MARC REVERSAT

Sur les suites eutaxiques

Astérisque, tome 24-25 (1975), p. 267-280
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__267_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 24-25 (1975)

SUR LES SUITES EUTAXIQUES

par

Marc REVERSAT

-:-:-:-

§. I. - INTRODUCTION. - Les problèmes d'eutaxie consistent en l'étude de l'ensemble des éléments x, de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ par exemple, pour lesquels il existe une infinité de solutions n à l'inéquation : (1) $\|u_n - x\|_q < \varepsilon_n$ (où $\| \, . \, \|_q$ désigne la norme de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite donnée de nombres réels positifs, décroissante, telle que la série $\Sigma\, \varepsilon_n^q$ soit divergente).

Si l'ensemble des éléments x de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ pour lesquels l'inéquation (1) admet une infinité de solutions est de complémentaire négligeable relativement à la mesure de Haar, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite <u>eutaxique relativement à la suite</u> $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite <u>eutaxique</u> si elle est eutaxique relativement à toute suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante, telle que la série $\Sigma\, \varepsilon_n^q$ soit divergente. Cette notion a été introduite par J. Lesca ([2]).

Le plus ancien résultat d'eutaxie est le théorème métrique de Khintchine (Khinčin). De nombreux auteurs ont étudié le problème d'eutaxie suivant ([8]) :

soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications d'un pavé S de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ (p et q entiers positifs). Soit $\theta\in(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$. Quelle est la mesure de l'ensemble des éléments x de S pour lesquels (2) $\|\varphi_n(x)-\theta\|_q < \varepsilon_n$ (où l'inconnue est l'entier n) possède une infinité de solutions ?

Les cas suivants ont été étudiés :

- Par W. M. Schmidt lorsque la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et (φ_n) l'application de $\mathbb{R}^q$ dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ définie par : $\varphi_n(x) = P(n)x \pmod{\mathbb{Z}^q}$, P étant un polynôme à coefficients entiers ([9]).

- Par W. Philipp lorsque φ_n est l'application de l'intervalle $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définie par : $\varphi_n(x) = x\,\alpha^n \pmod 1$, α étant un réel supérieur à 1 ([5]).

- Par B. de Mathan pour les applications $\varphi_n : x \to \alpha\, x^n \pmod 1$ (α étant un réel positif) définies dans l'intervalle $]1, +\infty[$ ([3]).

Dans ces trois exemples, il est montré que tout $\theta\in(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$, l'inéquation (2) possède pour presque tout $x\in S$ une infinité de solutions lorsque la série $\sum_n \varepsilon_n^q$ diverge.

Ce type de résultat implique que pour une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est eutaxique pour presque tout x, relativement à la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mais cela n'implique pas que la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit eutaxique pour presque tout x, car l'ensemble de complémentaire négligeable formé des éléments x pour lesquels la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est eutaxique par rapport à une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée dépend de cette suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi il a été démontré par J. Lesca ([2]) que la suite $(nx)_{n\in\mathbb{N}}$ est eutaxique dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ si et seulement si x est de constante de Markov finie, i.e. pour presque aucun x.

Ce résultat avait conduit J. Lesca et B. de Mathan à conjecturer que preque aucune suite (relativement à la mesure de Haar du groupe compact $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$) ne serait eutaxique. Dans cet article nous démontrons qu'il n'en est rien et qu'en fait presque toute suite d'éléments de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ est eutaxique. Pour cela nous établissons un critère suffisant d'eutaxie à l'aide de certaines fonctions λ définies sur l'ensemble des suites d'éléments de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$. Ce critère permet également d'étudier l'eutaxie de la suite $(nx)_{n\in\mathbb{N}}$ en dimension q. Cette suite est eutaxique si et seulement si $M_q(x) = \lim\sup_{n>0} (1/n^{1/q} \|nx\|_q)$ est finie. En dimension 1, J. Lesca démontrait ce théorème en utilisant le développement de x en fractions continues, permettant d'obtenir des propriétés très fortes de répartition sur la suite $(nx)_{n\in\mathbb{N}}$, propriétés qui ne peuvent s'étendre aux dimensions supérieures à 1. Notre critère permet également d'étudier l'eutaxie des suites $(a_n x)_{n\in\mathbb{N}}$, soit lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît "très lentement", soit lorsqu'elle croît "très vite".

Notations : Si x est un nombre réel, $[x]$ désigne la partie entière de x, et $\{x\}$ l'élément de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ associé à x par la surjection canonique $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Nous désignons par q un entier positif, par $\|\cdot\|_q$ la norme de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ ($\|(x_1,\dots,x_q)\|_q = \sup_{i=1,\dots,q} \|x_i\|_1$), et par μ_q la mesure de Haar normalisée de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$. Nous dirons qu'un élément $(x_1,\dots,x_q)$ de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ est rationnel s'il appartient à $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^q$.

Nous ferons souvent l'abus de notations consistant à confondre un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans $[0,1[$ et son image canonique dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Ainsi, si N est un entier positif et si $k = (k_1,\dots,k_q)$ est un q-uplet d'entiers tels que

$0 \leq k_i < [N^{1/q}]$, nous désignons par $P(k;N)$ l'hypercube de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ défini par :

$$P(k;N) = P(k_1, \dots, k_q; N) = \prod_{i=1}^{q} [\frac{k_i}{[N^{1/q}]} , \frac{k_i + 1}{[N^{1/q}]}[\ .$$

§. II. - <u>EUTAXIE ET RÉPARTITION.</u> - Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ et K un hypercube de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$, de mesure non nulle. Soit N un entier positif. Désignons par $\lambda(K, u, N)$ le nombre de q-uplets d'entiers $k = (k_1, \dots, k_q)$ tels que $0 \leq k_i < [N^{1/q}]$ pour $i = 1, \dots, q$ et tels que le pavé $K \cap P(k;N)$ contienne au moins un point u_n avec $1 \leq n \leq N$. On pose :

$$\lambda(K,u) = \liminf_{N} \frac{\lambda(K, u, N)}{N \mu_q(K)}$$

$$\chi(u) = \inf_{K} \lambda(K,u)$$

(K décrivant la famille des hypercubes de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ de mesures non nulles et à sommets rationnels).

Remarquons que les fonctions $\lambda(K, .)$ et χ sont invariantes par l'application de $((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q)^{\mathbb{N}}$ dans lui-même qui a la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associe la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_{n+1}$ (Shift-endomorphism).

THÉORÈME I. - <u>Soit</u> u <u>une suite d'éléments de</u> $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$. <u>Si</u> $\chi(u)$ <u>est strictement positif,</u> <u>alors la suite</u> u <u>est eutaxique.</u>

Nous démontrons d'abord le lemme suivant : Soit t un entier positif. Pour tout pavé K de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ désignons par $N_q(K, t)$ le nombre de q-uplets d'entiers $k = (k_1, \dots, k_q)$ tels que $0 \leq k_i < t$ pour $i = 1, \dots, q$ et tels que l'hypercube $P(k;t^q)$ rencontre K sans être inclus dans K . Si α désigne un nombre réel positif, soit : $N_q(\alpha, t) = \sup_K N_q(K,t)$ (K décrivant la famille des pavés de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ dont chaque côté est de mesure au plus α).

LEMME I. 1. - $N_q(\alpha, t) \leq 2^{q+1} (\max(\alpha t, 2))^{q-1}$.

Preuve : Pour $i = 1, \ldots, q$, soit I_i un intervalle de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de mesure $\alpha_i \leq \alpha$ et soit $K = \prod_{i=1}^{q} I_i$.

Le nombre $N_q(K,t)$ est majoré par la différence du nombre de pavés de forme $P(k_1, \ldots, k_q ; t^q)$ ($k_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq k_i < t$ pour $i = 1, \ldots, q$) qui rencontrent K et du nombre de ceux qui sont contenus dans K . Le nombre d'intervalles de la forme $[\frac{k}{t}, \frac{k+1}{t}[$ ($k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k < t$) rencontrant l'intervalle I_i est au plus $[\alpha_i t] + 2 \leq \alpha_i t + 2$, et le nombre de ceux inclus dans I_i est au moins $\max(\alpha_i t - 2, 0)$. Donc :

$$N_q(K,t) \leq \prod_{i=1}^{q} (\alpha_i t + 2) - \prod_{i=1}^{q} \max(\alpha_i t - 2,\ 0) \ .$$

Pour $j = 1, \ldots, q$, la fonction

$$\alpha_j \to \prod_{i=1}^{q} (\alpha_i t + 2) - \prod_{i=1}^{q} \max(\alpha_i t - 2, 0) \quad (\alpha_i \text{ fixé pour } i \neq j)$$

est croissante, par conséquent :

$$N_q(K,t) \leq (\alpha t + 2)^q - (\max(\alpha t - 2,\ 0))^q$$

d'où il résulte la majoration cherchée.

Démonstration du théorème I : Posons $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((u_n^{(1)}, \ldots, u_n^{(q)}))_{n \in \mathbb{N}}$. Soit (ε_n) une suite décroissante de nombres réels positifs. Soit V_n l'hypercube de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ obtenu comme produit des intervalles ouverts de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de centres $u_n^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, q)$ et de rayons ε_n , et soit $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} V_n$. Il suffit de montrer que si la série $\sum_n \varepsilon_n^q$ est divergente, on a $\mu_q(V) = 1$. En effet, la fonction $\lambda(K, .)$

étant invariante par le Shift-endomorphism, on aura alors $\mu_q(\bigcup_{n\geq N} V_n) = 1$ pour tout entier positif N et par suite $\mu_q(\bigcap_{N>0}\bigcup_{n\geq N} V_n) = 1$.

Soit a un nombre réel tel que $0<a<\chi(u)$. Le fait que $\mu_q(V) = 1$ résultera des lemmes suivants :

LEMME I. 2. - <u>Soit</u> (ε_n) <u>une suite décroissante de nombres réels positifs. S'il existe un hypercube</u> K <u>de</u> $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ <u>de mesure non nulle et à sommets rationnels tel que</u> $\mu_q(K\cap V) \leq \frac{a}{2^{q+2}}\mu_q(K)$, <u>alors, pour toute suite</u> $(t_s)_{s\in\mathbb{N}}$ <u>d'entiers positifs telle que</u> $t_s/t_{s-1} > (2/a\,\mu_q(K))^{1/q}$, <u>il existe un entier</u> s_o <u>tel que</u> $\varepsilon_{t_s^q} < \frac{1}{2t_s}$ <u>pour</u> $s > s_o$.

<u>Preuve</u> : Soit $(t_s)_{s\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers positifs tels que $t_s/t_{s-1} > (2/a\,\mu_q(K))^{1/q}$ et soit s_1 tel que $\lambda(K, u, t_s^q) > a\,\mu_q(K)\,t_s^q$ pour tout $s > s_1$. Soit $s>s_1$ et supposons que $\varepsilon_{t_s^q} \geq \frac{1}{2t_s}$. Soit $U_s = \bigcup_{t_{s-1}^q<n\leq t_s^q} V_n$.

Le nombre d'hypercubes $P(k_1,\dots,k_q\,;\,t_s^q)$ ($k_i\in\mathbb{N}$ et $0\leq k_i<t_s$ pour $i=1,\dots,q$) tels que $P(k_1,\dots,k_q\,;\,t_s^q)\cap K$ contienne au moins un point u_n avec $t_{s-1}^q<n\leq t_s^q$ est au moins $(a\,\mu_q(K)\,t_s^q - t_{s-1}^q)$. Le nombre de ces hypercubes contenus dans K est donc au moins $(a\,\mu_q(K)\,t_s^q - t_{s-1}^q - 2^{q+1}\,t_s^{q-1})$, puisque, d'après le lemme I. 1., le nombre d'hypercubes $P(k_1,\dots,k_q\,;\,t_s^q)$ qui rencontrent K sans être contenus dans K est majoré par $2^{q+1}(\max(\mu_q(K)^{1/q}t_s,\,2))^{q-1} \leq 2^{q+1}\,t_s^{q-1}$.

Pour chaque hypercube $P(k_1,\dots,k_q\,;\,t_s^q)$ ($k_i\in\mathbb{N}$ et $0\leq k_i<t_s$ pour $i=1,\dots,q$) tel que $P(k_1,\dots,k_q\,;\,t_s^q)$ soit inclus dans K et tel qu'il existe un entier n avec $t_{s-1}^q<n\leq t_s^q$ et $u_n\in P(k_1,\dots,k_q\,;\,t_s^q)$, on a :

$$\mu_q(U_s\cap P(k_1,\dots,k_q\,;\,t_s^q)) \geq \frac{1}{2^q\,t_s^q}$$

puisque $\varepsilon_n \geq \varepsilon_{t_s^q} \geq \frac{1}{2t_s}$ et que pour chaque indice $i=1,\dots,q$ l'un au moins des deux intervalles $]u_n^{(i)}, u_n^{(i)} + \frac{1}{2t_s}[$ ou $]u_n^{(i)} - \frac{1}{2t_s}, u_n^{(i)}[$ est contenu dans $[\frac{k_i}{t_s}, \frac{k_i+1}{t_s}[$. On a donc :

$$\mu_q(U_s \cap K) \geq \frac{1}{2^q t_s^q}(a\,\mu_q(K)\,t_s^q - t_{s-1}^q - 2^{q+1}\,t_s^{q-1})$$

$$\geq \frac{a}{2^{q+1}}\,\mu_q(K) - \frac{2}{t_s}\ .$$

On aura donc $\mu_q(U_s \cap K) > \frac{a}{2^{q+2}}\,\mu_q(K)$ pour suffisamment grand.

LEMME I. 3. - Soit (ε_n) une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série $\Sigma\,\varepsilon_n^q$ soit divergente. Alors, pour tout hypercube K de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ de mesure non nulle et à sommets rationnels, l'on a :

$$\mu_q(K \cap V) > \frac{a}{2^{q+2}}\,\mu_q(K)\ .$$

Preuve : La démonstration se fait par l'absurde. Supposons qu'il existe un hypercube K de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ de mesure non nulle et à sommets rationnels tel que $\mu_q(V \cap K) \leq \frac{a}{2^{q+2}}\,\mu_q(K)$. Soit δ un entier positif tel que $\delta > \frac{q\,2^{q+3}}{a\,\mu_q(K)}$ (donc $\delta > (\frac{2}{a\,\mu_q(K)})^{1/q}$). Soit (ν_n) la suite définie par :

$$\nu_n = \varepsilon_{\delta^{qs}} \quad \text{si} \quad \delta^{q(s-1)} < n \leq \delta^{qs} \quad (\nu_1 = \varepsilon_1)\ .$$

Soit V'_n l'hypercube de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ obtenu comme produit des intervalles de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ $]u_n^{(i)} - \nu_n, u_n^{(i)} + \nu_n[$ $(i = 1, \dots, q)$ et pour tout entier positif s, soit $W_s = \bigcup_{n \leq \delta^s} V'_n$. Comme $V'_n \subset V_n$, on a $\mu_q(W_s \cap K) \leq \frac{a}{2^{q+2}}\,\mu_q(K)$ pour tout entier s.

Evaluons $\mu_q(K \cap (W_s \setminus W_{s-1}))$: d'après le lemme I. 2., on peut supposer s suffisamment grand pour que $\varepsilon_{\delta^{qs}} < \frac{1}{2\delta^s}$. Le nombre d'hypercubes $P(k_1, \dots, k_q\ ;\ \delta^{qs})$ $(k_i \in \mathbb{N}\ ,\ 0 \leq k_i < \delta^s$ pour $i = 1, \dots, q)$ contenus dans l'ensemble $K \cap W_{s-1}$ est au plus $(\frac{a}{2^{q+2}}\,\mu_q(K)\,\delta^{qs})$ puisque, par hypothèse,

$\mu_q(K \cap W_{s-1}) \leq \frac{a}{2^{q+2}} \mu_q(K)$. Le nombre d'hypercubes $P(k_1, \ldots, k_q \,;\, \delta^{qs})$ qui rencontrent $K \cap W_{s-1}$ sans être contenus dans cet ensemble est majoré par le nombre de ces hypercubes qui rencontrent les ensembles $K \cap V'_n$ $(0 < n \leq \delta^{q(s-1)})$ et qui ne sont pas contenus dans ces ensembles. Donc, d'après le lemme I. 1., le nombre d'hypercubes $P(k_1, \ldots, k_q \,;\, \delta^{qs})$ qui rencontrent $K \cap W_{s-1}$ sans être contenus dans cet ensemble est majoré par

$$\sum_{0<n\leq \delta^{q(s-1)}} 2^{q+1}((2\nu_n \delta^s)^{q-1} + 2^{q-1})$$

puisque pour chaque n, $K \cap V'_n$ est contenu dans l'hypercube V'_n de mesure $(2\nu_n)^q$. On a :

$$\sum_{0<n\leq \delta^{q(s-1)}} (2\nu_n \delta^s)^{q-1} = \sum_{1\leq k\leq s-1} (2(2\varepsilon_{\delta^{qk}} \delta^s)^{q-1} (\delta^{qk} - \delta^{q(k-1)})$$

$$+ (2\varepsilon_1 \delta^s)^{q-1} \leq \delta^{s(q-1)} \frac{\delta^q - 1}{\delta - 1} \frac{\delta^s - 1}{\delta^q} + O(\delta^{s(q-1)})$$

puisque pour k assez grand on a $\varepsilon_{\delta^{qk}} < \frac{1}{2\delta^k}$. On majore $\delta^s - 1$ par δ^s, $\frac{\delta^{q-1}}{\delta - 1}$ par $q\delta^{q-1}$. Finalement : il existe une constante L (dépendant éventuellement de δ mais non de s) telle que le nombre d'hypercubes $P(k_1, \ldots, k_q \,;\, \delta^{qs})$ $(k_i \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k_i < \delta^s$ pour $i = 1, \ldots, q)$ qui rencontrent $K \cap W_{s-1}$ soit majoré par :

$$\frac{a}{2^{q+2}} \mu_q(K) \delta^{qs} + q\, 2^{q+1} \delta^{qs-1} + L\, \delta^{s(q-1)} + 2^{2q} \delta^{q(s-1)} .$$

D'autre part les hypercubes $P(k_1, \ldots, k_q \,;\, \delta^{qs})$ contenus dans K et contenant un point u_n avec $\delta^{q(s-1)} < n \leq \delta^{qs}$ sont pour s suffisamment grand, d'après les calculs du lemme I. 2., au moins au nombre de $(a\mu_q(K)\, \delta^{qs} - \delta^{q(s-1)} - 2^{q+1} \delta^{s(q-1)})$.

Il existe donc au moins

$$\frac{2^{q+2}-1}{2^{q+2}} a\,\mu_q(K)\,\delta^{qs} - (1+2^{2q})\,\delta^{q(s-1)} - (2^{q+1}+L)\delta^{s(q-1)} - q\,2^{q+1}\,\delta^{sq-1}$$

hypercubes $P(k_1, \dots, k_q\,;\,\delta^{qs})$ contenus dans K disjoints de W_{s-1} et contenant un point u_n avec $\delta^{q(s-1)} < n \leq \delta^{qs}$. Or, pour un tel hypercube $P(k_1, \dots, k_q\,;\,\delta^{qs})$ on a $\mu((W_s \setminus W_{s-1}) \cap P(k_1, \dots, k_q\,;\,\delta^{qs})) \geq \varepsilon^q_{\delta^{qs}}$ puisque, pour $\delta^{q(s-1)} < n \leq \delta^{qs}$, $\nu_n = \varepsilon_{\delta^{qs}} < \frac{1}{2\delta^s}$. On a donc :

$$\mu_q(K \cap (W_s \setminus W_{s-1})) \geq \left(\frac{2^{q+2}-1}{2^{q+2}} a\,\mu_q(K)\delta^{qs} - (1+2^{2q})\delta^{q(s-1)} - (2^{q+1}+L)\,\delta^{s(q-1)} - q^{2^{q+1}}\,\delta^{sq-1}\right)\varepsilon^q_{\delta^{qs}}$$

$$\geq \left(\frac{2^q-1}{2^q}\, a\,\mu_q(K) - \frac{2^{q+1}+L}{\delta^s}\right)\delta^{qs}\,\varepsilon^q_{\delta^{qs}}$$

puisque $\delta > \frac{q\,2^{2q+3}}{a\,\mu_q(K)}$. Donc, pour s suffisamment grand :

$$\mu_q(K \cap (W_s \setminus W_{s-1})) \geq \frac{2^q-1}{2^{q+1}}\, a\,\mu_q(K)\,\delta^{qs}\,\varepsilon^q_{\delta^{qs}} \quad .$$

Mais ceci est contraire au lemme suivant :

LEMME I. 4. - <u>La série $\sum_{s \geq 0} \delta^{qs}\,\varepsilon^q_{\delta^{qs}}$ est divergente.</u>

<u>Preuve</u> : On a :

$$\delta^{qs}\,\varepsilon^q_{\delta^{qs}} \geq \frac{1}{\delta^{q-1}} \sum_{\delta^{qs} < n \leq \delta^{q(s+1)}} \varepsilon^q_n$$

puisque la suite (ε_n) est décroissante. Donc

$$\sum_{s \geq 0} \delta^{qs}\,\varepsilon^q_{\delta^{qs}} \geq \frac{1}{\delta^q-1} \sum_{n > \delta^q} \varepsilon^q_n$$

ce qui démontre le lemme puisque la série $\sum\limits_{n\geq 1} \varepsilon_n^q$ est divergente.

Fin de la démonstration du théorème I : Le lemme I. 3. prouve que V a une densité positive en tout point de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$, par suite que V est de mesure 1 . En effet, le complémentaire de V est négligeable puisqu'il admet la densité 1 en aucun point de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ et que, d'après un théorème de Lebesgue, tout sous-ensemble mesurable de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ a la densité 1 en presque tous ses points.

Remarques : Dans la démonstration du théorème I on n'utilise pas le fait que les hypercubes intervenant dans la définition de la fonction χ soient à sommets rationnels. Ce sont les théorèmes mesurant des ensembles de suites eutaxiques qui nécessitent la restriction à une famille dénombrable d'hypercubes.

Une autre modification de la fonction χ donne une condition suffisante d'eutaxie plus faible que celle du théorème I : Soit u une suite d'éléments de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$. Pour tout $x \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ soit $\chi_x(u) = \operatorname{Inf}_K \lambda(K, u)$ (K décrivant la famille des hypercubes de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$, contenant x , de mesures non nulles et à sommets rationnels). La même démonstration que celle du théorème I permet de prouver le :

THÉORÈME I bis. - Si $\chi_x(u) > 0$ pour presque tout $x \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$, la suite u est eutaxique.

La réciproque du théorème I est fausse ([1], [8]) et nous ne savons pas si celle du théorème I bis est vraie. Cependant, la même démonstration que celle de [4] (voir aussi [7]) permet de montrer le :

THÉORÈME II. - Soit u une suite d'éléments de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$. S'il existe un hyper-cube K de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ de mesure non nulle tel que $\lambda(K, u) = 0$, alors u n'est pas eutaxique.

§. III. - MESURES DE CERTAINS ENSEMBLES DE SUITES EUTAXIQUES

Soit π la mesure de Haar normalisée du groupe $((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q)^{\mathbb{N}}$. Le théorème I permet de mesurer l'ensemble des suites eutaxiques :

THÉORÈME III. - Presque toute suite d'éléments de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ (relativement à la mesure π) est eutaxique.

On peut en effet montrer par une méthode analogue à celle du théorème 2 de [4] que pour π-presque toute suite n, on a $\chi(u) \geq t$, où t est le nombre de l'intervalle $]0, 1[$ tel que $t^t(e(1-t)^{1-t}) = 1$.

Ce résultat peut être précisé dans certains cas. Par exemple, les méthodes du chapitre 3 de [3] (voir aussi [7]) permettent de montrer :

THÉORÈME IV. - Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs. Alors, si la série $\sum_n \frac{a_n}{a_{n+1}}$ est convergente, la suite $a(x) = (\{a_n x\})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbf{R}/\mathbb{Z}$ est eutaxique pour presque tout $x \in \mathbf{R}$.

On peut en effet montrer que pour presque tout $x \in \mathbf{R}$ on a $\chi(a(x)) \geq t$. Le théorème I permet alors de conclure.

§. IV. - LA SUITE (nx) EN DIMENSION q. - Si $x \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$, nous désignons par $M_q(x)$ le nombre $(\liminf_n n^{1/q} \|nx\|_q)^{-1}$ si ce nombre est fini. Sinon nous posons $M_q(x) = +\infty$.

THÉORÈME V. - Soit x un élément de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$. La suite $(nx)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ est eutaxique si et seulement si $M_q(x)$ est fini.

Cet énoncé généralise le résultat analogue obtenu par J. Lesca en dimension 1 ([2]). La démonstration découle du résultat plus général suivant :

THÉORÈME VI. - Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs, de densité inférieure strictement positive, et soit x un élément de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$. Alors :

- si la suite $(a_n x)$ est eutaxique, $M_q(x)$ est fini ;

- réciproquement, si la suite $(a_n x)$ est ν-répartie, où ν est une mesure sur $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ telle que $\inf \frac{\nu(K)}{\mu_q(K)} > 0$ (K décrivant la famille des hypercubes de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ de mesures non nulles), et si $M_q(x)$ est fini, alors la suite $(a_n x)$ est eutaxique.

Preuve : Désignons par $\frac{1}{d}$ la densité inférieure de la suite (a_n) et soit $\rho > 0$ une constante telle que : $\inf \frac{\nu(K)}{\mu_q(K)} \geq \rho$ (K décrivant la famille des hypercubes de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ de mesures non nulles). On peut montrer ([7]) que pour tout hypercube K de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ de mesure non nulle :

$$\frac{\rho}{(1+d^{1/q} M_q(x))^q} \leq \lambda(K, (a_n x)) \leq \frac{(5d)^q}{M_q(x)^{q/q+1}}$$

l'inégalité de gauche étant vraie sous réserve que la suite $(a_n x)$ soit ν-répartie (cet encadrement n'est pas le meilleur possible : [6], [7]). La conclusion de la démonstration vient alors des théorèmes I et II.

Il résulte en particulier du théorème VI :

COROLLAIRE. - Soit (a_n) une suite strictement croissante d'entiers positifs, de densité inférieure strictement positive, alors la suite $(a_n x)$ d'éléments de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ n'est eutaxique que pour presque aucun $x \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$.

En effet, $M_q(x)$ est infini pour presque tout x , comme il résulte du théorème métrique de Khintchine.

-:-:-:-

Remarque : Les démonstrations complètes des résultats de cet exposé figurent dans un article dont la publication a été demandée à "Acta Arithmetica".

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. DELMER. - Une remarque sur l'eutaxie. C. R. A. S. Paris, t. 279, série A, p. 395-397, 1974.

[2] J. LESCA. - Sur les approximations diophantiennes à une dimension. Thèse Sc. Math. , Grenoble (1968).

[3] B. de MATHAN. - Approximations diophantiennes dans un corps local. Bull. Soc. Math. France, mémoire 21, (1970) 93 pages.

[4] B. de MATHAN. - Un critère de non-eutaxie. C. R. A. S. Paris, t. 273, A, p. 433-436 (1971).

[5] W. PHILIPP. - Some metrical theorems in number theory. Pacific J. Math. 20, 1, (1967) p. 109-127.

[6] M. REVERSAT. - Un critère d'eutaxie. C. R. A. S. Paris, t. 277, A, n° 10, p. 405-408 (1973).

[7] M. REVERSAT. - Approximations diophantiennes par les éléments de certaines suites. Thèse de spécialité, Math. Bordeaux (1973).

[8] M. REVERSAT. - Les suites eutaxiques. Séminaire de Théorie des Nombres (Delange-Pisot-Poitou), 1973-1974.

[9] W. M. SCHMIDT. - Metricals theorems on fractional parts of sequences. Trans. Amer. Math. Soc. 110, 3, (1964).

-:-:-:-

Marc REVERSAT
Centre de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique
17, rue Descartes
75230 PARIS CEDEX 05
et
E. R. A. au C. N. R. S. n°362
U. E. R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 TALENCE