EUGÈNE DUBOIS
GEORGES RHIN

Approximations rationnelles simultanées de nombres algébriques réels et de nombres algébriques p-adiques

Astérisque, tome 24-25 (1975), p. 211-227
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__211_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 24-25 (1975)

APPROXIMATIONS RATIONNELLES SIMULTANÉES DE NOMBRES ALGÉBRIQUES RÉELS ET DE NOMBRES ALGÉBRIQUES p-ADIQUES

par

Eugène DUBOIS et Georges RHIN

-:-:-:-

Ridout et Mahler [3] ont généralisé le théorème de K. F. Roth [5] à l'approximation d'un nombre algébrique réel et de nombres algébriques p-adiques. W. M. Schmidt [8] [9] a généralisé le théorème de Roth à l'approximation simultanée de n nombres algébriques réels. Nous donnons ici un résultat sur l'approximation simultanée de n nombres algébriques réels et de n nombres algébriques p-adiques (théorème 1). Nous déduisons ce résultat d'un théorème général sur des formes linéaires à coefficients algébriques (théorème 6).

<u>INTRODUCTION</u>. - Soient $t \geq 0$ et $n \geq 1$ deux entiers, $p_1, \dots, p_t$ t nombres premiers distincts. $|\ |_j$ désigne pour $j = 0$ la valeurs absolue réelle et pour $1 \leq j \leq t$ la valeur absolue de $\mathbb{Q}_{p_j}$ telle que $|p_j|_j = p_j^{-1}$. Nous démontrons :

THÉORÈME 1. - Soient $1, \alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_n^{(0)}$ des nombres algébriques $\mathbb{Q}$ linéairement indépendants ($\mathbb{Q}$. L. I.) et soient pour $j = 1, \dots, t$ $1, \alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_n^{(j)}$ des nombres algébriques de $\mathbb{Q}_{p_j}$ Q. L. I. . Alors pour tout système de nombres réels positifs $b^{(0)}, b^{(1)}, \dots, b^{(t)}$ tels que

$$\sum_{j=0}^{t} b^{(j)} > \frac{1}{n}$$

le système

$$|\alpha_i^{(j)} x_o - x_j|_j < |x_o|^{-b^{(j)}} \qquad 1 \leq i \leq n \ , \quad 0 \leq j \leq t$$

n'a qu'un nombre fini de solutions entières $(x_o, x_1, \dots, x_n)$.

Nous développerons tout d'abord la géométrie des nombres puis nous montrerons comment nous pouvons déduire le théorème 1 du théorème 6 et nous terminerons en montrant comment les théorèmes 8 et 9 sur l'index de certains polynômes par rapport à des formes linéaires permettent de démontrer le théorème 6.

§. 1. - GÉOMÉTRIE DES NOMBRES. - Soit $\Omega_n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Q}_{p_1}^n \times \dots \times \mathbb{Q}_{p_t}^n$ et soit pour $0 \leq j \leq t$ $A^{(j)}$ une matrice carrée d'ordre n inversible à coefficients dans $\mathbb{Q}_{p_j}$ en posant $\mathbb{Q}_{p_o} = \mathbb{R}$). Nous appellerons réseau l'ensemble Λ des points $(A^{(0)}x, \dots, A^{(t)}x)$ de Ω_n lorsque x parcourt $\mathbb{Z}^n$. On note $m(\Lambda) = \prod_{0 \leq j \leq t} |\text{dét } A^{(j)}|_j$. Soient pour $0 \leq j \leq t$ $a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}$ n vecteurs de $\mathbb{Q}_{p_j}^n$ linéairement indépendants et $c_i^{(j)}$ des réels $(1 \leq i \leq n \ , \ 0 \leq j \leq t)$ tels que $c_i^{(j)} \leq 1$ pour $j \geq 1$. Soit $\pi = \pi(a_i^{(j)}, c_i^{(j)})$ le parallélépipède de Ω_n égal à l'ensemble des points $(x^{(0)}, \dots, x^{(t)})$ de Ω_n tels que $|a_i^{(j)} . x^{(j)}|_j \leq c_i^{(j)}$ $1 \leq i \leq n \ , \ 0 \leq j \leq t$ où $a_i^{(j)} . x^{(j)}$ désigne le produit scalaire habituel de deux vecteurs de $\mathbb{Q}_{p_j}^n$. Nous posons pour $x = (A^{(0)}y, \dots, A^{(t)}y)$ avec $y \in \mathbb{Q}^n$, $F^{(j)}(x) = \inf_{\lambda} |\lambda^{-1}|_j$ où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des λ de $\mathbb{Q}_{p_j}$ tels que $|\lambda\, a_i^{(j)}.\, A^{(j)}y|_j \leq c_i^{(j)}$. Soit $F(x) = F_\pi(x) = \prod_{0 \leq j \leq t} F^{(j)}(x)$. On définit les minima successifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de π par rapport à Λ de la manière suivante :

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{x \in \Lambda \\ x \neq 0}} F(x) \qquad \text{et} \qquad \lambda_i = \inf \lambda \quad 2 \leq i \leq n$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des réels λ positifs tels qu'il existe i points de Λ $x_k = (A^{(0)}y_k, \dots, A^{(t)}y_k)$ $1 \leq k \leq i$ tels que $y_1, \dots, y_i$ soient linéairement indépendants et que $F(x_k) \leq \lambda$ $1 \leq k \leq i$. Nous avons

THÉORÈME 2 [5]. - <u>Les minima successifs de</u> π <u>par rapport à</u> Λ <u>existent et vérifient</u>

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n < +\infty \tag{1}$$

$$m(\Lambda) \ll \lambda_1 \dots \lambda_n \ \mathrm{mes}(\pi) \ll m(\Lambda)\ . \tag{2}$$

<u>Il existe</u> $x_1, \dots, x_n$ <u>de</u> Λ <u>tels que</u> $F(x_i) = \lambda_i$ <u>pour</u> $1 \leq i \leq n$ <u>et</u> $x_i = (A^{(0)}y_i, \dots, A^{(t)}y_i)$ <u>avec</u>

$$1 \leq \prod_{0 \leq j \leq t} |\det(y_1, \dots, y_n)|_j \leq n\,! \tag{3}$$

<u>Les constantes impliquées dans</u> $\ll$ <u>ne dépendent que des</u> $a_i^{(j)}$ <u>et</u> $\mathrm{mes}(.)$ <u>désigne la mesure produit des mesures de Haar sur</u> $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_{p_1}, \dots, \mathbb{Q}_{p_t}$ <u>telles que</u> $\mathrm{mes}(\mathbb{Z}_{p_j}) = 1$ <u>et</u> $\mathrm{mes}([0,1]) = 1$.

Ce théorème se déduit des résultats de E. Lutz [4] et du théorème de Minkowski appliqué à des sous-réseaux.

Soit $A^{(j)*}$ la transposée de $A^{(j)-1}$. Nous appellerons réseau dual de Λ le réseau Λ^* associé à $A^{(0)*}, \dots, A^{(t)*}$ et parallélépipède dual de π un parallélépipède $\pi^* = \pi^*(a_i^{(j)*}, d_i^{(j)})$ où $a_i^{(j)*}$ désigne le vecteur dual de $a_i^{(j)}$ dans $\mathbb{Q}_{p_j}^n$ pour le produit scalaire habituel et $d_i^{(j)} \leq 1$ pour $j \geq 1$ et $\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq t}} d_i^{(j)^j} c_i^{(j)} = 1$. Nous avons

PROPOSITION. - *Soient* $x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}$ n *éléments de* $\mathbb{Z}^n$ $(0 \leq j \leq t)$ *avec* $E^{(j)} = |\text{dét}\,(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})|_j \neq 0$ *et soient* $\lambda_k^{(j)}$ *pour* $1 \leq k \leq n$ *et* $0 \leq j \leq t$ *des réels réels positifs tels que*

$$|a_i^{(j)} . x_k^{(j)}|_j \leq \lambda_k^{(j)} \qquad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n & 0 \leq j \leq t \\ 1 \leq k \leq n & \end{matrix} \quad . \tag{4}$$

Alors on a :

$$|a_i^{(j)*} . x_k^{(j)*}|_j \ll (D^{(j)} E^{(j)})^{-1} \lambda_1^{(j)} \dots \lambda_{k-1}^{(j)} \lambda_{k+1}^{(j)} \dots \lambda_n^{(j)} \tag{5}$$

pour $0 \leq i$, $k \leq n$ *et* $0 \leq j \leq t$ *et quel que soit* $(i_o, \dots, i_t)$ *dans* $\{1, \dots, n\}^{t+1}$

$$\prod_{0 \leq j \leq t} |a_{i_j}^{(j)*} . x_k^{(j)*}|_j \ll \left(\prod_{0 \leq j \leq t} E^{(j)} \lambda_k^{(j)} \right)^{-1} \tag{6}$$

et si $\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*$ *désignent les minima successifs de* π^* *dual de* π

$$1 \ll \lambda_k^* \lambda_{n+1-k} \ll 1 \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n \quad . \tag{7}$$

Les constantes impliquées par $\ll$ *ne dépendent que des* $a_i^{(j)}$.

La démonstration est analogue à celle du lemme 1 de [9].

THÉORÈME 3. - *Soient* $\ell \in \mathbb{N}^*$ *et pour* $0 \leq j \leq t$, $a_1^{(j)}, \dots, a_\ell^{(j)}$ *des vecteurs linéairement indépendants de* $\mathbb{Q}_{p_j}^\ell$ *et* $\pi = \pi(a_i^{(j)}, c_i^{(j)})$ *avec* $c_i^{(j)} = 1$ *un parallélépipède de* Ω_ℓ. *Soient* $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ *les minima successifs de* π *par rapport à* $\mathbb{Z}^\ell$ *et soient* $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_\ell > 0$ *tels que*

$$\rho_1 \lambda_1 \leq \dots \leq \rho_\ell \lambda_\ell \quad . \tag{8}$$

Alors il existe une permutation τ *de* $\{1, \dots, \ell\}$ *telle que les minima successifs* $\nu_1, \dots, \nu_\ell$ *du parallélépipède* $\pi_1 = \pi_1(a_i^{(j)}, d_i^{(j)})$ *où* $d_i^{(0)} = \rho_{\tau_i}^{-1}$ *pour* $1 \leq i \leq \ell$

et $d_i^{(j)} = 1$ *pour* $j \geq 1$ *vérifient*

$$\nu_i \ll \rho_i \lambda_i \ll \nu_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq \ell \tag{9}$$

où $\ll$ *ne dépend que des* $a_i^{(j)}$.

Ceci généralise un lemme de Davenport. La démonstration est analogue à celle du lemme 7 de [9]. (Il faut considérer avec les notations de [9] S_i comme un $\mathbb{Q}$ espace vectoriel).

Soient $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ la base canonique de $\mathbb{Q}^n$. Pour $1 \leq q \leq n$, soit $C(n, q)$ l'ensemble des $\sigma = (i_1, \dots, i_q)$ $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq n$ et $L = \binom{n}{q}$. Pour $\sigma \in C(n, q)$ considérons $e_\sigma = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_q}$ et on définit $x_1 \wedge \dots \wedge x_q$ par linéarité pour q éléments de $\mathbb{Q}^n_{p_j}$ $(0 \leq j \leq t)$. En posant $e_\sigma \cdot e_\zeta = 0$ si $\sigma \neq \zeta$ et 1 sinon on définit un produit scalaire sur le $\mathbb{Q}_{p_j}$ espace vectoriel engendré par les e_σ où $\sigma \in C(n, q)$. Soit $\mathbb{Q}^{n;q}_{p_j}$ cet espace vectoriel. Soit $\pi = \pi(a_i^{(j)}, 1)$ (i. e. $c_i^{(j)} = 1$ pour tout i et j) et soit $\pi_{(q)} = \pi(a_\sigma^{(j)}, 1)$.

THÉORÈME 4. - *Soient* $\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *(resp.* $m_1, \dots, m_L)$ *les minima successifs de* $(\pi, \mathbb{Z}^n)$ *(resp. de* $(\pi_{(q)}, \mathbb{Z}^L))$. *Posons* $\lambda_\sigma = \prod_{i \in \sigma} \lambda_i$, *on a, en ordonnant* $C(n, q)$ *pour que* $\lambda_{\sigma_1} \leq \lambda_{\sigma_2} \leq \dots \leq \lambda_{\sigma_L}$.

$$m_k \ll \lambda_{\sigma_k} \ll m_k \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq L \tag{10}$$

où $\ll$ ne dépend que de n, q et des $a_i^{(j)}$.

La démonstration repose sur le théorème 2 et sur l'identité de Laplace

$$a_\zeta^{(j)} \cdot x_\sigma = \text{dét}\,(a_i^{(j)} \cdot x_k) \quad (i \in \zeta,\ k \in \sigma)$$

pour ζ et $\sigma \in C(n, q)$.

§. 2. - RÉSULTATS SUR LES FORMES LINÉAIRES A COEFFICIENTS ALGÉBRIQUES. - Soit $1 \leq v \leq n-1$ et soient $L_1^{(j)}, \dots, L_v^{(j)}$ des formes linéaires à coefficients algébriques dans $\mathbb{Q}_{p_j}$, $\mathbb{Q}$. L. I. Nous supposons que les n-formes $L_1^{(j)}, \dots, L_v^{(j)}$, $x_1, \dots, x_{n-v}$ sont $\mathbb{Q}$. L. I. pour $0 \leq j \leq t$. D'après le théorème 2 le système d'inégalités

$$\begin{cases} |L_i^{(j)}(x)|_j \leq Q^{-c^{(j)}} & \text{pour } 1 \leq i \leq v \text{ et } 0 \leq j \leq t \\ |x_i| \ll Q & \text{pour } 1 \leq i \leq n-v \end{cases}$$

a une solution x non nulle dans $\mathbb{Z}^n$ pour tout $Q > 1$ si $n-v-v \sum_{j=0}^{t} c^{(j)} \geq 0$ i. e. $\sum_{0 \leq j \leq t} c^{(j)} \leq \frac{n-v}{v}$. (La constante $\ll$ ne dépend que des $L_i^{(j)}$). On en déduit que le système $|L_i^{(j)}(x)|_j \ll |x|^{-c^{(j)}}$ pour $1 \leq i \leq v$, $0 \leq j \leq t$ (avec $|x| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$) a une infinité de solutions.

DÉFINITION. - Nous dirons que le système $(L_i^{(j)})$ $1 \leq i \leq v$, $0 \leq j \leq t$ est un système de Roth si pour tous $b^{(0)}, \dots, b^{(t)}$ réels positifs tels que $\sum_{j=0}^{t} b^{(j)} > \frac{n-v}{v}$ le système $|L_i^{(j)}(x)|_j \leq |x|^{-b^{(j)}}$ $1 \leq i \leq v$, $0 \leq j \leq t$ n'a qu'un nombre fini de solutions dans $\mathbb{Z}^n$.

THÉORÈME 5. - Le système $(L_i^{(j)})$ $(1 \leq i \leq v$, $0 \leq j \leq t)$ est un système de Roth si et seulement si pour tous $c^{(0)} > 0, \dots, c^{(t)} > 0$ tels que $\sum_{j=0}^{t} c^{(j)} = \frac{n-v}{v}$ et pour tout sous $\mathbb{Q}$ espace vectoriel S^d de $\mathbb{Q}^n$ de dimension $d \geq 1$ les formes $L_1^{(j)}, \dots, L_v^{(j)}$ ont un rang $r^{(j)}$ sur S^d $(0 \leq j \leq t)$ qui vérifie

$$d \leq r^{(0)} + \sum_{j=0}^{t} r^{(j)} c^{(j)} . \qquad (11)$$

La condition suffisante sera une conséquence du théorème 6. Montrons la condition nécessaire. Supposons donc que pour un sous-espace rationnel S^d on ait $d > r^{(0)} + \sum_{j=0}^{t} r^{(j)} c^{(j)}$ pour un système $(c^{(0)}, \dots, c^{(t)})$. Si tous les $r^{(j)}$ sont nuls il est clair qu'il existe une infinité de points entiers dans S^d vérifiant $L_i^{(j)}(x) = 0$ pour $1 \leq i \leq v$ et $0 \leq j \leq t$. S'il existe un $r^{(j)} \geq 1$, soit $\beta > 1$ tel que $d = r^{(0)} + \sum_{j=0}^{t} r^{(j)} \beta c^{(j)}$ et posons $b^{(j)} = \beta c^{(j)}$. En appliquant le théorème 2 au réseau des points entiers de S^d nous montrons qu'il existe une infinité de points distincts dans $\mathbb{Z}^n$ tels que $|L_i^{(j)}(x)|_j \ll |x|^{-b^{(j)}}$ $1 \leq i \leq v$, $0 \leq j \leq t$ et puisque $\sum_{j=0}^{t} b^{(j)} > \frac{n-v}{v}$ le système $(L_i^{(j)})$ n'est pas un système de Roth ce qui est contradictoire.

Nous obtenons comme corollaires du théorème 5 le théorème 1 et :

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> $L^{(j)}$ <u>une forme linéaire à coefficients algébriques dans</u> $\mathbb{Q}_{p_j}$ <u>ne s'annulant pas sur</u> $\mathbb{Q}^*$ $(0 \leq j \leq t)$ <u>alors pour</u> $b^{(0)} >, \ldots, b(t) > 0$ <u>tels que</u> $\sum_{j=0}^{t} b^{(j)} > n-1$ <u>le système</u>

$$|L^{(j)}(x)|_j < |x|^{-b^{(j)}} \qquad 0 \leq j \leq t$$

<u>n'a qu'un nombre fini de solutions entières.</u>

Soient $L_1^{(j)}, \ldots, L_n^{(j)}$ des formes linéaires $\mathbb{Q}$. L. I. à coefficients algébriques dans $\mathbb{Q}_{p_j}$ $(0 \leq j \leq t)$ et $c_i^{(j)}$ des réels positifs ou nuls tels que

$$c_i^{(j)} \leq 0 \quad \text{pour } j \geq 1,\ 1 \leq i \leq n \tag{12}$$

$$\text{et} \quad c_1^{(j)} \leq c_2^{(j)} \leq \ldots \leq c_n^{(j)} \quad \text{pour } 0 \leq j \leq t \tag{13}$$

$$\text{et} \quad \sum_{i=1} \sum_{0 \leq j \leq t} c_i^{(j)} = 0 . \tag{14}$$

Nous dirons par définition que le système $(L_i^{(j)}, c_i^{(j)})$ est un système de Roth général si pour tous $\delta^{(j)} \geq 0$ tels que $\delta^{(0)} + \ldots + \delta^{(t)} = \delta > 0$ il existe $Q_1 = Q_1(L_i^{(j)}, c_i^{(j)}, \delta) > 0$ tel que pour $Q > Q_1$ le système

$$|L_i^{(j)}(x)|_j \leq Q^{c_i^{(j)} - \delta^{(j)}} \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq t \tag{15}$$

n'ait pas de solution entière non nulle.

Soit S^d un sous $\mathbb{Q}$ espace vectoriel de $\mathbb{Q}^n$ de dimension $d \geq 1$ Pour $j = 0, \dots, t$ soit $t_1^{(j)}$ le plus petit entier k tel que $L_k^{(j)}$ soit de rang 1 sur S^d, $t_2^{(j)}$ le plus petit entier k tel que $(L_{t_1^{(j)}}^{(j)}, L_k^{(j)})$ soit de rang 2 sur S^d etc ... Posons $c(S^d) = \sum_{j=0}^{t} \sum_{k=1}^{d} c_{t_k^{(j)}}^{(j)}$ et $c(S^d) = +\infty$ si l'un des $t_k^{(j)}$ n'est pas défini.

THÉORÈME 6. - <u>Soient pour</u> $0 \leq j \leq t$, n <u>formes linéaires</u> $L_1^{(j)}, \dots, L_n^{(j)}$ $\mathbb{Q}$. L. I. <u>à coefficients algébriques dans</u> $\mathbb{Q}_{p_j}$. <u>Si pour tout sous-espace</u> S^d, $c(S^d) \leq 0$ <u>alors</u> $(L_i^{(j)}, c_i^{(j)})$ <u>est un système général de Roth.</u>

Montrons que ceci entraîne le théorème 5.

Soient $L_1^{(j)}, \dots, L_v^{(j)}$ des formes linéaires $\mathbb{Q}$. L. I. et des constantes $c^{(j)} > 0$ telles que $\sum_{0 \leq j \leq t} c^{(j)} > \frac{n-v}{v}$. $(L_1^{(j)}, \dots, L_v^{(j)}, L_{v+1}^{(j)} = x_1^{(j)}, \dots, L_n^{(j)} = x_{n-v}^{(j)})$ (où $x_k^{(j)}$ est égal à l'un des x_i) est de rang d sur tout sous-espace S^d de $\mathbb{Q}^n$ pour $0 \leq j \leq t$. Soit $r^{(j)}$ le rang de $(L_1^{(j)}, \dots, L_v^{(j)})$ sur un tel sous-espace. On a $t_1^{(j)} < \dots < t_{r^{(j)}}^{(j)} \leq v < \dots < t_d^{(j)}$ $(0 \leq j \leq t)$. Soit $\beta < 1$ tel que $\sum_{0 \leq j \leq t} \beta\, c^{(j)} = \frac{n-v}{v}$ et $c_i^{(j)} = -\beta\, c^{(j)}$ $(1 \leq i \leq v,\ 0 \leq j \leq t)$ et $c_i^{(0)} = 1$ $(v+1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq t)$. Par construction nous avons $c(S^d) = d - r^{(0)} - \sum_{j=0}^{t} r^{(j)} \beta\, c^{(j)}$ donc $c(S^d) \leq 0$. Le système $(L_1^{(j)}, \dots, L_v^{(j)})$ est un système de Roth.

Nous déduisons le théorème 6 du

THÉORÈME 7. - <u>Soient pour</u> $0 \leq j \leq t$, n <u>formes linéaires</u> $\mathbb{Q}$. L. I. $L_1^{(j)}, \dots, L_n^{(j)}$ <u>à coefficients algébriques dans</u> $\mathbb{Q}_{p_j}$ et $c_i^{(j)}$ <u>des réels vérifiant</u> (12), (13) <u>et</u> (14). <u>Pour</u> $\mathbb{Q} \geq 1$ <u>le système</u> :

$$|L_i^{(j)}(x)|_j \leq Q^{c_i^{(j)}} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq t \tag{16}$$

<u>définit un parallélépipède</u> $\pi = \pi(Q)$ <u>dans</u> Ω_n. <u>Soient</u> $\lambda_1 = \lambda_1(Q), \dots, \lambda_n = \lambda_n(Q)$ <u>les minima successifs de</u> $(\pi, \mathbb{Z}^n)$ <u>et supposons qu'il existe</u> $\delta > 0$, <u>un entier</u> d

$(1 \leq d \leq n-1)$ <u>et un ensemble</u> H <u>non borné de réels positifs tels que</u>

$$\forall Q \in H \qquad \lambda_d < \lambda_{d+1}\, Q^{-\delta} . \tag{17}$$

Alors il existe un sous-espace S^d de $\mathbb{Q}^n$ et une partie H' non bornée de H telle que pour tout $\mathbb{Q}$ dans H' les d premiers minima de $\pi(Q)$ soient atteints en des points de $S^d \cap \mathbb{Z}^n$.

Montrons que le théorème 7 entraîne le théorème 6.

Supposons que $(L_i^{(j)}, c_i^{(j)})$ ne soit pas un système général de Roth et montrons qu'il existe S^d tel que $c(S^d) \geq 0$. D'après le théorème 2 et (14)

$$1 \ll \lambda_1 \dots \lambda_n \ll 1 \tag{18}$$

où les constantes ne dépendent que des $L_i^{(j)}$. D'après les hypothèses il existe une suite croissante non bornée de Q et un $\delta > 0$ telle que le système (15) ait une solution non nulle pour chacun de ces Q. Alors $\lambda_1 = \lambda_1(Q) < Q^{-\delta'}$ avec $\delta' = \frac{1}{2}\delta$ et il existe $d \geq 1$ tel que $\lambda_d < \lambda_{d+1} Q^{-\delta'/n-1}$ et il existe une partie H non bornée telle que d soit indépendant de Q. Les hypothèses du théorème 7 sont satisfaites avec $\delta = \delta'/n-1$. Soit S^d l'espace obtenu. Nous obtenons $\lambda_1 \dots \lambda_d \ll Q^{-\delta\, d(n-d)/n} < Q^{-\eta}$ avec $\eta > 0$. $(L^{(j)}_{t_1^{(j)}}, \dots, L^{(j)}_{t_d^{(j)}})$ est de rang d sur S^d et soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ une base du $\mathbb{Z}$ module $S^d \cap \mathbb{Z}^n$. Soit π' le parallélépipède de Ω_d défini par

$$|L^{(j)}_{t_i^{(j)}}(x^{(j)})|_j \leq Q^{c^{(j)}_{t_i^{(j)}}} \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq d,\ 0 \leq j \leq d$$

où $x^{(j)} = x_1^{(j)}\alpha_1 + \dots + x_1^{(j)}\alpha_d$. Soient $\lambda'_1, \dots, \lambda'_d$ les minima successifs de π' par rapport à $\mathbb{Z}^d$. Alors $\lambda'_1 \dots \lambda'_d$ mes $\pi' \gg 1$ et puisque les d premiers minima de π sont atteints sur S^d, donc sur $S^d \cap \mathbb{Z}^n$, nous avons :

$$\lambda'_1 \leq \lambda_1, \dots, \lambda'_d \leq \lambda_d .$$

Nous avons $\mathrm{mes}(\pi') \gg Q^{\eta}$ et $\mathrm{mes}\, \pi' \ll Q^{c(S^d)}$. Puisque les constantes ne dépendent que des $L_i^{(j)}$ nous avons $c(S^d) \geq \eta > 0$.

Le dernier paragraphe sera consacré à la démonstration du théorème 7.

§. 3. - INDEX D'UN POLYNOME

Soit $\mathfrak{R} = \mathbb{Q}[X_{11}, \dots, X_{1\ell}; X_{21}, \dots, X_{2\ell}; \dots; X_{m1}, \dots, X_{m\ell}]$. Soient K un sur-corps de $\mathbb{Q}$ et $L_1, \dots, L_m$ des formes linéaires non nulles à coefficients dans K du type $L_h = L_h(X_{h1}, \dots, X_{h\ell})$ $1 \leq h \leq m$. Soient $r_1, \dots, r_m$ des entiers positifs donnés et $c \geq 0$ un réel. Soit $I(c)$ l'idéal de $K[X_{11}, \dots X_{m\ell}]$ engendré par les polynômes $L_1^{i_1} \dots L_m^{i_m}$ avec $\sum_{h=1}^{m} i_h r_h^{-1} \geq c$. L'index d'un polynôme P de $\mathfrak{R}$ par rapport à $(L_1, \dots, L_m; r_1, \dots, r_m)$ est le plus grand c tel que $P \in I(c)$ si $P \not\equiv 0$ et $+\infty$ si $P \equiv 0$. Les propriétés de l'index résultent du théorème 6 de [7].

THÉORÈME 8. - Soient $\ell \geq 1$ un entier et $L_i^{(j)}(x) = a_i^{(j)} . x$ pour $1 \leq i \leq \ell$, des formes linéaires à coefficients entiers algébriques dans $\mathbb{Q}_{p_j}$, $\mathbb{Q}$. L. I. pour $0 \leq j \leq t$. Soit $\Delta = \max_{0 \leq j \leq t} [\mathbb{Q}(a_{i,k}$ pour $1 \leq i , k \leq \ell) : \mathbb{Q}]$. Posons :

$$L_{h,i}^{(j)} = L_i^{(j)}(X_{h1}, \dots, X_{h\ell}) \quad \text{pour } 1 \leq h \leq m , \ 0 \leq j \leq t , \ 1 \leq i \leq \ell .$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $m \geq 4\varepsilon^{-2} \log(4\ell(t+1)\Delta)$ et $r_1, \dots, r_m$ des entiers positifs.

Il existe alors un polynôme P non nul de $\mathfrak{R}$ à coefficients entiers tels que

(i) P est homogène en $X_{h1}, \dots, X_{h\ell}$ de degré r_h $(1 \leq h \leq m)$

(ii) pour $1 \leq k \leq \ell$, $0 \leq j \leq t$ l'index de P par rapport à $(L_{1k}^{(j)}, \dots, L_{mk}^{(j)}; r_1, \dots, r_m)$ est supérieur ou égal à $(\ell^{-1} - \varepsilon)m$

(iii) $|P| \leq D^{r_1 + \dots + r_m}$

(iv) pour tout $J = (j_{11}, \dots, j_{m\ell})$ si nous écrivons

$$P^{(J)} = (j_{11} \dots j_{m\ell}!)^{-1} \frac{\partial^{j_{11}+\dots+j_{m\ell}}}{\partial X_{11}^{j_{11}} \dots \partial X_{m\ell}^{j_{m\ell}}} P$$

$$= \sum_{(i_{11}, \dots, i_{m\ell})} d_j^{(J)}(i_{11}, \dots, i_{m\ell}) L_{11}^{(j)i_{11}} \dots L_{m\ell}^{(j)i_{m\ell}} \tag{19}$$

alors

$$|d_j^{(J)}(i_{11}, \dots i_{m\ell})|_j \leq E^{r_1+\dots+r_m}$$

où $|P|$ désigne le maximum des valeurs absolues des coefficients de P et D et E ne dépendent que des $a_i^{(j)}$.

(v) si $(J/r) = \sum_{h=1}^{m} (i_{h_1} + \dots + i_{h_\ell}) r_h^{-1} \leq 2 \varepsilon m$ nous avons :

$$d_j^{(J)}(i_{11}, \dots, i_{m\ell}) = 0 \quad \text{ou}$$

$$\left| \sum_{h=1}^{m} i_{hk} r_h^{-1} - m\ell^{-1} \right| \leq 3 \ell m \varepsilon \quad (1 \leq k \leq \ell).$$

Il suffit de résoudre, comme dans [7], grâce au lemme de Siegel [2] un certain nombre d'équations linéaires à coefficients et variables entières.

Soient $\ell \geq 2$ et $x_1, \dots, x_{\ell-1}$ $\ell-1$ vecteurs $\mathbb{Z}$. L. I. de $\mathbb{Z}^\ell$. Il existe à un facteur ± 1 près, un unique $y = (y_1, \dots, y_\ell)$ de $\mathbb{Z}^\ell$ non nul tel que $(y_1, \dots, y_\ell) = 1$ $y . x_i = 0$ pour $1 \leq i \leq \ell-1$. Posons $M = M(X) = y_1 X_1 + \dots + y_\ell X_\ell$ et $|M| = \max_{1 \leq i \leq \ell} |y_i|$.

THÉORÈME 9. - Soient pour $0 \leq j \leq t$, $1 \leq i \leq \ell$ des réels $c_i^{(j)}$ vérifiant (12), (13), (14) (avec ℓ au lieu de n). Soient $\varepsilon > 0$ et supposons que $1 > \delta > 16 \ell^2 \varepsilon (t+1)$.

Soient $L_i^{(j)}$, m, $r_1, \dots, r_m$ définis comme dans le théorème 8. Soit P le polynôme construit au théorème 8. Soient $Q_1, \dots, Q_m$ des réels positifs vérifiant

$$Q_h^{\varepsilon} > 2^{\ell} E\ , \quad Q_h^{\varepsilon} > \ell(\varepsilon^{-1}+1) \qquad 1 \leq h \leq m \tag{20}$$

$$r_1 \log Q_1 \leq r_h \log Q_h \leq (1+\varepsilon)\, r_1 \log Q_1 \qquad 1 \leq h \leq m\ . \tag{21}$$

Pour $h = 1, \dots, m$ soient $x_{h_1}, \dots, x_{h_{\ell-1}}$ $\ell-1$ vecteurs $\mathbb{Z}$. L. I. de $\mathbb{Z}^{\ell}$ vérifiant

$$|L_i^{(j)}(x_{hk})|_j \leq Q_h^{c_i^{(j)} - \delta^{(j)}} \qquad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq k \leq \ell-1 \\ 1 \leq h \leq m \\ 0 \leq j \leq t \end{array} \tag{22}$$

avec $\delta^{(j)} \geq 0$ et $\delta = \delta^{(0)} + \dots + \delta^{(t)}$.

Alors l'index de P est au moins égal à $m\varepsilon$ par rapport à $(M_1, \dots, M_m\ ;\ r_1, \dots, r_m)$ où $M_h = M(x_{h,1}, \dots, x_{h,\ell-1})$.

Nous utilisons comme dans [7] la notion de grille en remplaçant les $\mathbb{R}$ espaces vectoriels par des $\mathbb{Q}$ espaces vectoriels. Nous supposerons que $P^{(J)}(x_1, \dots, x_m)$ est un entier rationnel non nul et nous montrerons que $\prod_{0 \leq j \leq t} |P^{(J)}(x_1, \dots, x_m)|_j < 1$ ce qui est impossible. Le reste de la démonstration est analogue à celle du théorème 9 de [8].

Soit S une partie non vide de $\{1, \dots, \ell\}^{t+1}$. Pour $0 \leq j \leq t$, soient $(a_1^{(j)}, \dots, a_\ell^{(j)})$ une base de $\mathbb{Q}_{p_j}^{\ell}$ à coefficients algébriques et $(a_1^{(j)*}, \dots, a_\ell^{(j)*})$ la base duale. Soit $\pi = \pi(a_i^{(j)}, A_i^{(j)})$ un parallélépipède de Ω_ℓ et π^* un dual de π.

THÉORÈME 10. - Soient S, $a_i^{(j)}$ comme ci-dessus et $\delta > 0$. Il existe alors $Q_2 = Q_2(\delta\ ;\ a_i^{(j)}, S) > 0$ tel que : soit $Q > Q_2$ et supposons que $A_i^{(j)}$ vérifie

$$\prod_{\substack{0 \leq j \leq t \\ 1 \leq i \leq \ell}} A_i^{(j)} = 1 \tag{23}$$

$$\max(A_i^{(j)}, A_i^{(j)-1}) \leq Q^{1/t+1} \tag{24}$$

$$A_{i_o}^{(0)} \dots A_{i_t}^{(t)} Q^{\delta/2} \geq 1 \quad \underline{\text{pour un}} \quad (i_o, \dots, i_t) \in S \ ; \tag{25}$$

soient $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ les minima successifs de $(\pi, \mathbb{Z}^\ell)$ et supposons que

$$\lambda_{\ell-1} < Q^{-\delta} \quad ; \tag{26}$$

soient $x_1, \dots, x_\ell$ des points de $\mathbb{Z}^\ell$ où sont atteints les minima successifs de π et $x_1^*, \dots, x_\ell^*$ leurs duaux. Alors pour tout $(t+1)$ uple $(i_o, \dots, i_t)$

$$\prod_{j=0}^{t} |a_{i_j}^{(j)*} . x_\ell^*|_j \ll \prod_{j=0}^{t} A_{i_j}^{(j)-1} Q^{-\delta(\ell-1)} \tag{27}$$

et si $(i_o, \dots, i_t) \in S$ il existe j tel que

$$a_{i_j}^{(j)*} . x_\ell^* = 0 \ .$$

Nous démontrons d'abord le :

LEMME. - Avec les notations du théorème précédent, posons $A_i^{(j)} = Q^{c_i^{(j)}}$ pour $1 \leq i \leq \ell$, $0 \leq j \leq t$. Supposons (26) et qu'il existe pour $0 \leq j \leq t$, i_j tel que

$$a_{i_j}^{(j)*} . x_\ell^* \neq 0 \tag{28}$$

et

$$\sum_{j=0}^{t} c_{i_j}^{(j)} + \frac{3\delta}{4} \geq 0 \ . \tag{29}$$

Alors il existe $c_k = c_k(\delta, a_i^{(j)}, \zeta) > 0$ $(1 \leq k \leq 3)$ tels que pour $Q \geq c_3$

$$Q^{c_1} \leq \prod_{j=0}^{t} |x_\ell^*|_j \leq Q^{c_2} \ . \tag{30}$$

Soit $a^{(j)}$ un élément de $\mathbb{Q}_{p_j}^\ell$ à coefficients algébriques $0 \leq j \leq t$. On pose $\Delta^{(j)} = [\mathbb{Q}(a^{(j)} : \mathbb{Q}]$ et $\Delta = \sum_{j=0}^{t} \Delta^{(j)}$. Soit $x \in \mathbb{Z}^\ell$ tel que $a^{(j)} . x \neq 0$, $0 \leq j \leq t$. On montre que

$$\prod_{j=0}^{t} |a^{(j)} . x|_j \gg \prod_{j=0}^{t} |x|_j^{1-\Delta}$$

où $\ll$ ne dépend que des $a^{(j)}$. En appliquant ce résultat aux $a_{i_j}^{(j)}$ et avec (29), on obtient que $\prod_{j=0}^{t} |x_\ell^*|_j \geq Q^{c_1}$. D'après la proposition, le théorème 2 et (26), on a :

$$\prod_{j=0}^{t} |a_{k_j}^{(j)*} \cdot x_\ell^*|_j \ll Q^{-c_{k_o}^{(0)} - \dots - c_{k_t}^{(t)} - \delta(\ell-1)} . \qquad (31)$$

Puisque $(a_1^{(j)*}, \dots, a_\ell^{(j)*})$ est une base de $\mathbb{Q}_{p_j}^\ell$, $|x_\ell^*|_j \ll \underset{1\leq k\leq \ell}{\mathrm{Max}} |a_k^{(j)*} \cdot x_\ell^*|_j$ et l'on obtient $\prod_{j=0}^{t} |x_\ell^*|_j \leq Q^{c_2}$.

La première assertion du théorème 10 résulte de (31). Pour la deuxième assertion, nous remplaçons d'abord les $c_i^{(j)}$ par $c_i'^{(j)}$ dans $\mathbb{Z}\eta$ $(0<\eta<\frac{\delta}{9(t+1)})$ vérifiant

$$|c_i^{(j)} - c_i'^{(j)}| < \eta \quad \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{t} c_i'^{(j)} = 0 \qquad (32)$$

et $c_i'^{(j)} \leq 0$ si $j \geq 1$, $1 \leq i \leq \ell$.

Soient $m_1, \dots, m_\ell$ les minima successifs de $\pi' = \pi'(Q)$ défini par $|a_i^{(j)} \cdot x^{(j)}|_j \leq Q^{c_i'^{(j)}}$ $1\leq i\leq \ell$, $0\leq j\leq t$.

Puisque $|a_i^{(j)} \cdot x_k|_j \leq \lambda_k^{(j)} Q^{c_i'^{(j)}+\eta}$ $1\leq i$, $k\leq \ell$, $0\leq j\leq t$ (33)

et d'après (32), nous avons :

$$m_{\ell-1} < \lambda_{\ell-1} Q^{(t+1)\eta} < Q^{-\delta+(t+1)\eta} < Q^{-\delta_1} \quad \text{avec} \quad \delta_1 = \frac{8}{9}\delta .$$

Alors, d'après (33), les points $y_1, y_{\ell-1}$ en lesquels sont atteints les $\ell-1$ premiers minima de π' sont dans l'espace engendré par $x_1, \dots, x_{\ell-1}$. y_ℓ^* et x_ℓ^* sont donc proportionnels et il suffit de démontrer le théorème en remplaçant δ par δ_1 et $A_i^{(j)}$ par $Q^{c_i'^{(j)}}$. On se ramène d'autre part à ce que les coefficients des $a_i^{(j)}$ soient des entiers algébriques. Soit M l'ensemble des $Q>1$ tels que $\pi'(Q)$ vérifie (26) et tel qu'il existe $(i_o, \dots, i_t) \in S$ vérifiant $a_{i_j}^{(j)*} \cdot x_\ell^* \neq 0$ pour $0\leq j\leq t$. Il nous suffit de montrer que M est borné. Sinon soient δ_2 $(0<\delta_2<\delta$ et $\delta_2<1)$ $\varepsilon>0$ vérifiant les hypothèses du théorème 9 (avec δ_2 au lieu de δ), m et les $L_i^{(j)}$ vérifiant les hypothèses du théorème 8 ; $\omega = 242^{-m} (\frac{\varepsilon}{12})^{2^{m-1}}$;

$Q_1, \dots, Q_m$ vérifiant (20) et (21) et appartenant à M. Soit P le polynôme du théorème 8. Pour $1 \leq h \leq m$ soient $x_{h1}, \dots, x_{h\ell}$ des vecteurs de $\mathbb{Z}^\ell$ où sont atteints les minima de $\pi(Q_h)$. Ils vérifient (22). Les hypothèses du théorème 9 sont alors satisfaites avec δ_2 au lieu de δ. Alors l'index de P par rapport à $(M_1, \dots, M_m ; r_1, \dots, r_m)$ est au moins $m\varepsilon$. Puisque $Q_h \in M$ il existe $(i_o, \dots, i_t) \in S$ vérifiant (28). De (30) nous déduisons que

$$Q_h^{c_4} < |M_h| < Q_h^{c_5} \qquad 1 \leq h \leq m \quad \text{avec } c_k = c_k(\delta_2, a_i^{(j)}) \ .$$

En appliquant le théorème 11 de [8] l'index de P par rapport à $(M_1, \dots, M_m ; r_1, \dots, r_m)$ est inférieur ou égal à ε et on obtient une contradiction.

THÉOREME 11. - Soient $a_i^{(j)}$ comme précédemment et $c_i^{(j)}$ des réels vérifiant (12), (13) et $\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{0 \leq j \leq t} c_i^{(j)} = 0$ et

$$|c_i^{(j)}| \leq \frac{1}{t+1} \qquad , \quad 1 \leq i \leq \ell \ , \quad 0 \leq j \leq t \ .$$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ les minima successifs de $\pi(Q)$ défini par $|a_i^{(j)} . x^{(j)}|_j \leq Q^{c_i(j)}$ pour $1 \leq i \leq \ell$, $0 \leq j \leq t$ et $x_1, \dots, x_\ell$, $x_1^*, \dots, x_\ell^*$ comme précédemment.

Soit $\delta > 0$ et supposons que pour tout Q dans M non borné

$$\lambda_{\ell-1} < \lambda_\ell \, Q^{-\delta} \ . \tag{34}$$

Alors il existe M' une partie non bornée de M et il existe $y \in \mathbb{Q}^\ell$ tels que

$$\forall Q \in M' \qquad x_\ell^* = x_\ell^*(Q) = \frac{y}{g} \quad \text{où} \quad g = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t} \ .$$

La démonstration suit celle du théorème 7 de [9] et repose sur le théorème 3.

Démonstration du théorème 7 : Soient pour $0 \leq j \leq t$, n vecteurs $a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}$ à composantes algébriques $\mathbb{Q}$. L. I. de $\mathbb{Q}_{p_j}^n$ tels que $L_i^{(j)}(x) = a_i^{(j)} . x$. Supposons $\lambda_d < \lambda_{d+1} Q^{-\delta}$ pour $Q \in H$ et posons $q = n-d$.

Si $\sigma = (i_1, \dots, i_q) \in C(n,q)$, soit :

$$a_\sigma^{(j)} = a_{i_1}^{(j)} \wedge \dots \wedge a_{i_q}^{(j)} \quad \text{et} \quad c_\sigma^{(j)} = \sum_{i \in \sigma} c_i^{(j)} . \tag{35}$$

Alors

$$c_\sigma^{(j)} \leq 0 \quad \text{pour } j \geq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{t} \sum_{\sigma \in C(n,q)} c_\sigma^{(j)} = 0 . \tag{36}$$

Soient $F^{(j)}$ et $F_q^{(j)}$ les fonctions associées à π et $\pi_{(q)}$. Avec les notations du théorème 4 nous avons en posant

$$\ell = L \qquad \zeta_L = \{d+1, d+2, \dots, n\} \qquad \zeta_{\ell-1} = \{d, d+2, \dots, n\}$$

et $\quad m_\ell \ll \lambda_{d+1}\lambda_{d+2} \dots \lambda_n \ll m_\ell \;, \quad m_{\ell-1} \ll \lambda_d \lambda_{d+2} \dots \lambda_n \ll m_{\ell-1}$.

(17) entraîne $m_{\ell-1} \ll m_\ell Q^{-\delta}$ et pour Q assez grand $m_{\ell-1} < m_\ell Q^{-\delta/2}$. (37)

Appliquons le théorème 12 à $a_\sigma^{(j)}$, $c_\sigma^{(j)}$ et $\pi_{(q)}$. Soient $x_{1(q)}, \dots, x_{\ell(q)}$ des points de $\mathbb{Z}^\ell$ où sont atteints les minima de $\pi_{(q)}$ et $x_{1(q)}^*, \dots, x_{\ell(q)}^*$ leurs duaux. D'après le théorème 12 il existe y tel que $x_{\ell(q)}^* = x_{\ell(q)}^*(Q) = \frac{y}{g}$ avec $g = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$ pour des valeurs de Q arbitrairement grandes. Soient $z_1, \dots, z_n$ des points de $\mathbb{Z}^n$ où sont atteints les minima de π et pour $\sigma = (i_1, \dots, i_q)$ $z_\sigma = z_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_q}$. D'après la démonstration du théorème 4 on a $\prod_{j=0}^{t} F_{(q)}^{(j)}(z_\sigma) \ll \lambda_\sigma$ et donc pour $\sigma \neq \zeta_\ell$ d'après (37) : $\prod_{j=0}^{t} F_{(q)}^{(j)}(z_\sigma) \ll m_\ell Q^{-\delta}$. Donc $z_{\zeta_1}, \dots, z_{\zeta_{\ell-1}}$ sont dans l'espace engendré par $x_{1(q)}, \dots, x_{\ell-1(q)}$ et $z_{\zeta_\ell}^*$ et $x_{\ell(q)}^*$ sont proportionnels. Alors d'après le lemme 5 de [9] il existe un sous-espace S^* de dimension $n-d = q$ tel que $z_{d+1}^*, \dots, z_n^*$ soient dans S^* pour $Q \in H'$. Soit S^d l'orthogonal de S^*. $z_1, \dots, z_d$ sont dans S^d et les d premiers minima successifs de π sont atteints sur S^d pour tout Q dans H' .

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. W. S. CASSELS. - An introduction to the Geometry of Numbers. Springer, Grundlehren 99 (1959).

[2] J. W. S. CASSELS. - An introduction to diophantine approximation. Cambridge, the University Press, 1957 (Cambridge tracts in Mathematics and mathematical, Physics, n° 45).

[3] K. MAHLER. - Lectures on diophantien approximations. University of Notre Dame, 1961.

[4] E. LUTZ. - Sur les approximations diophantiennes linéaires p-adiques. Paris, Hermann, 1955 (Act. Scient. et Ind. 1224, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 12).

[5] G. RHIN. - Géométrie des nombres p-adiques. Séminaire Delange-Pisot-Poitou (Groupe d'étude de Théorie des Nombres) 15e année, 1973/74, n° 69, 7p.

[6] K. F. ROTH. - Rational approximations to algebraic numbers. Mathematika 2, 1955, 1-20.

[7] W. M. SCHMIDT. - Zür simultanen Approximation algebraischer Zahlen durch rationale. Acta Math. 114, 1965, 159-209.

[8] W. M. SCHMIDT. - On simultaneous approximation of two algebraic numbers by rationnals. Acta Math. 119, 1967, 27-50.

[9] W. M. SCHMIDT. - Linear Forms with Algebraic Coefficients I. Journal of number theory 3, 253-277, 1971.

-:-:-:-

Eugène DUBOIS
Université de Caen
Esplanade de la Paix
14000 CAEN

Georges RHIN
Université de Metz
Ile du Saulcy
57000 METZ