Astérisque

MARTIN EICHLER

Les variétés modulaires de Hilbert et Siegel et les courbes automorphes de Poincaré et Shimura

Astérisque, tome 24-25 (1975), p. 99-107

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__99_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 24-25 (1975)

LES VARIÉTÉS MODULAIRES DE HILBERT ET SIEGEL ET LES COURBES AUTOMORPHES DE POINCARÉ ET SHIMURA

par

Martin EICHLER

-:-:-:-

Soit k un corps de nombres algébriques totalement réel. Poincaré a trouvé quelques groupes Γ_1 de transformations :

$$(1) \qquad Z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

du demi-plan supérieur H , à coefficients dans une extension K/k de degré 2 , ayant un domaine fondamental compact. Par conséquent,les courbes $W_1 = H/\Gamma_1$ sont algébriques. En 1966, Shimura [1] a démontré que :

1) Ces courbes peuvent être définies sur un corps de nombres L ;

2) L est le corps de classes absolu de k ;

3) Les points fixes des transformations (1) ont des coordonnées (totalement complexes) dans certains corps de classes sur des extensions quadratiques imaginaires de k , et on obtient tous les corps de classes d'une certaine espèce de cette manière.

4) Soit p un idéal premier de k et P un diviseur premier de p dans L. Pour presque tout P, la réduction de la courbe par rapport à P est régulière. -Indiquons cette réduction par un tilde-. Si p est un idéal principal, on a pour la correspondance modulaire $T(p)$:

$$\tilde{T}(p) = \pi_P + \pi'_P$$

où π_P est la correspondance de Frobenius. Une équation analogue existe, si p n'est pas principal.

5) La fonction zêta de Hasse-Weil de la courbe peut être prolongée dans tout le plan complexe, et elle satisfait à une équation fonctionnelle de type conventionel (Cette dernière affirmation est déduite de 4) par application de la formule de Poisson).

Dans son mémoire, Shimura utilise des familles analytiques de variétés abéliennes. Il est naturel de les remplacer par des fonctions modulaires de Siegel (plus exactement de Hilbert-Siegel). Quoique ce ne soit pas une idée entièrement nouvelle, elle permet des simplifications. Aujourd'hui, je me bornerai au cas $k = Q$. Je n'ai pas encore réussi à démontrer tous les résultats de Shimura dans un cas plus général, mais je suis sûr que c'est possible. Je ferai quelques remarques sur le cas général à la fin.

Toutes nos considérations sont étroitement liées avec une longue série de mémoires de G. Humbert entre 1899 et 1906, sur lesquels Resnikoff [2] a rédigé un rapport en 1972. En effet, les variétés que nous allons étudier sont exactement celles dont les points sont des modules de variétés abéliennes singulières, permettant des multiplications complexes.

Nous considérerons certains sous-groupes du groupe symplectique. Soit

$m > 1$ un nombre naturel sans diviseur carré et

$$\alpha = a + b\sqrt{m} \to R(\alpha) = \begin{pmatrix} a & mb \\ b & a \end{pmatrix}$$

une représentation de $Q(\sqrt{m})$ sur Q. On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

La matrice :

$$M\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T\,R(\alpha)\,T^{-1} & T\,R(\beta) \\ R(\gamma)\,T^{-1} & R(\delta) \end{pmatrix}$$

est une matrice symplectique dans le sens suivant :

$$M^t J M = (\alpha\delta - \beta\gamma)\, J, \qquad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

si $\alpha\delta - \beta\gamma \in Q$.

Soit $q > 1$ un autre nombre naturel sans facteur carré. Alors les matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha & -q\beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix} \qquad (\alpha' \text{ est le conjugué de } \alpha)$$

forment un modèle d'une algèbre Φ de quaternions indéfinie, et

$$M(\Phi^*) = \{ M\begin{pmatrix} \alpha & -q\beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix} \}$$

est un plongement du groupe multiplicatif Φ^* de Φ dans le groupe symplectique.

Il existe une autre représentation de Φ par des matrices dans Q :

$$\overline{M}\begin{pmatrix} \alpha & -q\beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{T}\,R(\alpha)\,\overline{T}^{-1} & -q\,\overline{T}\,R(\beta) \\ R(\beta')\,\overline{T}^{-1} & R(\alpha') \end{pmatrix}$$

où on a : $\overline{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$.

On vérifie facilement que $M(\Phi)$ est formé de toutes les matrices à 4 lignes qui commutent avec toutes les matrices de $\overline{M}(\Phi)$, et inversement. Si l'on remplace Φ par un sous-anneau Φ_1 de dimension 2, l'ensemble de toutes les matrices commutant avec $\overline{M}(\Phi_1)$ est un anneau $M(\Phi_1)$ de dimension 8, contenant $M(\Phi)$.

Ce qui nous intéresse sont les variétés fixes d'un sous-anneau $\overline{M}(\Phi_1)$, contenues dans le demi-plan de Siegel :

$$V(\Phi_1) = \{ Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \Big| \overline{M}(\Phi_1)\, Z = Z \}$$

(où $MZ = Z$ signifie $Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ pour $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $A, B, C, D \in M_2(Q)$).

Nous étudions trois cas particuliers :

1) $\Phi_1 = \Phi$: $V(\Phi)$ a la dimension 1 et possède une représentation paramétrique

$$Z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z + z' & (z - z')\sqrt{m} \\ (z - z')\sqrt{m} & (z + z')\, m \end{pmatrix}, \quad z z' = -q ,$$

et la substitution

$$Z \to M\begin{pmatrix} \alpha & -q\beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix} Z \text{ est équivalente à } z \to \frac{\alpha z - q\beta}{\beta' z + \alpha'} .$$

2) Φ_1 = sous-anneau de Φ engendré par 1 et $\begin{pmatrix} a + b\sqrt{m} & -q\, c\sqrt{m} \\ -c\sqrt{m} & q - b\sqrt{m} \end{pmatrix}$, $c \neq 0$. Dans ce cas, $V(\Phi_1)$ a la dimension 2 et est donné par l'équation :

$$\det\left(Z + \frac{b}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}\right) = -\frac{m(b^2 + q c^2)}{c^2} ,$$

avec la dégénérescence possible $b = \infty$, $c = 0$, $bc = 1$, où on a la représentation paramétrique $Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & m\, z_{11} \end{pmatrix}$.

Ces surfaces ont été étudiées en détail par Humbert (voir 2) et Nobs [3].

3) $\Phi_1 = [1 , \begin{pmatrix} \sqrt{m} & 0 \\ 0 & -\sqrt{m} \end{pmatrix}]$, $V(\Phi_1) = V(\Phi) \times \sqrt{-q}\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |m| \end{pmatrix}$. Elles existent aussi si $m < 0$.

Les surfaces du deuxième cas forment une sorte de faisceau et ont pour intersection la courbe $V(\Phi)$. A cause de la commutativité des groupes $M(\Phi^*)$ et $\overline{M}(\Phi^*)$, les matrices $M(\Phi^*)$ forment un groupe d'isométries de $V(\Phi)$. Les variétés $V(\Phi_1)$ de seconde espèce ont un plus grand groupe d'isométries $M(\Phi_1)$. Ce sont aussi des matrices symplectiques, et les groupes sont isomorphes à $\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}(\sqrt{m(b^2+q\,c^2)}),\ \alpha\delta - \beta\gamma \in \mathbb{Q} \}$ (voir 2, 3).

Soit $\Gamma = Sp(2, Z)$ le groupe des matrices symplectiques entières dans le sens précisé précédemment.

Dans le second cas, les variétés :

$$W(\Phi_1) = V(\Phi_1) / \Gamma \cap M(\Phi_1) \quad ,$$

sont des variétés algébriques, commensurables avec les surfaces modulaires de Hilbert, dont les groupes automorphes sont :

$$\Gamma(\Phi_1) = \Gamma \cap M(\Phi_1) \quad .$$

Les $W(\Phi_1)$ sont plongées dans la variété modulaire de Siegel. Elles peuvent être définies sur Q.

[Démonstration (Nobs [3]). Dans le cas dégénéré on procède par comparaison des séries de Fourier des formes modulaires de Siegel et de Hilbert. Le cas général peut être ramené au cas dégénéré. Pour cela on doit savoir que les formes modulaires de Hilbert, appartenant à un sous-groupe du groupe modulaire peuvent être engendrées par celles qui ont leurs coefficients dans Q].

La courbe de Poincaré et Shimura est :

$$W(\Phi) = V(\Phi)/\Gamma \cap M(\Phi^*) \quad .$$

Etant l'intersection des surfaces $W(\Phi_1)$, elle est aussi définie sur Q. En effet, son idéal de spécialisation est la somme des idéaux de spécialisation des surfaces

$W(\Phi_1)$ (plus exactement : le radical de cette somme).

Alors, étudions les correspondances modulaires de $W(\Phi)$. Soit $\mathfrak{G}$ l'ordre formé par les matrices $\begin{pmatrix}\alpha & -q\beta \\ \beta' & \alpha'\end{pmatrix}$, où α, β sont des entiers de $Q(\sqrt{m})$. Le groupe automorphe

$$\Gamma(\Phi) = \Gamma \cap M(\Phi^*)$$

de $W(\Phi)$ est commensurable avec le groupe $M\begin{pmatrix}\alpha & -q\beta \\ \beta' & \alpha'\end{pmatrix}$, où $\begin{pmatrix}\alpha & -q\beta \\ \beta' & \alpha'\end{pmatrix}$ parcourt les unités de norme 1 de l'ordre $\mathfrak{G}$. Aussi, nous identifions ces groupes. La correspondance $T_1(n)$ de $W(\Phi)$ est l'union :

$$T_1(n) = \bigcup_i \Gamma(\Phi)\, M\begin{pmatrix}\alpha_i & -q\beta_i \\ \beta'_i & \alpha'_i\end{pmatrix} \quad ,$$

où les $\begin{pmatrix}\alpha_i & -q\beta_i \\ \beta'_i & \alpha'_i\end{pmatrix}$ représentent tous les idéaux à gauche de $\mathfrak{G}$, de norme n. Pour $n = p$ (nombre premier), $T_1(p)$ possède $p+1$ branches.

Les $T(n)$ peuvent être représentées par des idéaux par rapport à

$$\mathfrak{J}_1 = \{f(Z_1)\} \times \{f(Z'_1)\}$$

$\{f(Z_1)\}$ désignant le corps des fonctions automorphes du cas 1, c'est-à-dire de

$$Z_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z + z' & (z-z')\sqrt{m} \\ (z-z')\sqrt{m} & (z+z')\,m\end{pmatrix}, \quad zz' = -q \quad ,$$

et $\{f(Z'_1)\}$ est un autre exemplaire de $\{f(Z_1)\}$.

Ces idéaux sont engendrés par les produits de différences

$$\mathfrak{C}_1(n\,;\,Z_1\,,\,Z'_1) = \mathfrak{J}_1 \prod_i \left\{ f(Z_1) - f\left(M\begin{pmatrix}\alpha_i & -q\beta_i \\ \beta'_i & \alpha'_i\end{pmatrix} Z'_1\right)\right\}$$

pour toutes les fonctions $f(Z_1)$.

Au même temps nous considérons les correspondances modulaires pour la variété de Siegel :

$$T(n) = \bigcup_j \Gamma \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{pmatrix} ,$$

où $\begin{pmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{pmatrix}$ parcourt un système analogue de matrices symplectiques de norme n, à coefficients entiers. Les $T(n)$ sont elles aussi représentées par des idéaux

$$\mathfrak{C}(n\,;\, Z, Z') = \mathfrak{J} \prod \{f(Z) - f\left(\begin{pmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{pmatrix} Z'\right)\} ,$$

où $\mathfrak{J} = \{f(Z)\}_{\times}\{f(Z')\}$.

Or, Shimura a démontré [4] : quand on réduit le corps de fonctions $\{f(Z)\}$ modulaires de Siegel modulo un nombre premier (à un nombre fini d'exceptions près) -nous désignons la réduction par un tilde- on a :

$$(2) \qquad \widetilde{\mathfrak{C}}(p\,;\, Z, Z') = \widetilde{\mathfrak{J}}\,\{f(Z) - f(Z')^p\}\,\{f(Z)^p - f(Z')\}\,\widetilde{\mathfrak{G}}(Z, Z') ,$$

où $\widetilde{\mathfrak{G}}$ est un facteur qui ne nous intéresse pas.

Nous restreignons les variables Z, Z' dans $\mathfrak{C}(p\,;\, Z, Z')$ à Z_1, Z'_1. Quelques unes des matrices $\begin{pmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{pmatrix}$ peuvent être représentés par des $M \begin{pmatrix} \alpha_i & -q\,\beta_i \\ \beta'_i & \alpha'_i \end{pmatrix}$, mais certainement pas toutes. Ceci nous donne :

$$(3) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{C}(p\,;Z_1, Z'_1) &= \mathfrak{J}_1 \prod_i \{f(Z_1) - f(M\begin{pmatrix} \alpha_i & -q\,\beta_i \\ \beta'_i & \alpha'_i \end{pmatrix} Z'_1)\} \prod_j \{f(Z_1) - f\begin{pmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{pmatrix} Z'_1)\} \\ &= \mathfrak{C}_1(p\,; Z_1, Z'_1)\,\mathfrak{F}(Z_1, Z'_1) , \end{aligned}$$

où le premier facteur est l'idéal de la correspondance $T_1(p)$ pour $W(\Psi)$. Nous affirmons que le second facteur ne contient pas de facteur qui soit un idéal pour $\mathfrak{J}_1$. Sinon, il y aurait certaines matrices $G_j = \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{pmatrix}$ figurant dans $T(p)$, qui ne seraient pas de la forme $G\,M \begin{pmatrix} \alpha_i & -q\,\beta_i \\ \beta'_i & \alpha'_i \end{pmatrix}$, $G \in \Gamma$, et pour lesquelles les fonctions symétriques des $f(G_j Z)$ seraient contenues dans $\{f(Z_1)\}$, pour toutes les fonctions $f(Z_1)$. On en déduirait l'existence d'un $G \in \Gamma$ tel que les groupes $\Gamma(\Phi)$ et $(G\,G_j)^{-1}\;\Gamma(\Phi)\;(G\,G_j)$ soient commensurables. Mais il est facile de voir qu'alors $G\,G_j \in M(\Phi^*)$, et par conséquent $G G_j \in \Gamma(\Phi)$, ce qui est une contradiction.

Nous combinons la restriction et la réduction mod p . (3) donne :

$$\tilde{\mathfrak{C}}(p\,;\,Z_1\,,\,Z'_1) = \tilde{\mathfrak{C}}_1(p\,;\,Z_1\,,\,Z'_1)\;\tilde{\mathfrak{F}}(Z_1\,,\,Z'_1) \tag{4}$$

où $\tilde{\mathfrak{F}}$ ne contient pas de facteur qui soit un idéal pour $\tilde{\mathfrak{I}}_1$ (pour cela on doit exclure un nombre fini de p). D'autre part (2) donne :

$$\tilde{\mathfrak{C}}\,(p\,;Z_1\,,\,Z'_1) = \tilde{\mathfrak{I}}_1\,\{f(Z_1)-f(Z'_1)^p\}\{f(Z_1)^p-f(Z'_1)\}\cdot\tilde{\mathfrak{G}}(Z_1\,,Z'_1) \tag{5}$$

Parce que $\tilde{\mathfrak{C}}_1(p : Z_1\,,\,Z'_1)$ et $\tilde{\mathfrak{I}}_1\{f(Z_1)-f(Z'_1)^p\}\;\{f(Z_1)^p-f(Z'_1)\}$ sont des $\tilde{\mathfrak{I}}_1$-idéaux de même degré en Z_1 , et $\tilde{\mathfrak{F}}$ ne contient pas un tel idéal, nous avons :

$$\tilde{\mathfrak{C}}_1(p\,;\,Z_1,\,Z'_1) = \tilde{\mathfrak{I}}_1\,\{\widetilde{f(Z_1)} - \widetilde{f(Z'_1)}^p\}\;\{\widetilde{f(Z_1)}^p - \widetilde{f(Z'_1)}\}\quad . \tag{6}$$

(6) est la congruence de Shimura, mentionnée dans l'introduction.

Une congruence analogue existe aussi pour les surfaces $W(\Phi_1)$ de Hilbert, mais elle est moins facile, parce qu'on doit considérer le comportement des nombres premiers dans $Q(\sqrt{m})$.

Le cas d'un corps algébrique $k \supset Q$ est plus compliqué. La courbe de Poincaré et Shimura $W(\Phi)$ peut être définie de façon similaire (*), mais elle n'est pas l'intersection des surfaces modulaires de Hilbert. Toutefois, il est facile de voir qu'elle est une variété fixe de certaines correspondances modulaires, et à cause de cela elle peut être définie dans un corps de nombres algébriques. La

---

(*) La construction de $W(\Phi)$, s'appuit essentiellement sur le fait que $M\begin{pmatrix}\sqrt{m} & 0\\ 0 & -\sqrt{m}\end{pmatrix}$ a un point fixe $Z = \sqrt{-q}\;\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & |m|\end{pmatrix}$ même si $m < 0$.

partie 3 du théorème de Shimura est elle aussi, facile à démontrer par les mêmes idées, ce qui a été fait d'ailleurs par Shimura. La démonstration de 4 peut être effectuée comme dans le cas $k = \mathbb{Q}$ (avec certaines difficultés techniques).

-:-:-:-

RÉFÉRENCES

[1] G. SHIMURA. - Construction of class fields and zeta functions of algebraic curves. Annals of Math. 85 (1967), 58-159.

[2] H. L. RESNIKOFF. - Singular Kummer surfaces and Hilbert modular forms. Rice University studies 59 (1973), 109-129.

[3] A. NOBS. - Konstruktion von automorphen Funktionen durch Spezialisierung von Siegelschen Modulfunktionen. Diss. Basel (1972).

[4] G. SHIMURA. - On modular correspondences for Sp(n, Z) and their congruence relations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 49 (1963), 824-828.

-:-:-:-

Martin EICHLER
Mathematisches Institut
der Universität Basel
Rheinsprung 21
4051 BASEL