$$0 \longrightarrow \mathrm{coker}\,\sigma_{n+1} \longrightarrow \mathrm{coker}\,\alpha_{n+1} \xrightarrow{\partial_n} \ker \sigma_n \longrightarrow \ker \alpha_n \longrightarrow 0$$
qui s'en déduit.

Pour fixer les idées, nous allons énoncer les résultats dans le cas $\frac{1}{2} \Lambda$ et $\frac{1}{2} \notin \Lambda'$ (les autres cas s'étudient pareillement avec des modifications mineures). Comme $\frac{1}{2} \in \Lambda$, si $n \neq 4k-1$, ∂_n est nul car il se "factorise" par P^{Λ}_{n+1} qui est nul, on a donc les isomorphismes : $\ker \sigma_n \simeq \ker \alpha_n$, $n \neq 4k-1$, $\mathrm{coker}\,\sigma_n \simeq \mathrm{coker}\,\alpha_n$ $n \neq 4k$, et la suite exacte :
$$0 \longrightarrow \mathrm{coker}\,\sigma_{4k} \longrightarrow \mathrm{coker}\,\alpha_{4k} \longrightarrow \ker \alpha_{4k-1} \longrightarrow \ker \alpha_{4k-1} \longrightarrow 0 \quad .$$
On utilise alors les calculs de [3].

Soit Λ_1 l'anneau de fractions, (complémentaire de Λ) + Λ' , nous pouvons considérer le groupe $\Omega^{fr}_n \otimes \Lambda_1$ comme un sous-groupe de Ω^{fr}_n et nous avons une application :
$$\Omega^{fr}_n \otimes \Lambda_1 \longrightarrow \Theta^{\Lambda,\Lambda'}_n .$$

THÉORÈME 8.16.- Soient $\Lambda \supset \Lambda'$ avec $\frac{1}{2} \in \Lambda$ et $\frac{1}{2} \notin \Lambda'$; les suites suivantes sont exactes :

$$0 \longrightarrow \Omega_n^{fr} \otimes \Lambda_1 \longrightarrow \Theta_n^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \Theta_n^{\Lambda} \longrightarrow \mathrm{Tors}\ \Omega_n^{SO} \to 0 \ , \quad n \not\equiv 1 \pmod 4$$

$$\Theta_{4k-1}^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \Theta_{4k-1}^{\Lambda} \longrightarrow A_{4k-1}^{\mathbb{Q}} \otimes \Lambda_1 \longrightarrow 0 \ , \quad k \geqslant 2 \ .$$

8.17.- Exemple. $\Lambda' \subset \mathbb{Z}_{(2)}$ et $\Lambda = \Lambda'[\frac{1}{2}]$, $\Lambda_1 = \mathbb{Z}_{(2)}$. Dans [3-§6] on décrit l'homomorphisme des enlacements de Pontryagin $e_P : A_{4k-1}^{\mathbb{Q}} \longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\pi(k)-1}$ et une suite exacte :

$$0 \longrightarrow R_{4k-1} \longrightarrow A_{4k-1}^{\mathbb{Q}} \longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\pi(k)-1} \oplus \Omega_{4k-1}^{SO} \longrightarrow 0$$

où R_{4k-1} est un groupe fini d'ordre impair, il en résulte un isomorphisme :

$$\mathbb{Z}_{(2)} \otimes A_{4k-1}^{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\text{ep} \oplus \text{oubli}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(2)})^{\pi(k)-1} \oplus \Omega_{4k-1}^{SO} \ .$$

Pour qu'une $\Lambda'[\frac{1}{2}]$-sphère (avec $\Lambda' \subset \mathbb{Z}_{(2)}$), de dimension n , soit $H_{\Lambda'[\frac{1}{2}]}$-cobordante à une $(\Lambda'[\frac{1}{2}], \Lambda')$-sphère, il faut et il suffit :

- si $n \not\equiv -1 \pmod 4$, qu'elle borde ;
- si $n \equiv -1 \pmod 4$ et $n \neq 3$, qu'elle borde et que ses enlacements de Pontryagin soient de torsion impaire.

Le cas (Λ, Λ') général.

Enonçons d'abord deux lemmes qui nous seront utiles.

LEMME 8.18.- Soient (Y,X) une paire de CW-complexes telle que $\tilde{H}^*(Y,X;\Lambda) = 0$, ξ un SO-fibré de base Y , Λ-trivialisé sur X . Il existe une unique Λ-trivialisation de ξ sur Y qui étend celle donnée sur X .

Démonstration analogue à [3-1.3].

LEMME 8.19.- Soient ξ un SO-fibré, t (resp t') une Λ (resp. Λ')-trivialisation de ce fibré qui induisent la même $(\Lambda + \Lambda')$-trivialisation. Il existe une unique $(\Lambda \cap \Lambda')$-trivialisation de ξ qui induit t (resp. t') .

Démonstration. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} BSO_{\Lambda\cap\Lambda'} \arrow[r] \arrow[d] & BSO_{\Lambda'} \arrow[d] \\ BSO_{\Lambda} \arrow[r] & BSO_{\Lambda+\Lambda'} \end{tikzcd}$$

est un "pull-back" [16], il en résulte que le diagramme ci-dessous en est un autre :

$$\begin{tikzcd} E^{\Lambda\cap\Lambda'} \arrow[r] \arrow[d] & E^{\Lambda'} \arrow[d] \\ E^{\Lambda} \arrow[r] & E^{\Lambda+\Lambda'} \end{tikzcd}$$

8.20.- Nous notons $\bar{\Lambda}$ l'intersection $\Lambda \cap \Lambda'$.

Soient X^n une (Λ, Λ')-sphère et x_o un point de X. Le SO-fibré tangent à X possède sur $X - x_o$, à la fois une Λ-trivialisation (lemme 8.18), t, et une Λ'-trivialisation, t'. Ces deux trivialisations induisent la même $(\Lambda + \Lambda')$-trivialisation (unicité dans 8.18) et définissent donc, d'après 8.19, une $\bar{\Lambda}$-trivialisation, $\bar{t}$.

L'obstruction à prolonger $\bar{t}$ sur X en une $\bar{\Lambda}$-trivialisation, induisant la Λ'-trivialisation donnée, fournit un homomorphisme :

$$\Theta_n^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \pi_n(f)$$

le groupe $\pi_n(f)$ étant le $n^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie de l'application naturelle $E^{\bar{\Lambda}} \longrightarrow E^{\Lambda'}$.

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Omega BSO_{\bar{\Lambda}} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \Omega BSO_{\Lambda'} \arrow[d] \\ E^{\bar{\Lambda}} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E^{\Lambda'} \arrow[d] \\ BSO \arrow[r, equal] & BSO \end{tikzcd}$$

où les colonnes sont les fibrations de Serre étudiées dans [3]. Nous en déduisons un isomorphisme du groupe $\pi_n(g)$ sur le groupe $\pi_n(f)$ et comme l'application g a le type d'homotopie de $h : SO_{\bar{\Lambda}} \longrightarrow SO_{\Lambda'}$, un isomorphisme entre $\pi_n(f)$ et $\pi_n(h)$.

Il en résulte que les groupes $\pi_n(f)$ sont périodiques de période 8 et que l'on a les suites exactes :

$$0 \longrightarrow \pi_n(SO) \otimes (\Lambda'/\bar{\Lambda}) \longrightarrow \pi_n(f) \longrightarrow \mathrm{Tor}[\pi_{n-1}(SO), \Lambda'/\bar{\Lambda}] \longrightarrow 0 \ .$$

La nature a bien fait les choses, ces suites exactes permettent de déterminer les $\pi_n(f)$ sans ambiguité.

En considérant la composition ∂ :

$$\pi_{n+1}(f) \simeq \pi_{n+1}(h) \xrightarrow{\text{connectant}} \pi_n(SO) \otimes \bar{\Lambda}$$

et les $\bar{\Lambda}$-trivialisations de la sphère S^n, nous obtenons un homomorphisme :

$$\pi_{n+1}(f) \longrightarrow \Theta_n^{\Lambda,\bar{\Lambda}} \ .$$

PROPOSITION 8.21.- <u>La suite</u> :

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(f) \longrightarrow \Theta_n^{\Lambda,\bar{\Lambda}} \longrightarrow \Theta_n^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \pi_n(f) \longrightarrow \Theta_{n-1}^{\Lambda,\bar{\Lambda}} \longrightarrow \cdots$$

<u>où la flèche</u> $\Theta_n^{\Lambda,\bar{\Lambda}} \longrightarrow \Theta_n^{\Lambda,\Lambda'}$ <u>est la flèche d'oubli, est exacte.</u>

<u>Démonstration</u>.- Nous avons exactitude en $\Theta_n^{\Lambda,\Lambda'}$ par définition.

Exactitude en $\Theta_n^{\Lambda,\bar{\Lambda}}$. Considérons une $(\Lambda,\bar{\Lambda})$-sphère X^n qui borde un Λ-disque Y^{n+1} munie d'une Λ'-trivialisation compatible avec la $\bar{\Lambda}$-trivialisation de X. Soient $\varphi : D^{n+1} \longrightarrow Y - X$ un plongement et Z la variété $Y - \varphi(\mathring{D}^{n+1})$ qui est un H_Λ-cobordisme entre X et S^n. D'après le lemme 8.18, il existe une unique Λ- trivialisation de Z qui étend la $\bar{\Lambda}$-trivialisation de X. Comme Z est aussi Λ'-trivialisée et que la condition de cohérence du lemme 8.19 est assurée par 8.18, la variété Z est un $H_{\Lambda,\bar{\Lambda}}$-cobordisme entre X et S^n. Par construction la $\bar{\Lambda}$-trivialisation de S^n s'étend en une Λ'-trivialisation de D^{n+1}.

Exactitude en $\pi_n(f)$. Considérons un $(\Lambda, \bar{\Lambda})$-disque Y^n de bord S^{n-1}, si la $\bar{\Lambda}$-trivialisation de S^{n-1} s'étend en la Λ'-trivialisation de D^n la variété $X = Y \cup_{S^{n-1}} (-D^n)$ est une (Λ, Λ')-sphère.

PROPOSITION 8.22.- <u>L'homomorphisme</u> :

$$\pi_n(f) \longrightarrow \Theta_{n-1}^{\Lambda,\bar{\Lambda}}$$

<u>est injectif si</u> $n \equiv 1,2 \pmod 8$, <u>dans tous les autres cas il est nul.</u>

La seconde partie de la proposition résulte du fait que dans les cas concernés l'homomorphisme ∂ est nul.

La première partie n'est significative que si $\frac{1}{2} \in \Lambda'$ et $\frac{1}{2} \notin \bar{\Lambda}$.

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(f) & \longrightarrow & \Theta_{n-1}^{\Lambda,\bar{\Lambda}} \\ \downarrow \partial & & \downarrow \text{oubli} \\ \pi_{n-1}(SO) \otimes \bar{\Lambda} & \xrightarrow{J_{\bar{\Lambda}}} & \Omega_{n-1}^{\bar{\Lambda}} \end{array}$$

Par inspection la flèche ∂ est injective, il en est de même de la flèche horizontale du bas. Ceci résulte de l'injectivité de $J : \pi_{n-1}(SO) \longrightarrow \Omega_{n-1}^{fr}$ en ces dimensions et de [3-§5].

Les propositions 8.21 et 8.22 entraînent :

THÉORÈME 8.23.- <u>Si</u> $n \equiv -1 \pmod 4$ <u>nous avons une suite exacte</u> :

$$0 \longrightarrow \Theta_n^{\Lambda,\bar{\Lambda}} \longrightarrow \Theta_n^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \Lambda'/\bar{\Lambda} \longrightarrow 0 \quad .$$

<u>Si</u> $n \equiv 0, 1 \pmod 8$ <u>et</u> $\frac{1}{2} \notin \Lambda$, $\frac{1}{2} \in \Lambda'$, <u>le groupe</u> $\Theta_n^{\Lambda,\Lambda'}$ <u>est le quotient du groupe</u> $\Theta_n^{\Lambda,\bar{\Lambda}}$ <u>par le sous-groupe à deux éléments engendré par la classe de la sphère</u> S^n <u>munie de la</u> SO-<u>trivialisation qui ne s'étend pas au disque</u> D^{n+1}.

<u>Dans tous les autres cas, l'oubli</u> $\Theta_n^{\Lambda,\bar{\Lambda}} \longrightarrow \Theta_n^{\Lambda,\Lambda'}$ <u>est un isomorphisme</u>.

8.24.- Notons $\underline{\Lambda}$ l'anneau de fractions complémentaire de $\bar{\Lambda}$. Il résulte des théorèmes 8.10 et 8.23 un isomorphisme :

$$\underline{\Lambda} \otimes \tilde{\Theta}_n^{\Lambda,\Lambda'} \xrightarrow{\sim} \underline{\Lambda} \otimes \tilde{\Theta}_n^{\mathbb{Q},\mathbb{Q}} \quad , \quad (n \neq 3)$$

et a fortiori

$$\mathbb{Q} \otimes \Theta_n^{\Lambda,\Lambda'} \xrightarrow{\sim} Q \otimes \Theta_n^{\mathbb{Q},\mathbb{Q}} \quad , \quad (n \neq 3)$$

Si $n \not\equiv -1 \pmod 4$, le groupe $\Theta_n^{\Lambda,\Lambda'}$ est de torsion, si $n \equiv -1 \pmod 4$ $n \neq 3$, sa torsion est le noyau de l'homomorphisme $\beta : \Theta_{4k-1}^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \mathbb{Q}$ dont la définition étend celle de 8.3.

8.25.- Lorsque $\Lambda' \subset \mathbb{Z}_{(2)}$, toute (Λ, Λ')-sphère X de dimension $4k-1$ est le bord d'une variété Y^{4k} (voir 7.12) ; de plus d'après 1.8, $L^t \in \mathbb{Z}_{(2)}$ donc l'image du

morphisme $\beta : \Theta_{4k-1}^{\Lambda,\Lambda'} \longrightarrow \mathbb{Q}$ est incluse dans $\mathbb{Z}_{(2)}$; on note encore $\beta : \Theta_{4k-1}^{\Lambda,\Lambda'} \to \mathbb{Z}_{(2)}$

La proposition suivante est une reformulation du théorème 7.11-12.

PROPOSITION 8.25.- <u>Si</u> $\Lambda' \subset \mathbb{Z}_{(2)}$ <u>et</u> $k \geqslant 3$, <u>le diagramme suivant est commutatif</u> :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}_{(2)} \arrow[dr, "\rho_8"] & \\
\Theta_{4k-1}^{\Lambda,\Lambda'} \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "qe"'] & & \mathbb{Z}/8 \\
 & WQ(\Lambda,\mathbb{Z}) \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

(On a identifié le groupe μ_8 avec $\mathbb{Z}/8$ en choisissant $e^{\frac{2i\pi}{8}}$ comme générateur).

APPENDICE - Formule de Milgram

Dans [3] , on définit un homomorphisme γ de $WQ(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ dans le groupe μ_8 des racines 8-ième de l'unité en associant à la classe d'un qe-module C le nombre complexe :

$$\frac{1}{\sqrt{\# C}} \sum_{x \in C} e^{2i\pi q(x)} .$$

Soient en outre $\sigma : WQ(\mathbb{Q}) \to WQ(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ l'homomorphisme de signature et $\eta : \mathbb{Z} \to \mu_8$ l'homomorphisme : $n \longrightarrow e^{2i\pi\, n/8}$. La formule de Milgram est équivalente au :

THÉORÈME.- Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} WQ(\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\sigma} & WQ(\mathbb{R}) = \mathbb{Z} \\ \downarrow \delta & & \downarrow \eta \\ WQ(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\gamma} & \mu_8 \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration (Comparer [10, App. 4]).- Soit a un entier > 0 , l'application :

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad n \longrightarrow a n^2$$

est une forme quadratique qui fait de $\mathbb{Z}$ un $\tilde{q}$-module P_a . Les classes de Witt des q-espaces vectoriels $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} P_a$ engendrent le groupe $WQ(\mathbb{Q})$, il suffit donc de vérifier : $\gamma(\operatorname{coker} P_a) = e^{\frac{2i\pi}{8}}$.

Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{8}}$ et $g = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\, dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi z^2}\, dz$.

Soit k un entier, nous avons encore :

$$g = \int_{-\frac{k\omega}{\sqrt{2a}} + \mathbb{R}} e^{-\pi z^2}\, dz ,$$

d'où

$$\frac{g}{\sqrt{2a}}\, e^{2i\pi \frac{k^2}{4a}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi a u^2}\, e^{2\pi k\omega u}\, du .$$

Sommons, k variant de 0 à 2a - 1 :

$$g\ \gamma\,(\text{coker } P_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi a u^2}\ \frac{e^{4\pi a\omega u} - 1}{e^{2\pi\omega u} - 1}\ du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi a(u-\omega)^2} - e^{-2\pi a u^2}}{e^{2i\pi\frac{u}{\omega}} - 1}\ du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(z)\ dz$$

$$= \int_{\frac{\omega}{2}+\mathbb{R}} \varphi(z)\ dz$$

$$= \int_{-\frac{\omega}{2}+\mathbb{R}} \Psi(z)dz - \int_{\frac{\omega}{2}+\mathbb{R}} \Psi(z)dz \quad \text{avec} \quad \Psi(z) = \frac{e^{-2\pi a z^2}}{e^{2i\pi\frac{z}{\omega}} - 1}$$

$$= 2i\pi \quad [\text{Résidu de } \Psi \text{ en } 0\,]$$

$$= \omega \quad .$$

Le cas particulier $a = 1$ donne $g\omega = \omega$, d'où $g = 1$ et en général :

$$\gamma\,(\text{coker } P_a) = \omega$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. F. ADAMS - On the groups $J(X)$, II, Topology 3 (1965), 137-173.

[2] J. F. ADAMS - On the groups $J(X)$, IV, Topology 5 (1966), 21-71.

[3] J. BARGE, J. LANNES, F. LATOUR, P. VOGEL - Λ-sphères, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., t. 7 (1974), fasc. 4, à paraître.

[4] R. BOTT - Lectures on $K(X)$, Benjamin, 1969.

[5] W. BROWDER - The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization, Ann. of Maths, 90 (1969), 157-186.

[6] G. BRUMFIEL and J. MORGAN - Quadratic functions, the index modulo 8 and a $\mathbb{Z}/4$-Hirzebruch formula, Topology 12 (1973), 105-122.

[7] P. CONNER and E. FLOYD - Differentiable periodic maps, Springer Verlag, 1964.

[8] P. CONNER and E. FLOYD - The relation of cobordism to K-theories, Lecture Notes in Maths., vol. 28, 1966, Springer Verlag.

[9] D. HUSEMOLLER - Fibre bundles, Mac Graw-Hill, 1966.

[10] J. MILNOR and D. HUSEMOLLER - Symmetric bilinear forms, Springer Verlag, 1973.

[11] J. MORGAN and D. SULLIVAN - Transversality characteristic classes and linking cycles in purgery theory (to appear).

[12] D. QUILLEN - The Adams conjecture, Topology 10 (1971), 67-80.

[13] C. ROURKE and B. SANDERSON - Block bundles III, Ann. of Maths., 87 (1968), 431-483.

[14] J. STASHEFF - A classification theorem for fibre spaces, Topology 2 (1963), 239-246.

[15] R. STONG - Notes on cobordism theory, Mathematical notes Princeton University Press, 1968.

[16] D. SULLIVAN - Geometric topology, Part I : Localization, periodicity and Galois symmetry, 1970

[17] C. WALL - Poincaré complexes, Ann. of Maths., 86 (1967), 213-245.

Jean LANNES - François LATOUR
Mathématiques - Bâtiment 425
Université de Paris XI
91405 ORSAY

SUMMARY

Let M^{4k-1} be an oriented differentiable or PL manifold, t a stable homotopy-parallelization of M and e the linking bilinear form on $T_{2k-1}(M)$ torsion subgroup of $H_{2k-1}(M)$. One constructs a quadratic form $q^t : T_{2k-1}(M) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ with associated bilinear form e.

Let $A(M,t) \in \mathbb{Z}/8$ be the Arf invariant of q^t; one studies how $A(M,t)$ depends on t and one has the formula for the signature

$$I(N) \equiv \langle L(\tau_t) , [N] \rangle - A(M,t) \qquad \text{mod.}8$$

where N is a manifold of dimension $4k \geqslant 12$ with boundary M, t a SPL trivialization of τ_M and $L(\tau_t)$ the Hirzebruch class of the bundle on N/M defined from τ_N by t.