Astérisque

YVETTE AMICE
JACQUES VÉLU

Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke

Astérisque, tome 24-25 (1975), p. 119-131
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__119_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 24-25 (1975)

DISTRIBUTIONS p-ADIQUES ASSOCIÉES AUX SÉRIES DE HECKE

par

Yvette AMICE et Jacques VÉLU

-:-:-:-

I. - <u>INTRODUCTION.</u> - Soit $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{2\pi i n z}$ une <u>série de Hecke</u> de poids $w+2$, i. e. une forme modulaire parabolique pour $SL_2(\mathbb{Z})$ de poids $w+2$, telle que $\varphi | T_n = \lambda_n \varphi$ pour tout opérateur de Hecke T_n.

Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur $f(\chi)$. Posons $\varphi_\chi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \chi(n) e^{2\pi i n z}$, alors la fonction $\Lambda_\varphi(\chi, s) = f(\chi)^s \int_0^\infty y^s \varphi_\chi(iy) \frac{dy}{y} = (f(\chi)^s \Gamma(s)/(2\pi)^s)(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \chi(n)/n^s)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et satisfait à l'équation fonctionnelle $\Lambda_\varphi(\chi, s) = \chi(-1)\, i^{-w-2} \frac{G(\chi)}{G(\chi^{-1})} \Lambda_\varphi(\chi^{-1}, w+2-s)$, où $G(\chi) = \sum_{a \bmod f(\chi)} \chi(a)\, e^{2\pi i a/f(\chi)}$ est une somme de Gauss.

Quand $s = k+1$ est un entier, on peut écrire $\Lambda_\varphi(\chi, s)$ au moyen d'une somme finie. En effet, nous avons $\varphi_\chi(z) = \frac{G(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a \bmod f(\chi)} \chi^{-1}(-a)\, \varphi(z + \frac{a}{f(\chi)})$, ce qui donne $\Lambda_\varphi(\chi, k+1) = f(\chi)^k\, i^{-k-1}\, G(\chi) \sum_{a \bmod f(\chi)} \chi^{-1}(-a)\, Q_k(a/f(\chi))$, avec $Q_k(x) = \int_x^{i\infty} (z-x)^k \varphi(z)\, dz$, ($x \in \mathbb{Q}$ et $z = x+iy$ avec $0 < y < \infty$).

Dans [4] , Manin étudie ces intégrales et démontre :

THÉORÈME I. - Il existe $\omega_+ \in i\mathbb{R}$ et $\omega_- \in \mathbb{R}$ tels que pour tout entier $k \in [0, w]$, tout $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, tout $x \in \mathbb{Q}$, $Q_k^{\varepsilon}(x) = \dfrac{Q_k(x) + \varepsilon\, Q_k(-x)}{2\omega_{\varepsilon(-1)^k}}$ appartienne au corps de nombres réel $\mathbb{Q}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots)$. De plus, pour $x \in \mathbb{Q}$, soit D un entier tel que $Dx \in \mathbb{Z}$, alors $D^k Q_k^{\varepsilon}(x)$ est entier algébrique.

Il résulte de ce théorème que les deux membres de l'égalité :

$$(1) \qquad \frac{i^{k+1}\, \Lambda_{\varphi}(\chi, k+1)}{G(\chi)\, \omega_{(-1)^k \chi(-1)}} = f(\chi)^k \sum_{a \bmod f(\chi)} \chi^{-1}(-a)\, Q_k^{\chi(-1)}\left(\frac{a}{f(\chi)}\right)$$

sont des nombres algébriques ; nous les noterons $A(\chi, k)$.

Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ le corps des nombres algébriques et $\mathbb{C}_p$ le complété de la clôture algébrique du corps p-adique élémentaire $\mathbb{Q}_p$. Nous fixons un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}_p$: ceci nous permet de considérer désormais les nombres algébriques, et en particulier $A(\chi, k)$, comme appartenant à $\mathbb{C}_p$.

Ayant fixé un nombre premier p, pour donner une interprétation p-adique des valeurs $A(\chi, k)$, nous faisons varier le caractère χ de façon que son conducteur divise $\Delta_o p^n$, où Δ_o est un nombre fixé premier à p. Le groupe des caractères de Dirichlet ainsi choisi s'identifie à un sous-groupe discret d'un groupe analytique p-adique (groupe des quasi-caractères p-adiques, cf. §. II). La "distribution p-adique" associée à la série de Hecke φ est une fonction analytique sur le groupe des quasi-caractères p-adiques, prenant sur le sous-groupe des caractères de Dirichlet les valeurs $A(\chi, k)$ (à un facteur correctif près). Le §. III expose la construction de cette fonction analytique, et le §. IV indique les outils d'analyse p-adique utilisés.

II. - CARACTÈRES ET DISTRIBUTIONS p-ADIQUES. -

II. 1. - Caractères. - Soient p un nombre premier et Δ_o un entier premier à p, désormais fixés. On pose $q = 4$ si $p = 2$ et $q = p$ si $p \neq 2$, on note $\Delta = \Delta_o q$.

Les caractères de Dirichlet de conducteur Δp^n sont des caractères du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/\Delta p^n \mathbb{Z})^*$. Soit $\mathbb{Z}_\Delta^* = \varprojlim (\mathbb{Z}/\Delta p^n \mathbb{Z})^*$, alors $\mathbb{Z}_\Delta^* \simeq (\mathbb{Z}/\Delta_o \mathbb{Z})^* \times \mathbb{Z}_p^*$, où $\mathbb{Z}_p^*$ est le groupe des unités de $\mathbb{Z}_p$.

Le groupe des quasi-caractères p-adiques associé à Δ_o est le groupe

$$X(\mathbb{Z}_\Delta^*) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbb{Z}_\Delta^*, \mathbb{C}_p^*)$$

des homomorphismes continus de $\mathbb{Z}_\Delta^*$ dans $\mathbb{C}_p^*$.

Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur Δp^n : χ est un élément de $\mathrm{Hom}((\mathbb{Z}/\Delta p^m \mathbb{Z})^*, \mathbb{C}_p^*)$, pour tout $m \geq n$, qui se prolonge donc de façon unique en un élément de $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$, que nous noterons encore χ.

D'autre part, tout $z \in \mathbb{Z}$ s'écrit de façon unique $z = \omega(z)\,\theta(z)$ avec $\omega(z) \in (\mathbb{Z}/\Delta_o \mathbb{Z})^*$ et $\theta(z) \in \mathbb{Z}_p^*$; l'application $\theta : z \to \theta(z)$ est un élément de $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ que nous appellerons le caractère fondamental.

La structure de groupe analytique p-adique de $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ provient des propriétés classiques suivantes.

PROPOSITION II. 1. - *Soient* $U_p = 1 + q\,\mathbb{Z}_p = \{z \in \mathbb{Z}_p \mid v(z-1) \geq v(q)\}$ *et* $T = \{t \in \mathbb{C}_p \mid v(t-1) \geq 0\}$.

(i) *pour tout* $g \in U_p$ *tel que* $v(g-1) = v(q)$, *l'application* $z \to g^z$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{Z}_p$ *sur* U_p ; *on appellera un tel* g *un générateur de* U_p ;

(ii) *pour tout générateur* g *de* U_p, *l'application* $L_g : \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(U_p, \mathbb{C}_p^*) = X(U_p) \to \mathbb{C}_p^*$, *qui à un caractère continu* χ *de* U_p

<u>associe</u> $L_g(\chi) = \chi(g)$, <u>est un isomorphisme bicontinu de</u> $X(U_p)$ <u>sur</u> T .

On voit ainsi que, puisque $\mathbb{Z}_\Delta^* \simeq (\mathbb{Z}/\Delta_o\mathbb{Z})^* \times \mathbb{Z}_p^*$ et $\mathbb{Z}_p^* \simeq (\mathbb{Z}/q\,\mathbb{Z})^* \times U_p$, $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ est le produit d'un groupe fini $(\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/\Delta_o\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/q\,\mathbb{Z})^*$ par $X(U_p)$, ce dernier étant (non canoniquement) isomorphe à T . Or T est un disque ouvert de $\mathbb{C}_p$: ceci fait bien de $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ une variété analytique, réunion disjointe de "disques ouverts", et on vérifie que c'est un groupe analytique.

Les fonctions analytiques sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ sont alors les fonctions dont la restriction à chacune des composantes isomorphes à T est analytique sur cette composante (i. e. telle que sa composée avec un paramétrage L_g^{-1} soit analytique sur T).

Le sous-groupe de torsion de $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ s'identifie, comme indiqué plus haut, au groupe des caractères de Dirichlet de conducteur dp^n où $d|\Delta_o$. Soit χ un tel caractère de Dirichlet et soit $\chi = \chi_o\chi_1$ sa décomposition en $\chi_o \in X((\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z})^*)$ et $\chi_1 \in X(U_p)$: alors χ_1 prend ses valeurs dans le groupe $\mu_{p^\infty} = \bigcup_n \mu_{p^n}$ où μ_{p^n} désigne le groupe des racines p^n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}_p$. Le choix d'un générateur g de U_p identifie χ_1 à $\chi_1(g) \in \mu_{p^\infty}$.

La fonction analytique sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ que nous construisons au §. III est définie par ses valeurs sur les caractères $\chi\theta^k$, $k \in [0, w]$, et χ élément de torsion de $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$.

II. 2. - <u>Distributions</u> p-<u>adiques.</u> - Le groupe $\mathbb{Z}_\Delta^*$ est le produit d'un groupe fini par U_p : parmi les fonctions continues (à valeurs dans $\mathbb{C}_p$) sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$, nous distinguerons l'algèbre $\mathrm{Locan}(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ des fonctions localement analytiques, muni de sa topologie naturelle (cf. par ex. [1]). Alors $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ est un sous-groupe multiplicatif de cette algèbre.

DÉFINITION II. 2. 1. - Nous appelons distribution sur $\mathbb{Z}_\Delta^*$ une forme linéaire continue sur $\mathrm{Locan}(\mathbb{Z}_\Delta^*)$.

PROPOSITION II. 2. 2. - La restriction à $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ des formes linéaires sur $\mathrm{Locan}(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ définit un isomorphisme de l'espace des distributions sur l'espace des fonctions analytiques sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$.

La démonstration de cette proposition repose sur la caractéristique des fonctions localement analytiques par leurs coefficients d'interpolation [1].

L'isomorphisme entre l'espace des distributions sur $\mathbb{Z}_\Delta^*$ et l'espace des fonctions analytiques sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ peut être précisé sous forme d'un dictionnaire entre les propriétés de croissance des fonctions analytiques sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ et le fait, pour la distribution associée, d'être prolongeable continûment à un espace de fonctions sur $\mathbb{Z}_\Delta^*$, plus grand que $\mathrm{Locan}(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ et où $\mathrm{Locan}(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ est dense. Donnons deux exemples de telles correspondances.

PROPOSITION II. 2. 3. - Une distribution sur $\mathbb{Z}_\Delta^*$ est une mesure (i. e. se prolonge continûment à l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{Z}_\Delta^*$) si et seulement si elle induit sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ une fonction analytique bornée.

Pour formuler le second exemple, rappelons quelques notions sur les conditions de croissance au bord d'une fonction analytique sur un disque ouvert.

Soit f une fonction analytique sur T, sa fonction module, $M_f(r)$ est définie, pour $0 \leq r < 1$, par $M_f(r) = \sup_{|x-1| \leq r} |f(x)| = \mathrm{Max}_n(|b_n| r^n)$, où

$f(X) = \sum_{n\geq 0} b_n (X-1)^n$ est la série de Taylor de f au point 1.

Etant données deux fonctions f et g, analytiques sur T, nous noterons $f = O(g)$ (resp. $f = o(g)$) si $\overline{\lim}_{r\to 1^-} (M_f(r)/M_g(r)) < +\infty$ (resp. $\lim_{r\to 1^-} (M_f(r)/M_g(r)) = 0$). Par exemple, si $g(X) = (\mathrm{Log}(X)^k)$, et $f(X) = \sum_{n\geq 0} b_n(X-1)^n$, on montre que $f = o(g)$ équivaut à $|b_n| = o(n^k)$ (la valeur absolue de $\mathbb{C}_p$ étant normalisée par $|p| = 1/p$).

Pour des fonctions f et g analytiques sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$, les notations $f = O(g)$ et $f = o(g)$ signifient que les restrictions de f et g à chacune des composantes de $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ isomorphe à T ont cette propriété. On vérifie qu'il s'agit bien d'une notion intrinsèque, i. e. indépendante du choix d'un paramétrage L_g^{-1}.

PROPOSITION II. 2. 4. - <u>Une distribution sur</u> $\mathbb{Z}_\Delta^*$ <u>se prolonge à l'espace des tions</u> $k-1$ <u>fois dérivables dont la dérivée</u> $k-1$ <u>ième est lipschitzienne</u> [2] <u>à la condition nécessaire et suffisante que sa restriction à</u> $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ <u>soit</u> $o((\mathrm{Log}\, X)^k)$.

D'autre part, les relations classiques [3] entre les zéros des fonctions analytiques et leur fonction module, permettent de montrer qu'une fonction analytique sur T, qui satisfait une condition de croissance, et a "trop" de zéros, est nécessairement nulle. Dans cet ordre d'idées, nous utiliserons le résultat suivant :

LEMME II. 2. 5. - <u>Soit</u> f <u>une fonction analytique sur</u> $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$ <u>et soit</u> h <u>un entier positif, si</u> $f = o((\mathrm{Log}\, X)^h)$ <u>et</u> $f(\chi\, \theta^k) = 0$ <u>pour</u> $k \in [0, h-1]$ <u>et</u> χ <u>de torsion</u> (θ <u>est le caractère fondamental), alors</u> $f = 0$.

Ceci montre que si la construction d'une distribution sur $\mathbb{Z}_\Delta^*$ associée à une série de Hecke, donnée par ses valeurs sur les caractères $\chi\theta^k$ (χ de torsion, $k \in [0, w]$), permet d'obtenir une fonction qui soit $o(\mathrm{Log}^{w+1})$, une telle distribution est unique. Cette remarque nous sera utile au §. III, en particulier pour prouver la relation fonctionnelle.

III. - CONSTRUCTION DES "FONCTIONS L" p-ADIQUES. - Soit φ une série de Hecke (cf. §. I) et soit p un nombre premier. La construction d'une distribution p-adique analogue à la fonction holomorphe $\Lambda(\varphi, s)$ se résume dans le

THÉORÈME III. - Soit λ une racine de l'équation $X^2 - \lambda_p X + p^{w+1} = 0$, de valuation p-adique $v_p(\lambda) < w+1$, alors il existe une unique fonction G_λ, analytique sur $X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$, et satisfaisant

(a) pour $k \in [0, w]$, et pour tout caractère χ de Dirichlet, $\chi = \chi_o \chi_1$ (notations en II. 1) avec $f(\chi_o) | \Delta$ et $f(\chi_1) = p^n$,

$$G_\lambda(\chi\, \theta^k) = (1/\lambda^n)\, (-1)^k\, A(\chi, k),$$

(b) G_λ est $o(\mathrm{Log}^{w+1})$.

De plus,

(c) si $v_p(\lambda) = 0$, G_λ est une fonction analytique bornée,
si $h = [v_p(\lambda)]$, G_λ est $o(\mathrm{Log}^{h+1})$; enfin

(d) G_λ satisfait la relation fonctionnelle

$$G_\lambda(\chi\, \theta^k) = \varepsilon(\chi, k)\, G_\lambda(\theta^{w-k} \chi^{-1}),$$

pour $k \in [0, w]$ et pour tout $\chi \in X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$, avec $\varepsilon(\chi, k) = \chi_o(-1)\, (-1)^{k-1}$, où $\chi = \chi_o \chi_1$.

Ce théorème généralise les résultats obtenus par Manin dans [4] et [5] : l'énoncé ci-dessus, restreint au cas où $v_p(\lambda) < 1$, est en effet une reformulation de ces résultats.

Les principales différences entre notre théorème et ceux de [4] et [5] sont les suivantes :

1. - La construction de Manin ne fournit une fonction G_λ que lorsque l'équation $X^2 - \lambda_p X + p^{w+1} = 0$ a une racine λ de valuation $v_p(\lambda) < 1$. Or cette équation a toujours au moins une racine de valuation $< w+1$, notre théorème permet donc de construire (au moins) une fonction G_λ dans tous les cas (i. e. quelle que soit la valuation p-adique de λ_p).

2. - Lorsque $0 < v_p(\lambda_p) < w+1$, les deux racines λ et λ' de l'équation fournissent chacune une fonction analytique, G_λ et $G_{\lambda'}$. On peut d'ailleurs préciser certaines propriétés d'analyticité du rapport $G_\lambda / G_{\lambda'}$, lorsque $v(\lambda') > v(\lambda)$.

3. - La construction que nous faisons ici permet d'imposer a priori toutes les conditions (a), qui impliquent l'équation fonctionnelle (d) : en effet, l'équation (d) est satisfaite lorsque χ est un caractère de Dirichlet, donc aussi pour tout $\chi \in X(\mathbb{Z}_\Delta^*)$, compte-tenu de la remarque faite en fin du §. II.

4. - Ayant a priori imposé à G_λ toutes les conditions (a), on obtient une fonction G_λ satisfaisant de plus les conditions de croissance (c).

Méthode.- La méthode employée dans la construction de G_λ est un procédé d'interpolation. On voit d'abord que, quitte à fixer la composante discrète χ_o du caractère χ, tout revient à trouver une fonction analytique sur T, qui soit $o((\mathrm{Log})^{w+1})$ et prenne des valeurs données aux points $(g^k \gamma)$, $k \in [0, w]$, g un générateur fixé de U_p et γ parcourant μ_{p^∞}. Nous avons déjà observé que si une telle fonction existe, elle est unique. On montre alors que les fonctions qui sont

$o(\mathrm{Log}^{w+1})$ peuvent être caractérisées par une évaluation des coefficients de la suite des polynômes qui interpolent leurs valeurs sur les familles $(g^k\gamma)$, $k \in [0,w]$, $\gamma \in \mu_{p^n}$. Puis, l'évaluation de ces coefficients s'avérant mal-commode dans le cas particulier qui nous occupe, on établit une comparaison entre ceux-ci et des coefficients d'interpolation "additive" (proposition IV. 4), ce qui permet de conclure. Le §. IV. ci-dessous indique ces différentes étapes de façon plus précise.

IV. - <u>INTERPOLATION.</u> - Soit T le disque $\{x \in \mathbb{C}_p \mid v(x-1) > 0\}$, μ_{p^n} le groupe de ses points d'ordre p^n, $\mu_{p^\infty} = \bigcup_n \mu_{p^n}$ son sous-groupe de torsion. On note g un générateur fixé de $U_p = T \cap \mathbb{Z}_p$, soit h un entier positif, on note B_h l'espace des fonctions analytiques sur T qui sont $o(\mathrm{Log}^h)$.

<u>Notation</u> : soit $h \geq 1$, F une fonction sur T, on note $S_n^h(F)$ la suite des polynômes d'interpolation de F sur les points $(g^k\gamma)$, $k \in [0,h-1]$, $\gamma \in \mu_{p^n}$, c'est-à-dire la suite de polynômes définie par

(i) $S_n^h(g^k\gamma) = F(g^k\gamma)$, pour $k \in [0,h-1]$ et $\gamma \in \mu_{p^n}$;

(ii) $\deg(S_n^h) < hp^n$.

Soit P un polynôme (à une ou plusieurs variables) nous noterons $\|P\|$ la borne supérieure des valeurs absolues des coefficients de P. Si P est un polynôme à une variable, on remarque que $\|P\| = \lim_{r\to 1} M_p(r) = M_p(1)$.

PROPOSITION IV. 1. - <u>Soit</u> I_h <u>l'espace des suites de polynômes</u> $(S_n^h)_{n\geq 0}$, <u>satisfaisant</u>

(i) $\deg(S_n^h) < hp^n$ <u>et, pour</u> $k \in [0,h-1]$, $(X/g^k)^{p^n}-1$ <u>divise</u> $S_{n+1}^h - S_n^h$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} \|p^{nh} S_n^h\| = 0$, alors,

pour $F \in B_h$, la suite $(S_n^h(F))_{n\geq 0}$ appartient à I_h et $S_n^h(F) \to F$ pour la topolo- de la convergence uniforme sur les disques fermés de T . De plus, pour qu'une suite $(S_n^h)_{n\geq 0}$ satisfaisant la condition (i) soit la suite des polynômes d'interpolation d'une fonction F appartenant à B_h , il faut et il suffit qu'elle satisfasse (ii).

En d'autres termes : l'application qui à une fonction F associe la suite $S_n^h(F)$ définit une bijection de B_h sur I_h .

Remarquons que la condition (i) exprime seulement qu'il existe une fonction F sur T dont la suite S_n^h est la suite des polynômes d'interpolation.

La preuve de cette proposition repose essentiellement sur : a) la continuité de la division euclidienne par un polynôme (cf. par exemple [3]), appliquée à la division par le polynôme $\prod_{k=0}^{h-1} Q_n(X/g^k)$, où $Q_n(X) = X^{p^n} - 1$; b) une majoration de $\|S_{n+1}^h - S_n^h\|$ qui résulte de ce que ce polynôme a suffisamment de racines pour qu'il tende nécessairement vers zéro sur T .

A partir de cette proposition, il est naturel de chercher à évaluer la suite des polynômes $S_n^{w+1}(G_\lambda)$ déterminée par les conditions :

$$\text{(a')} \quad G_\lambda(g^k\gamma) = (1/\lambda^n)(-1)^k A(\chi_o\chi_\gamma, k),\ k \in [0,w],\ \gamma \in \mu_{p^n} - \mu_{p^{n-1}},$$

où χ_γ est le caractère de U_p défini par $\chi_\gamma(g) = \gamma$ (χ_o est fixé).

LEMME IV. 2. - Soit G une fonction sur T , et soit, pour $i \in [0,h-1]$, $R_n^i(X)$ le polynôme défini par : $\deg(R_n^i) < p^n$ et $R_n^i(g^i\gamma)$ pour $\gamma \in \mu_{p^n}$. Alors $S_n^h(G)(X) \equiv R_n^i(X) \mod. (X/g^i)^{p^n} - 1$, $i \in [0,h-1]$, et ces conditions déterminent $S_n^h(G)$.

La preuve de ce lemme est tout-à-fait élémentaire. On en déduit la

PROPOSITION IV. 3. - Soit E_n l'espace des polynômes en X de degré inférieur à p^n, et soit $\Sigma_n^h(X,Y)$ l'unique polynôme en Y, à coefficients dans E_n, de degré $< h$ et qui satisfasse $\Sigma_n^h(X, g^{ip^n}) = R_n^i(X)$, alors $S_n^h(X) = \Sigma_n^h(X, X^{p^n})$, de plus, $\|S_n^h\| = \|\Sigma_n^h\|$.

Cette dernière formulation présente déjà l'avantage de rendre le calcul des polynômes $S_n^{w+1}(G_\lambda)$ un peut plus abordable. En effet, on montre que le coefficient de X^s dans R_n^i est alors, à un facteur standard près, $Q_i^\varepsilon(\tilde{g}^s/p^n\Delta)$, où $\tilde{g}$ désigne un rationnel tel que $\tilde{g}^s \equiv g^s \bmod qp^n$, pour $s \in [0, p^n-1]$. Les coefficients de S_n^h s'obtiennent en interpolant la suite (indéxée par i) des coefficients de R_n^i, sur la suite de points g^{ip^n}. Or, une interpolation "additive" de ces valeurs, i. e. une interpolation de cette suite considérée comme suite des valeurs d'une certaine fonction sur les entiers $i = 0, 1, \dots, h-1$, conduit à évaluer des quantités $\int_\alpha^{i\infty} z^i \varphi(z)\,dz$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, dont la nature arithmétique est connue grâce à [4].

Ceci nous amène à établir une comparaison entre les coefficients de polynômes interpolant une suite de valeurs données sur les suites $0, \dots, i, \dots, h-1$ et $1, \dots, g^{ip^n}, \dots, g^{(h-1)p^n}$.

PROPOSITION IV. 4. - Soient $A_0, \dots, A_{h-1}$ des éléments d'un $\mathbb{C}_p$-espace de Banach E, et soit $\alpha \in U_p$, $\alpha \neq 1$. On note $P_A(X)$ (resp. $Q_A(Y)$) les polynômes de degré $< h$, à coefficients dans E, définis par $P_A(i) = A_i$ (resp. $Q_A(\alpha^i) = A_i$), $i \in [0, h-1]$, et $Q'_A(Z) = Q_A(1+Z)$. Alors, si $P_A(X) = \Sigma\, p_j X^j$ et $Q'_A(Z) = \Sigma\, q_j Z^j$, on a, pour tout $r > 0$ et tel que $r < p^{-1/p-1}$,

$$\|Q'_A\|_r = \operatorname*{Sup}_j (\|q_j\|\, r^j) = \operatorname*{Sup}_j (\|p_j\|\, (r/|\alpha-1|)^j) = \|P_A\|_{r/|\alpha-1|} .$$

La majoration imposée à r assure que l'application $z \to \operatorname{Log}(1+z)/\operatorname{Log}\alpha$ est une similitude du disque $|z| \leq r$ sur le disque $|x| \leq r/|\alpha - 1|$, dans $\mathbb{C}_p$. Alors les normes considérées pour P_A et Q'_A sont leurs normes dans les espaces de fonctions analytiques sur ces disques. On montre que la norme $\|Q'_A\|_r$ est égale à la distance à l'origine du sous-espace affine constitué des fonctions f analytiques pour $|z| \leq r$ et satisfaisant les conditions $f(\alpha^i) = A_i$, de même la norme de P_A est la distance à l'origine d'un sous-espace affine défini de façon analogue dans l'espace des fonctions analytiques sur le disque $|x| \leq r/|\alpha-1|$, or ces deux espaces affines sont transformés l'un de l'autre dans le changement de variable $x \to \alpha^x$, d'où la proposition.

COROLLAIRE IV. 5. - Avec les notations du théorème III, soit $h \leq w+1$ et G_λ une fonction satisfaisant les conditions (a') pour $k \in [0, h-1]$, alors la suite $S_n^h(G_\lambda)$ des polynômes d'interpolation de G_λ satisfait $\|\lambda^n S_n^h\| \leq C$, où C ne dépend pas de n.

COROLLAIRE IV. 6. - Si $h > v(\lambda)$, $S_n^h(G_\lambda)$ converge vers une fonction $G_\lambda \in B_h$, et si $v(\lambda) = 0$, $S_n^h(G_\lambda)$ convergè vers une fonction analytique bornée G_λ, pour $h \in [1, w+1]$.

La démonstration du corollaire IV. 5. repose de façon essentielle sur les propriétés arithmétiques des intégrales $\int_\alpha^{i\infty} z^i \varphi(z)\,dz$, prouvées dans [4]. Le théorème III résulte aisément de ces deux derniers énoncés.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE Yvette. - Interpolation p-adique. Bull. Soc. Math. France, t. 92, 1964, pp. 117-180.

[2] BARSKY Daniel. - Fonctions k-Lipschitziennes sur un anneau local et polynômes à valeurs entières. Bull. Soc. Math. France, t. 101, 1973, p. 397-411.

[3] LAZARD Michel. - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet. Pub. Math. I. H. E. S. n° 14.

[4] MANIN Yu. I. - Périodes des formes paraboliques et séries de Hecke p-adiques. Math. Sbornik, t. 92 (134) n° 3, 1973, p. 378-401 (en russe).

[5] MANIN Yu. I. - Détermination des valeurs des séries de Hecke p-adiques aux points entiers de la bande critique. Math. Sbornik, t. 93 (135) n° 4, 1974, p. 621-626 (en russe).

-:-:-:-

Yvette AMICE
E. N. S. J. F.
1 rue Maurie Arnoux
92120 MONTROUGE

Jacques VÉLU
Mathématiques
Université Paris-Sud
91405 ORSAY