MAURICE MIGNOTTE
MICHEL WALDSCHMIDT

Approximation des valeurs de fonctions transcendantes

Astérisque, tome 24-25 (1975), p. 183-186
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__183_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 24-25 (1975)

APPROXIMATION DES VALEURS DE FONCTIONS TRANSCENDANTES

par

Maurice MIGNOTTE et Michel WALDSCHMIDT

-:-:-:-

I. - ÉNONCÉ DES RÉSULTATS. - Le théorème obtenu exprime que des fonctions méromorphes d'ordre fini qui prennent simultanément des valeurs très proches de nombres algébriques, en des points suffisamment nombreux, sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{Q}$. Par souci de brièveté, nous ne l'énoncerons que dans le cas de fonctions entières.

THÉORÈME. - *Soient* $\rho_1, \dots, \rho_d$, $\sigma_1, \dots, \sigma_d$, ℓ , *des réels positifs, avec* $d \geq 2$, $\sigma_1 + \dots + \sigma_d = (d-1)\ell$, $\rho_i < \sigma_i$ $(1 \leq i \leq d)$. *Soient* f_i *des fonctions entières d'ordre*(*) $\leq \rho_i$, *une suite d'ensembles* $S_N \subset \mathbb{C}$, *avec* $|z| \ll N$ *si* $z \in S_N$, Card $S_N = [N^{\ell}]$. *On suppose que, pour* $1 \leq i \leq d$, $N \geq N_0$ *et* $z \in S_N$, *il existe* $\beta_{i,N}(z)$ *algébrique, de degré* $\leq D$ *(fixé), de taille* (*) $\ll N^{\sigma_i}$, *tel que* :

(*) Pour les définitions, voir [W]

$$\mathrm{Log}\,|f_i(z) - \beta_{i,N}(z)| \leq -N^{\ell}(q_N + 2\log N)\ ,$$

<u>où</u> $q_N = -\mathrm{Log}\min(\min_{\substack{z,z'\in S_N\\ z\neq z'}} |z-z'|\ ,\ 1)$.

<u>Alors</u> $f_1, \dots, f_d$ <u>sont algébriquement indépendantes sur</u> $\mathbb{Q}$.

Ce théorème contient, en particulier, la transcendance de a^b , $a \neq 0, 1$, $b \notin \mathbb{Q}$, a et b algébriques, ainsi que les résultats suivants.

COROLLAIRE 1. - <u>Soit</u> f <u>entière d'ordre</u> $\leq \rho$, (p_k/q_k) <u>et</u> (a_k/b_k) <u>deux suites de nombres rationnels, les</u> p_k/q_k <u>étant deux à deux distincts. On suppose qu'il existe</u> $\ell > \rho$ <u>tel que</u> :

$$\max(|p_k|\ ,\ |q_k|) \ll k^{1/\ell}\ ,\quad \mathrm{Log}\,|b_k| \ll k^{1/\ell} \quad \underline{\text{et}}$$

$$|f(p_k/q_k) - a_k/b_k| \leq k^{-4k/\ell}\ ,\ k \geq k_o\ .$$

<u>Alors</u> f <u>est un polynôme à coefficients algébriques.</u>

COROLLAIRE 2. - <u>Soit</u> f <u>entière transcendante, d'ordre</u> $\leq \rho$. <u>S'il existe une suite strictement croissante d'entiers</u> $(n_1, n_2, \dots)$ <u>telle que</u> :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{Log}\ \|f(n_k)\|}{n_k^{\rho+\varepsilon}\ \mathrm{Log}\ n_k} = -\infty\ ,\quad \underline{\text{pour un}}\ \varepsilon > 0\ ,$$

<u>alors, on a :</u>

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{k^{1/(\rho+\varepsilon)}} = +\infty\ .$$

II. - INDICATIONS SUR LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. - Son principe est très simple. On suppose $f_1, \dots, f_d$ algébriquement indépendantes. On construit une fonction auxiliaire de la forme $F = P(f_1, \dots, f_d)$, où $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_d]$, $P \neq 0$ (donc $F \neq 0$), qui est très petite dans un grand disque, $|z| \leq N$. Aux points z de S_N, $F(z)$ est très proche des nombres algébriques $\Phi_N(z) = F(\beta_{1,N}(z), \dots, \beta_{d,N}(z))$. Les $\Phi_N(z)$ sont donc très petits ; si petits que l'inégalité de la taille montre qu'ils sont nuls. Donc $F(z)$ est "presque" nulle si $z \in S_N$, et la formule d'interpolation d'Hermite montre que F est très petite dans le disque $|z| \leq N+1$, et ainsi de suite... Le théorème de Liouville montre que F est nulle. Contradiction.

La construction de la fonction auxiliaire présente un intérêt pour elle-même. Elle n'utilise que la connaissance de l'ordre des fonctions considérées. Sa généralité est telle qu'elle peut servir de base pour de nombreuses démonstrations de la théorie des nombres transcendants. Elle remplace des constructions très techniques, dont la diversité variait à l'infini, et permet d'améliorer certains résultats. C'est donc un progrès sur le plan de la simplicité et de l'efficacité. Les démonstrations paraîtront dans les Proceedings of the Nederl. Akad. van Wet. (Indag. Math.).

-:-:-:-

RÉFÉRENCES

[L] LANG Serge. - Introduction to transcendental numbers. Addison Wesley, (1966).

[R] RAMACHANDRA K. - Contributions to the theory of transcendental numbers. Acta Arith. 14 (1968), 65-88.

[W] WALDSCHMIDT Michel. - Un premier cours sur les nombres transcendants. Lectures notes in Mathematics, n° 402, Springer.

-:-:-:-

Maurice MIGNOTTE
Université de Paris XIII
Centre Scientifique et Polytechnique
Département de Mathématiques
Place du 8 mai 1945
93200 SAINT DENIS

Michel WALDSCHMIDT
U. E. R. de Mathématiques
4, place Jussieu
Tour 45-46
75230 PARIS CEDEX 05