Astérisque

HEDI DABOUSSI

Fonctions multiplicatives presque périodiques *B*

Astérisque, tome 24-25 (1975), p. 321-324
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__321_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 24-25 (1975)

FONCTIONS MULTIPLICATIVES PRESQUE PÉRIODIQUES B

par

Hedi DABOUSSI

(d'après un travail commun avec Hubert DELANGE)

-:-:-:-

I. - Une fonction f de N^* dans $\mathbb{C}$ est multiplicative si

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f(m.n) = f(m).f(n) \text{ toutes les fois que } (m,n) = 1 \ .$$

Une fonction arithmétique f est presque périodique B (B pour Bésicovitch) si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_\varepsilon$ polynôme trigonométrique, $P_\varepsilon(x) = \Sigma\, a_j\, e^{2\pi i\, \alpha_j x}$ avec $\alpha_j \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \ \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n) - P_\varepsilon(n)| \leq \varepsilon \ .$$

Des conditions suffisantes pour qu'une fonction multiplicative soit presque périodique B ont été déterminés par Erdös, Hartman, Kac, Van Kampen et Wintner [5, 6, 7, 10, 11], Novoselov [9] a fourni une nouvelle démonstration de ces résultats.

Nous allons, dans la suite, considérer les fonctions multiplicatives f de module au plus égal à un et déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient presque périodiques B .

II. - Il est clair qu'une fonction presque périodique B admet des coefficients de Fourier Besicovitch, c'est-à-dire que la limite quand $x \to +\infty$ de $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) e^{2\pi i n\alpha}$ existe pour tout α réel.

THÉORÈME 1. - Pour tout α irrationnel $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n)\, e^{2\pi i n\alpha}$ tend vers zéro quand $x \to +\infty$.

Le théorème 1 découle des deux lemmes suivants :

LEMME 1. - $\exists c > 0$ tel que pour tout $a_n \in \mathbb{C}$, pour tout $y \leq \sqrt{x}$ on a :

$$\sum_{p \leq y} \frac{1}{p} \left| \frac{p}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ p \mid n}} a_n - \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} a_n \right|^2 \leq c \,.\, \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |a_n|^2 .$$

Le lemme 1 se déduit de l'inégalité de Turan Kubilus [8, 4], il se déduit également d'inégalités du type "grand crible".

LEMME 2. - Pour tout $y > 0$ et pour tout $\alpha \notin \mathbb{Q}$,

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \sum_{p \leq y} \frac{1}{p} \left| \frac{p}{x} \sum_{n \leq \frac{x}{p}} f(n)\, e^{2\pi i n\alpha p} \right|^2 \leq 1 .$$

THÉORÈME 2. - a) Si pour tout caractère de Dirichlet χ et tout nombre réel u on a $\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f(p)\chi(p)p^{iu})) = +\infty$ alors $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n)\, e^{2\pi i n\alpha}$ tend vers zéro pour tout α rationnel.

b) S'il existe un nombre réel a et un caractère de Dirichlet χ tel que $\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f(p)\chi(p)p^{ia}))$ soit convergente, alors :

$\forall \alpha \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) e^{2\pi i n \alpha} = C_\alpha x^{ia} \exp i A(x) + o(1)$, où $C_\alpha \in \mathbb{C}$ et A est une fonction réelle telle que $\sup_{x \leq y \leq x^2} |A(y) - A(x)| = o(1)$.

On peut prendre $A(x) = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} (\operatorname{Im} f(p) \chi(p) p^{-ia})$.

De plus il existe au moins un $\alpha \in \mathbb{Q}$ telle que $C_\alpha \neq 0$.

Ce théorème se déduit des résultats de Delange [3], concernant les valeurs moyennes sur une progression arithmétique des fonctions multiplicatives.

III. - Les théorèmes 1 et 2 entraînent qu'une fonction f est presque périodique non triviale [1] seulement si $\sum \frac{1 - \chi(p) f(p)}{p}$ est convergente où χ est un caractère de Dirichlet. Cette condition est en fait suffisante et nous avons :

THÉORÈME 3. - Une fonction f est presque périodique B si et seulement si il existe un caractère de Dirichlet χ tel que la série $\sum \frac{1 - \chi(p) f(p)}{p}$ converge.

En effet, si χ est le caractère constant égal à un, on obtient, grâce au théorème de Delange [2] :

$$\overline{\lim_{y \to +\infty}}\ \overline{\lim_{x \to +\infty}}\ \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n) - f_y(n)|^2 = 0$$

où f_y est la fonction multiplicative périodique définie par :

$$f_y(p^r) = \begin{cases} 1 & \text{si } p^r > y \\ f(p^r) & \text{si } p^r \leq y . \end{cases}$$

Dans le cas général, la fonction $\chi(n) f(n)$ est presque périodique B , et le résultat découle du lemme de "transfert" suivant :

LEMME 3. - Si $\chi(n) f(n)$ est presque périodique B , alors f est presque périodique B .

BIBLIOGRAPHIE

[1] f est presque périodique B avec un spectre vide si et seulement si on a

$$\Sigma \frac{1-|f(p)|}{p} = +\infty \ .$$

[2] DELANGE. - Annales E. N. S. 78, 1961, pp. 273-304.

[3] DELANGE. - Comptes rendus 275, série A, 1972, p. 781.

[4] PDTA ELLIOT. - On connections between the Turan Kubilus inequality and the large sieve. Procee. symposia. Math. Vol. XXIV, pp. 77-82.

[5] ERDÖS, WINTNER. - Additive functions and almost perodicity B^2. A. J. Math. 62, 1940, pp. 635-645.

[6] HARTMAN, WINTNER. - On the almost periodicity of additive number theoritical functions. Am. J. Math. 62, 1940, pp. 753-758.

[7] KAC, VAN KAMPEN, WINTNER. - Ramanujan sums and almost periodic functions. Am. J. Math. 62, 1940, pp. 107-114.

[8] KUBILUS. - Probabilistic Methods in the theory of numbers. Transl. Math. Monographs, Vol. 11, Am. Math. Soc. Providence.

[9] NOVOSELOV. - A new method in probabilistic number theory. Am. Math. S. Transl. 52, 1966, pp. 217-275.

[10] VAN KAMPEN, WINTNER. - On the almost periodic behavior of multiplicative number theoritical functions. Am. J. Math. 62, 1940, pp. 613-626.

[11] WINTNER. - Number Theoritical almost periodicities. Am. J. Math. 67, 1945, pp. 173-193.

-:-:-:-

Hedi DABOUSSI
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
B. P. 347
51062 REIMS