Astérisque

MARIE-FRANCE VIGNÉRAS

Quaternions et applications

Astérisque, tome 24-25 (1975), p. 47-56

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__47_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 24-25 (1975)

QUATERNIONS ET APPLICATIONS

par

Marie-France VIGNERAS

-:-:-:-

§. I. - FORMULE ANALYTIQUE DE LA MESURE D'UN ORDRE. - Si k est un corps de nombres, c'est-à-dire une extension finie du corps des nombres rationnels, les éléments entiers de k forment un anneau. Les idéaux I fractionnaires de cet anneau, pour la relation d'équivalence : $I' = Ia$, $a \in k^*$, se répartissent en classes d'équivalence. Le nombre de ces classes est fini. Dedekind a relié le nombre de classes de ces idéaux, noté h_k , avec le résidu au point 1 de la fonction zêta du corps k , notée $\zeta_k(.)$:

$$\lim_{s \to 1} (s-1)\, \zeta_k(s) = \frac{h_k}{\omega_k} \left[2^{r_1} (2\pi)^{r_2} \frac{R_k}{\sqrt{|d_k|}} \right]$$

où les notations sont les suivantes : r_1 et r_2 désignent respectivement le nombre de places réelles et imaginaires de k , le nombre de racines de l'unité contenues dans k est noté ω_k , enfin R_k et d_k sont le régulateur et le discriminant du corps k .

Nous voulons généraliser cette formule aux extensions finies de k. Si nous considérons une extension commutative de k, nous retrouvons un corps de nombres, aussi nous ne considérerons que les extensions non commutatives de k et parmi elles, les plus simples : les algèbres centrales simples sur k.

Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre centrale simple sur k, c'est-à-dire une algèbre dont le centre est k et ne contenant pas d'idéal bilatère non trivial. Les éléments entiers de $\mathfrak{A}$ ne forment pas un anneau, aussi on considère certains sous-anneaux que l'on appelle des ordres (ils contiennent l'anneau des entiers de k, et engendrent l'algèbre $\mathfrak{A}$ sur k). Si $\mathfrak{O}$ est un ordre de $\mathfrak{A}$, un idéal $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{O}$ sera toujours supposé à gauche de $\mathfrak{O}$ et localement libre. Pour la relation d'équivalence : $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}a$, $a \in \mathfrak{A}^*$ (c'est-à-dire, a inversible) les idéaux fractionnaires de $\mathfrak{O}$ se répartissent en classes. Le nombre de ces classes est fini. Notons le H. Nous définissons deux ensembles d'idéaux de k :

$S = \{ \mathfrak{P}$, idéal premier de k tel que l'ordre localisé $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ ne soit pas maximal$\}$

$P = \{(a)$, idéal principal de k engendré par un élément a positif aux places réelles de k ramifiées dans $\mathfrak{A}$, tel que $a \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}^*$ si $\mathfrak{P} \subset S\}$.

Le nombre de classes des idéaux de $\mathfrak{O}$ premier à S est aussi égal à H. Dans la suite, les idéaux I du corps k et $\mathfrak{J}$ de l'ordre $\mathfrak{O}$ sont supposés toujours premiers à S. Par passage au quotient, la norme réduite définit une application :

$$\mathrm{Nrd} : \mathrm{cl}\{\mathfrak{J}\} \to \{I\} / P$$

surjective des classes des idéaux de $\mathfrak{O}$ sur les classes des idéaux I de k pour la relation d'équivalence : $I' = Ia$, $(a) \in P$.

Si $\mathfrak{A}$ n'est pas un corps de quaternions totalement défini, cette application est aussi injective. Le nombre de classes H des idéaux de $\mathfrak{O}$ est donc égal au nombre de classes h_N des idéaux de k, dans le sens "restreint" défini plus haut.

Ce théorème : $H = h_N$ a été démontré par Eichler [1] dans le cas des ordres maximaux, et il a été généralisé aux ordres quelconques par Fröhlich [2] et Jacobinski [3].

Le seul cas à considérer est donc celui des corps de quaternions totalement définis. Soit $\mathfrak{A}$ un corps de quaternions totalement défini. Nous rappelons la définition de $\mathfrak{A}$: on peut choisir deux éléments a et b totalement positifs de k tels que $\mathfrak{A}$ soit le k-espace vectoriel de base 1, i, j, ij liés par les relations

$$i^2 = -a \quad , \quad j^2 = -b \quad , \quad ij = -ji \ .$$

Eichler savait, dès 1935, que l'application

$$\mathrm{Nrd} : \mathrm{cl}\{\mathfrak{J}\} \to \{I\}/P$$

n'est pas généralement injective. Le nombre h de classes des idéaux $\{\mathfrak{J}\}$ de norme réduite appartenant à P est donc généralement supérieur à 1. Existe-t-il une relation entre H, h_N, h ? La relation $H = h\, h_N$ est trop simple pour être vraie. Il est nécessaire d'affecter à chaque classe d'idéal un "poids" ou une "masse". Nous notons $(\mathfrak{J}_i)$, $1 \leq i \leq H$, un système de représentants des classes des idéaux de $\mathfrak{O}$ premiers à S. A chaque idéal $\mathfrak{J}_i$, nous affectons un certain poids e_i/ω_i (cette notation sera justifiée ultérieurement) et la relation entre H, h_N, h est :

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{H} \frac{e_i}{\omega_i} = h_N \sum_{i=1}^{h} \frac{e_i}{\omega_i} \ .$$

De plus, il existe une formule analytique reliant la "petite" somme

$$\sum_{i=1}^{h} \frac{e_i}{\omega_i}$$

avec la valeur au point -1 de la fonction zêta du corps k, constituant l'analogue de la formule de Dedekind pour les corps de nombres. Elle s'obtient à partir du calcul du nombre de Tamagawa du groupe algébrique induit par les quaternions de norme réduite 1, appelé le groupe spécial linéaire de la variété induite par $\mathfrak{A}$. Sur le groupe adélisé G_A d'un groupe algébrique G défini sur k, il y a une manière canonique d'induire une mesure de Haar à partir de mesures de Haar définies sur les localisés $k_{\mathfrak{P}}$ de k. Cette mesure s'appelle la mesure de Tamagawa du groupe adélisé. Le groupe des points G_k qui sont rationnels sur k, forment un sous-groupe discret de G_A et le volume de son domaine fondamental pour la mesure de Tamagawa s'appelle le nombre de Tamagawa du groupe G. (Pour que le nombre de Tamagawa soit défini, il est nécessaire que G vérifie certaines conditions). Weil [4] a démontré que le nombre de Tamagawa du groupe spécial linéaire est égal à 1. Ces considérations, quoique très générales, aideront peut-être le lecteur à comprendre l'énoncé de la formule analytique.

Nous précisons certaines notations. Le poids e_i/ω_i dépend des unités de l'ordre à droite de l'idéal $\mathfrak{I}_i$. Deux idéaux $\mathfrak{I}_i$ et $\mathfrak{I}'_i$ équivalents : $\mathfrak{I}'_i = \mathfrak{I}_i a$, $a \in \mathfrak{A}^*$ ayant des ordres à droites $\mathfrak{O}_i$ et $\mathfrak{O}'_i$ isomorphes : $\mathfrak{O}'_i = a^{-1}\mathfrak{O}_i a$, le poids est un invariant de la classe de l'idéal $\mathfrak{I}_i$. On pose :

$$\omega_i = [\, R^{*+} \cap_{\mathfrak{P}} \mathrm{Nrd}\, \mathfrak{O}^*_{\mathfrak{P}} : \mathrm{Nrd}\, \mathfrak{O}^* \,]$$

$$e_i = \mathrm{Card}\, \{x \in \mathfrak{O}_i \,,\ \mathrm{Nrd}\, x = 1\}$$

c'est-à-dire, ω_i est l'indice des normes réduites des unités de $\mathfrak{O}$ dans le groupe R^{*+} des unités de k, totalement positives qui sont localement des normes réduites des localisés de $\mathfrak{O}$ et e_i est le nombre d'unités de $\mathfrak{O}$ d'ordre fini.

Pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de k, nous notons $k_{\mathfrak{P}}$, $R_{\mathfrak{P}}$, $A_{\mathfrak{P}} = k_{\mathfrak{P}} \otimes_k \mathfrak{A}$, $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}} = R_{\mathfrak{P}} \otimes_R \mathfrak{O}$, $\mathfrak{J}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}} \mathfrak{J} = \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}} a_{\mathfrak{P}}$, $a_{\mathfrak{P}} \in \mathfrak{A}^*_{\mathfrak{P}}$ les localisés du corps k, de son anneau d'entiers R, ... etc. Nous définissons sur $k_{\mathfrak{P}}$ une valeur absolue $|\,.\,|_{\mathfrak{P}}$ normalisée par $|p|_{\mathfrak{P}} = 1/p$ si $\mathfrak{P}|p$, ainsi qu'une mesure de Haar $dx_{\mathfrak{P}}$ normalisée par

$$\int_{R_{\mathfrak{P}}} dx_{\mathfrak{P}} = 1 .$$

Nous en déduisons une mesure de Haar $\mu_{\mathfrak{P}}(.)$ sur $k^*_{\mathfrak{P}}$ par

$$\mu_{\mathfrak{P}}(x) = \frac{dx_{\mathfrak{P}}}{|x|_{\mathfrak{P}}}$$

et nous allons définir sur $\mathfrak{A}^*_{\mathfrak{P}}$ une mesure de Haar $\omega_{\mathfrak{P}}(.)$. Si $x \in \mathfrak{A}^*_{\mathfrak{P}}$, on a

$$x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4\, ij \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \in k_{\mathfrak{P}}$$

$$\mathrm{Nrd}\, x = x_1^2 + a x_2^2 + b x_3^2 + ab\, x_4^2 .$$

Si $(4\,ab) = \pi\, \mathfrak{P}^{m_{\mathfrak{P}}}$, on pose :

$$\omega_{\mathfrak{P}}(x) = N\mathfrak{P}^{-m_{\mathfrak{P}}} |\mathrm{Nrd}\, x|^{-2}_{\mathfrak{P}} (dx_1)_{\mathfrak{P}} (dx_2)_{\mathfrak{P}} (dx_3)_{\mathfrak{P}} (dx_4)_{\mathfrak{P}}$$

où $N(.)$ est la norme absolue de k, et enfin :

$$\alpha_{\mathfrak{P}} = \frac{\omega_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{O}^*_{\mathfrak{P}})}{\mu_{\mathfrak{P}}(\mathrm{Nrd}\, \mathfrak{O}^*_{\mathfrak{P}})} .$$

La formule analytique est la suivante [5], [6] :

THÉORÈME. - <u>On a</u> : $\sum_{i=1}^{h} \frac{e_i}{\omega_i} = (4\pi^2)^{-n}\, d_k^{3/2} \prod_{\mathfrak{P}} \alpha_{\mathfrak{P}}^{-1}$

n est le degré du corps k, les autres notations ont été déjà définies.

Si $\mathfrak{O}$ est un ordre maximal, on peut calculer $\alpha_{\mathfrak{P}}$, noté $\alpha^{(m)}_{\mathfrak{P}}$

$$\alpha^{(m)}_{\mathfrak{P}} = \begin{cases} 1 - N\mathfrak{P}^{-2} & \text{si } \mathfrak{P} \text{ ne se ramifie pas dans } \mathfrak{A} \\ (1 - N\mathfrak{P}^{-2})(N\mathfrak{P} - 1)^{-1} & \text{sinon} . \end{cases}$$

Si $\mathfrak{P}$ ne se ramifie pas, $\alpha_{\mathfrak{P}}^{(m)}$ est la mesure de $SL_2(R_{\mathfrak{P}})$. La convergence du produit $\pi\alpha_{\mathfrak{P}}^{(m)}$ résulte de la convergence de la fonction zêta $\zeta_k(.)$ de k au point 2 . L'équation fonctionnelle de zêta qui relie sa valeur au point 2 à sa valeur au point 1 :

$$\zeta_k(-1) = \zeta_k(2)\, d_k^{3/2}\, (-2\pi^2)^{-n}$$

nous permet d'écrire le théorème précédent sous une autre forme :

THÉORÈME. - On a :

$$\sum_{i=1}^{h} \frac{e_i}{\omega_i} = \frac{\zeta_k(-1)}{2^n} \prod_{\mathfrak{P}\text{ ramifié}} (1-N\mathfrak{P}) \prod_{\mathfrak{P}\in S} \frac{\alpha_{\mathfrak{P}}^{(m)}}{\alpha_{\mathfrak{P}}} .$$

Ce théorème, ainsi que la relation (1) redonne la formule de la mesure de Eichler pour les ordres maximaux [1].

Remarque : Le groupe des unités $\mathfrak{O}^*$ d'un ordre $\mathfrak{O}$ a une structure simple [6]. Son groupe de torsion W est fini et son quotient par $\{\mp 1\}$ est isomorphe à un sous-groupe fini de rotations de $\mathbb{R}^3$. Des motivations géométriques ont amené depuis longtemps les mathématiciens à déterminer les sous-groupes finis de rotation, on en déduit la structure de W . Notons R^* le groupe des unités de k . Le sous-groupe $W R^*$ est-il très petit ou représente-t-il bien $\mathfrak{O}^*$? La réponse est :

$$[\mathfrak{O}^* : W R^*] = 1 , 2 \text{ ou } 4 .$$

La structure de $\mathfrak{O}^*$ s'explicite très bien et des conditions très simples déterminent la valeur de cet indice. On obtient une bonne généralisation du théorème de Hasse sur l'indice des unités des ordres des extensions commutatives quadratiques imaginaires de k (dans ce cas l'indice est 1 ou 2).

§. II. - SIMPLIFICATION [6]. - On aborde une première application de la formule analytique de la mesure. On aurait pu reconnaître que h, défini dans le paragraphe précédent, était le nombre de classes des idéaux stablement libres de $\mathfrak{O}$. Un idéal $\mathfrak{J}$ d'un ordre $\mathfrak{O}$ d'une algèbre centrale simple $\mathfrak{A}$ est dit stablement libre si

$$\mathfrak{O} \oplus \mathfrak{J} \simeq \mathfrak{O} \oplus \mathfrak{O} .$$

Si on a le droit de simplifier, c'est-à-dire, si pour tout idéal $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{O}$, cette relation est équivalente à

$$\mathfrak{J} \simeq \mathfrak{O}$$

(ou encore $\mathfrak{J}$ libre), on dit que l'ordre $\mathfrak{O}$ possède la propriété de simplification. Eichler, Jacobinski et Fröhlich ont donc démontré que les ordres des algèbres, qui ne sont pas des corps de quaternions totalement définis, possèdent la propriété de simplification. Dans le cas des corps de quaternions totalement définis la formule analytique de la mesure donne un critère effectif pour déterminer les ordres de quaternions totalement définis ayant la simplification.

L'égalité $h = 1$ s'exprime encore par :

$$\sum_{i=1}^{h} \frac{e_i}{\omega_i} = \frac{e}{\omega}$$

où e et ω sont relatifs à l'ordre $\mathfrak{O}$. Le théorème suivant est alors évident :

THÉORÈME. - Pour qu'un ordre $\mathfrak{O}$ ait la propriété de simplification, il faut et il suffit que :

$$\frac{e}{\omega} = \frac{\zeta_k(-1)}{2^n} \prod_{\mathfrak{P} \text{ ramifié}} (1 - N\mathfrak{P}) \prod_{\mathfrak{P} \in S} \frac{\alpha_{\mathfrak{P}}^{(m)}}{\alpha_{\mathfrak{P}}} .$$

Nous avons calculé tous les ordres $\mathfrak{O}$ des corps de quaternions totalement défini lorsque $\mathfrak{O}$ est héréditaire et lorsque k est égal à [6] :

1) $\mathbb{Q}$

2) un corps quadratique réel

3) un corps cubique abélien réel.

En remplaçant $\zeta_k(-1)$ par $\zeta_k(2)\, d_k^{3/2}\, (-2\pi^2)^{-n}$ et en utilisant les minorations du dsicriminant de k effectuées par Rogers (citées dans Hasse [7]) on démontre le théorème :

THÉORÈME. - Il n'y a qu'un nombre fini (à isomorphisme près) d'ordres de quaternions totalement définis ayant la propriété de simplification.

On démontre que le degré du corps est majoré par 33 (probablement, cette base peut être ramenée à 10). Le corps k étant fixé, il n'y a qu'un nombre fini de corps de quaternions sur ce corps susceptibles de contenir un ordre avec la simplification. Dans un corps de quaternions donné, il y a au plus un nombre fini d'ordres (à isomorphisme près) ayant la simplification.

§. III. - PARTIE FRACTIONNAIRE DE $\zeta_k(-1)$. - Dans le cas d'un ordre maximal (aussi pour un ordre héréditaire) Eichler a donné, en 1955, une formule du nombre de classes [1]. Cette formule relie le nombre de classes H d'un ordre maximal avec $\zeta_k(-1)$ et les nombres de classes relatifs des extensions quadratiques imaginaires de k , dont l'indice des unités (au sens de Hasse) est différent de 1 . Il existe une formule analogue pour le nombre de types d'ordres et la comparaison de ces deux formules démontre que [8] :

$$2H/h_k \in \mathbb{Z} \quad .$$

Cette relation implique des congruences entre $\zeta_k(-1)$ et les nombres de classes relatifs.

Pour tout nombre premier p , on note ξ_p une racine de l'unité d'ordre $2p$ et respectivement h'_p , ω_p , s_p le nombre de classes rélatif $h_{k(\xi_p)}/h_k$, l'indice des unités de k dans $k(\xi_p)$, le nombre d'idéaux premiers dans k au-dessus de p , inertes dans $k(\xi_p)$.

THÉORÈME. - <u>Si</u> $[k(\xi_p) : k] > 2$, <u>ou s'il existe un idéal premier</u> $\mathfrak{P}|p$ <u>de</u> k <u>décomposé dans</u> $k(\xi_p)$, <u>alors</u> $\zeta_k(-1)$ <u>est entier en</u> p . <u>Sinon la</u> p<u>-partie fractionnaire de</u> $\zeta_k(-1)\, 2^{2-n}$ <u>si</u> p <u>est impair</u> (<u>resp.</u> $\zeta_k(-1)\, 2^{3-n}$ <u>si</u> $p = 2$) <u>est celle de</u>

$$\frac{h'_p\, 2^{s_p}}{\omega_p \prod_{\mathfrak{P}|p}(1-N\mathfrak{P})} \quad \underline{\text{resp.}} \quad \frac{h'_p\, 2^{s_p+1}}{\omega_2 \prod_{\mathfrak{P}|p}(1-N\mathfrak{P})} .$$

La congruence pour 2 se raffine lorsque $H/h_k \in \mathbb{N}$. Ce résultat a été obtenu par Brown [9] .

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. EICHLER. - Uber die Idealklassenzahl total definiter Quaternionenalgebren. Math. Zeit. 43, 1937, 102-109.

[2] A. FRÖHLICH. - Locally free modules over arithmetic orders. J. reine angew. Math. (à paraître).

[3] H. JACOBINSKI. - Genera and decomposition of lattices over orders. Acta Math., 121, 1968, p. 1-29.

[4] A. WEIL. - Adeles and algebraic groups. Princeton, 1961.

[5] M.-F. GUÉHO. - Le théorème d'Eichler sur le nombre de classes d'idéaux d'un corps de quaternions totalement défini et la mesure de Tamagawa. Mémoires de la S. M. F. (à paraître).

[6] M.-F. VIGNERAS. - Simplification pour les ordres des corps de quaternions totalement définis. (à paraître).

[7] H. HASSE. - Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. Akademie Verlag Berlin, 1952.

[8] M.-F. VIGNERAS. - Nombre de classes d'un ordre d'Eichler et valeur au point -1 de la fonction zêta d'un corps quadratique réel. Enseignement mathématique (à paraître).

[9] K. S. BROWN. - Euler characteristics of discrete groups and G-spaces. Inventiones math. 27, 229-264, 1974.

-:-:-:-

Marie-France VIGNERAS
E. R. A. au C. N. R. S. n° 362
U. E. R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 TALENCE