NICOLE EL KAROUI
HERVÉ REINHARD

# Compactification et balayage de processus droits

*Astérisque*, tome 21 (1975)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__21__1_0>

# INTRODUCTION

L'origine de ce travail est un article du cinquième Symposium de Berkeley (23) où Motoo étudie le problème suivant : soit $G$ un ouvert dense dans $S$ compact, décrire tous les processus dont le comportement avant qu'ils atteignent la frontière $\partial G$ de $G$ est le même que celui d'un processus minimal donné. L'outil principal est le balayage d'une fonctionnelle additive qui est probablement utilisé ici pour la première fois d'une façon essentielle. Cet article, généralisé d'ailleurs par Okabe (24) est d'un abord difficile surtout du fait que les méthodes puissantes de balayage développées depuis dans le cadre de la théorie générale des processus n'étaient évidemment pas à la disposition des auteurs ; par ailleurs les résultats sont relativement limités, notamment, parce qu'il n'a pas été fait usage de techniques de compactification qui sont à notre sens à la fois les plus naturelles et les plus aptes à donner une description aussi complète que possible du comportement du processus au voisinage de la frontière. Un pas important a été franchi lorsqu'on a pris conscience de l'importance des derniers temps de passage et de leur lien avec les techniques de balayage, Chung dans le cas des chaînes et Azema dans le cadre de la théorie générale ont mis en place des outils particulièrement adaptés à l'étude du problème de Motoo Getoor et Sharpe (11) ont approfondi cette correspondance : ils ont d'abord mis en évidence une loi d'entrée pour le semi-groupe du processus minimal. Ensuite, considérant $L(t)$ le dernier temps de passage avant $t$ dans un ensemble $F$ (fixé une fois pour toute et qui joue le rôle de $\partial G$), $h$ et $\Phi$ des fonctions boréliennes bornées ils ont montré comment calculer $E_x[Z_{L(t)}\, h(X_t)\ ;\ 0 < L(t) < t]$ et $E_x[Y_{L(t)}\ \Phi(X_{L(t)}, X_t); 0 < L(t) < t]$ où $Z$ est bien mesurable et $Y$ prévisible. Ces résultats, fort important par eux-mêmes, conduisent à des "last exit decompositions" qui sont en fait des décompositions du semi-groupe d'un processus prolongeant le processus minimal. Ces formules améliorent considérablement une formule de Motoo qui donnait une décomposition des résolvantes. Des résultats très liés aux précédents sont des formules de conditionnement par rapport aux tribus $\mathcal{F}_{L(t)}$ et $\mathcal{F}^-_{L(t)}$. Les résultats sont d'ailleurs analogues aux résultats antérieurs de Pittenger et Shih (25). Meyer (17) a repris cet article pour le présenter dans un cadre tout à fait général et a introduit la notion d'ensemble homogène : nous avons repris cette présentation et conservé les notations. Pour plus de clarté nous avons même reproduit aux chapitres I et II tous les éléments nécessaires à la compréhension de la suite.

Notre travail -contemporain de celui de Getoor et Sharpe- a une orientation nettement différente : nous nous sommes surtout préoccupés de décrire le comportement du processus au voisinage de la frontière. A cette fin nous avons introduit d'une façon qui nous semble naturelle des processus prolongeant le processus minimal ou un sous-processus de celui-ci. L'introduction et l'étude de ces processus est une des parties les plus importantes et les plus originales de ce travail, nous avons essayé de les rendre intuitives d'une part en soulignant le rôle d'une certaine famille de temps d'arrêt (les $g+\varepsilon$ du chapitre I) d'autre part en donnant une formule explicite de densité de certaines fonctionnelles additives (voir chapitre X). On obtient en particulier des renseignements relatifs à la façon dont un processus prolongeant le processus minimal repart de la frontière, notamment en étudiant la limite $X_{L(t)+\varepsilon}$ quand $\varepsilon \to 0$ ou le support de la loi de $X_t$ quand $t$ tend vers zéro, toutes ces limites étant prises dans une nouvelle topologie obtenue par compactification de Ray. On obtient également des théorèmes d'intégration plus généraux que ceux de Getoor et Sharpe ainsi que de nouvelles formules de conditionnement (en plus des leurs que nous retrouvons), les noyaux figurant dans ces formules ayant une interprétation relativement aux semi-groupes des processus introduits.

L'utilisation d'une compactification -mais par rapport à une résolvante- avait été introduite par Dynkin [8] dans un article complètant celui d'Okabe, puis dans un article plus récent en Russe aux Teoria de 1971.

Dans le cas particulier où l'étude se ramène à celle d'un processus sur un domaine de $\mathbb{R}^n$ ou sur une variété à bord des travaux anciens (Sato-Ueno 1965, Bony-Courrège-Priouret 1967, Priouret 1968) s'attachaient surtout à l'étude des semi-groupes de Feller ou d'un processus associé dont le générateur était donné, ainsi qu'à la mise en évidence de certains opérateurs frontières limitant le domaine du générateur et qui sont liés au processus sur le bord et au comportement du processus au voisinage de la frontière (condition de Waldenfels par exemple). Ces travaux ont d'ailleurs été développés plus récemment. Nous avons essayé, dans le cadre abstrait de l'article de Motoo de mettre en évidence des opérateurs comparables, pour cela nous étendons la définition du générateur d'un processus quelconque ainsi que celle d'un processus sur un domaine avec bord (nous utilisons à cet effet la notion d'opérateur presque positif de Mokobodski) et nous trouvons une formule analogue à celle de Waldenfels faisant intervenir un opérateur qui a "presque"le principe du maximum sur le bord. Une application de ces résultats à $\mathbb{R}^n$ permet de généraliser un théorème classique sur les processus de réflexion.

Avant de faire un résumé de chaque chapitre il convient de préciser les liens qui peuvent exister entre notre travail et la Thèse de B. Maisonneuve (14). Quand Meyer a étudié l'article de Getoor et Sharpe il avait présent à l'esprit cette thèse et il s'est aperçu qu'il pouvait utiliser certains des outils et des résultats pour répondre à des questions qu'il s'était posé relativement à des généralisations de théorèmes de Getoor et Sharpe. Nous répondons nous aussi à ces questions et à d'autres pour lesquelles Meyer n'avait pas de réponse, sans faire appel aux théorèmes sur le "processus d'incursion" de Maisonneuve et d'une façon qui nous semble beaucoup plus naturelle.

Nous allons maintenant donner une idée de chaque chapitre.

<u>Chapitre I</u> (p. 12). On introduit les notations de P.A. Meyer. Un fermé aléatoire ho-

mogène M est un sous-ensemble de $\Omega \times R^+$ dont les coupes en $\omega$ sont des fermés et tel que $(\theta_t \omega, s) \in M \Longleftrightarrow (\omega, t+s) \in M$ ; c'est ce qui remplace la frontière topologique de Motoo. On définit les intervalles contigus à M et les ensembles $\overrightarrow{M}$ et $\overleftarrow{M}$ des extrémités gauches et droites de ces intervalles. $\overrightarrow{M}$ se décompose en $\overrightarrow{M}_b$ et $\overrightarrow{M}_\pi$. La proposition 4 précise cette décomposition ; $\overrightarrow{M}_b$ est réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt alors qu'il ne pense aucun temps d'arrêt dans $\overrightarrow{M}_\pi$.

Chapitre II (p.17). On introduit d'après Meyer et Azéma l'opération de balayage : si $\mu$ est une mesure sur $R_*^+$ on transporte la masse portée par les intervalles contigus à M sur $\overrightarrow{M}$. Pour étudier ce qui se passe sur M on balaye les mesures associées aux fonctionnelles $\int_0^t e^{-ps} h(X_s)ds = A^{(p)}(h)$. Soit $\bar{A}^p(h)$ le processus croissant ainsi obtenu, on considère $\bar{A}_t^p(h) = \int_0^t e^{ps} \, d\,\bar{A}_s^{(p)}(h)$ : ce sont les projections duales de cette fonctionnelle additive qui nous intéressent ; celles-ci se décomposent en termes relatifs à M, $\overrightarrow{M}_b$ et $\overrightarrow{M}_\pi$. Sur M et $\overrightarrow{M}_b$ on calcule facilement ces projections en utilisant sur $\overrightarrow{M}_b$ la propriété de Markov forte ; pour $\overrightarrow{M}_\pi$ on peut obtenir ces projections comme limite de terme du même type que pour $\overrightarrow{M}_b$ (lemme 7), grâce à la remarque suivante : si $g \in \overrightarrow{M}$ est une extrémité gauche d'un intervalle contigu à M dont la longueur excède $\varepsilon$, $g + \varepsilon$ est un temps d'arrêt. Ce type de remarque constitue une des raisons qui incitent à prolonger la résolvante du processus minimal.

Chapitre III (p. 25). On réalise ce prolongement suivant une méthode classique ; comme nous désirons que le semi-groupe correspondant à la résolvante prolongée soit borné, nous prolongeons en fait la résolvante d'un sous-processus du processus minimal. Le prolongement permet de calculer les termes relatifs à $\overrightarrow{M}_\pi$ et d'introduire des lois d'entrées bornées. Ces lois sont analogues à celles introduites par Getoor et Sharpe, le théorème qui permet de les introduire leur est d'ailleurs emprunté. Ces lois d'entrée interviennent de façon essentielle au chapitre suivant.

Chapitre IV (p.33 ). On donne ici un sens plus profond au prolongement introduit précédemment en introduisant un processus de Markov appelé v-processus d'entrée. Les théorèmes 13 et $13^{bis}$ - tous deux originaux - donnent les principaux résultats de cette partie qui est un peu le coeur de cet article.

Soit $(\Omega, \underline{\underline{F}}^o, X_t, \underline{\underline{F}}_t, P_x)$ le processus que nous désirons étudier et qui est à valeur dans $E$ sous-espace borélien d'un espace métrique compact ; soit $M$ un ensemble homogène et $D$ le temps d'entrée dans cet ensemble. On désignera par $F$ l'ensemble $\{x \in E \ , \ P^x(D=0)=1\}$ ; soit $G$ un compactifié de Ray-Knight de $E$ .

Soit $\overset{\times}{\Omega}$ l'espace des applications de $R^+$ dans $E$ , prenant leurs valeurs dans $F^c$ pour $t>0$ , continues à droite dans $E$ et $G$ pour $t>0$ , pourvues de limites à gauche dans $G$ notées $X_t^-$ et d'une limite à droite dans $G$ à l'origine notée $X_o^{\rightarrow}$ .

Si $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^o$ désignent la tribu engendrée par les coordonnées de $\hat{\omega}$ , il existe sur $(\overset{\times}{\Omega}, \overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^o)$, pour toute loi $\mu$ sur $\bar{E}$ , une mesure notée $\overset{\mu/v}{Q}$ telle que le processus $(\overset{\times}{\Omega}\ \overset{\times}{F}_o\ X_t\ \hat{Q}^{\mu/v})$ soit fortement markovien jusqu'à l'origine en prolongeant $X_t$ par $X_o^{\rightarrow}$.

Si $\mu=\delta_x$ la loi $\pi_x$ de $X_o^{\rightarrow}$ charge l'ensemble des valeurs d'adhérence dans $G$ des suites de points convergeant dans $E$ vers $x$ .

Ceci permet d'obtenir les projections duales bien mesurables de mesures d'une forme voisine de $\sum_{g \in M_\pi^{\rightarrow}} c \circ k_D \circ \theta_g \ \varepsilon_g(dt)$. On précise aussi le comportement de certaines fonctions le long des trajectoires en fonction des limites à droite dans $G$ de $X_{L(t)+\varepsilon}$.

Chapitre V (p. 50). Pour obtenir les projections de $\sum_{g \in M_\pi^{\to}} c \circ \theta_g \, \varepsilon_g(dt)$ on est amené à prolonger $\frac{1}{v} V^p$ où $V^p$ est la résolvante du processus tué à $D$ et $v(x) = V^1 1(x)$ : ceci amène à construire de nouvelles mesures $\hat{P}_x$ qui sont $\sigma$-finies, et un processus que nous appelons X-processus d'entrée.

Ce processus est construit sur $\Omega$, son semi-groupe est celui du processus de départ. Nous donnons de nouveau le support des mesures $\hat{P}_x$ en terme de fonctions continues à droite ou limitées à gauche. Ce processus est fortement markovien pour $t > 0$. La projection duale bien mesurable de $\sum_{g \in M_\pi^{\to}} c \circ \theta_g \, \varepsilon_g(dt)$ est $\hat{E}^{X_t}(c) dK_t$ ($K$ est la projection duale bien mesurable de $\sum_{g \in M_\pi^{\to}} e^g \int_{]g, D_g \wedge \zeta]} e^{-s} ds \, \varepsilon_g(dt)$).

Chapitre VI (p. 58). On applique les résultats précédents pour démontrer des théorèmes de conditionnement dans le cas bien mesurable : soit $\hat{Q}_t f(x) = \hat{E}^x(f(X_t \circ k_D))$ $E(f(X_t)/\underline{\underline{F}}_{L(t)}) = \frac{\hat{Q}_{t-L(t)}(X_{L(t)}, f)}{\hat{Q}_{t-L(t)}(X_{L(t)}, 1)}$ sur $[0 < L(t) < t]$ ; ce résultat est le même qu'un résultat de Getoor et Sharpe, le problème étant surtout de vérifier que $\hat{Q}_{t-s}(X_s, f)$ est bien mesurable (lemme 28). Par les mêmes techniques on démontre un théorème nouveau relatif aux tribus $\underline{\underline{F}}_{\ell(t)}$ $[$où $\ell(t) = \sup(s < t, s \in M)]$.

Chapitre VII (p. 65). Il s'agit du cas prévisible ; on retrouve de nouveau un théorème de Getoor et Sharpe relatif à $\underline{\underline{F}}^-_{L(u)}$ et un théorème nouveau concernant $\underline{\underline{F}}^-_{\ell(u)}$. On redémontre aussi de façon élémentaire un théorème de Walsh sur le post-L-processus qu'on complète en démontrant une propriété de Markov à l'origine.

Chapitre VIII (p. 74). Ce chapitre est consacré à la théorie pseudo-relative : si le processus tué à $t$ était markovien il suffirait de lui appliquer les résultats sur les derniers temps de sortie pour obtenir toute une série des résultats précédents ; on montre comment on peut se placer dans $\Omega \times R^{+}$ pour utiliser cette méthode et retrouver à l'aide du seul post-L-processus la décomposition des semi-groupes, les théorèmes de conditionnement, etc... .

Chapitre IX (p. 79). Il s'agit de la partie relative à la frontière topologique : on y définit, comme nous l'avons dit, les notions de générateur étendu et de générateur généralisé et on décompose l'opérateur frontière. Relativement à $\mathbb{R}^n$, on démontre que si $C^2$ est contenu dans le domaine généralisé du processus, la condition frontière a une forme nécessaire que l'on donne. Ceci généralise d'une façon assez large un résultat obtenu par Bony, Corrège et Priouret dans le cas des processus de Feller.

Chapitre X (Appendice) (p. 97). Nous avons réuni dans ce chapitre les résultats de Mokobodski relatifs aux opérateurs presque positifs ainsi que leurs applications remarquables : il est bien connu que si A et B sont deux fonctionnelles additives $A \ll B$, un théorème de Mokobodski permet d'obtenir une densité, il est curieux de constater qu'on ne signale pas souvent que la construction même de cette densité montre qu'on peut la choisir mesurable par rapport à la tribu engendrée par les fonctions excessives.

Plus remarquable, peut-être, est le résultat qui montre que pour calculer cette densité on peut remplacer l'opérateur $\limsup_{\lambda \to \infty} \lambda(I - \lambda V^{\lambda})$ par n'importe quel autre "bon" opérateur presque positif, ceci permet de montrer par exemple qu'on peut choisir pour densité

$$\lim_{V\downarrow\{x\}} \sup_{U\in\mathcal{F}(x,v)} \frac{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}dB_s}{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}dA_s}$$

où $V$ est un voisinage fin et $\mathcal{F}(x,V)$ l'ensemble des voisinages fins contenus dans $V$, $\tau(U)$ est le premier temps de sortie de $U$.

On peut en particulier démontrer le résultat intéressant suivant :

$$\hat{V}^{p+1} f(x) = \lim_{U\downarrow\{x\}} \sup \frac{E_x(e^{-\tau(U)}\, 1_F(X_{L[\tau(U)]^-})\, V^{p+1} f(X_{\tau(U)}))}{E_x(e^{-\tau(U)}\, 1_F(X_{L(\tau(U))})\, v(X_{\tau(U)}))}$$

Nous remercions vivement M. S. Sharpe qui nous a fait l'amitié de lire le manuscrit.

## NOTATIONS.

Toutes les notations relatives aux processus de Markov sont les notations usuelles (par exemple Blumenthal et Getoor), celles de la théorie générales sont celles de Dellacherie.

Nous sommes contraints d'introduire un grand nombre de semi-groupes de résolvantes et de lois intervenant dans les divers processus jusqu'au chapitre VII, il nous a semblé utile de donner un schéma d'enchainement de ces diverses notations.

Chapitres I et II. Processus initial $(\Omega, \underline{\underline{F}}_t, X_t, P_t, P^\mu)$

Processus tué à D : semi-groupe $Q_t$

résolvante $V^p$

on notera $v(x) = V^1 1(x)$

v-processus du tué semi-groupe $Q_t^{(v)}$

résolvante $W^p$

Loi sur $\Omega$ $Q^{\mu/v}$ (ou $E_Q^{\mu/v}$).

Chapitre III. Prolongement de $W^p$ : $\hat{W}^p$ (on pose $\hat{V}^{p+1}h = \hat{W}^p(\frac{h}{v})$ )

Prolongement de $Q_t^{(v)}$ : $\hat{Q}_t^{(v)}$ qui est une loi d'entrée de $Q_t^{(v)}$.

Chapitre IV. Compactifié de Ray-Knight. A $\hat{Q}_t^{(v)}$ on associe une loi sur le compactifié $(W, Y_t, \underline{\underline{G}}_t^o, \bar{Q}^{\mu/v})$ de résolvante $\bar{W}^p$ et semi-groupe $\bar{Q}_t^{(v)}$. La loi d'entrée $\hat{Q}_t^{(v)}$ se prolonge en une loi d'entrée $\bar{\hat{Q}}_t^{(v)}$; si $\pi_x$ est la loi de $\vec{X}_o$ il lui correspond $\bar{\hat{Q}}^{x/v}$. $\overset{\times}{\Omega}$ et $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^o$ étant définis (cf. Introduction) les mesures précédentes se transportant sur $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^o$ pour donner le v-processus d'entrée $(\overset{\times}{\Omega}, \overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^o, X_t, \hat{Q}^{\mu/v})$.

Chapitre V. On construit sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}_o)$ des mesures $\sigma$-finies $\hat{P}_x$ qui permettent d'intégrer $\sum c \circ \theta_g \, \varepsilon_g(dt)$. $(\Omega, \underline{\underline{F}}_o, X_t, \hat{P}^\mu)$ est alors un processus de semi-groupe $P_t$ : c'est le X-processus d'entrée. On pose $\hat{Q}_t(f) = E^{\cdot} f(X_t \circ k_D)$ c'est cette mesure qui intervient dans les formules de conditionnement. Les notations relatives au chapitre IX sont données en tête de ce chapitre.

# CHAPITRE (I).- NOTATIONS ET DESCRIPTION DE L'ENSEMBLE HOMOGENE M .

Le processus que l'on désire balayer est un processus de Markov satisfaisant aux hypothèses droites, à valeurs dans E sous-espace borélien d'un espace métrique compact. On notera $(\Omega\ ,\ \underline{\underline{F}}^{o},\ X_t,\ \underline{\underline{F}}_t,\ \theta_t,\ P_x, \zeta\ )$ sa réalisation canonique. L'expression "presque surement" signifie $P^{\mu}$ presque surement pour toute loi $\mu$ .

## § 1. Fermé aléatoire homogène.

On note $R_+^* = R^+ - \{0\}$ .

Définition 0. On appelle ensemble aléatoire un sous-ensemble de $\Omega \times R_+^*$ progressivement mesurable par rapport aux tribus $\underline{\underline{F}}_t$ . Un tel ensemble est dit fermé si ses coupes $M(\omega) = \{t > 0\ ,\ (t,\omega) \in M\}$ sont fermées, il est dit homogène si son indicatrice est un processus homogène c'est-à-dire si $(\theta_t\,\omega,\ s) \in M \Longleftrightarrow (\omega,\ t+s) \in M$ .

$[M(\omega)]^c$ est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts, ces intervalles sont appelés intervalles contigus à M . M est parfait si et seulement si deux intervalles contigus n'ont pas d'extrémité commune.

On désignera par $M^{\rightarrow}$ (resp. $M^{\leftarrow}$) l'ensemble des extrémités gauches (resp. droites) des intervalles contigus à M . Il est clair que $M^{\rightarrow}$ et $M^{\leftarrow}$ sont des ensembles homogènes.

Les quantités suivantes caractérisent les passages dans M :

$$D(t) = \inf(s > t\ ;\ s \in M)$$

$$L(t) = \sup(s \leqslant t,\ s \in M)$$

$$\ell(t) = \sup(s < t\ \ s \in M).$$

$D(t)$ est le premier temps d'entrée dans $M$ après $t$ , c'est une fonction croissante, continue à droite, limitée à gauche, constante sur les intervalles contigus à $M$ .

On notera $D(0) = D$ . $D$ est un temps terminal exact parfait * $D(t) = t + D \circ \theta_t$ est un temps d'arrêt, mais le processus $D(t)$ n'est pas adapté aux tribus $\underline{\underline{F}}_t$ . La famille de tribus $\underline{\underline{F}}_{D_t}$ est continue à droite.

On supposera que $M \subset \,]0, \zeta[$ , alors $D \geqslant \zeta \implies D = \infty$ .

$D$ caractérise $M$ : il est en effet facile de voir que $M = \{ D \circ \theta_t^- = 0 \}$. Le processus $L(t)$ est adapté et constitue une famille co-terminale au sens de Pittinger et Shih c'est-à-dire que $L(t) \circ \theta_u = (L_{(t+u)} - u)^+$ .

Il est clair que $M^{\rightarrow} = \{t > 0,\ L(t) = t\ ,\ D(t) > t\}$ .

Le processus $\ell_t$ est prévisible et $L(t) = \ell^+(t)$.

Le théorème 2 (Chapitre V) de Dellacherie [6], implique immédiatement que

<u>Proposition 1</u>. a) Les ensembles $M$ et $M^{\leftarrow}$ sont bien mesurables

b) $M^{\rightarrow}$ est progressivement mesurable

c) Si pour tout $\epsilon > 0$ , $]L_n^\epsilon , D_n^\epsilon[$ désigne le $n^{\text{ième}}$ intervalle contigu à $M$ dont la longueur dépasse strictement $\epsilon$, $L_n^\epsilon + \epsilon$ et $D_n^\epsilon$ sont des $\underline{\underline{F}}_t$ temps d'arrêt.

<u>Exemple fondamental</u>. Soit $X$ un processus à valeurs dans un fermé $\bar{G}$ de frontière $\partial G = \bar{G} - \overset{\circ}{G}$ , $M = \{ \overline{(t,\omega),\ t > 0 \quad X_t(\omega) \in \partial G} \}$ est un fermé aléatoire homogène. Les intervalles contigus sont les portions de trajectoires contenues dans $\overset{\circ}{G}$ . $D$ est le temps d'atteinte de la frontière.

---

* Si on suppose seulement que $M$ est homogène pour presque tout $\omega$ , $D$ n'est pas parfait, on peut cependant -grâce aux techniques de Walsh- le rendre parfait [26] .

§ 2. Propriétés liées au processus.

Soit $F = \{x \in E,\ P^x(D = 0) = 1\}$ . C'est un ensemble finement fermé et presque borélien. Dans l'exemple précédent $F$ est l'ensemble des points de $\partial G$ réguliers pour $\partial G$ .

Soit $\rho_F = \{(t,\omega),\ t > 0 \quad X_t(\omega) \in F\}$ c'est l'ensemble des impacts dans $F$ il est donc indistinguable pour chaque loi $\underline{P}^\mu$ d'un ensemble bien mesurable pour les tribus $\underline{\underline{F}}_t^\mu$ . $\rho_F(\omega)$ est un fermé droit de $R_+^*$ .

Proposition 2. Soit $M'$ l'ensemble des points non isolés de $M$ et $\dot{M}$ le noyau parfait de $M$ , alors $\dot{M} \subseteq \rho_F \subset M'$ p.s..

Démonstration. Remarquons d'abord que d'après la propriété de Markov forte tout temps d'arrêt passant dans $\rho_F$ est instant d'accumulation à droite de points de $M$ , l'ensemble $\rho_F$ $M$ qui est bien mesurable ne contient donc aucun graphe de temps d'arrêt et $\rho_F \subseteq M$ p.s.

Soit $T(\omega) = \inf\{t > 0 \quad X_t(\omega) \in F\}$ le début de $\rho_F$ , soit $T(t) = t + T \circ \theta_t$ par continuité à droite $X_{T(t)} \in F$ et $\overline{\rho_F} = \overline{\bigcup_{r \in Q} [T(r)]}$ ; les instants $T(r,\omega)$ sont points d'accumulation à droite de points de $M$ et comme $\rho_F \subseteq M$ p.s. $\rho_F \subseteq M'$ p.s.

Soit $N_r(\omega) = \inf\{t > r : [r\ t\,] \cap M(\omega)$ comporte une infinité non dénombrable de points $\}$ . On sait ([ 6 ]), que $N_r$ est un temps d'arrêt et $\dot{M} = \overline{\bigcup_{r \in Q} [N_r]}$ pour tout $\varepsilon > 0$ , $]N_r(\omega), N_r(\omega) + \varepsilon] \cap M(\omega)$ est non dénombrable ce qui entraîne que $D_{N_r(\omega)} = N_r(\omega)$ et donc que $[N_r] \subseteq \rho_F$ ce qui achève la démonstration.

Proposition 3. L'ensemble $M^{\rightarrow}$ des extrémités gauches d'intervalles contigus à $M$ admet une décomposition en deux ensembles homogènes

$M_b^{\rightarrow} = M^{\rightarrow} \cap \rho_F^c$ qui est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt ;

$M_\pi^{\rightarrow} = M^{\rightarrow} \cap \rho_F$ qui est un ensemble progressif dans lequel ne passe aucun graphe de temps d'arrêt (p.s.).

<u>Démonstration</u>. On peut d'abord remarquer que p.s. $M^{\rightarrow} \cap \rho_F^c = M \cap \rho_F^c$ $\dot{M} \cap \rho_F^c \subseteq \bar{\rho}_F - \dot{\rho}_F$ qui est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt, comme $\dot{M} \cap \rho_F^c$ est bien mesurable, il est lui-même réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt [6].

Or $(M - \dot{M}) \cap \rho_F^c = M^{\rightarrow} - \dot{M} \cap \rho_F^c$ est bien mesurable et est contenu dans $M - \dot{M}$ c'est donc aussi une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt, par suite $M \cap \rho_F^c = M_b^{\rightarrow}$ l'est également. Ceci entraîne d'ailleurs que <u>$g \in M_b^{\rightarrow} \Rightarrow X_g \in F^c$</u> .

Tout temps d'arrêt passant dans $\rho_F$ étant point d'accumulation à droite de points de $M$ il est clair que $M_\pi^{\rightarrow}$ ne contient aucun graphe de temps d'arrêt, en particulier <u>$g \in M_\pi^{\rightarrow} \Longrightarrow X_g = X_{g^-}$</u> , de plus un tel point n'est pas isolé car l'ensemble des points isolés de $M$ soit $M - \dot{M}$ est précisément une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt. Pour préciser la structure de $M^{\rightarrow}$ nous allons considérer un compactifié de Ray-Knight de $E$ ([19]). Soit $\bar{E}$ un tel compactifié et $B^1$ l'ensemble des points de branchement, on peut restreindre $\Omega$ au sous-ensemble des trajectoires $\omega$ continues à droite et limitées à gauche dans $\bar{E}$ , ces limites à gauche seront notées $X_s^-$ , $X_s^-$ appartient presque sûrement soit à $E$ , soit à l'ensemble $B$ des points de branchements $x$ tels que $\varepsilon_x.P_o$ soit porté par $E$ ; on se restreindra donc aux trajectoires telles que $X_s^- \in E \cup B$ . On sait alors ([19]), que si $T$ est un temps d'arrêt la partie totalement inaccessible de $T$ est $T_A$ où

$A = \{ 0 < T < \infty ;\ X_T \neq X_{T^-} ;\ X_{T^-} \notin B \}$ .

<u>Proposition 4</u>. Soit $M_s^{\rightarrow} = M_b^{\rightarrow} \cap \{(t,\omega),\ X_t^- \notin B ,\ X_t \neq X_t^-\}$

$$M_a^{\rightarrow} = M_b^{\rightarrow} - M_s^{\rightarrow}$$

$$M^{\rightarrow}_{sr} = M^{\rightarrow}_{s} \cap \{X^-_t \in F\}$$

$$M^{\rightarrow}_{si} = M^{\rightarrow}_{s} \cap \{X^-_t \notin F\} .$$

$M^{\rightarrow}_{s}$ est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt totalement inaccessible

$M^{\rightarrow}_{a}$ est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt accessibles.

L'ensemble des points isolés de $M$ est contenu dans $M^{\rightarrow}_{a} + M^{\rightarrow}_{si}$ et

a) $t \in M^{\rightarrow}_{\pi} \iff X_t \in F \quad X_t = X_{t^-}$

b) $t \in M^{\rightarrow}_{sr} \iff X_t \in F^c \quad X_t \in F$

c) $t \in M^{\rightarrow}_{si} \iff X_t \in F^c , X^-_t \in F^c \quad X_t \neq X^-_t$ et le saut est totalement inaccessible

d) $t \in M^{\rightarrow}_{a} \iff X_t \in F^c, X^-_t \in F^c$ ; s'il y a saut ce saut est accessible.

Démonstration. Pour les points a) b) c) d) le seul résultat à démontrer est que $X_g \in F^c , X_{g^-} \in F \implies g \in M^{\rightarrow}_{sr}$ ce qui est réalisé car si $T$ est un temps de saut de $F$ dans $F^c$ ce saut est totalement inaccessible, $g$ ne saurait donc appartenir à $M^{\rightarrow}_{a}$.

On sait déjà qu'un point de $M^{\rightarrow}_{\pi}$ n'est pas isolé.

Soit $\rho^-_F = \{(t,\omega), t > 0, X^-_t \in F\}$ : c'est un ensemble prévisible. Soit $T$ un temps de saut de $F$ dans $F^c$ : il est totalement inaccessible, dans ces conditions Dellacherie a démontré ([7]), que pour presque tout $\omega$ $T(\omega)$ est point de condensation à gauche de $\rho_F(\omega)$ c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon$ positif $]T(\omega)-\varepsilon, T(\omega)]$ contient une infinité non dénombrable de points de $\rho^-_F$ , il est alors point d'accumulation à gauche de points de $M$ : $t \in M^{\rightarrow}_{sr} \implies t$ non isolé.

# CHAPITRE (II).- L'OPERATION DE BALAYAGE.

Dans toute cette partie nous suivons de très près la présentation de Meyer [17 Ch. I].

## §.1. Transport d'une mesure sur $M$.

Soit $\mu$ une mesure positive bornée sur $R_+^*$. Transporter $\mu$ sur $M$, cela veut dire ramener sur $M$. La masse de $\mu$ contenue dans $M^c$, en attribuant à l'extrémité gauche d'un intervalle contigu $]L(t), D(t)]$ non vide toute la masse contenue dans cet intervalle.

Il faut noter que cela déplace aussi la masse placée en $D(t)$, et que la masse contenue dans $]0, D(0)]$ est entièrement perdue.

Si nous notons $\bar{\mu}$ la mesure obtenue nous pouvons écrire que :

(II.1.1.) $$\bar{\mu} = 1_{M-M^{\leftarrow}} \cdot \mu + \sum_{g \in M^{\rightarrow}} \mu(]g, Dg]) \, \varepsilon_g$$

soit en intégrant si $f$ est borélienne positive;

(II.1.2.) $$\int f(s)\, \bar{\mu}(ds) = \int_{R_+^*} f(\ell(s))\, 1_{\{\ell(s)>0\}}\, \mu(ds).$$

C'est la forme obtenue par Azéma dans [1] sous certaines hypothèses supplémentaires. Getoor et Sharpe ont considéré les fonctions de répartition :

Soit $a(t) = \mu(]0,t])$ et $\bar{a}(t) = \bar{\mu}(]0,t])$.

Alors $\bar{a}(t) = a(D(t)) - a(D(0))$.

L'opération qui fait passer de $a$ à $\bar{a}$ s'appelle dans leur terminologie le balayage brut (par opposition aux balayages adaptés et prévisibles que nous utiliserons plus loin). de $a$ sur $M$.

Une notion techniquement utile parce qu'elle s'applique à des mesures non bornées est la suivante : soit $\mu$ une mesure sur $R_+^*$, non nécessairement bornée, mais admettant une transformée de Laplace finie. Nous appellerons p-balayée brute de $\mu$, $\bar{\mu}^{(p)}$, la mesure $e^{ps}\ \overline{e^{-ps}\ \mu(ds)}$ .

Explicitement

(II.1.3.) $$\bar{\mu}^{(p)} = 1_{M-M^{\leftarrow}}.\mu + \sum_{g \in M^{\rightarrow}} e^{pg} \int_{]g,D(g)]} e^{-ps}\ \mu(ds)\ .\ \varepsilon_g$$

(II.1.4.) $$\int f(s)\ \bar{\mu}^{(p)}(ds) = \int f(\ell(s))\ e^{p\ell(s)}\ 1_{\{\ell(s)>0\}}\ e^{-ps}\ \mu(ds).$$

Si la mesure $\mu$ est diffuse, on peut remplacer $\ell$ par $L$ dans toutes ces formules.

§ 2. Fonctionnelles additives brutes.

Nous appellerons fonctionnelle additive (resp. p-additive) brute (selon Getoor-Sharpe) toute famille $(A_t)_{t \geq 0}$ de fonctions réelles sur $\Omega$ telle que pour tout $\omega$ la fonction $A.(\omega)$ soit croissante, continue à droite, à valeurs finies, additive (resp. p-additive) c.à.d.

$$A_{s+t} = A_s + A_t \circ \theta_s \quad (\text{resp. } A_{s+t} = A_s + e^{-pt} A_t \circ \theta_s ).$$

Nous supposerons $A_0 = 0$ p.s.

Nous ne supposons pas ces processus adaptés.

Le résultat suivant, dû à Getoor-Sharpe dans le cas bien-mesurable, plus ancien dans le cas prévisible, a été démontré par Meyer dans la forme où nous l'énonçons [17 Chapitre I].

Théorème 5. Soit $A_t$ une fonctionnelle additive brute telle que : $E_x(A_t) < +\infty$ pour tout $x$ et tout $t$ . Alors les projections duales bien-mesurables $A_t^w$ et prévisibles

$A_t^p$ de $A$ sont des fonctionnelles additives (adaptées).

Remarque. On obtient le même type de résultats dans le cas des fonctionnelles p-additives.

La proposition suivante, sur le p-balayage des fonctionnelles brutes sera utile.

Proposition 6. La p-balayée brute d'une fonctionnelle additive brute est encore additive.

Démonstration. Tout revient à montrer que la balayée brute d'une fonctionnelle p-additive est p-additive. Soit $C_t = B_{D(t)} - B_{D(0)}$,

$$C_{t+s}(\omega) - C_s(\omega) = B_{D(t+s)}(\omega) - B_{D(s)}(\omega) = e^{-pD(s)} B_{D(t+s)-D(s)} \circ \theta_{D(s)}$$
$$= e^{-ps} \left[e^{-pD(0)} B_{D(t)-D(0)} \circ \theta_{D(0)}\right] \circ \theta_s$$
$$= e^{-ps} \left[B_{D(t)} - B_{D(0)}\right] \circ \theta_s = e^{-ps} C_t \circ \theta_s \ .$$

## § 3. Calcul des p-balayées adaptées.

Nous abordons maintenant l'essentiel de ce travail. L'idée de travailler sur les projections bien-mesurables est de Getoor-Sharpe, les autres auteurs ayant fait l'hypothèse a priori que $M_b^{\rightarrow}$ était vide ce qui, comme nous le verrons, permettait de ne considérer que les projections prévisibles.

a) Quelques notations concernant le processus.

Nous noterons $P_t$ le semi-groupe du processus droit dont on est parti, et $\{U^p\}$ sa résolvante.

Soit $D$ le début de $M$, temps terminal (parfait exact)

$Q_t(x,f) = E_x[f(X_t)\, 1_{\{t<D\}}]$ est le semi-groupe du processus tué de

X à l'instant D . Sa résolvante sera notée $\{V^p\}$ .

Notons $v(x) = V^1(1)(x)$ . C'est une fonction 1-Q-excessive bornée et

$$F = \{x \ ; \ v(x) = 0\} \ .$$

On définit $Q_t^{(v)}f(x) = e^{-t} \dfrac{E_x[f(X_t)\, v(X_t)\, 1_{\{t < D\}}]}{v(x)}$ si $x \in F^c$

$Q_t^{(v)} f(x) = 0$ sinon.

C'est le semi-groupe du v-processus associé à $e^{-t}\, Q_t$ . Sa résolvante sera notée $W^p f$ c'est-à-dire

$$W^p f(x) = \frac{1}{v(x)} \ V^{p+1}(fv)(x) \qquad \text{si } x \in F^c$$

$$= 0 \qquad\qquad \text{sinon.}$$

b) <u>Définitions des p-balayées adaptées</u>.

h désignant une fonction presque borélienne bornée, nous introduisons les fonctionnelles suivantes :

$$A_t(h) = \int_0^t h(X_s)ds \qquad \text{(additive)}$$

$$A_t^{(p)}(h) = \int_0^t e^{-ps}\ h(X_s)\ ds \qquad \text{(p-additive)}$$

$\bar{A}_t^{(p)}(h)$ = processus croissant obtenu par balayage brut de $A^{(p)}(h)$ sur M

$\bar{A}_t^p(h) = \int_0^t e^{ps}\ d\bar{A}_s^{(p)}(h)$, p-balayée brute de $(A_t(h))$ sur M .

D'après II) proposition 6, $\bar{A}_t^p(h)$ est une fonctionnelle additive brute. Le théorème 5 entraîne alors que sa projection duale bien-mesurable, que nous noterons $\tilde{A}_{\bullet}^p(h)$ est une vraie fonctionnelle additive (adaptée).

C'est $\tilde{A}_{\bullet}^p(h)$ que nous nous proposons de calculer.

§ 4. Intégration par rapport à $\tilde{A}^p(h)$.

Rappelons que d'après II.1.

$$\bar{A}_t^{(p)}(h) = \int_D^{D(t)} \bar{e}^{ps}\, h(X_s)\, ds$$

et que si $Z_s$ est un processus mesurable positif,

$$\int_0^\infty Z_s\, d\bar{A}_s^p(h) = \int_0^\infty \bar{e}^{ps}\, e^{p\ell(s)}\, Z_{\ell(s)}\, h(X_s)\, 1_{\{\ell(s)>0\}}\, ds\ .$$

Cette formule donne naturellement que si $Z_s$ est bien-mesurable.

(II.4.1.) $$E^\mu\int_0^{+\infty} Z_s\, d\tilde{A}_s^p(h) = E^\mu\int_0^{+\infty} \bar{e}^{p(s-\ell(s))}\, Z_{\ell(s)}\, h(X_s)\, 1_{\{\ell(s)>0\}} ds\ .$$

Nous travaillerons en général sur les mesures associées aux fonctionnelles et parlerons de la projection prévisible (ou bien mesurable) des mesures $dA_t^p$ etc... rappelons, une fois pour toute, que si $\mu$ est une mesure la fonctionnelle associée a est donnée par $a_t = \mu\,]0, t]$ .

Tenons compte maintenant de la décompositon de M en ses deux morceaux $M_b^{\rightarrow}$ et $M_\pi^{\rightarrow}$. $\bar{A}_t^{(p)}$ peut alors s'écrire comme somme de trois fonctionnelles additives brutes :

le terme "continu banal",

(II.4.2.) $$d\bar{B}_t^p = 1_{M-M^{\leftarrow}}(t)\, dA_t(h) = 1_M(t)\, h(X_t)\, dt\ .$$

Il ne dépend pas de p , et est bien-mesurable.

le terme "discontinu banal",

(II.4.3.) $$d\bar{\beta}_t^p = \sum_{g\in M_b^{\rightarrow}} e^{pg} \int_{]g,D(g)]} \bar{e}^{ps}\, h(X_s) ds\ .\ \varepsilon_g(dt).$$

Or $M_b^{\rightarrow}$ est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt, alors si Z est bien-mesurable,

$$E^{\mu}\int_0^{\infty} Z_s\, d\bar{\beta}_t^p = E^{\mu}\Big[\sum_{g\in M_b^{\rightarrow}} Z_g\, e^{pg}\int_{]g,D(g)]} e^{-ps}\, h(X_s)ds\Big]$$

$$= E^{\mu}\Big[\sum_{g\in M_b^{\rightarrow}} Z_g\, V^p h(X_g)\Big] .$$

$V^p h$ étant presque borélienne, la projection duale bien-mesurable de $\bar{\beta}_t^p$ notée $\tilde{\beta}_t^p$ est telle que

$$(II.4.4.) \qquad d\tilde{\beta}_t^p = \sum_{g\in M_b^{\rightarrow}} V^p h(X_g)\ \varepsilon_g(dt).$$

Il reste le terme "discontinu intéressant", qui contient toutes les difficultés de la question

$$(II.4.5.) \qquad d\bar{I}_t^p(h) = \sum_{g\in M_{\pi}^{\rightarrow}} e^{pg}\int_{]g,D(g)]} e^{-ps}\, h(X_s)ds \quad \varepsilon_g(dt).$$

Comme $\bar{I}^p(h)$ ne charge aucun graphe de temps d'arrêt, sa projection duale bien-mesurable est continue, et identique à sa projection duale prévisible.

## § 5. Comparaison des p-balayées.

On se propose de comparer les p et q balayées.

Auparavant, établissons un lemme qui nous sera souvent utile dans les calculs concernant $\bar{I}_t^p(h)$. C'est une conséquence de la proposition 1.

Lemme 7. Définissons la fonctionnelle additive brute $\varepsilon\bar{I}_t^p(h)$ par

$$(II.5.1.) \quad d\varepsilon\bar{I}_t^p(h) = \sum_{g\in M_{\pi}^{\rightarrow}} 1_{\{g+\varepsilon < D(g)\}}\, e^{p(g+\varepsilon)}\int_{]g+\varepsilon,D(g)]} e^{-ps}\, h(X_s)ds\ \varepsilon_g(dt).$$

* Alors $d\varepsilon\bar{I}_t^p(h)$ converge en un sens évident vers $d\bar{I}_t^p(h)$ lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro.

** D'autre part, $\varepsilon\bar{I}_t^p(h)$ a même projection duale bien-mesurable que la mesure $d\varepsilon\bar{\bar{I}}_t^p(h)$ définie par :

(II.5.2.) $d\,\varepsilon\,\overset{=}{I}{}_t^p(h) = \sum_{g \in M_\pi^{\rightarrow}} 1_{\{g+\varepsilon < D(g)\}}\ V^p\, h(X_{g+\varepsilon})\ \varepsilon_g(dt).$

Remarque. Comparons les relations II.4.4. et II.4.5. aux relations II.5.1. et II.5.2.. Elles signifient que tout ce qui est vrai pour $\widetilde{\beta}_t^p$ sera vrai "à la limite" pour $\widetilde{I}_t^p$ . Nous préciserons par la suite cette notion de "à la limite".

Démonstration du lemme 7. Seul le second point demande démonstration. Considérons l'ensemble aléatoire $\{(\omega, g+\varepsilon)\ ;\ (\omega, g) \in M_\pi^{\rightarrow}$ et $g+\varepsilon < D(g,\omega)\}$ . C'est la réunion dénombrable des graphes des temps d'arrêt $L_n^\varepsilon + \varepsilon$ (cf. proposition 1) où $L_n^\varepsilon$ désigne l'extrémité gauche du $n^{\text{ième}}$ intervalle de longueur strictement plus grande qu' $\varepsilon$ .

Soit Z un processus bien-mesurable. $Z_{L_n^\varepsilon}$ est mesurable par rapport à la tribu $\underline{\underline{F}}_{L_n^\varepsilon+\varepsilon}$ . Si Z est bien-mesurable, positif

$$E^\mu \int_0^\infty Z_s\, d\,{}_\varepsilon \bar{I}_s^p(h) = E^\mu\Big(\sum_n Z_{L_n^\varepsilon}\, 1_{\{X_{L_n^\varepsilon} \in F\}}\, e^{p(L_n^\varepsilon+\varepsilon)} \int_{]L_n^\varepsilon+\varepsilon,\, D_\varepsilon^n]} e^{-ps} h(X_s)\, ds\Big)$$

$$= E^\mu\Big(\sum_{g \in M_\pi^{\rightarrow}} 1_{\{g+\varepsilon < D(g)\}}\, Z_g\, V^p\, h(X_{g+\varepsilon})\Big)$$

d'où le résultat et le sens évident de la convergence.

Proposition 8.

(II.5.3.) $\widetilde{\beta}^p(h) - \widetilde{\beta}^q(h) = (q-p)\, \widetilde{\beta}^p(V^q h)$

(II.5.4.) $\widetilde{I}^p(h) - \widetilde{I}^q(h) = (q-p)\, \widetilde{I}^p(V^q h)$

(II.5.5.) $\widetilde{A}^p(h) - \widetilde{A}^q(h) = (q-p)\, \widetilde{A}^p(V^q h).$

Démonstration. La relation II.5.3. se déduit immédiatement de l'équation résolvante et de la définition de $\widetilde{\beta}^p$ (cf. II.4.4.)

De même d'après le lemme 7 et l'équation résolvante II.5.4. s'obtient aisément après passage à la limite.

_ On en déduit alors aisément II.5.5. en remarquant que $d\widehat{\beta}_t^p$ ne dépend pas de p et ne charge que $\rho_F$ .

# CHAPITRE III.- CALCUL DE DENSITES BIEN-MESURABLES SOUS-MARKOVIENNES.

## § 1. Position du problème.

On commence par remarquer que si $h$ est bornée, les processus croissants $\tilde{\beta}^p(h)$ et $\tilde{I}^p(h)$ sont absolument continus par rapport à $\tilde{\beta}^1(1)$ et $\tilde{I}^1(1)$ respectivement.

En effet, si $p \geq 1$, $\tilde{I}^p(h)$ est majoré au sens fort par $\|h\|\tilde{I}^1(1)$

$\tilde{\beta}^p(h)$ " " $\|h\|\tilde{\beta}^1(1)$.

Si $p < 1$, $\tilde{\beta}^p(1) = \tilde{\beta}^1(1) + (1-p)\tilde{\beta}^1(V^p 1) \leq \frac{1}{p}\tilde{\beta}^1(1)$.

De même $\tilde{I}^p(1) \leq \frac{1}{p}\tilde{I}^1(1)$.

D'où le résultat.

Définition. Nous noterons $K_t$ la fonctionnelle $\tilde{I}^1_t(1)$, fonctionnelle de référence associée à $M_{\overrightarrow{\pi}}$. Elle est de 1-potentiel borné. On dira qu'une propriété $N(x)$ a lieu $K$ p.s. si $N^c = \{x\ ,\ N$ n'est pas réalisée$\}$ est de $K$-potentiel nul.

Remarque. Le choix de $\tilde{I}^1_t(1)$ est évidemment arbitraire. En particulier, nous énoncerons en appendice les relations qui lient les divers opérateurs que nous allons obtenir, si on avait pris $\tilde{I}^\alpha_t(1)$ $\alpha > 0$ comme fonctionnelle de référence.

Nous nous intéressons à la forme des densités de $\tilde{\beta}^p(h)$ par rapport à $\tilde{\beta}^1(1)$ et de $\tilde{I}^p(h)$ par rapport à $K$.

Examinons d'abord le cas de $\tilde{\beta}$:

D'après la définition (II,4,4) $d\,\tilde{\beta}^p_t(h) = \sum_{g \in \overrightarrow{M_b}} V^p h(X_g)\ \varepsilon_g(dt) = \int \frac{V^p h}{V}(X_s)\ d\tilde{\beta}^1_t(1)$.

Si $p > 1$ , la densité de $d\check{\beta}^p_t(hv)$ est alors $\frac{V^p(hv)}{v} = W^{p-1}(h)$, résolvante du v-Q-processus.

Nous allons montrer qu'on peut modifier les opérateurs $\frac{V^p h}{v}$ et $W^p h$ sur $F$ , où par convention on les avait pris nuls, de façon à obtenir des densités de $\check{I}^p(h)$ et de $\check{I}^{p+1}(hv)$ respectivement par rapport à $K$ , le caractère de résolvante sous-markovienne de $W^p$ étant conservé.

Dans toute cette partie nous nous intéresserons aux fonctionnelles $\check{I}^{p+1}(hv)$ :

<u>Notation.</u> On pose $\check{I}^{p+1}(hv) = \check{J}^p(h)$ .

<u>Proposition 9</u>. Les fonctionnelles additives $\check{J}^p(h)$ ont les propriétés suivantes :

i) $\check{J}^p(h) - \check{J}^q(h) = (q-p)\,\check{J}^p(W_q h)$

ii) $p\,\check{J}^p(1)$ est majorée au sens fort par $K$ .

iii) Si $h$ est presque borélienne bornée et continue à droite sur les trajectoires $p\,\check{J}^p(h)$ converge en un sens évident vers $h.K$ , lorsque $p$ tend vers l'infini.

<u>Démonstration</u>. La propriété i) est une conséquence immédiate de la définition de $\check{J}^p$ et de la proposition 8. Nous démontrons les propriétés ii) et iii) simultanément en utilisant les fonctionnelles ${}_\epsilon\overset{=}{I}{}^p$ définies au lemme 7.

Par définition, $E^\mu\int_0^{+\infty} Z_s\, d\,\check{J}^p_s(h) = E^\mu \int_0^{+\infty} Z_s\, d\,\bar{I}^{p+1}_s(hv)$ pour tout $Z$ bien-mesurable positif.

Nous savons d'après le lemme 7 que :

$E^\mu\int_0^{+\infty} Z_s\, d\,\bar{I}^{p+1}_s(hv)$ est la limite de $E^\mu\int_0^{+\infty} Z_s\, d_\epsilon\overset{=}{I}{}^{p+1}_s(hv)$ qui vaut par définition $E^\mu(\sum_{g\in \vec{M}_\pi} Z_g\, V^{p+1}(hv)(X_{g+\epsilon})\, 1_{\{g+\epsilon<Dg\}})$.

Or $V_{p+1}(hv)(x) = E_x \int_0^D e^{-(p+1)s}\ h(X_s)ds\ E_{X_s}\int_0^D e^{-u}\ 1(X_u)du$

$$= E_x \int_0^{D\wedge\zeta} e^{-u}\, du \int_0^u e^{-ps}\, h(X_s)\, ds\ .$$

Donc $E^\mu \int_0^{+\infty} Z_s\, d_\varepsilon \bar{\bar{I}}_s^{p+1}(hv) = E^\mu \sum_{g\in \vec{M}_\pi} Z_g\, e^{g+\varepsilon} \int_{g+\varepsilon}^{Dg\wedge\zeta} e^{-u}\, du \int_{g+\varepsilon}^{u} e^{-p(s-(g+\varepsilon))} h(X_s)ds$

qui tend lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro vers

$$F^\mu \int_0^{+\infty} Z_s\, d\, J_s^p(h) = E^\mu \Big(\sum_{g\in \vec{M}_\pi} Z_g\, e^g \int_g^{Dg\wedge\zeta} e^{-u}\, du \int_g^u e^{-p(s-g)}\, h(X_s)ds\Big).$$

Par ailleurs, $\left| p\int_g^u e^{-p(s-g)}\, h(X_s)ds\right| < \|h\|_\infty (1 - e^{-p(u-g)}) < \|h\|_\infty$

et si $h$ satisfait aux conditions de l'énoncé,

$$p\int_g^u e^{-p(s-g)}\, h(X_s)ds \quad \text{converge lorsque } p \quad +\infty \text{ vers } h(X_g).$$

D'après le lemme de Fatou, $E^\mu \int_0^{+\infty} Z_s\, p\, d\, \check{J}_s^p\,(h)$ converge alors vers

$$E^\mu\Big(\sum_{g\in \vec{M}_\pi} Z_g\, h(X_g)\, e^g \int_g^{Dg\wedge\zeta} e^{-u}\, du\Big) = E^\mu \int_0^{+\infty} Z_s\, h(X_s)\, d\, K_s\ .$$

Le processus $h(X_s)$ étant bien-mesurable, la mesure $p\, d\, \check{J}_s^p(h)$ converge vers $h.K$ . Si $h = 1$, les relations ci-dessus permettent d'obtenir l'inégalité annoncée.

§ 2. <u>Construction de la v-résolvante d'entrée.</u>

<u>Théorème 10</u>. Il existe une résolvante sous-markovienne, mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{B}e$ engendrée par les fonctions 1-excessives, notée $\hat{W}^p$ $(p > 0)$ telle que

1) Pour toute $h$ presque borélienne bornée et $p > 0$ ,

$$\check{J}_t^p(h) = \int_0^t \hat{W}^p\, h(X_s)dK_s\ .$$

2) Si $x \in F^c$ $\hat{W}^p(x,dy) = W^p(x,dy)$

3) Si $x \in F$ , la mesure $\hat{W}^p(x,dy)$ est portée par $F^c$ .

4) Si $f$ est continue bornée de $\bar{E}$ , $p\,\hat{W}^p\, f(x)$ converge vers $f(x)$

sauf sur un ensemble de K-potentiel nul.

<u>Remarque</u>. Nous donnerons en appendice une forme explicite de ces densités, qui fait mieux comprendre la manière dont s'effectue le prolongement de W et l'influence du choix de la fonctionnelle de référence ; cela nous permettra d'améliorer le caractère de mesurabilité de $\hat{W}$ .

<u>Démonstration du théorème</u>. Nous avons vu au début de ce paragraphe que les fonctionnelles continues $\tilde{I}^p(h)$ donc aussi $\tilde{J}^p(h)$ sont absolument continues par rapport à la fonctionnelle $K_t$ . D'après la généralisation d'un théorème de Motoo, par Mokobodski, dont nous donnons une démonstration simple en appendice, permettant de montrer un bon caractère de mesurabilité, il existe une densité $W^p\, h(x)$ mesurable par rapport à la tribu engendrée par les fonctions 1-excessives que nous noterons suivant Benveniste et Jacod [4] $\mathcal{B}e$, telle que

$$\tilde{J}^p_t(h) = \int_0^t W^p\, h(X_s)\, d\, K_s \; .$$

Il reste à montrer que l'on peut choisir une bonne version de ces densités qui satisfasse aux conditions du théorème : la méthode est un peu longue mais classique.

Soit tout d'abord D un sous-ensemble dénombrable dense de $\mathcal{C}(\bar{E})$ . (Rappelons que E est borélien de $\bar{E}$ , métrique compact), qui soit un sous-espace vectoriel sur Q , stable par inf et contenant les constantes.

Pour toute f de D , nous choisissons une densité $W^p f$ , et notons $N_1$ l'ensemble des x telles que les propriétés suivantes ne soient pas satisfaites pour un p rationnel au moins :

a) $W^p(x,1) \leqslant \frac{1}{p}$ .

b) $W^p(x,.)$ est Q-linéaire.

c) si $f$ appartient à $D$, $p\,W^pf$ tend vers $f$ le long des rationnels lorsque $p$ tend vers $+\infty$ .

$N_1$ étant $\mathcal{B}e$-mesurable et K-négligeable, on le fait disparaître en remplaçant $W^p$ par 0 sur cet ensemble. On peut alors prolonger $W^p(x,.)$ en une mesure positive bornée sur $\bar{E}$ . Un argument de classe monotone puis de complétion, montre alors que $W^p$ est un noyau de $(E,\mathcal{B}e)$ dans $(\bar{E}, \mathcal{B}u(\bar{E}))$, tel que pour toute $h$ de $\mathcal{B}u(\bar{E})$ et $p$ rationnel,

$$\mathfrak{J}_t^p(h) = \int_0^t W^p\, h(X_s)\, dK_s \ .$$

Quelques modifications restent encore à faire : on a manifestement K p.s. $W^p(1_{\bar{E}-F^c}) = 0$ . On peut donc remplacer $W^p$ par 0 sur l'ensemble $\mathcal{B}e$-mesurable des $x$ tels que $W^p$ ne soit pas portée par $F^c$ (et oublier en particulier $\bar{E}$). $\mathfrak{J}^p$ ne charge que $\rho_F$ . F est $\mathcal{B}e$-mesurable, puisque $P_x$ $(\sigma = 0)$ est la limite des fonctions p-excessives $E_x(e^{-p\sigma})$, on peut donc supposer que $W^p(x,.) = 0$ si $x \notin F$ .

Reste à montrer que l'équation résolvante peut être satisfaite :

soit $N_2$ l'ensemble des $x$ tels qu'il existe $p$ et $q$ rationnels et $f \in D$ tels que

$$W^p(x, f\,1_E) - W^q(x, f\,1_E) \neq (q-p)\, W^p[x, W^q(f\,1_E)].$$

Notons $\hat{W}^p(x,.) = W^p(x,.)$ si $x \in F \cap N_2^c$

$= 0$ si $x \in F \cap N_2$

$\hat{W}^p$ satisfait aux conditions de l'énoncé pour $p$ rationnel. On peut alors prolonger l'application $p \rightsquigarrow \hat{W}^p$ à $R_+^*$ en une application continue pour la norme des mesures, ayant les propriétés recherchées.

Nous venons de construire une résolvante qui prolonge de manière non triviale $W^p$ à $F$. On se propose de montrer qu'on peut lui associer un semi-groupe densité d'une certaine mesure aléatoire que nous expliciterons.

## § 3. Construction du v-semi-groupe d'entrée.

Théorème 11. Notons $N$ l'ensemble des $x$ tels que $p\,\hat{W}^p$ ne converge pas étroitement vers $\varepsilon_x$. Il existe un semi-groupe universellement mesurable de noyaux sous-markoviens sur $E$, noté $\hat{Q}_t^{(v)}$ $(t \geqslant 0)$, continu à droite sauf sur $\mathbb{N}$ tel que

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}\, \hat{Q}_t^{(v)} h(x)dt = \hat{W}^p\, h(x)$

ii) si $x \in F^c$, $\hat{Q}_t^{(v)}(x,.) = Q_t^{(v)}(x,.)$

iii) si $x \in F$, $\hat{Q}_t^{(v)}(x,.)$ est portée par $F^c$ si $t > 0$,

et $\hat{Q}_0^{(v)}(x,.) = \varepsilon_x$ sauf si $x \in N$

sur lequel $\hat{Q}_0^{(v)}(x,.) = \varepsilon_\delta$

$\hat{Q}_t^{(v)}$ est une loi d'entrée bornée pour $Q_t^{(v)}$.

Démonstration. On utilise le théorème suivant établi dans [10] :

Théorème. Soit $C_\alpha$ $(\alpha > 0)$ une famille de mesures finies telles que $\lim\limits_{\alpha\to\infty} C_\alpha(1) = 0$ ; $C_\alpha(f) - C_\beta(f) = (\beta - \alpha)\, C_\alpha\, U^\beta f$ ; alors il existe une loi d'entrée $\eta_t$ et une seule pour la résolvante $U^\beta$, telle que pour toute $f$ universellement mesurable bornée $C_\alpha(f) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, \eta_t(f)\, dt$ de plus $\displaystyle\int_0^1 \eta_t(1)dt < \infty$.

Comme $\hat{W}^\alpha - \hat{W}^\beta = (\beta - \alpha)\, \hat{W}^\alpha\, W^\beta$, on établit l'existence de $\hat{Q}_t^{(v)}$ semi-groupe de résolvante $\hat{W}^p$ et loi d'entrée pour $Q_t^{(v)}$.

Les points ii) et iii) résultent alors des points 2), 3) et 4) du théorème 10 et de l'unicité.

Proposition 12. La mesure $\sum_{g\in M_\pi^{\rightarrow}} e^{g+} 1_{\{g+u<D_g\}} f(X_{g+u}) \int_{g+u}^{D_g} e^{-s}ds\, \epsilon_g(dt)$

a même projection bien mesurable que $\hat{Q}_u^{(v)} f.1_F.K$ , où f est universellement mesurable.

Démonstration. La démonstration est celle de Meyer [17] exposé II.

Il s'agit de montrer que si Z est bien mesurable positive

(III.3.1.) $$E^\mu \sum_{g\in M_\pi^{\rightarrow}} Z_g e^{g+} 1_{\{g+u<D_g\}} f(X_{g+u}) \int_{g+u}^{D_g} e^{-s}ds$$

$$= E^\mu \int_0^\infty Z_s \hat{Q}_u^{(v)} f(X_s)\, dK_s .$$

Vérifions d'abord que ces deux termes ont même transformée de Laplace : d'après le théorème 10 $E^\mu\int_0^\infty Z_s\, d\tilde{J}_s^p(f) = E^\mu\int_0^\infty Z_s\, \hat{W}^p f(X_s)\, dK_s$

$$= \int_0^\infty e^{-pu} E^\mu\int_0^\infty Z_s \hat{Q}_u^{(v)} f(X_s)\, dK_s .$$

Mais, par définition $E^\mu\int_0^\infty Z_s\, d\tilde{J}_s^p(f) = E^\mu\int_0^\infty Z_s\, d\bar{I}_s^{p+1}(fv)$, or

$v(x) = E_x\int_0^{D\wedge\zeta} e^{-r} 1(X_r)dr$ , donc d'après la définition (II.4.5.) de $\bar{I}$ , l'expression précédente est égale à :

$$E^\mu \sum_{g\in M_\pi^{\rightarrow}} Z_g e^{(p+1)g} \int_{]g,D_g]} e^{-(p+1)s} f(X_s) e^s \int_s^{D_g} e^{-v} dv$$

$$= \int_0^\infty e^{-pu} \sum_{g\in M_\pi^{\rightarrow}} Z_g e^{g+} 1_{\{g+u<D_g\}} f(X_{g+u}) \int_{g+u}^{D_g} e^{-v} dv .$$

Nous allons maintenant vérifier que les deux termes de l'égalité (III.3.1.) sont continus à droite.

Soit d'abord $f = W^q h$ $h \in \mathcal{C}^+$ , $Q_t$ nulle si $t > a$ et bornée, le premier membre comprend alors un nombre fini de termes continus à droite. Comme $\hat{Q}^v_u$ est une loi d'entrée $e^{-qu}\ \hat{Q}^{(v)}_u (W^q h) = \int_u^\infty e^{-qv}\ \varkappa_v(f)$ est décroissante, si $u_o \leqslant u \leqslant u_o + \varepsilon$ $\int_0^\infty Z_s\ \hat{Q}^{(v)}_u f(X_s)\ dK_s$ est borné par $\|Z\|_\infty \int_0^\infty \hat{Q}^{(v)}_{u_o+\varepsilon}\ W^q h)\ dK_s$ et on peut appliquer le théorème de Lebesgue.

Pour passer au cas général, on commence par utiliser, pour h continue, la convergence de $q\, W^q f(x)$ vers $f(x)$ pour tout $x$ de $F^c$, en particulier pour $X_{g+u}$, on obtient donc (III.3.1.) pour f continue, puis pour f borélienne par un argument de classe monotone. Si f est universellement mesurable, il existe f' et f'' boréliennes telles que $\nu(f') = \nu(f'')$, $f' \leqslant f \leqslant f''$ et

$$\nu(f) = E^\mu \sum_{g \in M_\pi^{\rightarrow}} Z_g\, e^{g+}\ 1_{\{g+u < D_g\}}\, f(X_{g+u}) \int_{g+u}^{D_g} e^{-s}\, ds\ ,$$

alors

$$\nu(f) = E^\mu \int_0^\infty Z_s\ \hat{Q}^{(v)}_u f'(X_s) dK_s = E^\mu \int_0^\infty Z_s\ \hat{Q}^{(v)}_u f''(X_s) dK_s\ ,$$

comme $\hat{Q}^{(v)}_u f' \leqslant \hat{Q}^{(v)}_u f \leqslant \hat{Q}^{(v)}_u f''$ .

$$\nu(f) = E^\mu \int_0^\infty Z_s\ \hat{Q}^{(v)}_u f(X_s)\ dK_s$$ ce qui établit la proposition.

<u>Corollaire</u>. Soit $\underline{\underline{F}}^*$ la tribu complétée universelle de $\underline{\underline{F}}_o$, soit c une fonction positive $\underline{\underline{F}}^*$-mesurable et $k(x) = E_x(c)$ . La projection bien mesurable de la mesure aléatoire $\sum_{g \in M_\pi^{\rightarrow}} c \cdot \theta_{g+u}\ 1_{\{g+u < D_g\}}\ e^{g+} \int_{g+u}^{D_g} e^{-s}\, ds\ \ \varepsilon_g(dt)$ est la mesure $\hat{Q}^v_u (X_t, k).K$ .

<u>Démonstration.</u> On sait qu'on peut énumérer les instants g+u à l'aide d'une suite de temps d'arrêt, on peut alors appliquer la propriété de Markov forte et conclure à l'aide de la proposition précédente.

CHAPITRE IV.- LE v-PROCESSUS D'ENTREE.

Nous venons de construire un semi-groupe. On se propose d'étudier le processus de Markov associé, que nous appellerons v-processus d'entrée.

Pour cela on remarque que si $x \in F$, $\hat{Q}_t^{(v)}(x,dy)$ $(t > 0)$ est une loi d'entrée bornée pour le semi-groupe $Q_t^{(v)}$. Il est alors possible de lui associer une mesure sur le compactifié de ce v-processus. Ce point de vue nous permettra de préciser les propriétés du v-processus d'entrée. Cette partie est très technique, nous allons en donner le schéma et énoncer deux théorèmes qui rassemblent les résultats de ce chapitre.

On considère sur $F^c$ le v-processus de semi-groupe $Q_t^{(v)}$ et sa réalisation sur $\Omega$ avec les probabilités $Q^{\mu/v}$. On désigne alors par $G$ le compactifié de Ray-Knight de $F^c$ et $(W, Y_t, \underline{\underline{G}}_t, \bar{Q}^{\mu/v})$ la réalisation canonique du processus correspondant, $\bar{W}^p$ sa résolvante $\bar{Q}_t^{(v)}$ son semi-groupe de transition et $G_b$ l'ensemble des points de branchements. $\hat{Q}_t^{(v)}$ qui est une loi d'entrée pour $Q_t^{(v)}$, peut être prolongé en une loi d'entrée $\overline{\hat{Q}_t^{(v)}}$ pour le semi-groupe $\bar{Q}_t^{(v)}$, on sait alors [19] qu'il existe une famille de probabilités $\pi_x$, ne chargeant pas $G_b$ telle que

$$\pi_x \bar{Q}_t^{(v)}(.) = \overline{\hat{Q}_t^{(v)}}(x,.) \qquad (t > 0)$$

$$\pi_x \bar{Q}_o^{(v)}(.) = \pi_x(.) .$$

On peut alors prolonger $\bar{Q}^{x/v}$ en une mesure $\overline{\hat{Q}^{x/v}}$ définie par $\bar{Q}^{x/v}$ si $x \in F^c$ et $\bar{Q}^{\pi_x/v}$ si $x \in F$.

Il y a ensuite un problème pour exprimer ce résultat sur l'espace de départ $\Omega$, car en général on ne sait traduire sur l'espace de départ $\Omega$ les propriétés du compactifié que pour les lois $\mu$ ne chargeant que l'espace d'état de départ, ici $F^c$ . Dans le cas particulier qui nous occupe, on peut s'en sortir car $\mu \,\overline{\hat{Q}}_t^{(v)}$ est portée par $F^c$ , on parvient alors, pour toute mesure $\mu$ , à transporter $\overline{\hat{Q}}^{\mu/v}$ en une mesure $\hat{Q}^{\mu/v}$ sur $\Omega$ qui charge un ensemble $H^\mu$ tel que $\overline{\hat{Q}}^{\mu/v}(H_\mu) = 1$ et sur lequel les tribus $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^o = \sigma(X_s, s > 0)$ et $\overset{\times}{\underline{\underline{G}}}{}^o = \sigma(Y_s, s > 0)$ coïncident.

On peut rassembler dans les deux théorèmes suivants les résultats de ce chapitre.

<u>Théorème 13.</u> Soit $\overset{\times}{\Omega}$ l'espace des application de $R^+$ dans E , prenant leurs valeurs dans $F^c$ pour $t > 0$ , continues à droite dans E et G pour $t > 0$ , pourvues de limites à gauche dans G notées $X_{t-}$ , et pourvues d'une limite à droite dans G à l'origine, cette limite sera notée $X_o^{\rightarrow}$ . Si il y a une limite à gauche dans $\bar{E}$ elle sera notée $X_{t-}^*$ . On désignera par $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^o$ la tribu $\sigma(X_s(\overset{\times}{\omega}), s > 0)$. Pour toute loi $\mu$ sur $\bar{E}$ , il existe une mesure $\hat{Q}^{\mu/v}$ sur $(\overset{\times}{\Omega}, \overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^o)$ telle que le processus $(\overset{\times}{\Omega}, \overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^o, X_t, \hat{Q}^{\mu/v})$ soit markovien pour $t > 0$ et de semi-groupe $Q_t^{(v)}$ . Le processus s'appelle v-processus d'entrée. Si on prolonge $X_t$ par $X_o^{\rightarrow}$ en zéro, le processus est alors un processus de Markov fort sur G jusqu'à l'origine. Si $\mu = \delta_x$ la loi $\pi_x$ de $X_o^{\rightarrow}$ charge l'ensemble des valeurs d'adhérence dans G des suites de points convergeant dans E vers x .

Enfin la mesure $\hat{Q}^{x/v}$ charge K . presque sûrement l'espace des trajectoires qui ont une limite à droite dans E à l'origine, soit $X_o$ cette limite, alors $\hat{Q}^{x/v}$ p.s. $X_o = x$ .

Théorème $13^{bis}$.

a) Soit $c$ une fonction $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^{o}$ (ou $\overset{\times}{\underline{\underline{G}}}{}^{o}$) mesurable, telle que $c([\delta]) = 0$ . La mesure aléatoire $\sum_{g \in \vec{M}_\pi} [\int_{-0}^{D\wedge\zeta} e^{-s}(c\, 1_\Omega) \circ k_s\, ds] \circ \theta_g\, \varepsilon_g(dt)$ a pour projection duale bien-mesurable la mesure $\hat{E}_Q^{X_t/v}(c) dK_t$ , cette expression est encore la projection duale bien-mesurable de $\sum_{g \in \vec{M}_\pi} \bar{E}_Q^{\vec{X}_g/v}(c) \int_g^{D_g \wedge\zeta} e^{-s} ds\, \varepsilon_g(dt)$ (où $\vec{X}_g$ est la limite à droite dans $G$).

b) Soit $X_{\vec{L}(t)}$ la limite à droite dans $G$ de $X_{L(t)+\varepsilon}$ , pour toute loi $\mu$ , $\frac{1}{v} \hat{W}^p \frac{h}{v}(X_{L(t)+\varepsilon})$ converge vers $\frac{1}{v} \hat{W}^p \frac{h}{v}(X_{\vec{L}(t)})$ sur l'ensemble $\{0 < L(t) < t\ ;\ X_{L(t)} \in F\}$ $P^\mu \otimes \lambda$ presque-sûrement.

§ 1. Rappels sur les v-processus.

Le semi-groupe $Q_t^{(v)}$ satisfait aux hypothèses droites suivantes :

$HD_1$. Pour toute loi $\mu$ , portée par $F^c$ , il existe un processus markovien à valeurs dans $F^c$ , admettant $Q_t^{(v)}$ comme semi-groupe de transition, $\mu$ comme loi initiale, et dont les trajectoires sont continues à droite.

Pour ne pas compliquer les notations, nous considèrerons une réalisation de $Q_t^{(v)}$ sur l'espace $\Omega$ lui-même. Nous munissons alors $\Omega$ des mesures $Q^{\mu/v}$ pour lesquelles le processus $X_t$ est markovien de semi-groupe $Q_t^{(v)}$ .

$Q^{\mu/v}$ charge le sous-ensemble de $\Omega$ , formé des applications continues à droite à valeurs dans $F^c$ . Pour plus de détails sur de telles réalisations des u-processus on consultera [2] au § II.7 sur les processus relatifs.

$HD_2$. Les fonctions excessives sont presque-boréliennes et pour $Q^{\mu/v}$ presque tout $\omega$ , l'application $t \mapsto f(X_t(\omega))$ est continue à droite si $f$ est excessive.

Les méthodes classiques de compactifications utilisent ces hypothèses et le fait que $F^c$ (espace d'état de ce $Q_t^{(v)}$-processus, considéré alors sans point de branchement) est borélien d'un espace métrique compact. Or $F^c$ n'est que $P_x$-presque borélien de $E$ donc de $\bar{E}$ . Mertens [15] (cité dans [17]) a remarqué qu'il suffisait que $F^c$ soit universellement mesurable de $\bar{E}$ et que pour toute loi $\mu$ sur $F^c$ , le processus $X_t$ reste $Q^{\mu/v}$ p.s. dans une partie borélienne $A_\mu$ de $\bar{E}$ contenue dans $F^c$ , ce qui est bien le cas ici.

En effet, rappelons tout d'abord la manière dont on intègre une variable aléatoire par rapport à $Q^{\mu/v}$ ([2] au paragraphe cité).

Notons $k_t$ les opérateurs de meurtre et $Z$ une variable $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable telle que $Z([\delta]) = 0$ .

(V.1.1.) si $x \in F^c$ , $E_Q^{x/v}(Z) = \frac{1}{v(x)} E_Q^x \int_0^{D\wedge\zeta} e^{-s}\, Z \circ ks\, ds$ .

La fonction $v$ est presque borélienne. Par suite si $\mu'$ désigne la mesure $\frac{1}{v}.\mu$ , il existe deux fonctions boréliennes $v' \leqslant v \leqslant v''$ , telles que $Q^{\mu'}$ p.s., le processus $X_t$ ne visite pas l'ensemble $\{v' < v''\}$ .

Notons $Z = \{\omega\ ;\ \exists\, t < D(\omega)$ tel que $X_t(\omega) \in \{v' < v''\}$

$$E_Q^{\mu/v}(Z) = \int \mu(dx) \frac{E_Q^x}{v(x)} \int_0^{D\wedge\zeta} e^{-s}\, Z \circ ks\, ds = \int_0^\infty e^{-s} ds \int \mu(dx) \frac{1}{v(x)} E_Q^x(Z\circ ks) = 0$$

De plus, par hypothèse $X_t$ ne visite pas $Q^{\mu/v}$ p.s. l'ensemble $F = \{v = 0\} \supseteq \{v' = 0\}$.

Par suite <u>$Q^{\mu/v}$ p.s. $X_t$ appartient à $\{v = v'\} \cap \{v' > 0\} \subseteq F^c$</u> .

Nous aurons également besoin du lemme suivant :

<u>Lemme 13</u>. Pour le v-processus, le temps de mort est totalement inaccessible. La projection duale prévisible du processus croissant $1_{\{0 < \zeta \leqslant t\}}$ est absolument conti-

nue par rapport au temps, sa densité est $\frac{1}{v}$ .

Démonstration. Remarquons que $W^o(\frac{1}{v}) = \frac{1}{v}\, V^1(\frac{v}{v}) = 1$ si $x \in F^c$ . Par suite $E_Q^{x/v}(t < \zeta) = \hat{Q}_t^{(v)}\, 1 = \hat{Q}_t^{(v)}\,[W(\frac{1}{v})]$ . Les surmartingales $E_Q^{x/v}(\int_t^\infty \frac{1}{v(X_s)}\, ds/F_t)$ et $E_Q^{x/v}(1_{t<\zeta}/\underline{\underline{F}}_t)$ sont donc égales, ce qui prouve le résultat.

Corollaire. Soit f presque-borélienne

$$E_Q^{x/v}\,[e^{-\lambda\zeta} f(X_\zeta^-)\quad \zeta > 0] = E_Q^{x/v} \int_0^\infty e^{-\lambda s} \frac{f(X_s)}{v(X_s)}\, ds$$

$$= W^\lambda(\frac{f}{v}) = \frac{V^{\lambda+1}(f)}{v}$$

§ 2. Construction du compactifié.

Construisons le compactifié de Ray-Knight du v-processus. On commence par rendre markovien le semi-groupe $Q_t^{(v)}$ de la manière habituelle, à l'aide du point $\{\delta\}$ .

Notons $\underline{\underline{S}}$ le plus petit cône convexe, stable par inf, stable pour la résolvante contenant les fonctions $W^p f$ , $f \in \mathcal{E}^1(F)$. Il contient les constantes et toute fonction de $\underline{\underline{S}}$ est q-excessive pour $q > 0$ . $\underline{\underline{S}}$ sépare les points de $F^c$ et est séparable pour la topologie de la convergence uniforme.

Nous appelons G le compactifié de Ray-Knight de $F^c$ .

Toute fonction f de $\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}}$ est la restriction à $F^c$ d'une fonction continue $\bar{f}$ sur G , unique et les fonctions $\bar{f}$ $(f \in \underline{\underline{S}})$ séparent les points de G .

La résolvante $W^p$ se prolonge en une résolvante $\bar{W}^p$ de Ray sur G dont nous noterons $G_b$ l'ensemble des points de branchement (non dégénérés).

Le terme $(W , Y_t , G_t , \bar{Q}^{\mu/v})$ désignera la réalisation canonique du processus de Ray associé à $\bar{W}^p$ , dont le semi-groupe sera noté $\bar{Q}_t^{(v)}$ , de loi initiale $\mu\,\bar{Q}_o^{(v)}$ .

Soit $\mu$ une loi initiale sur $F^C$ ; rappelons comment on établit le lien entre le processus initial et son compactifié : notons $\underline{\underline{H}}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans $\underline{\underline{S}}$ pour la topologie de la convergence uniforme.

A toute fonction f de $\underline{\underline{S}}$, presque borélienne et finement continue, nous associons deux fonctions $f'$ et $f''$ boréliennes dans E telles que : $f' \leqslant f \leqslant f''$ et $Q^{\mu/v}[\omega, \exists\, t \;\; f'(X_t)(\omega) < f''(X_t(\omega))] = 0$. Comme $F^C$ n'est pas un borélien de E nous considérons

$$A_f = \{ f' = f'' \} \cap \{ v' > 0 \} \text{ . C'est un borélien de } E \text{ .}$$

$A_\mu = \bigcap\limits_{f \in \underline{\underline{H}}} A_f$ est un borélien de E contenu dans $F^C$ qui porte $\mu$ et pour $Q^{\mu/v}$ presque tout $\omega$, $X_t(\omega) \in A_\mu$.

L'injection de $A_\mu$ dans G est borélienne. $A_\mu$ étant un borélien de $\bar{E}$ métrique compact, donc lusinien $A_\mu$ ainsi que tout borélien dans E de $A_\mu$ a une image dans G qui est borélienne.

Donc toute loi $\mu$ sur $F^C$ est portée par $A_\mu$, borélien de E et de G. Nous notons $\bar{\mu}$ la mesure image de $\mu$ dans G, qui est une loi sur G portée par $A_\mu$ donc par $F^C$.

En dehors de l'ensemble $Q^{\mu/v}$ négligeable des $\omega$ pour lesquels il existe $f \in \underline{\underline{S}}$ telle que l'application $t \rightsquigarrow f \circ X_t(\omega)$ ne soit pas continue à droite et limitée à gauche, les trajectoires restantes sont continues à droite et limitées à gauche dans la topologie de G. On montre alors que lorsque $\Omega$ est muni de la loi $Q^{\mu/v}$, le processus $X_t$ considéré comme processus à valeurs dans G est markovien, et admet $\bar{Q}_t^{(v)}$ comme semi-groupe de transition et $\mu$ comme loi initiale.

Notons $\sum_\mu$ le sous-ensemble de $\Omega$ et $W$ formé des applications de $R^+$ dans $A_\mu$ continues à droite pour les topologies de $E$ et $G$ et admettant des limites à gauche dans $G$. Sur $\sum_\mu$ $X_t = Y_t$ et les tribus $F^o$ et $G^o$ coïncident, dès lors $Q^{\mu/v}$ et $\bar{Q}^{\bar{\mu}/v}$ induisent la même loi sur $\sum_\mu$ qui les portent toutes les deux.

§ 3. Prolongement des lois d'entrée.

Nous avons construit une famille de lois d'entrée pour $Q_t^{(v)}$, les mesures $\hat{Q}_t^{(v)}(x,.)$ $(t > 0)$ portées par $F^c$. D'après ce qui précède, il existe un ensemble borélien $A_t^x$ de $E$ et de $G$ qui porte $\hat{Q}_t^{(v)}(x,.)$. Nous noterons $\bar{\hat{Q}}_t^{(v)}(x,.)$ la mesure image de $\hat{Q}_t^{(v)}(x,.)$ dans $G$, qui est une loi portée par $A_t^x$, c.à.d. que si $\bar{f}$ est borélienne dans $G$, on pose: $\bar{\hat{Q}}_t^{(v)}(x,\bar{f}) = \hat{Q}_t^{(v)}(x, \bar{f}/_{A_t^x})$, la fonction $\bar{f}/_{A_t^x}$ étant borélienne sur $E$.
L'application $x \mapsto \overline{\hat{Q}_t^{(v)}}(x,\bar{f})$ est alors manifestement universellement mesurable dans $\bar{E}$. Reste à montrer que $\overline{\hat{Q}_t^{(v)}}(x,.)$ est bien une loi d'entrée pour $\bar{Q}_t^{(v)}$.
Soit $\bar{f} \in \underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}}$ et $f$ sa restriction à $F^c$ alors si $x \in F^c$, $\bar{Q}_s^{(v)}(\bar{f})(x) = Q_s^{(v)} f(x)$ puisque $f$ est presque borélienne dans $E$. De plus, il existe $\bar{f}'$ et $\bar{f}'' \in \mathcal{B}(G)$ telles que $\bar{f}' \leq \bar{Q}_s^{(v)}\bar{f} \leq \bar{f}''$ et

$$\bar{\hat{Q}}_t^{(v)}[\bar{Q}_s^{(v)} f] = \bar{\hat{Q}}_t^{(v)}(\bar{f}') = \bar{\hat{Q}}_t^{(v)}(\bar{f}'') .$$

D'après la définition $\bar{\hat{Q}}_t^{(v)}$ ceci vaut encore

$$\bar{\hat{Q}}_t^{(v)}[\bar{Q}_s^{(v)} f](x) = \hat{Q}_t^{(v)}(\bar{f}' 1_{A_t^x})(x) = \hat{Q}_t^{(v)}(\bar{f}'' 1_{A_t^x})(x) = \hat{Q}_t^{(v)}[Q_s^{(v)}(f)](x)$$
$$= \hat{Q}_{t+s}^{(v)}(f)(x)$$
$$= \overline{\hat{Q}_{t+s}^{(v)}}(\bar{f})(x) \quad \text{car } f \text{ appartient à } \underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}} .$$

Il suffit alors de prolonger cette relation à $\mathcal{C}(G)$ puis à $\mathcal{B}(G)$ pour conclure.

D'après le théorème 9 de [19], il existe alors une famille unique de lois de probabilité $\pi_x$ ne chargeant pas $G_b$ telles que :

$$\pi_x \bar{Q}_t^{(v)}(.) = \hat{\bar{Q}}_t^{(v)}(x,.) \quad \text{pour } t > 0$$

$$\pi_x \bar{Q}_0^{(v)}(.) = \pi_x(.)$$

et l'application $x \to \pi_x(.)$ est $\mathcal{B}_u(\bar{E})$-mesurable.

Nous noterons $\bar{Q}^{x/v}$ la probabilité $\bar{Q}^{\pi_x/v}$ si $x \in F$

$\bar{Q}^{x/v}$ si $x \in F^c$

$\pi_x$ étant la limite vague de $\hat{\bar{Q}}_t^{(v)}$, $\pi_x$ est la loi de $\vec{X_o}$.

Pour toute loi $\mu$ sur $E$, le processus $(W , Y_t , G_t , \bar{Q}^{\mu/v})$ est fortement markovien de semi-groupe de transition $\bar{Q}_t^{(v)}$ et de loi initiale $\int \mu(dx)\, \pi_x(.)$.

§ 4. <u>Le v-processus d'entrée</u> : <u>démonstration du théorème 13</u>.

Nous avons vu au paragraphe 1, que lorsque $\mu$ est portée par $F^c$, on peut transporter sur $\Omega$ muni de la mesure $Q^{\mu/v}$, tous les résultats obtenus pour $Y_t$ et la mesure $\bar{Q}^{\bar{\mu}/v}$.

Nous allons étudier ce qui se passe si $\mu$ charge $F$.

D'après le paragraphe 1, la mesure $\mu\hat{Q}_t^{(v)}$ $(t > 0)$ portée par $F^c$ et son image dans $G$, $\overline{\mu\hat{Q}_t^{(v)}}$ sont portées par un ensemble $A_t^\mu$ borélien de $E$ et de $G$ contenu dans $F^c$.

Notons $\overset{o}{\Omega}$ l'espace des applications de $R^+$ dans $E$ et $\overset{o}{X}_t$ les applications coordonnées.

Le sous-ensemble $\sum_t^\mu$ de $\overset{o}{\Omega}$ et $W$, constitué des applications de $R^+$ dans $A_t^\mu$ continues à droite (origine comprise) pour les topologies de $E$ et $G$ et ayant des limites à gauche dans $G$ porte à la fois les mesures $Q^{\mu\hat{Q}_t^{(v)}}$ et $\bar{Q}^{\overline{\mu\hat{Q}_t^{(v)}}}$.

$\overline{{}_\mu\hat{Q}_t^{(v)}}$ étant une loi d'entrée pour $\bar{Q}_t^{(v)}$, la mesure $\bar{\hat{Q}}^{\mu/v}$ est portée par $\theta_t^{-1}\,\Sigma_t^\mu$ et ceci pour tout $t > 0$ ; sur cet ensemble $\overset{o}{X}_{t+s} = Y_{t+s}$ $(\forall s \geqslant 0)$ et les tribus $\overset{o}{\underline{\underline{F}}}{}^t = \sigma(\overset{o}{X}_{t+s}\ ;\ s \geqslant 0)$ et $\underline{\underline{G}}^t = \sigma(Y_{t+s}\ ,\ s \geqslant 0)$ coïncident.

Choisissons $r$ et $q$ rationnels, d'après la propriété de Markov, si $q > 0$ $\bar{\hat{Q}}^{\mu/v}$ est portée par $\bigcup\limits_{0<r\leqslant q} \theta_r^{-1}\,\Sigma_r^\mu$ et donc aussi par $\limsup\limits_{r\to 0}\,\theta_r^{-1}\,\Sigma_r^\mu$, que nous notons $\Sigma^\mu$. Sur cet ensemble, les processus $\overset{o}{X}_t$ $(t > 0)$ et $Y_t$ $(t > 0)$ sont égaux à valeurs dans l'ensemble $A^\mu = \limsup\limits_{r\to 0} A_r^\mu \subseteq F^c$, borélien de $G$ et de $E$.

Toujours sur cet ensemble les tribus $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^o = \bigvee\limits_{r>0} \overset{o}{\underline{\underline{F}}}{}^r = \sigma(\overset{o}{X}_s\ ;\ s > 0)$ et $\overset{\times}{G}{}^o = \sigma(Y_s\ ,\ s > 0)$ coïncident.

Puisque $\Sigma^\mu$ porte $\bar{\hat{Q}}^{\mu/v}$, il existe un ensemble $\overset{\times}{G}{}^o$-mesurable $H^\mu$ contenu dans $\Sigma^\mu$ tel que $\bar{\hat{Q}}^{\mu/v}(H^\mu) = 1$. Cet ensemble est aussi $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^o$-mesurable.

<u>$\bar{\hat{Q}}^{\mu/v}$ induit donc sur $(\overset{o}{\Omega}, \overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^o)$ une mesure de probabilité que nous noterons $\hat{Q}^{\mu/v}$ :</u>

$$\hat{Q}^{\mu/v}(A) = \hat{Q}^{\mu/v}(A\cap H_\mu) = \bar{\hat{Q}}^{\mu/v}(A\cap H_\mu).$$

Il est alors facile de vérifier que pour cette loi, le processus $\overset{o}{X}_t$ $(t > 0)$, $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^o$ est markovien de semi-groupe $Q_t^{(v)}$, et on a ainsi un moyen de transporter sur $\overset{o}{\Omega}$ muni de $\hat{Q}^{\mu/v}$, ce qui est vrai pour le processus $Y_t$ $(t > 0)$, et la mesure $\hat{Q}^{\mu/v}$.

Restreignons un peu l'espace de départ. Nous noterons $\overset{\times}{\Omega}$ l'espace des applications de $R^+$ dans $E$, qui pour $t > 0$ appartiennent à $F^c$, sont continues à droite pour les topologies de $E$ et de $G$, admettent une limite à droite à l'origine dans $G - G_b$ que nous noterons $\vec{X}_o$, et des limites à gauche dans $G$ notées $X_{t-}$ celles dans $\bar{E}$ étant notées $X^*_{t-}$.

Nous noterons encore $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}^{o} = \sigma [X_s(\overset{\times}{\omega}), s > 0 \quad \overset{\times}{\omega} \in \overset{\times}{\Omega}]$.

<u>Définition</u>. Nous appellerons v-processus d'entrée, le processus $(\overset{\times}{\Omega}, \overset{\times}{\underline{\underline{F}}}^{o}, X_t (t > 0)$ $\hat{Q}^{\mu/v})$ si $\mu$ est une loi sur $E$, markovien de semi-groupe $Q_t^{(v)}$ la loi de $X_t$ $(t > 0)$ étant $\mu \hat{Q}_t^{(v)}$.

Nous pouvons aussi considérer ce processus comme étant à valeurs dans $G$, et utiliser les propriétés du compactifié : on obtient alors la propriété de Markov forte.

Soit $T$ un temps d'arrêt de la famille de tribus $\overset{\times}{F}{}_t^{\mu}$ (complètées de $\overset{\times}{F}{}_t^{o}$ à l'aide des ensembles $\hat{Q}^{\mu/v}$-négligeables de $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}^{o}$). Alors $\hat{Q}^{\mu/v}$ p.s.

$\hat{E}_Q^{\mu/v} [c \circ \theta_T / F_T^{\mu}] = \bar{E}_Q^{X_T/v} [c]$ étant entendu qu'on prolonge le processus $X_t$ $(t > 0)$ par $\vec{X}_o$ en $0$.

Pour achever la démonstration du théorème 13 il convient d'établir l'assertion relatif au support de $\pi_x$, ainsi que celle concernant le support $\hat{Q}^{x/v}$, ce qui sera fait au corollaire de la proposition 15.

## § 5. <u>Applications au balayage</u>.

Nous allons d'abord étendre la proposition 12 à des processus $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}^{o}$-mesurables.

<u>Proposition 14</u>. Soit $C$ une fonction $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}^{o}$-mesurable positive telle que $C([\delta]) = 0$.

La mesure aléatoire $\sum_{g \in M_\pi^{\to}} \left( \int_0^{D \wedge \zeta} e^{-s} (C.1_\Omega) \circ k_s \, ds \right) \circ \theta_g(dt)$ a pour projection duale bien-mesurable la mesure $\hat{E}_Q^{X_t/v} (C) dK_t$.

<u>Démonstration</u>. $\Omega = \{\overset{\times}{\omega} \in \overset{\times}{\Omega}$ tels que $\overline{\lim_{r \to 0}}\, X_r(\overset{\times}{\omega}) = \underline{\lim_{r \to 0}}\, X_r(\overset{\times}{\omega})\}$ est $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}^{o}$-mesurable $C.1_\Omega$ est alors $\underline{\underline{F}}^{o}$ mesurable et le premier membre a bien un sens.

Nous suivons alors de près la démonstration de Meyer [17] exposé II. Il convient alors de montrer que si $Z_t$ est un processus bien-mesurable borné

$$E^{\mu}\Big(\sum_{g \in \vec{M}_{\pi}} Z_g \Big[\int_0^{D\wedge\zeta} e^{-s}(C\, 1_{\Omega} \circ k_s)ds\Big] \circ \theta_g = E^{\mu}\int_0^{\infty} Z_t\, \hat{E}_Q^{X_t/v}(C)dK_t\,.$$

Soit $C(\overset{\times}{\omega}) = h_1(X_{t_1}(\overset{\times}{\omega})) \times \dots h_n(X_{t_n}(\overset{\times}{\omega}))$ avec $0 < t_1 \dots < t_n$

$$E^{\mu}\Big[\sum_{g \in \vec{M}_{\pi}} Z_g\Big(\int_0^{D\wedge\zeta} e^{-s}\, C\, 1_{\Omega} \circ k_s\Big) \circ \theta_g\Big] =$$

$$= E^{\mu}\Big[\sum_{g \in \vec{M}_{\pi}} Z_g\, h_1(X_{t_1+g}) \dots h_n(X_{t_n+g})\, e^{g}\int_{t_n+g}^{D_g\wedge\zeta} e^{-s}\, ds\Big]\,.$$

Puisque $t_i + g < D_g$ , les instants $t_i+g$ peuvent être énumérés à l'aide de temps d'arrêt, l'expression précédente est donc encore égale à

$$E^{\mu}\Big[\sum_{g \in \vec{M}_{\pi}} Z_g\, h_1(X_{t_1+g})\, 1_{\{t_1+g<D_g\}}\, e^{-t_1} E_{X_{t_1+g}}\Big[h_2(X_{t_2-t_1})\dots h_n(X_{t_n-t_1}) 1_{(t_n-t_1<D)}\int_{t_n-t_1}^{D\wedge\zeta} e^{-s}ds\Big]$$

Soit $\gamma(x) = \frac{1}{v(x)}\, E_x\Big[h_2(X_{t_2-t_1})\dots h_n(X_{t_n-t_1}) 1_{\{t_n-t_1<D\}}\int_{t_n-t_1}^{D\wedge\zeta} e^{-s}ds\Big]$ , alors

$$E^{\mu}\Big(\sum_{g \in \vec{M}_{\pi}} Z_g\Big[\int_0^{D\wedge\zeta} e^{-s}(C\, 1_{\Omega} \circ k_s)\, ds\Big] \circ \theta_g$$

$$= E^{\mu}\Big[Z_g\, h_1(X_{t_1+g})\, \gamma(X_{t_1+g})\, 1_{(t_1+g<D_g)}\, e^{g}\int_{t_1+g}^{D_g} e^{-s}ds\Big]$$

$$= E^{\mu}\int_0^{\infty} Z_t\, \hat{Q}_{t_1}^{(v)}(h_1\, \gamma)(X_s)\, dK_s \quad \text{d'après la proposition 12.}$$

Or $\hat{Q}_t^{(v)}$ étant une loi d'entrée pour le semi-groupe $Q_t^{(v)}$

$$\hat{Q}_{t_1}^{(v)}(h\, \gamma)(x) = E_Q^{\hat{Q}_{t_1}^{(v)}(x,.)}\big[h_1(X_0)\, \gamma(X_0)\big]$$

$$= E_Q^{\hat{Q}_{t_1}^{(v)}(x,.)}\big[h_1(X_0)\, h_2(X_{t_2-t_1}) \dots h_n(X_{t_n-t_1})\big]$$

$$= \hat{E}_Q^{x/v}\big[h_1(X_{t_1}) \dots h_n(X_{t_n})\big] \quad \text{d'après le paragraphe 4 .}$$

Il est facile alors par un raisonnement de classe monotone d'obtenir le résultat pour toute fonction $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^{o}$ mesurable positive puisque la mesure

$$C \rightsquigarrow E^{\mu}\sum_{g \in \vec{M}_{\pi}} Z_g\Big[\int_0^{D_g\wedge\zeta} e^{-s}(C\, 1_{\Omega} \circ k_s)ds\Big] \circ \theta_g \quad \text{est bornée.}$$

On en déduit alors un résultat sur le support des mesures $\hat{Q}^{x/v}$ .

<u>Proposition 15</u>. K presque surement, $\hat{Q}^{x/v}$ ne charge que l'espace $\Omega$ des fonctions continues à droite dans E jusqu'à l'origine. Soit $X_0$ la limite dans la topogie de E : la loi de $X_0$ est dégénérée et $\hat{Q}^{x/v}$ p.s. $X_0 = x$ .

<u>Remarque</u>. $\hat{Q}^{x/v}$ est une mesure sur $\overset{\times}{\Omega}$ qui est un espace de fonctions continues à droite dans E pour $t > 0$ seulement, et continues à droite dans G pour tout t positif ou nul.

<u>Démonstration</u>. $\Omega$ étant $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^{o}$-mesurable, on applique la proposition précédente à $C = 1_\Omega$

$$E^\mu\left(\sum_{g \in \overrightarrow{M}_\pi} Z_g\left(\int_0^{D_g \wedge \zeta} e^{-s}\, 1_\Omega \circ k_s\, ds\right) \circ \theta_g\right] = E^\mu\left(\sum_{g \in \overrightarrow{M}_\pi} Z_g\, e^g \int_g^{D_g \wedge \zeta} e^{-s}\, ds\right)$$

$$= E^\mu\left(\int_0^{+\infty} Z_s\, dK_s\right)$$

$$= E^\mu \int_0^{+\infty} Z_s\, \hat{Q}^{X_s/v}(\Omega)\, dK_s$$

si $Z_s$ est bien mesurable positif.

Le processus $\hat{Q}^{X_t/v}(\Omega).dK_t$ étant bien mesurable, pour tout Z mesurable

$$E^\mu \int_0^{+\infty} Z_s[\hat{Q}^{X_s/v}(\Omega) - 1]dK_s = E^\mu \int_0^{+\infty} Z_s^{(1)}[\hat{Q}^{X_s/v}(\Omega) - 1]\, dK_s = 0$$

ce qui prouve bien que K p.s. $\hat{Q}^{X_t/v}(\Omega) = 1$ .

Soit alors h continue sur E , si $\hat{Q}^{x/v}(\Omega) = 1$ , $\hat{Q}^{x/v}[h(X_t)] \to \hat{Q}^{x/v}[h(X_0)]$

or $\qquad \hat{Q}^{x/v}\, h(X_t) = \hat{Q}_t^{(v)} h(x)$.

La fonction $\hat{Q}_t^{(v)} h(x)$ est alors continue à droite, et $p \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, \hat{Q}_t^{(v)} h(x) dt$ tend vers $\hat{Q}^{x/v}[h(X_0)]$. Le théorème 10 montre d'autre part que cette fonction tend vers h(x), d'où le résultat.

Corollaire. Le processus d'entrée charge $K$ p.s. l'espace des trajectoires continues à droite pour la topologie de $E$ et de $G$, qui pour $t > 0$ appartiennent à $F^c$. Si $t > 0$ les limites à droite dans les deux topologies sont les mêmes. Mais pour $t = 0$ elles sont différentes.

La mesure $\pi_x$, loi de $X_0^{\to}$ (limite à droite dans $G$ de $X_t(\omega)$) charge donc l'ensemble des valeurs d'adhérence dans $G$ des suites de points convergeant vers $x$ dans $E$ ce qui généralise un résultat d'Okabe dans [24].

Une autre application de l'étude du processus d'entrée est l'extension de la propriété de balayage aux variables $\overset{\times}{\underline{\underline{G}}}{}^o$-mesurables.

Proposition 16. Soit $\check{C}$ une fonction $\overset{\times}{\underline{\underline{G}}}{}^o$ mesurable positive telle que $\check{C}([\delta]) = 0$. La mesure aléatoire $\sum_{g \in M_\pi^{\to}} (\int_0^{D\wedge\zeta} e^{-s}\, \check{C} \circ k_s\, ds) \circ \theta_g\, \varepsilon_g(dt)$ a pour projection duale bien-mesurable la mesure $\hat{E}_Q^{X_t/v}(\check{C})\, dK_t$.

Démonstration. Soit $Z_t$ bien mesurable bornée, il convient de préciser le sens que nous donnons à une expression du type suivant :

$$E^\mu(\sum_{g \in M_\pi^{\to}} Z_g\, e^{-g}\, (\int_0^{D\wedge\zeta} e^{-s}\, \check{C} \circ k_s\, ds) \circ \theta_g] .$$

La mesure $E^\mu \int_0^{+\infty} e^{-s}\, \varphi(X_s)\, dK_s$ est bornée en $\varphi$, par suite il existe un ensemble $\Sigma$, $\underline{\underline{F}}^o$ mesurable tel que : sur $\Sigma$ les tribus $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^o$ et $\overset{\times}{\underline{\underline{G}}}{}^o$ soient les mêmes et tel que $E^\mu \int_0^{+\infty} e^{-s}\, \hat{E}_Q^{X_s/v}[\Sigma]\, dK_s = E^\mu \int_0^{\infty} e^{-s}\, dK_s$.

La variable $\check{C}\, 1_\Sigma$ est alors $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^o$-mesurable et c'est elle que nous considérons c.à.d. que nous posons

$$E^\mu(\sum_{g \in M_\pi^{\to}} Z_g\, e^{-g} (\int_0^{D\wedge\zeta} e^{-s}\, \check{C} \circ k_s ds) \circ \theta_g]$$

$$= E^\mu [\sum_{g \in M_\pi^{\to}} Z_g\, e^{-g} (\int_0^{D\wedge\zeta} e^{-s}\, \check{C}\, 1_\Sigma \circ k_s\, ds) \circ \theta_g] .$$

La proposition 16 n'est alors que la reproduction de la proposition 15. Donnons une application immédiate de cette proposition :

Corollaire. Soit $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $R_*^+$. Alors pour $P^\mu \otimes \lambda$ presque tous $(\omega, s)$, sur l'ensemble $\{0 < L_s < s \ ; \ X_{L_s} \in F\}$ , $X_{L_s+\varepsilon}$ tend dans la topologie de $G$ vers $X_{L_s}^{\rightarrow}$ et donc si $f \in \mathcal{E}(E)$ $W^p f(X_{L_s+\varepsilon}) \rightarrow \overline{W^p f(X_{L_s}^{\rightarrow})}$ .

Démonstration.. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à l'ensemble $\{\omega$ , $X_t$ n'est pas continu à droite en $0$ pour la topologie de $G\} = \check{C}$ et de remarquer que $E^\mu(\sum_{g \in M_\pi^{\rightarrow}} Z_g e^{+g}(\int_0^D e^{-s} \check{C} \circ k_s \, ds) \circ \theta_g)$

$$= E^\mu \int_0^{+\infty} e^{-(s-L_s)} Z_{L_s} \check{C} \circ k_{s-L_s} \circ \theta_{L_s} 1_{\{X_{L_s} \in F\}} 1_{\{0 < L_s < s\}} ds .$$

Nous avons beaucoup utilisé le fait qu'on pouvait énumérer les $g+u$ $\{g+u < D_g\}$ $g \in M_\pi^{\rightarrow}$ à l'aide de temps d'arrêt, ce qui permettait d'appliquer la propriété de Markov à partir des temps $g+u$ .

Nous allons voir qu'on peut en fait appliquer une "propriété de Markov à partir de l'instant $g$ ". Soit $X_g^{\rightarrow}$ la limite (dans $G$) de $X_{g+t}$ quand $t \rightarrow 0$ .

Théorème 17. Soit $C$ une variable $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable, telle que $C[\delta] = 0$ , les mesures $\sum_{g \in M_\pi^{\rightarrow}} (\int_0^{D \wedge \zeta} e^{-s} C \circ k_s \, ds) \circ \theta_g \, \varepsilon_g(dt)$ et $\sum_{g \in M_\pi^{\rightarrow}} \bar{E}_Q^{X_g^{\rightarrow}/v}[C] \int_g^{D_g \wedge \zeta} e^{-s} ds \, \varepsilon_g(dt)$ ont pour projection duale bien mesurable, $\hat{E}_Q^{X_t/v}[C] \, dK_t$ .

Démonstration. Soit $\Sigma$ un ensemble plein pour $E^\mu \int_0^{+\infty} \hat{E}_Q^{X_t/v}[.] \, dK_t$ tel que $C 1_\Sigma$ soit $\overset{\times}{\underline{\underline{G}}}{}^o$-mesurable

$$\hat{E}_Q^{x/v}[C 1_\Sigma] = \hat{E}_Q^{x/v}[\bar{E}_Q^{X_o/v}[C 1_\Sigma]] = \hat{E}_Q^{x/v}[1_\Sigma \, \bar{E}_Q^{X_o^{\rightarrow}/v}[C 1_\Sigma]]$$

$C 1_\Sigma$ étant $\underline{\underline{G}}^o$-mesurable, $\bar{E}_Q^{x/v}[C 1_\Sigma]$ est borélienne dans $G$ et donc

$1_{\Sigma}\, \bar{E}_Q^{X_{\vec{o}}/v}(C\, 1_{\Sigma})$ est $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable.

Appliquons alors la proposition 16 : pour toute loi $\mu$ sur $E$

$\hat{E}_Q^{X_t/v}\,[1_{\Sigma}\, \bar{E}_Q^{X_{\vec{o}}/v}(C\, 1_{\Sigma})]d\,K_t$ est la $P^{\mu}$-projection duale bien mesurable de

$\sum_{g\in M_{\pi}^{\rightarrow}}\left(\int_0^{D\wedge\zeta} e^{-s}\, 1_{\Sigma}\circ k_s\, \bar{E}_Q^{X_o/v}(C\, 1_{\Sigma})\circ k_s\, ds\right)\circ\theta_g\, \epsilon_g(dt)$ qui est égale à

$\sum_{g\in M_{\pi}^{\rightarrow}} \bar{E}_Q^{X_g/v}(C\, 1_{\Sigma})\left(\int_0^{D\wedge\zeta} e^{-s}\, 1_{\Sigma}\circ k_s\, ds\right)\circ\theta_g\, \epsilon_g(dt).$

Il ne reste plus qu'à remarquer que l'ensemble $\Sigma$ étant plein, on peut ôter le $1_{\Sigma}$. (Appliquer le calcul ci-dessus en faisant $C = 1$).

## § 6. Quelques surmartingales remarquables du v-processus d'entrée.

Notre projet initial était d'étudier les densités des projections duales bien mesurables des fonctionnelles $d\tilde{I}_t^p(h) = \sum_{g\in M_{\pi}^{\rightarrow}} e^{pg}\int_{]g,Dg]} e^{-ps}\, h(X_s)ds\;\; \epsilon_g(dt)$ par rapport à $dK_t$.

Nous allons voir que l'utilisation de la compactification donne des résultats intéressants quant à la forme de cette densité, généralisant des résultats de Dynkin dans [9].

D'après le théorème 10,

$$d\tilde{I}_t^p(h) = d\tilde{J}_t^{p-1}(\tfrac{h}{v}) = \hat{W}^{p-1}(\tfrac{h}{v}).dK_t \quad \text{si} \quad p \geqslant 1 .$$

C'est à la forme de $\hat{W}^{p-1}(\frac{h}{v})$ que nous nous intéressons.

<u>Lemme 18</u>. Soit $h$ une fonction presque borélienne bornée

$$W^p(\tfrac{h}{v})(x) = E^{x/v}[h(X^*_{\zeta-})\, e^{-p\zeta};\ \zeta > 0] \quad \text{si } x\in F^c .$$

($X^*_{\zeta-}$ représente la limite à gauche dans la topologie de $\bar{E}$).

$W^p(\frac{h}{v})$ est alors la restriction à $F^c$ de la fonction p-excessive pour $\bar{Q}_t^{(v)}$, $\bar{E}^{x/v}[h(X_\zeta^-)e^{-p\zeta} 1_{F^c}(X_\zeta) \ ; \ \zeta > 0]$ que nous noterons $\overline{\frac{V^{p+1}h}{v}}$ .

Démonstration. La forme explicite de $W^p(\frac{h}{v})$ a été donnée au lemme 13. Pour montrer le lemme 18, il suffit de remarquer que $\zeta$ étant totalement inaccessible pour le v-processus, les limites à gauche dans $G$ , $X_\zeta^-$ et dans $\bar{E}$ $X_\zeta^{*-}$ existent, sont égales et appartiennent à $F^c \cup \{\delta\}$ p.s. pour toute loi $Q^{\mu/v}$ , où $\mu$ ne charge que $F^c$ .

Par suite $W^p(\frac{h}{v})(x) = E^{x/v} [h(X_\zeta^-)e^{-p\zeta} 1_{F^c}(X_\zeta^-) \ ; \ \zeta > 0]$ si $x \in F^c$ .

Il ne reste plus alors qu'à utiliser le fait que $F^c$ est universellement mesurable dans $G$ pour conclure.

Proposition 19. Définissons l'opérateur $\hat{V}^{p+1}(h) = \hat{W}^p(\frac{h}{v})$. Alors $\hat{V}^{p+1}(h)(x) = \int \pi(x,dy) \overline{\frac{V^{p+1}h}{v}}(y)$ $\forall x \in E$ , où la mesure $\pi_x$ a été décrite à la proposition

Pour toute loi $\mu$ sur $E$ , $P^\mu \otimes \lambda$ p.s. sur l'ensemble $\{0 < L(t) < t \ ; X_{L(t)} \in F$ $\overline{\frac{V^{p+1}h}{v}}(X_{L(t)+\varepsilon})$ tend vers $\overline{\frac{V^{p+1}h}{v}}(X_{L(t)}^{\to})$.

Remarque. On retrouve ainsi, en le précisant un peu, un résultat de Dynkin dans [9] et on généralise le corollaire de la proposition 15.

Démonstration. La fonction $\overline{\frac{V^{p+1}h}{v}}(y)$ étant p-excessive pour $\bar{Q}_t^{(v)}$ , est continue à droite sur les trajectoires $(\overline{\frac{V^{p+1}h}{v}})(X_t)$ converge donc vers $(\overline{\frac{V^{p+1}h}{v}})(X_0^{\to})$ $\hat{E}_Q^{x/v} [W^p(\frac{h}{v})(X_\varepsilon)]$ tend par construction vers $\hat{W}^p(\frac{h}{v})(x)$. La fonction $(\overline{\frac{V^{p+1}h}{v}})$ étant bornée, le théorème de Lebesgue entraîne donc que

$$\hat{W}^p(\frac{h}{v})(x) = \hat{E}_Q^{x/v} \left[ \overline{\frac{V^{p+1}h}{v}}(X_0^{\to}) \right].$$

Il ne reste plus qu'à se souvenir que $\pi_x(dy)$ représente la loi de $X_o^{\rightarrow}$ pour avoir le résultat annoncé.

# CHAPITRE (V).- X-PROCESSUS D'ENTREE.

Nous avons vu aux chapitres III et IV comment on peut trouver la projection duale bien mesurable de $\sum_{g \in \vec{M}_\pi} [\int_0^{D \wedge \zeta} e^{-s} c \circ k_s \, ds] \circ \theta_g \, \varepsilon_g(dt)$, où $c$ est $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable. On a été amené pour cela à prolonger la résolvante $W^p = \frac{1}{v} V^p(v\ .)$. Nous voudrions maintenant trouver la projection de $\sum_{g \in \vec{M}_\pi} c \circ \theta_g$, nous allons pour cela être amené à prolonger $\frac{1}{v} V^p$.

Considérons d'abord le cas de $\vec{M}_b$ : la projection duale bien mesurable de $\sum_{g \in \vec{M}_b} c \circ \theta_g \, \varepsilon_g(dt)$ est $\sum_{g \in \vec{M}_b} E_{X_g}(c) \, \varepsilon_g(dt)$ par simple application de la propriété de Markov forte, cette dernière expression vaut encore
$$\sum_{g \in \vec{M}_b} \frac{E_{X_g}(c)}{v(X_g)} e^g \int_g^{D_g} e^{-s} ds \quad \varepsilon_g(dt) \text{ ; or } \sum_{g \in \vec{M}_\pi} \frac{1}{v(X_g)} E_{X_g}(c) \, e^g \int_g^{D_g} e^{-s} ds \quad \varepsilon_g(t)$$
a pour projection duale bien mesurable $\frac{1}{v(X_s)} E_{X_s}(c) \, dK_s$, il est donc naturel de chercher une mesure $\hat{P}_x$ telle que $\sum_{g \in \vec{M}_\pi} c \circ \theta_g \, \varepsilon_g(t)$ ait pour projection duale bien mesurable $\hat{E}^{X_t}(c) \, dK_t$ cette mesure sera un "prolongement" de $\frac{1}{v(x)} E_x$.

Nous allons d'abord mettre en évidence cette famille de mesure $\sigma$-finie $\hat{P}_x$, puis nous étudierons leurs propriétés et nous leur attacherons un processus de Markov appelé le X-processus d'entrée.

## § 1. Construction des mesures $\hat{P}_x$.

Soit $u > 0$, rappelons comment Dawson définit la trajectoire $\omega$ prolongée en $u$ par $\omega'$: on définit la trajectoire $(\omega \,|\, u \,|\, \omega')$ par

$$X_t(\omega \,|\, u \,|\, \omega') = X_t(\omega) \quad \text{si } t < u$$
$$= X_{t-u}(\omega') \quad \text{si } t \geq u\,.$$

Si $c$ est une variable $\underline{\underline{F}}^o$ mesurable $E_{X_u(\omega)}[c(\omega|u|\omega')]$ est une version continue à droite de $E^\mu\,(c/\underline{\underline{F}}^\mu_u)$.

<u>Théorème 20</u>. Pour tout $x$ de $E$, il existe sur $(\Omega\ ,\ \underline{\underline{F}}^o)$ une mesure $\hat{P}^x$ telle que, pour toute variable $c$ $\underline{\underline{F}}^o$ mesurable positive vérifiant $c([\delta]) = 0$, la projection duale bien mesurable de $\sum_{g \in M_\pi^{\rightarrow}} c \circ \theta_g\ \varepsilon_g(dt)$ soit $\hat{E}^{X_t}(c)\, d\,K_t$.

<u>Démonstration</u>. Pour réaliser l'opération de prolongement que nous avons évoquée, considérons la variable $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^o$ mesurable

$$\Gamma_u(\omega) = e^u\, \frac{E_{X_u}(\omega)[c(\omega|u|\omega')]}{v(X_u(\omega))} \quad \text{si } u < D(\omega)\wedge\zeta(\omega)$$

$$= 0 \quad \text{si } u \geqslant D(\omega)\wedge\zeta(\omega)$$

nous allons vérifier que $\hat{E}_Q^{x/v}[\Gamma_u(\omega)]$ est une fonction décroissante et nous poserons $\hat{E}^x(c) = \lim_{u\to 0} \hat{E}_Q^{x/v}\,[\Gamma_u(\omega)]$.

Soit $0 < s < u$ $\quad\hat{E}_Q^{x/v}\,(\Gamma_u(\omega)) = \hat{E}_Q^{x/v}\ \hat{E}_Q^{X_s(\omega)/v}\ \Gamma_u(\omega|\,s|\omega'')$ d'après la remarque que nous avons faite. Or pour $s > 0$ $\hat{E}_Q^{x/v}$ p.s. $\quad X_s \in F^c \cup \{\delta\}$ et $\hat{E}_Q^{X_s/v} = E_Q^{X_s/v}$ et $\Gamma_u([\delta]) = 0$ de sorte que d'après IV.1.1.

$$E_Q^{X_s(\omega)/v}[\Gamma_u(\omega|s|\omega'')] = E^{X_s(\omega)}\,[\int_0^{D\wedge\zeta(\omega'')} e^{-t}\,\Gamma_u(\omega|u\ |\ k_t\,\omega'')dt.\frac{1}{v(X_s(\omega))}\,.$$

Soit $a_u$ l'opérateur d'arrêt à l'instant $u$, sur l'ensemble $1 < (D\wedge\zeta)(\omega)$

$\Gamma_u(\omega) = \Gamma_u(a_u(\omega))$ or $\quad a_u(\omega|s|\ k_t\ \omega'') = (\omega|\,s\,|a_{u-s}.k_t\,\omega'')$ puisque $u > s$

si $u \leqslant s{+}t$ $\quad(\omega|\,s\,|a_{u-s}\ k_t\ \omega'') = (\omega\,|s|\ a_{u-s}\omega'')$

si $u > s{+}t$ $\quad(\omega|\,s\,|a_{u-s}\ k_t\ \omega'') = (\omega|s\,|\ k_t\omega'')$, comme $\zeta(\omega|\,s|\ k_t\omega'') \leqslant s{+}t < u$

$\Gamma_u(\omega|s\,|\,a_{u-s}\ k_t\ \omega'') = 0$ pour $u > s{+}t$ de sorte que

$$E_Q^{X_s(\omega)/v}[\Gamma_u(\omega|\,s|\,\omega'')] = \frac{E^{X_s(\omega)}}{v(X_s(\omega))}\,[\Gamma_u(\omega|s|\ a_{u-s}\omega'')\int_{u-s}^{D\wedge\zeta(\omega'')} e^{-t}dt\ \ 1_{(u-s < D\wedge\zeta(\omega''))}]$$

Explicitons maintenant $\Gamma_u(\omega|s|a_{u-s}\omega'')$ : comme $u > s$, $X_u(\omega|s|a_{u-s}\omega'') = X_{u-s}(\omega'')$

et $E_Q^{X_s(\omega)/v}[\Gamma_u(\omega|s|\omega'')]$

$$= \frac{E^{X_s(\omega)}}{v(X_s(\omega))}\{e^u \frac{E_{X_{u-s}}(\omega'')}{v(X_{u-s}(\omega''))} c[(\omega|s|\omega'')|u|\omega'] 1_{\{u-s<D\wedge\zeta(\omega'')\}} \int_{u-s}^{D\wedge\zeta(\omega'')} e^{-t}dt\}$$

$$= \frac{E^{X_s(\omega)}}{v(X_s(\omega))}[e^s E_{X_{u-s}}(\omega'') c[(\omega|s|\omega'')|u|\omega'] 1_{\{u-s< D\wedge\zeta(\omega'')\}}]$$

$$= \frac{E^{X_s(\omega)}}{v(X_s(\omega))}[e^s c[(\omega|s|\omega'')|u| \theta_{u-s}(\omega'')] 1_{[u-s<D\wedge\zeta(\omega'')]}$$

et comme $[(\omega|s|\omega'')|u| \theta_{u-s}\omega''] = (\omega|s|\omega'')$

$$E_Q^{X_s(\omega)/v}[\Gamma_u(\omega|s|\omega'')] = 1_{\{s<(D\wedge\zeta)(\omega)\}} \frac{E^{X_s(\omega)}}{v(X_s(\omega))}[e^s c(\omega|s|\omega'') 1_{[u-s<D\wedge\zeta(\omega'')]}$$

$$\leqslant \Gamma_s(\omega)$$

Donc $\hat{E}_Q^{x/v}[\Gamma_u(\omega)] \leqslant \hat{E}_Q^{x/v}\Gamma_s(\omega)$ si $0 < s < u$.

Nous définissons alors une mesure $\hat{P}^x$ sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}^0)$ par

$$\hat{E}^x(c) = \lim_{u\to 0} \hat{E}_Q^{x/v}[\Gamma_u(\omega)].$$

Nous nous proposons de montrer maintenant que $\hat{E}^{X_t}(c)\, d K_t$ est la projection duale bien mesurable de $\sum_{g\in \vec{M}_\pi} c \circ \theta_g\, \epsilon_g(dt)$.

En effet d'après le théorème 17 si $Z$ est un processus bien mesurable positif

$$E^\mu(\int_0^{+\infty} Z_s \hat{E}_Q^{X_s/v}(\Gamma_u) d K_t = E^\mu(\sum_{g\in\vec{M}_\pi} Z_g(\int_0^{D\wedge\zeta} e^{-s}\Gamma_u\circ k_s) ds\circ\theta_g).$$

Or $\int_0^{D\wedge\zeta} e^{-s}\Gamma_u\circ k_s\, ds = 1_{\{u<D\wedge\zeta\}}\Gamma_u(\omega)\int_u^{D\wedge\zeta} e^{-s}ds$ donc

$$E^\mu\int_0^{+\infty} Z_s \hat{E}_Q^{X_s/v}[\Gamma_u]dK_t = E\,(\sum_{g\in\vec{M}_\pi} Z_g 1_{\{u+g<D_g\}} e^{+u}\frac{E_{X_{u+g}}[c(\theta_g\omega|u|\omega')]}{v(X_{u+g})}$$

$$e^g\int_{u+g}^{D_g\wedge\zeta} e^{-s}ds]$$

$$= E^{\mu}\Big(\sum_{g\in \overrightarrow{M}_\pi} Z_g 1_{\{u+g<D_g\}} E_{X_{u+g}}[c(\theta_g \omega | u | \omega')]\Big].$$

Enumérons les $g+u$ à l'aide de temps d'arrêt et appliquons la propriété de Markov forte. On obtient $E^{\mu}(\sum_{g\in \overrightarrow{M}_\pi} Z_g 1_{\{u+g<D_g\}} c\circ\theta_g]$.

Il ne reste plus qu'à faire tendre $u$ vers zéro.

§ 2. Propriétés des mesures $\hat{P}^x$ .

Lemme 21. Soit $C$ une variable $\underline{\underline{F}}^o$ mesurable telle que $C([\delta]) = 0$ .

Alors $\hat{E}^x \int_0^{D\wedge\zeta} e^{-s}\, C\circ k_s\, ds = \hat{E}_Q^{x/v}[C\, 1_{\{\zeta>0\}}]$ .

Démonstration. Par définition de $\hat{P}^x$

$$\hat{E}^x\int_0^{D\wedge\zeta} e^{-s}\, C\circ k_s\, ds = \lim_{u\to 0} e^u\, \hat{E}_Q^{x/v}\Big[\frac{E_{X_u(\omega)}\int_0^{D\wedge\zeta(\omega|u|\omega')} e^{-s} C\circ k_s(\omega|u|\omega')ds}{v(X_u(\omega))} 1_{\{u<D\wedge\zeta\}}\Big]$$

Or $\frac{E_{X_u}(\omega)}{v(X_u(\omega))}\int_0^{D\wedge\zeta(\omega|u|\omega')} e^{-s}\, C\circ k_s(\omega|u|\omega')ds = E_Q^{X_u(\omega)/v}[c(\omega|u|\omega')]$

et d'après la propriété de Markov $\hat{E}_Q^{x/v}[E_Q^{X_u(\omega)/v}[C(\omega|u|\omega')]\, 1_{\{u<D\wedge\zeta(\omega)\}}]$

$$= \hat{E}_Q^{x/v}[C(\omega)\, 1_{\{u<D\wedge\zeta(\omega)\}}]$$

Le résultat cherché s'obtient alors aisément en faisant tendre $u$ vers zéro.

Théorème 22. Sur l'espace $(\Omega, \underline{\underline{F}}^o)$, les mesures $\hat{P}_x$ construites précédemment sont $\sigma$-finies telles que, pour toute loi $\mu$ sur $E$, le processus $(\Omega, \underline{\underline{F}}^o, \underline{\underline{F}}_t^o, X_t, (t>0), \hat{P}^{\mu})$ soit markovien de semi-groupe $P_t$ . De plus $\hat{P}_x$ p.s. $D\wedge\zeta$ est positif, les trajectoires $k_{D(\omega)}(\omega)$ sont continues à droite dans les topologies de $E$ et $G$ , les limites à droite étant identiques si $t>0$ , différentes pour $t=0$ : K p.s. $\hat{P}_x$ p.s. la limite à droite dans $E$ , soit $X_o$ , existe et est égale à $x$ dans $G$ cette limite, soit $X_o^{\rightarrow}$, existe mais est différente de $x$. Si $T$ est un temps d'arrêt des tribus

$\underline{\underline{F}}^{o}_{t+}$ , $\hat{P}_x$ p.s. sur $(T > 0)$, pour K presque tout x

$$\hat{E}^x(C \circ \theta_T / \underline{\underline{F}}^{o}_{T^+}) = E_{X_T(\omega)}(C) .$$

<u>Démonstration</u>.

a) Nous allons d'abord vérifier que $\hat{P}^x(D \wedge \zeta = 0) = 0$ . Par définition

$$\hat{P}^x(D \wedge \zeta = 0) = e^u \lim_{u \downarrow 0} \hat{E}_Q^{x/v} \; 1_{\{u < D\wedge\zeta \; (\omega)\}} \frac{E^{X_u(\omega)}[(\zeta \wedge D)(\omega|u|\omega') = 0]}{v(X_u(\omega))}$$

Or sur $u < (D \wedge \zeta)(\omega)$ $(D \wedge \zeta)(\omega|u|\omega') = u + (D\wedge\zeta)(\omega') > 0$ ce qui établit la propriété.

b) Il est alors facile de vérifier que $\hat{P}_x$ est $\sigma$-finie K p.s. : en effet $\hat{Q}^{x/v}(\Omega) = 1 = \hat{E}^x(1 - e^{-(D\wedge\zeta)})$ d'après le lemme, cette fonction étant $\hat{P}_x$ p.s. strictement positive les mesures sont bien $\sigma$-finies.

c) Etablissons maintenant la propriété de Markov : il suffit que pour toute fonction $\varphi = h_o(X_o)\dots h_n(X_{t_n})$ $0 < t_1 \dots\dots < t_n = t$ , $\hat{E}^x[\varphi\, f(X_{s+t})] = \hat{E}^x[\varphi\, P_s f(X_t)]$ pour tout $s > 0$ et toute suite $\{t_i\}$ . Par définition

$$\hat{E}^x[\varphi\, f(X_{s+t})] = \lim_{u\to 0} e^u \hat{E}_Q^{x/v}\Big[\frac{E_{X_u(\omega)}}{v(X_u(\omega))}[\varphi(\omega|u|\omega') f(X_{s+t}(\omega|u|\omega'))] 1_{\{u < D\wedge\zeta(\omega)\}}\Big]$$

or dès que $u < t$ $f(X_{s+t}(\omega|u|\omega') = f(X_{s+t-u}(\omega'))$ et $\varphi(\omega|u|\omega')$ est une fonction de $\omega'$ $\underline{\underline{F}}^{o}_{t-u}$ mesurable, on peut donc appliquer la propriété de Markov au membre de droite qui est égal à $\lim_{u\to 0} e^u \hat{E}_Q^{x/v}\Big[\frac{E_{X_u(\omega)}}{v(X_u(\omega))}[\varphi(\omega|u|\omega') P_s f(X_{t-u}(\omega'))] 1_{u < D\wedge\zeta(\omega)}\Big]$

Comme pour $u < t$ $X_{t-u}(\omega') = X_t(\omega|u|\omega')$ cette dernière expression est par définition égale à $\hat{E}^x[\varphi\, P_s f(X_t)]$.

d) Etudions d'abord les limites à droite dans E : pour $t > 0$ , il est clair que les trajectoires sont continues à droite ; si $t = 0$ $\hat{Q}^{x/v}$ p.s. sur $\zeta > 0$ , $X_o$ existe et est égal à x , donc d'après le lemme

$0 = \hat{E}_x[1-e^{-(D\wedge\zeta)} 1_{\{X_o \text{ n'existe pas ou } X_o \neq x\}}]$ ce qui d'après a) entraîne la propriété annoncée.

e) En ce qui concerne la topologie de $G$ examinons

$C_t(\omega) = \{\omega : \exists\, s > 0 \;\; X_s \circ k_{t\wedge D(\omega)}$ n'est pas continu à droite$\}$

$$\hat{E}^x \int_0^{D\wedge\zeta} e^{-s}\, 1_{\{s < \zeta\circ k_s\}} \frac{1_{C_t}\circ k_s}{v(X_t)\circ k_s} ds = \hat{E}^x\left[\frac{1_{C_t}(\omega)}{v(X_t)} 1_{(t< D\wedge\zeta)} \int_t^{D\wedge\zeta} e^{-s} ds\right]$$

$$= e^t\, \hat{E}^x[1_{C_t} 1_{(t < D\wedge\zeta)}]$$

mais le terme intermédiaire des égalités précédentes est aussi égal -d'après le lemme 21- à $\hat{E}^{x/v}[1_{(t<\zeta)} \frac{1_{C_t}}{v(X_t)}]$ qui est nul donc $0 = \hat{E}^x[1_{C_t} 1_{t < D\wedge\zeta}]$ .

Pour terminer la démonstration du théorème il reste à établir la propriété de Markov forte sur $(T > 0)$.

Rappelons que si $A \in \underline{\underline{F}}^o_{T+}$, la variable $T_A$ qui est égale par définition à $T$ si $\omega \in A$ et à l'infini sinon, est un temps d'arrêt des mêmes tribus. Or $\hat{E}^x[1_A . C \circ \theta_T 1_{T>0}] = \hat{E}^x[1_A . C \circ \theta_{T_A}, T_A > 0] = \hat{E}^x[C \circ \theta_{T_A} . T_A > 0]$, de sorte qu'il suffit d'établir que $\hat{E}^x[C \circ \theta_T 1_{(T>0)}] = \hat{E}^x[E_{X_T(\omega)}(C) 1_{[T>0]}]$.

Remarquons d'abord que si $T$ est un $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$ temps d'arrêt $T(\omega|u|\omega') < t \leq u \iff T(\omega) < t < u$ car les trajectoires $\omega|\,u|\omega'$ et $\omega$ coïncident jusqu'à l'instant $u$ (Théorème de Courrege et Priouret). Par ailleurs la variable qui vaut $T(\omega|\,u|\omega') - u$ si $T(\omega) \geq u$ et l'infini sinon, est en tant que fonction de $\omega'$ un temps d'arrêt des tribus $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$ (il est en effet facile de vérifier que pour tout $A \in \underline{\underline{F}}^o_{t+u+}$, $\{\omega' ; (\omega|u|\omega') \in A\} \in \underline{\underline{F}}^o_t$ en conséquence comme $(T \leq t+u) \in \underline{\underline{F}}^o_{t+u+}$ ; $\{\omega' ; T(\omega|\,u|\omega') - u \leq t\} \in \underline{\underline{F}}^o_{t+}$ . Considérons alors la définition de $\hat{E}^x(C \circ \theta_T 1_{T>0}) =$

$$\lim_{u \to 0} \hat{E}_Q^{x/v} \left[ e^u 1_{\{u < D \wedge \zeta(\omega)\}} \frac{E_{X_u(\omega)}}{v(X_u(\omega))} [C \circ \theta_T(\omega|u|\omega') 1_{\{T(\omega|u|\omega') > 0\}}] \right].$$

D'après ce que nous venons de voir

$$1_{\{T(\omega) \geq u\}} E_{X_u(\omega)}[C \circ \theta_T(\omega|u|\omega')] = 1_{\{T(\omega) \geq u\}} E_{X_u(\omega)} [E_{X_{T(\omega|u|\omega')-u}(\omega')} C(\omega'')].$$

Remarquons que $X_{T(\omega|u|\omega')-u}(\omega') = X_T(\omega|u|\omega')$ si $T(\omega|u|\omega') \geq u$.

D'autre part $1_{\{0 < T(\omega) < u\}} E_{X_u(\omega)}[C \circ \theta_T(\omega|u|\omega')]$

$$= 1_{\{0 < T(\omega) < u\}} E_{X_u(\omega)}[C \circ \theta_{T(\omega)}(\omega|u|\omega')].$$

D'après le lemme 21

$$\hat{E}_Q^{x/v} \left[e^u 1_{\{u < D \wedge \zeta(\omega)\}} 1_{\{T(\omega) \geq u\}} \frac{E_{X_u(\omega)}}{v[X_u(\omega)]} [E_{X_T(\omega|u|\omega')}[C]]\right]$$

$$= \hat{E}^x\left[\frac{E_{X_u(\omega)}}{v(X_u(\omega))} [E_{X_T(\omega|u|\omega')}[C]] e^u 1_{\{u < D \wedge \zeta(\omega)\}} \int_u^{D \wedge \zeta} e^{-s} 1_{\{T \circ k_s(\omega) \geq u\}} ds\right]$$

$T \circ k_s < u \iff T < u$ si $s > u$ donc ceci vaut,

$$\hat{E}^x[E_{X_u(\omega)}[E_{X_T(\omega|u|\omega')}[C]] 1_{\{u < D \wedge \zeta(\omega)\}}].$$

Le processus $X_t$ $(t > 0)$ étant markovien de semi-groupe $P_t$ pour $\hat{E}^x$, il vient

que ceci vaut $\hat{E}^x[E_{X_T(\omega)}(C) 1_{\{u < D \wedge \zeta(\omega)\}}]$ qui tend vers $\hat{E}^x[E_{X_T(\omega)}(C) 1_{\{0 < D \wedge \zeta\}}]$.

De même $\hat{E}_Q^{x/v}\left[1_{\{0 < T(\omega) < u\}} \frac{E_{X_u(\omega)}[C \circ \theta_T(\omega|u|\omega')]}{v(X_u(\omega))}\right]$

$$= \hat{E}^x[1_{\{0 < T(\omega) < u\}} 1_{\{u < D \wedge \zeta(\omega)\}} E_{X_u(\omega)}[C \circ \theta_T(\omega|u|\omega')]]$$

$$= \hat{E}^x[1_{\{0 < T(\omega) < u\}} 1_{\{u < D \wedge \zeta(\omega)\}} C \circ \theta_T]$$

terme qui tend vers zéro, lorsque $u$ tend vers zéro.

Comme pour $K$ presque tout $x$, $D \wedge \zeta > 0$ $\hat{P}_x$ p.s., il vient

$$\hat{E}^x[C \circ \theta_T 1_{\{T > 0\}}] = \hat{E}^x[1_{\{T > 0\}} E_{X_T}(C)].$$

Contrairement à ce qui se passe pour le v-processus d'entrée on n'obtient pas de propriété de Markov à l'origine. On peut toutefois généraliser le théorème 17, de la manière suivante : notons $G^1 = \{ x \in G$ , tels que $\bar{Q}^{x/v}$ p.s. $Y_t \in F^c \quad t > 0 \}$ $\hat{Q}^{x/v}$ p.s. $\vec{X_o} \in G^1$ , donc aussi $K$ p.s. $\hat{P}^x$ p.s. $\vec{X_o} \in G^1$ .

On montre alors comme dans le théorème 20 que : si $x \in G^1$ , $\bar{E}^x(\Gamma_u)$ croît si $u$ tend vers zéro et on pose

$$\bar{E}^x(C) = \lim \bar{E}^x(\Gamma_u).$$

Pour retrouver l'ensemble des résultats dûs à Getoor-Sharpe-Meyer, il nous reste à traduire ce qui se passe pour le semi-groupe $Q_t$ .

Posons $\hat{E}^x_Q(C) = \hat{E}^x(C \circ k_D)$.

<u>Théorème 25</u>. Le processus $(\Omega , \underline{\underline{F}}^o_t , X_t , \hat{Q}_x , t > 0)$ est markovien de semi-groupe $Q_t$ . Pour $K$ presque tout $x$ , $\hat{Q}_x$ p.s. $D \wedge \zeta > 0$, $X_o = x$ , la limite à droite dans la topologie de $G$ existe, et le processus est fortement markovien.

La projection duale bien mesurable de $\sum_{g \in \vec{M}_\pi} C \circ k_D \circ \theta_g \, \epsilon_g(dt)$ est

$$\hat{E}^x_Q(C).dK_t \; .$$

Nous noterons $\hat{Q}_t \, f(x) = \hat{E}^x_Q[f(X_t)]$.

<u>Démonstration</u>. Il suffit d'utiliser la définition de $\hat{E}^x_Q$ et d'utiliser les résultats du théorème 21 et de la proposition 22.

CHAPITRE (VI).- APPLICATIONS AU CONDITIONNEMENT (CAS BIEN-MESURABLE)

Nous nous proposons de retrouver, par une méthode différente de cette utilisée par Getoor et Sharpe, les formules de Shih et Pittinger relatives au conditionnement par rapport à la tribu $\underline{\underline{F}}_{L(t)} = \{ Z_{L(t)}$ , où Z est bien-mesurable $\}$, puis de donner de nouvelles formules concernant $\underline{\underline{F}}_{\ell(t)} = \{ Z_{\ell(t)}$ , Z bien mesurable$\}$ .

§ 1. Conditionnement par rapport aux tribus $\underline{\underline{F}}_{L(t)}$.

Pour ce faire, nous commençons par étendre le théorème 20 à des processus mesurables.

Proposition 26. Soit $H(s,\omega)$ un processus $\mathcal{B}(R^+) \otimes \overset{\times}{F}{}^o$-mesurable borné. La projection duale bien-mesurable de la mesure $\sum_{g \in \vec{M}_\pi} H(g, \theta_g \omega)\, \epsilon_g(dt)$ est la mesure $\hat{E}^{X_s}(H(s,\omega'))d\, K_s$ .

Démonstration. Commençons par considérer un processus de la forme $1_{[r,u]}(s)\, C(\omega)$. Le théorème 20 prouve que :

$$E^\mu\Big(\sum_{g \in \vec{M}_\pi} Z_g\, 1_{[r,u]}(g)\, C \circ \theta_g(\omega)\, 1_{\{g+\tau<D(g)\}}\Big] = E^\mu\int_0^{+\infty} Z_s\, 1_{[r,u]}(s)\hat{E}^{X_s}[C\, 1_{\{\tau<D\}}]d\, K_s .$$

Sur tout intervalle $[0,a]$, les mesures qui correspondent aux deux membres sont bornées. Un raisonnement de classe monotone permet ensuite d'affirmer que

$$E^\mu\Big(\sum_{g \in \vec{M}_\pi} Z_g\, H(g, \theta_g\omega)\, 1_{\{g+\tau< D(g)\}}\Big) = E^\mu\int_0^{+\infty} Z_s\, \hat{E}^{X_s}(H(s,\omega)\, 1_{\{\tau < D\}}\, ]d\, K_s .$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre $\tau$ vers zéro et à utiliser le fait que K p.s. $\hat{P}^X$ p.s. $D > 0$ .

Nous sommes alors en mesure d'établir la formule de conditionnement.

Théorème 27. Soit $Z_s$ un processus bien mesurable positif et $h$ une fonction universellement mesurable, positive sur $E$. On a alors pour tout $u > 0$

$$E^{\mu}[Z_{L(u)}\, h(X_u)\, 1_{\{L(u)>0\}}] = E^{\mu}(Z_u\, 1_M(u)\, h(X_u)) + E^{\mu}\Big(\sum_{\substack{g\in \vec{M}_b\\ g<u}} Q_{u-g}(X_g,h)Z_g\Big)$$

$$+\ E^{\mu}\int_{]0,u[} \hat{Q}_{u-s}(X_s,h)Z_s\, d\,K_s\,.$$

Notations. Remarquons d'abord que dans toutes les formules où intervient $K_s$ on peut mettre aussi bien $1_F(X_s)d\,K_s$ car $\int 1_{F^c}(X_s)d\,\tilde{I}^p_s(h) = 0$ puisque $X_g \in F$ pour tout $g$ de $\vec{M}_\pi$. Pour simplifier nous noterons $\hat{E}^x$ la mesure $E^x$ quand $x \in F^c$ et $d\Gamma_t = 1_{F^c}\, d\,K_t + \sum_{g\in \vec{M}_b} \epsilon_g(dt)$. Le théorème 27 exprime alors que

$$E^{\mu}[Z_{L(u)}h(X_u)\, 1_{\{L(u)>0\}}] = E^{\mu}[Z_u\, 1_M(u)\, h(X_u)] + E^{\mu}\int_{]0,u[}\hat{Q}_{u-s}(X_s,h)Z_s d\Gamma_s.$$

Démonstration du théorème 27.

Il suffit de remarquer que $u$ appartient soit à $M(\omega)$ soit à $M(\omega)^c$ et que dans ce cas, $L(u)$ appartient soit à $\vec{M}_b$, soit à $\vec{M}_\pi$.

Etudions d'abord le cas de $\vec{M}_b$ ; $u \in M(\omega)^c$ donc $u > L(u)$ et $u > D(L(u)) = D(u)$

$$E^{\mu}(Z_{L(u)}h(X_u)1_{\{u>L(u)>0\}}1_{\{L(u)\in \vec{M}_b\}}) = E^{\mu}\Big(\sum_{g\in \vec{M}_b} Z_g\, h(X_u)\, 1_{\{g<u<D(g)\}}\Big)$$

$\vec{M}_b$ est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt donc :

$$E^{\mu}\Big(\sum_{g\in \vec{M}_b} Z_g\, h(X_u)\, 1_{\{g<u<D(g)\}}\Big) = E^{\mu}\Big(\sum_{g\in \vec{M}_b} Z_g\, 1_{\{g<u\}}E_{X_g}[h(X_{u-g})1_{\{u-g<D\}}]\Big)$$

$$= E^{\mu}\Big(\sum_{g\in \vec{M}_b} Z_g\, 1_{\{g<u\}}\, Q_{u-g}h(X_g)\Big).$$

De même

$$E^{\mu}\Big(\sum_{g\in \vec{M}_\pi} Z_{L(u)}h(X_u)\, 1_{\{L(u)=g\}}\Big) = E^{\mu}\Big(\sum_{g\in \vec{M}_\pi} Z_g h(X_{u-g})\circ\theta_g\, 1_{\{g<u\}}\, 1_{\{u-g<D\circ\theta_g\}}\Big)$$

qui vaut d'après la proposition 26 $E^{\mu}\int_{]0,u[} Z_s\ \hat{E}_Q^{X_s}[h(X_{u-s})]\ d K_s$ .

Pour déduire du théorème 27, une formule donnant la forme de l'espérance conditionnelle de $h(X_t)$ par rapport à $\underline{\underline{F}}_{L(t)}$ , nous aurons besoin d'un lemme de mesurabilité.

Lemme 28. Pour toute variable $C$ $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable, positive, le processus

$$\hat{E}_Q^{X_s/v}[C(\omega|\ s|\omega')]$$ est bien mesurable.

Pour tout processus mesurable $H(s,\omega)$ positif, le processus $\hat{E}^{X_s/v}[H(s,\omega\ |\ s|\omega')]$ est bien mesurable, de même que $\hat{E}^{X_s(\omega)}(H(s,(\omega|\ s|\omega')]$.

Démonstration. Remarquons que dans le cas où $X_s \in F^c$ p.s. le processus $\hat{E}_Q^{X_s/v}(C(\omega|\ s|\omega'))$ qui d'après le théorème de Dawson est la version continue à droite de la martingale $E_Q^{\mu/v}(C/F_s)$ et est donc bien mesurable.

Dans le cadre qui nous intéresse, on commence par considérer des variables bornées $C(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-p_1 s} h_1(X_s)ds \ldots \int_0^{\infty} e^{-p_n s}\ h_n(X_s)ds$ .

On n'explicitera les calculs que dans le cas $n = 2$ .

$$\hat{E}_Q^{X_s(\omega)/v}[C(\omega\ |\ s|\omega')] = \int_0^s e^{-p_1 t} h_1(X_t)(\omega)dt \int_0^s e^{-p_2 t}\ h_2(X_t)(\omega)dt$$
$$+ \sum_{\substack{i,j\in\{1,2\}\\ i\neq j}} \int_0^s e^{-p_i t}\ h_i(X_t)(\omega)dt\ \hat{E}_Q^{X_s(\omega)/v} \int_s^{+\infty} e^{-p_j t} h_j(X_{t-s})(\omega')dt$$
$$+ \hat{E}_Q^{X_s(\omega)/v} \int_s^{+\infty} e^{-p_1 t}\ h_1(X_{t-s})(\omega')dt \int_s^{+\infty} e^{-p_2 t}\ h_2(X_{t-s})dt\ .$$

Remarquons que $\hat{E}_Q^{X_s/v}\int_s^{+\infty} e^{-p_1 t} h_1(X_{t-s})dt \int_s^{+\infty} e^{-p_2 t}\ h_2(X_{t-s})dt =$

$$\sum_{\substack{i,j\in\{1,2\}\\ i\neq j}} e^{-(p_1+p_2)s}\ \hat{E}_Q^{X_s/v} \int_0^{+\infty} e^{-p_i t}\ h_i(X_t)\int_t^{\infty} e^{-p_j u}\ h_j(X_u)du\ dt$$

Or pour la loi $\hat{E}_Q^{X_s/v}$, le processus $X_t$ est markovien de semi-groupe $Q_t^{(v)}$ $(t > 0)$.

L'expression ci-dessus vaut donc $e^{-(p_1+p_2)s} \sum_{\substack{i,j\in\{1,2\}\\ i\neq j}} \hat{W}_{p_1+p_2}(h_i W_{p_j} h_j)(X_s)$ .

Comme la résolvante $\hat{W}_p$ a été construite $\mathcal{B}$-mesurable (cf. théorème 10) le processus $\sum_{\substack{i,j\in\{1,2\}\\ j\neq j}} \hat{W}_{p_1+p_2}(h_i W_{p_j} h_j)(X_s)$ est bien mesurable et on vérifie facilement qu'il en est de même de $\hat{E}_Q^{X_s(\omega)/v}[C(\omega|s|\omega')]$ si $C$ a la forme indiquée ci-dessus.

Pour conclure, il ne reste qu'à remarquer que toute variable du type $h_1(X_{t_1})\ldots h_n(X_{t_n})$ $(h_1 \ldots h_n$ continues) peut être approchée uniformément par des variables du type ci-dessus [cf. Meyer - Processus de Markov].

Soit maintenant $H(s,\omega)$ un processus mesurable, borné, le processus $\hat{E}_Q^{X_s(\omega)/v}[H(s,\omega|s|\omega')]$ est bien mesurable si $H(s,\omega) = 1_{[r,\tau]}(s)\, C(\omega)$.

La mesure $\hat{E}_Q^{X_s/v}$ étant bornée, un raisonnement de classe monotone montre alors que la propriété est vraie pour tout $H \in \mathcal{B}(R^+) \otimes F_o$ .

Passons aux mesures $\hat{E}^{X_s}$. Par définition

$$\hat{E}^x(H(s,\omega)) = \lim_{u\to 0} \hat{E}_Q^{x/v}\left[e^u 1_{\{u < D\wedge\zeta(\omega)} \frac{E_{X_u(\omega)}[H(s(\omega|u|\omega')]}{v(X_u(\omega))}\right].$$

Remarquons que $\dfrac{E_{X_u(\omega')}[H(s,\omega|s|(\omega'|u|\omega''))]}{v(X_u(\omega'))} = \dfrac{E_{X_{u+s(\omega|s|\omega')}}[H(s,(\omega|s|\omega')|u+s|\omega'')]}{v[X_{u+s(\omega|s|\omega')}]}$

Posons $\Psi_u(s,\omega) = 1_{\{u+s < D\wedge\zeta(\omega)\}} \dfrac{E_{X_{u+s(\omega)}}[H(s,\omega|u+s|\omega'')]}{v(X_{u+s})(\omega)} \in \mathcal{B}(R^+) \otimes \underline{\underline{F}}$

$$\hat{E}_Q^{X_s/v(\omega)}[e^u \Psi_u(s,\omega|s|\omega')] \text{ est bien mesurable.}$$

Il en est de même de sa limite quand $u$ tend vers zéro, celle-ci est

$$\hat{E}^{X_s(\omega)}[H(s,\omega|s|\omega')] \text{ qui est donc bien mesurable.}$$

Nous sommes maintenant à même de démontrer le premier théorème de conditionnement.

Théorème 29. Pour toute fonction h universellement mesurable, positive

$$E\left[f(X_t)/F_{L(t)}\right] = \frac{\hat{Q}_{t-L(t)}(X_{L(t)},f)}{\hat{Q}_{t-L(t)}(X_{L(t)},1)} \quad P^{\mu} \text{ p.s. sur l'ensemble } \{0 < L(t) < t\}$$

(on convient comme d'habitude, que $0/0 = 0$).

Démonstration. Soient $0 \leqslant f' \leqslant f \leqslant f''$ deux fonctions boréliennes telles que $E^{\mu}[1_{\{f' < f''\}}(X_t)] = 0$. Soit $c(\omega) = \frac{f'(X_t)}{v(X_t)} 1_{\{v(X_t) \neq 0\}}$, en appliquant le lemme précédent à c on vérifie que $\hat{Q}_{t-s} f(X_s)$ est bien mesurable.

On peut alors écrire l'égalité du théorème 27 sur l'ensemble $\{0 < L(t) < t\}$ (ce qui supprime le premier terme du second membre) en considérant

$$Z'_s = Z_s \frac{\hat{Q}_{t-s}(f,X_s)}{\hat{Q}_{t-s}(1,X_s)} \quad \text{et } h = 1 \quad \text{soit :}$$

$$E^{\mu}\left[Z_{L(t)} \frac{\hat{Q}_{t-L(t)}(f,X_{L(t)})}{\hat{Q}_{t-L(t)}(1,X_{L(t)})} 1_{(0 < L(t) < t)}\right] = E^{\mu}\int_{]0,t[} Z_s \hat{Q}_{t-s}(X_s,f)d\Gamma_s$$

ce qui d'après le même théorème vaut $E^{\mu}[Z_{L(t)} f(X_t) 1_{\{0 < L(t) < t\}}]$.

Remarque. A partir de la proposition 26 il est facile de retrouver le résultat suivant de Bernard Maisonneuve [14] : le processus à valeurs dans $E \times R^+ \{\Omega, F_{L(t)}, P^{\mu}, (t-L(t), X_{L(t)})\}$ est un processus de Markov dont on peut exprimer le semi-groupe à partir de $\hat{Q}_x$.

## § 2. Conditionnement par rapport aux tribus $\underline{\underline{F}}_{\ell(t)}$.

Nous définissons la tribu $\underline{\underline{F}}_{\ell(t)}$ par $\{Z_{\ell(t)}, Z \text{ bien mesurable}\}$.

Les diverses configurations de $u$, $\ell_u$ et $L_u$ sont les suivantes :

ou bien $u = \ell(u) = L(u)$

ou bien $\ell(u) = L(u) < u$ et $\ell(u) \in \vec{M}$, on sait que

$\ell(u) = L(u) < u$ et $\ell(u) = g \iff g < u < D(g)$ ou bien $\ell_u < L_u = u$ et on sait que $\ell(u) < L(u) = u \iff g < u = D(g)$.

<u>Proposition 30</u>. Soit h mesurable sur $\mathcal{B}(E) \times \mathcal{B}(E)$ et Z un processus bien mesurable borné, alors :

$$E^{\mu}[Z_{\ell(u)}\, h(X_{L(u)}, X_u)\, 1_{\{\ell(u)>0\}}] = E^{\mu}[Z_{\ell(u)}\, h(X_{L(u)}\, X_{\ell(u)})\, 1_{\{\ell(u)=u\}}]$$

$$+ E^{\mu}\int_{]0,u[} Z_s\, \hat{E}^{X_s}[h(X_o, X_{u-s})\, 1_{(u-s<D)}]d\Gamma_s$$

$$+ E^{\mu}\int_{]0,u[} Z_s\, \hat{E}^{X_s}[h(X_D, X_D)\, 1_{\{D=u-s\}}]d\Gamma_s\ .$$

<u>Démonstration</u>.

$$E^{\mu}[Z_{\ell(u)} h(L(u), X_u)\, 1_{\{\ell(u)>0\}}] = E^{\mu}[Z_{\ell(u)}, X_{\ell(u)})\, 1_{\{\ell(u)=u\}}] + E^{\mu}[Z_{\ell(u)} h(X_{L(u)} X_u)\, 1_{\{\ell(u)<u\}}]$$

or $E^{\mu}[Z_{\ell(u)} h(X_{L(u)}, X_u)\, 1_{\{0<\ell(u)<u\}}] = E^{\mu}[\sum_{g\in M^{\to}} Z_g\, h(X_o, X_{u-g}) \circ \theta_g\, 1_{\{g<u\}} 1_{\{u-g<D\circ\theta_g\}}]$

$$+ E^{\mu}[\sum_{g\in M^{\to}} Z_g\, h(X_D, X_D) \circ \theta_g\, 1_{\{g<u\}}\, 1_{\{D\circ\theta_g=u-g\}}]$$

d'après le lemme 26 pour ce qui concerne $dK_s$, et la propriété de Markov forte sur $M_b^{\to}$ pour ce qui concerne $\sum_{g\in M_b^{\to}} \epsilon_g(dt)$, ces deux expressions sont égales aux deux derniers termes de l'égalité de la proposition 30.

<u>Théorème 31</u>. Soit f universellement mesurable sur $E \times E$, positive, $P^{\mu}$ p.s. sur l'ensemble $\{0 < \ell(u) < u\}$

$$E^{\mu}(f(X_{L(u)}, X_u)/\underline{F}_{\ell(u)}) = \frac{R(u-\ell(u), f)}{R(u-\ell(u), 1)}(X_{\ell(u)}) \qquad (^0/_0 = 0)$$

où $R(t,f)(x) = \hat{E}^x[f(X_o, X_t)\, 1_{\{t<D\}} + f(X_D, X_D)\, 1_{\{D=t\}}]$.

<u>Démonstration.</u> Soit $H(s,\omega) = f(X_s, X_u)\, 1_{\{u<D_s\}}$ le processus

$\hat{E}^{X_s}[f(X_o, X_{u-s})\, 1_{(u-s < D)}] = \hat{E}^{X_s}(H(s,\omega|\, s|\omega')$ est bien mesurable d'après le lemme 28. Il en est de même du processus $\hat{E}^{X_s}[f(X_D, X_D)\, 1_{\{D=u-s\}}]$. On procède alors exactement comme pour le conditionnement par $\underline{\underline{F}}_{L(t)}$, en utilisant la proposition 30 au lieu du théorème 27.

# CHAPITRE (VII)- ETUDE DES PROJECTIONS PREVISIBLES ET CONDITIONNEMENT.

## § 1. Projections prévisibles.

La fonctionnelle $\bar{\beta}^p(h)$ étant continue est identique à sa projection prévisible, la projection bien mesurable de $\bar{I}^p(h)$ étant elle aussi continue est identique à la projection prévisible de $\bar{I}^p(h)$.

Il reste à étudier la projection prévisible de $\bar{\beta}^p(h)$ ou aussi de $\check{\beta}^p(h)$. Rappelons que $d\beta^p(h) = \sum_{g \in M_b^{\rightarrow}} V_p\, h(X_g)\, \epsilon_g(dt)$. On a décomposé $M_b^{\rightarrow}$ en deux ensembles $M_s^{\rightarrow}$ et $M_a^{\rightarrow}$ respectivement réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt totalement inaccessible et de temps d'arrêt accessible.

Nous ferons désormais l'hypothèse suivante (la même que Getoor et Sharpe).

Hypothèse. $M_a^{\rightarrow}$ est prévisible et donc réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles.

Théorème 32. La projection duale prévisible de $\sum_{g \in M_a^{\rightarrow}} V^p h(X_g)\, \epsilon_g(dt)$ est la mesure $\sum_{g \in M_a^{\rightarrow}} P_o\, V^p h(X_g^-)\, \epsilon_g(dt)$. Il existe une fonctionnelle additive $H$ et un noyau $\Pi$, $\mathcal{B}_e$ mesurable, ne chargeant que $F^c$ tels que la projection duale prévisible de $\sum_{g \in M_s^{\rightarrow}} f(X_g)\, \epsilon_g(dt)$ soit $f(X_s)\, dH_s$ . En conséquence pour toute variable $c$ $\underline{\underline{F}}^o$ mesurable satisfaisant à $c([\delta]) = 0$ la projection duale prévisible de $\sum_{g \in M_b^{\rightarrow}} c \circ \theta_g\, \epsilon_g(dt)$ est la mesure

$$\sum_{g \in M_a^{\rightarrow}} E^{X_g^-}[c]\, \epsilon_g(dt) + \Pi(k(c))\, d H_s \quad \text{où} \quad k(c) = E^x(c)$$

(le dernier terme est la mesure $d H_s \int \Pi\, (X_s, dy)\, E^y(c)$).

Démonstration. La première partie est classique et résulte du théorème IV de [19] : si $T$ est un temps d'arrêt prévisible fini $E(f(X_T)/\underline{\underline{F}}_{T^-}) = P_o f(X_{T^-})$ pour toute $f$ borélienne bornée, $P_o f(X_{T^-})$ est donc la projection prévisible de $f(X_T)$.

La deuxième est une application immédiate de la théorie du système de Lévy développée par Benveniste et Jacod dans [4] au théorème 3.1. qui permet de ne compter que les sauts totalement inaccessible.

Soit $X$ un processus de Ray. Il existe une fonctionnelle additive continue $H$ localement intégrable, adaptée à la famille $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$, et un noyau positif $\Pi$ sur $G - G_b$ tel que $\Pi(x, \{x\}) = 0$, et tel que pour toute fonction $f$ borélienne sur $E \times E$ :

$$E^\cdot \sum_{0 \leqslant s \leqslant t} f(X_{s^-}, X_s)\, 1_{\{X_{s^-} \neq X_s,\ X_{s^-} \in G-G_b\}} = E^\cdot \int_0^t d\,H_s \int_{G_b} \Pi(X_s^-, dy) f(X_s, y).$$

§ 2. Application au conditionnement.

Nous définissons les tribus $\underline{\underline{F}}_{L(\bar{u})}$ et $\underline{\underline{F}}_{\ell(\bar{u})}$ par $\{Z_{L(u)},\ Z \text{ prévisible}\}$ et $\{Z_{\ell(u)},\ Z \text{ prévisible}\}$ respectivement. Nous allons procéder comme au chapitre précédent, nous commençons donc par un lemme de mesurabilité.

Lemme 33. Soit $H$ un processus mesurable positif, alors $P^\mu$ p.s. la projection prévisible du processus $1_{\{X_s^- \in G-G_b\}} \hat{E}^{X_s(\omega)}[H(s, \omega|s|\omega')]$ est

$1_{\{\hat{X}_s \in G-G_b\}} \hat{E}^{X_s^-(\omega)}[H(s\ ;\ \omega;s|\omega')]$, celle du processus

$1_{\{X_s^- \in G-G_b\}} \int \Pi(X_s(\omega), dy))\, E^y[H(s\ ;\omega|\ s|\omega')]$ est

$1_{\{X_s^- \in G-G_b\}} \int \Pi(X_s^-(\omega), dy)\, E^y[H(s, \omega|\ s|\omega')]$ et $1_{\{X_s^- \notin G-G_b\}} E^{X_s^-(\omega)}[H(s\ ;\omega|\ s|\omega')]$

est prévisible.

Démonstration. Soit $T$ un temps d'arrêt prévisible, si $X_{T^-} \in G-G_b$ sur

$\{0 < T < \infty\}$ $X_T = X_{T-}$ ce qui établit immédiatement les 2 premières propriétés.

La propriété de Markov forte appliquée à un temps d'arrêt prévisible montre que le dernier processus est la projection prévisible de $1_{\{X_s \in G-G_b\}} E^{X_s(\omega)}[H(s\,;\,\omega|s|\omega')]$.

Théorème 34. Pour tout processus $Z$ prévisible positif et toute fonction $h$ de $\mathcal{B}(E \times E)$,

(VII.2.1.)
$$E^\mu(Z_{L(u)} h(X_{L(u)}, X_u)\, 1_{\{0<L(u)<u\}}) =$$
$$= E^\mu \int_{]0,u[} Z_s\, \hat{E}^{X_s}[h(X_o, X_{u-s}),\, 1_{u-s\, <\, D}]\, d\, K_s$$
$$+ E^\mu \int_{]0,u[} Z_s\, d\, H_s \int \Pi(X_s, dy) E^y(h(X_o,\, X_{u-s})\, 1_{(u-s\, < D)})$$
$$+ E^\mu \sum_{g\in \vec{M}_a} 1_{(g\, <\, u)}\, Z_g\, P_o\, E_{X_g^-}\, [h(X_o,\, X_{u-g})\, 1_{(u-g\, <\, D)}]\,.$$

(VII.2.2.)
$$E^\mu(Z_{\ell(u)} h(X_{L(u)},\, X_u)\, 1_{\{0\, <\, L(u)\, <\, u\}}) = E^\mu \int_{]0,u[} Z_s\, R(u-s,h) d\, K_s$$
$$+ E^\mu \sum_{g\in \vec{M}_a} Z_g\, P_o\, R(u-g,h)(X_g) + E \int_{]0,u[} Z_s dH_s \int \Pi(X_s^-, dy) R(u-s,h)(y).$$

Démonstration. En adaptant de façon évidente le théorème 27 on vérifie que
$$E^\mu(Z_{L(u)} h(X_{L(u)}, X_u)\, 1_{\{0\, <\, L(u)\, <\, u\}}) = E^\mu \int_{]0,u[} Z_s\, \hat{E}^{X_s}[h(X_o, X_{u-s}) 1_{\{u-s\, < D\}}]\, d\, K_s$$
$$+ E^\mu \sum_{g\in \vec{M}_b} Z_g\, 1_{(g\, <\, u)}\, E^{X_g}[(h(X_o,\, X_{u-g})\, 1_{(u-g)}\, <\, D]\,.$$
Il suffit de décomposer ce terme sur $\vec{M}_a$ et $\vec{M}_s$ et d'appliquer le théorème 32 pour établir la première formule.

La deuxième s'établit de façon analogue à partir de la proposition 30 et du théorème 32.

Notations. Nous rappelons qu'on peut toujours remplacer $dK_s$ par $1_F(X_s) d\, K_s$ ou aussi bien $1_F(X_s^-) d\, K_s$ puisque sur $\vec{M}_\pi$ $X_g = X_g^-$ ; nous désignerons par $\varphi$ et $\eta$ les densités $\mathcal{B}_e$ mesurables suivantes $\varphi = \frac{dK}{d(K+H)}$ $\eta = \frac{dH}{d(K+H)}$ (il s'agit de densités de fonctionnelles additives). Nous poserons alors

$$\tilde{Q}_t(x,h) = \varphi(x)\, \hat{Q}_t(x,h(x,.)) + \eta(x)\int \Pi(x,dy)\, Q_t(y,h(y,.))$$

$$\tilde{R}_t(x,h) = \varphi(x)\, R_t(x,h) + \eta(x)\int \Pi(x,dy)\, R_t(y,h).$$

On peut alors retranscrire des formules VII.2.1. et VII.2.2. de la façon suivante :

(VII.2.3.)

$$\begin{aligned} & E^\mu [Z_{L(u)}\, h(X_{L(u)}, X_u\, 1_{\{0 < L(u) < u\}}] \\ & = E^\mu \int_{]0,u[} Z_s\, \tilde{Q}_{u-s}(X_s^-, h)\, 1_F(X_s^-)\, d(K+H)_s \\ & + E^\mu \int_{]0,u[} Z_s\, \Pi Q_{u-s}(.,h)(X_s^-)\, 1_{F^c}(X_s^-) d\, H_s \\ & + E^\mu \sum_{g \in \vec{M}_a} \varepsilon_g(dt)\, 1_{(X_s^- \in F^c)} [1_{s<u}\, Z_s\, P_o\, Q_{u-s}(h, X_s^-)] \end{aligned}$$

(VII.2.4.)

$$\begin{aligned} & E^\mu [Z_{\ell(u)} h(X_{L(u)}, X_u) 1_{\{0 < L(u) < u\}}] \\ & = E^\mu \int_{]0,u[} Z_s\, \tilde{R}_{u-s}(X_s^-, h)\, 1_F(X_s^-) d(K + H_s) \\ & + E^\mu \int_{]0,u[} Z_s\, \Pi R_{u-s}(.,h)(X_s^-) 1_{F^c}(X_s^-) d\, H_s \\ & + \sum_{g \in \vec{M}_a} \varepsilon_g\, dt\, [1_{(s<u)}\, Z_s\, P_o\, R_{u-s}(h, X_s^-)\, 1_{(X_s^- \in F^c)}]\,. \end{aligned}$$

Pour établir des formules de conditionnement par $F^-_{L(u)}$ et $F^-_{\ell(u)}$ on voudrait procéder comme au théorème 29 en prenant $h = 1$ et en posant $Z' = Z \times (\quad)$ mais pour pouvoir conclure on est amené à faire l'hypothèse suivante :

<u>Hypothèse</u> H : les mesures $1_{F^c}(X_s)\, d\, H_s$ et $\sum_{g \in \vec{M}_a} \varepsilon_g(dt)$ sont portées par deux parties disjointes $U$ et $U^c$ de $\bar{E}$ .

Il est intéressant de savoir que Getoor et Sharpe ont construit un exemple simple de processus ne vérifiant pas l'hypothèse H et tel qu'il n'existe pas de noyau de conditionnement dépendant de $(u-L(u), X_{L(\bar{u})})$ et $(u-\ell(u), X_{\ell(\bar{u})})$ respectivement.

Théorème 35. Sous l'hypothèse H (qui entraîne d'ailleurs que $\vec{M}_a$ est prévisible) il existe des noyaux $\tilde{\tilde{Q}}$ et $\tilde{\tilde{R}}$ (tels que :

$$E^{\mu}[h(X_{L^-(u)},X_u)/\underline{\underline{F}}_{L^-(u)}] = \frac{\tilde{Q}_{u-L(u)}(X_{L^-(u)},h)}{\tilde{Q}_{u-L(u)}(X_{L^-(u)},1)} 1_F(X_{L^-(u)})$$

$$+ \frac{P_o Q_{u-L(u)}(X_{L^-(u)},h)}{P_o Q_{u-L(u)}(X_{L^-(u)},1)} 1_{F^c \cap U^c}(X_{L^-(u)}) + \frac{\pi Q_{u-L(u)}(\cdot,h)(X_{L^-(u)})}{\pi Q_{u-L^-(u)}(\cdot,1)(X_{L^-(u)})} 1_{F^c \cap U}(X_{L^-(u)})$$

$$= \tilde{\tilde{Q}}(u, L(u), X_{L^-(u)}, h)$$

$$E^{\mu}[h(X_{L(u)}, X_u)/\underline{\underline{F}}_{\ell^-(u)}] = \frac{\tilde{R}_{u-\ell(u)}(X^-_{\ell(u)},h)}{\tilde{R}_{u-\ell(u)}(X^-_{\ell(u)},1)} 1_F(X^-_{\ell(u)})$$

$$+ \frac{P_o R_{u-\ell(u)}(X^-_{\ell}(u),h)}{P_o R_{u-\ell(u)}(X^-_{\ell}(u),1)} 1_{F^c \cap U^c}(X^-_{\ell}(u)) + \frac{\pi R_{u-\ell(u)}(\cdot,h)(X^-_{\ell(u)})}{\pi R_{u-\ell(u)}(\cdot,1)(X^-_{\ell(u)})} 1_{F^c \cap U}(X^-_{\ell}(u))$$

$$= \tilde{\tilde{R}}(u-\ell(u), X_{\ell^-(u)},h) .$$

Démonstration. Le caractère prévisible des différents noyaux résulte du lemme 33, le reste de la démonstration est le même que pour les théorèmes 29 ou 31.

Remarque. Si on ne fait pas l'hypothèse H, on peut tout de même calculer les expressions précédentes en remplaçant $1_{U^c}(X_{L(u)})$ par $L(u) \in \vec{M}_a$ et $1_U(X_{L(u)})$ par $L(u) \notin \vec{M}_a$, il ne s'agit alors plus de noyaux de $(u-L(u), X^-_{\ell(u)},h)$ ou $(u-\ell(u), X^-_{\ell(u)}, h)$.

## § 3. Un processus de Markov : $(t-\ell(t), X^-_{\ell(t)})$.

Dans ce paragraphe nous supposerons que M n'a point isolés presque surement.

Théorème 36. Sous l'hypothèse H le processus $[\Omega , \underline{\underline{F}}_{\ell(\bar{t})}, (t-\ell(t), X^-_{\ell(t)})1_{\ell(t)>0)},P^{\mu}]$ est markovien pour toute loi $P^{\mu}$ .

Démonstration. Soit $Z$ un processus prévisible, ou borné, et $f$ une fonction de $\underline{\underline{B}}(R^+) \otimes \underline{\underline{B}}(E)$ ; soit $0 < s < t$

$$E^{\mu}[Z_{\ell(s)}(f(t-\ell(t), X^-_{\ell(t)})] = E^{\mu}[Z_{\ell(s)} 1_{(\ell(t)\leqslant s)} f(t-\ell(t), X^-_{\ell(t)})]$$

$$+ E^{\mu}[Z_{\ell(s)} 1_{(\ell(t)>s)} f(t-\ell(t), X^-_{\ell(t)})].$$

Remarquons que $\ell(t) \leqslant s \iff \ell(t) = \ell(s)$ presque surement car il n'y a pas de point isolé, en effet $\ell(t) = \ell(s) \implies \ell(t) = \ell(s) \leqslant s$ , $\ell(t) < s$ entraîne évidemment $\ell(t) = \ell(s)$ et si $s$ et $t$ son tels que $\ell(s) < \ell(t) = s < t$ le point $s$ est isolé.

On sait aussi que $\ell(t) \leqslant s \iff t \leqslant D(s)$ et $\ell(t) > s \iff \ell(t-s)\circ\theta_s > 0$ , on peut alors transformer l'égalité précédente :

$$E^{\mu}[Z_{\ell(s)} f(t-\ell(t), X^-_{\ell(t)}] = E^{\mu}[Z_{\ell(s)} f(t-\ell(s), X^-_{\ell(s)}) P_{X_s}(t-s \leqslant D)]$$

$$+ E^{\mu}[Z_{\ell(s)}, E_{X_s}[f(t-s-\ell(t-s)\ X^-_{\ell(t-s)})\ 1_{\{\ell(t-s)>0\}}].$$

Or, $\vec{M}_a$ étant prévisible, et sous l'hypothèse H, il existe un noyau $\check{R}$ de conditionnement par la tribu $\underline{\underline{F}}^-_{\ell(u)}$ , tel que si $0 < \ell(u) < u$

$E^{\mu}[h(X_u)/\underline{\underline{F}}^-_{\ell(u)}] = \check{R}(u-\ell(u), X^-_{\ell(u)}, h)$; ainsi :

$$E^{\mu}[Z_{\ell(s)} 1_{(\ell(s)>0)}, f(t-\ell(t), X^-_{\ell(t)})] =$$

$$= E^{\mu}[Z_{\ell(s)} f(t-\ell(s), X^-_{\ell(s)}) P_{X_s}[t-s \leqslant D], 1_{\{\ell(s)=s\}}]$$

$$+ E^{\mu}[Z_{\ell(s)} EX_s[f(t-s-\ell(t-s), X^-_{\ell(t-s)})\ 1_{\{\ell(t-s)>0\}}]\ 1_{\{\ell(s)=s\}}]$$

$$+ E^{\mu}[Z_{\ell(s)} 1_{\{0<\ell(s)<s\}} f(t-\ell(s), X^-_{\ell(s)}) \check{R}(s-\ell(s), X^-_{\ell(s)}, E_{\cdot}(t-s \leqslant D))]$$

$$+ E^{\mu}[Z_{\ell(s)} 1_{\{0<\ell(s)<s\}} \check{R}(s-\ell(s), X^-_{\ell(s)}, E_{\cdot}(f(t-s-\ell(t-s), X_{\ell(t-s)})\ 1_{\{\ell(t-s)>0\}}\ .$$

Or pour tout processus droit $E^{\mu}[h(X_s)/\underline{\underline{F}}^-_s] = P_o\, h(X^-_s)$, toutes les expressions faisant intervenir $\ell(s)$ sont évidemment $\underline{\underline{F}}_s^-$ mesurable, posons donc

$$\check{R}(t,f)(x,r) = \{f(t,x)P_o(E_\cdot(t \leqslant D))(x) + P_o(E_\cdot[f(t-\ell(t),\ X^-_{\ell(t)})1_{\{\ell(t)>0\}}])\}\ 1_{\{r=0\}}$$

$$+\{f(t-r,\ x)\ \check{\check{R}}(r,x,\ E_\cdot(t\leqslant D)] + \check{\check{R}}[r,x,E_\cdot(f(t-\ell(t),X^-_{\ell(t)})1_{\{\ell(t)>0\}}]\}\ 1_{\{r>0\}}$$

alors

$$E^\mu[1_{\{\ell(s)>0\}}\ Z_{\ell(s)}f(t-\ell(t),\ X^-_{\ell(t)})] = E^\mu[1_{\{\ell(s)>0\}}\ Z_{\ell(s)}\ \check{R}(t-s,f)(X^-_{\ell(s)},s-\ell(s))]$$

ce qui établit le théorème et donne le semi-groupe du processus.

Remarque. B. Maisonneuve a démontré un théorème analogue [14], en utilisant le théorème de Pittenger et Shoh, mais en supposant que $L(t) = \ell(t)$ p.s. ce qui est évidemment très restrictif et réduit pratiquement ce théorème au théorème 29.

## § 4. Remarque sur le Post-L processus.

Notons $L = L_\infty = \sup[t,\ (t,\omega) \in M]$ ; l'hypothèse $M \subset ]0\ \zeta[$ implique que $L \leqslant \zeta$ est équivalent à $L < \infty$ ; dans l'article [18] il est démontré que dans ces conditions le processus $(\Omega,\ X_{L+t}\ (t>0),\ \underline{\underline{F}}_{L+t},\ P^\mu)$ est markovien ; $\underline{\underline{F}}_{L+t}$ désigne la tribu $\{Z_{L+t},\ Z$ bien mesurable$\}$.

Soit $\varphi(x) = P_x\ (D=\infty)$, $\varphi$ est une fonction invariante pour le semi-groupe $Q_t$ ; soit $R_t^\varphi$ le semi-groupe correspondant : $R_t^\varphi = \dfrac{E_x[f(X_t)1_{(t<D)}P_{X_t}\ (D=\infty)]}{\varphi(x)}$ si $\varphi(x) > 0$

$= 0$ sinon .

Il est démontré dans l'article cité que $R_t^\varphi$ est le semi-groupe du post-L-processus sur l'ensemble $\{L < \infty\}$ .

Nous allons retrouver ces résultats de façon très élémentaire et démontrer en plus une propriété de Markov jusqu'à l'origine.

Etablissons d'abord le théorème cité : soient $0 < s < t$

$E^{\mu}[1_{\{L<\infty\}}Z_{L+s}\,h(X_{L+t})] = E^{\mu}\sum_{g\in \vec{M}} Z_{g+s}\,1_{\{D(g)=\infty\}}h(X_{g+t})$, comme $g+s < D(g)$ on peut énumérer les instants $g+s$ intervenant sous le signe $\sum$ par une suite de temps d'arrêt et appliquer la propriété de Markov forte en remarquant en plus que sur $\{g+s < D(g)\}$ $\{D(g) = \infty\}$ $\Longleftrightarrow$ $\{D\circ\theta_{g+s} = \infty\}$, on vérifie alors que l'expression précédente est égale à

$$E^{\mu}\sum_{g\in \vec{M}} Z_{g+s}\;h(X_{g+t})\;1_{\{g+t<D(g)\}}\;1_{\{D\circ\theta_{g+t}=\infty\}}$$

$$= E^{\mu}\sum_{g\in \vec{M}} Z_{g+s}\;1_{\{g+s<D(g)\}}\;E_{X_{g+s}}[h(X_{t-s})\;1_{\{t-s<D\}}\;1_{\{D\circ\theta_{t-s}=\infty\}}]$$

$$= E^{\mu}\sum_{g\in \vec{M}} Z_{g+s}\;1_{\{g+s<D(g)\}}\;R^{\varphi}_{t-s}\;h(X_{g+s})\;P_{X_{g+s}}\;(D=\infty)$$

$$= E^{\mu}\sum_{g\in \vec{M}} Z_{g+s}\;1_{\{g+s<D(g)\}}\;R^{\varphi}_{t-s}\;h(X_{g+s})\;1_{\{D(g+s)=\infty\}}$$

$$= E^{\mu}[Z_{L+s}\;1_{\{L<\infty\}}R^{\varphi}_{t-s}\;h(X_{L+s})\;].$$

Pour établir le théorème de Walsh il reste à vérifier que $R^{\varphi}_{t-s}\,h(X_{L+s})$ est $\underline{\underline{F}}_{L+s}$ mesurable, c'est-à-dire que $R^{\varphi}_{t-s}\,h(X_s)$ est bien mesurable, or cette expression est égale à $E_Q^{X_s/\varphi}\,h(X_{t-s}(\omega'))= E_Q^{X_s/\varphi}h(X_t(\omega|s|\omega'))$ qui est la version continue à droite de $E_Q^{\kappa/v}(h/\underline{\underline{F}}_s)$, et est donc bien mesurable.

Nous montrons maintenant la propriété de Markov jusqu'à l'origine.

<u>Théorème 37</u>. Le processus $(\Omega\;,\;X_{L+t}\;\;t\geq 0\;,\;\underline{\underline{F}}_{L+t}\;,\;P^{\mu})$ est markovien de semi-groupe $\hat{R}^{\varphi}_t$ : si $t>0$ $\quad \hat{R}^{\varphi}_t f(x) = R^{\varphi}_t f(x)$ pour $x\in F^c$

$$= \frac{\hat{E}^x(f(X_t)\;P_{X_t}(D=\infty)1_{\{t<D\}})}{\hat{P}^x\;(D=\infty)} \qquad \text{si } x\in F$$

si $t=0$ $\quad \hat{R}^{\varphi}_t\;f(x) = f(x)$ .

<u>Démonstration</u>. On peut d'abord vérifier que $\hat{R}^{\varphi}_t h(X_s)$ est bien mesurable,

c'est en effet le résultat du lemme 28 (en remplaçant $v = \varphi$). Il s'agit alors de montrer que $E^\mu[Z_L\, h(X_{L+t})\, 1_{\{0<L<\infty\}}] = E^\mu(Z_L \hat{R}_t^\varphi h(X_L)\, 1_{\{0<L<\infty\}})$ or

$$E^\mu[Z_L\, h(X_{L+t})\, 1_{\{0<L<\infty\}}] = E^\mu \sum_{g \in \vec{M}} Z_g\, h(X_{g+t})\, 1_{\{Dg=\infty\}}$$

$$= E^\mu \int_0^\infty Z_s\, \hat{E}^{X_s}[h(X_t)\, D\circ\theta_t = \infty]\, dK_t + E^\mu \sum_{g\in \vec{M}_b} Z_g\, E_{X_g}[h(X_t)\,\varphi(X_t)]$$

$$= E^\mu \int_0^\infty Z_s \frac{\hat{E}^{X_s}[h(X_t)\varphi(X_t)]}{\hat{E}^{X_s}(D=\infty)}\, \hat{E}^{X_s}(D=\infty)\, dK_t + E^\mu \sum_{g\in\vec{M}_b} (Z_g R_t^\varphi h(X_g)\, 1_{D(g)=\infty})$$

$$= E^\mu(Z_L\, 1_{\{0<L<\infty\}} \hat{R}_t^\varphi h(X_L)).$$

<u>Remarque</u>. Ce dernier résultat pourrait être obtenu de la façon suivante :

la fonction $E_x(c\circ\theta_L\, 1_{\{L\in \vec{M}_\pi\}}\, 1_{\{0<L<\infty\}})$ est un potentiel régulier (puisqu'il ne passe aucun graphe de temps d'arrêt dans $\vec{M}_\pi$) majoré au sens fort, si $c$ est bornée, par $E_x(1_{\{L\in\vec{M}_\pi\}}\, 1_{\{0<L<\infty\}})$. Par ailleurs $E^\mu(Z_L\, c\circ\theta_L\, 1_{\{L\in\vec{M}_b\}} 1_{\{0<L<\infty\}})$ est égal à $E^\mu[Z_L\, 1_{\{L\in\vec{M}_b\}} 1_{\{0<L<\infty\}}\, E^{X_L/\varphi}(c)]$ ; on pourrait mener l'étude de la compactification directement dans ce cas et appliquer les résultats de "théorie relative".

## CHAPITRE (VIII).- LA THEORIE PSEUDO-RELATIVE.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de montrer en introduisant un nouveau processus de Markov, comment on peut retrouver assez aisément une partie des résultats précédents, relatifs en particulier aux densités $\hat{V}^p$ et aux formules de conditionnement. Les méthodes utilisées sont des généralisations du chapitre "théorie relative d'Azema" ([1], § 5.).

L'idée générale est la suivante. Pour étudier le conditionnement par rapport au processus $L(t)$ ($t$ fixé), on pourrait appliquer les résultats sur les derniers temps de sortie pour le processus tué à $t$, si ce processus était markovien. Il est évident qu'il n'en est rien. Nous allons construire un processus de Markov sur l'espace $\Omega \times R^+$, dont l'une des composantes correspondra à ce processus tué.

Définitions 38. Sur $\Omega^* = \Omega \times \overline{R}^+$ définissons le processus

$$X^*_t(\omega, r) = (r-t, X_t(\omega)) \quad \text{si } t < r$$

$$= \{\delta\} \quad \text{sinon}$$

$$\zeta^*(\omega, r) = \zeta(\omega) \wedge r .$$

Nous noterons $\underline{\underline{F}}_t^*$ les tribus $\mathcal{B}(R) \otimes \underline{\underline{F}}_t$ complètées à l'aide de tous les ensembles $P^{*\mu}$ négligeables de $\underline{\underline{F}} \otimes \mathcal{B}(R)$ où $P^{*\mu} = \int \mu(dr, dx)\ \epsilon_r \otimes P_x$, et

$\underline{\underline{G}}_t^* = \{A \in \mathcal{B}(R) \otimes F : \exists A_t \in \underline{\underline{F}}_t^* \quad A \cap \{t < \zeta^*\} = A_t \cap \{t < \zeta^*\}\}$.

Les opérateurs de translation sont définis par $\theta_t^*(\omega, r) = ((r-t)^+, \theta_t \omega)$.

Le lemme suivant a été démontré par Azéma dans le paragraphe cité plus haut de [1]:

Lemme 39. Si $T^*(\omega,r)$ est un temps d'arrêt des tribus $\underline{\underline{G}}_t^*$, il existe une famille

$T(r)(\omega)$ de temps d'arrêt des tribus $\underline{\underline{F}}_t$ tels que $T(\omega,r) = Tr(\omega)$ si $T(\omega,r) < \zeta(\omega)\wedge r$ . Si $X^*$ est un processus bien-mesurable des tribus $G_t^*$ , il existe une famille $X^{(r)}$ de processus bien-mesurables des tribus $\underline{\underline{F}}_t$ tels que :

$$X(\omega,r) = X^{(r)}(\omega) \quad \text{sur } [0, \ \zeta(\omega)\wedge r[ .$$

Théorème 40. Le processus $(\Omega^*, X_t^*, G_t^*, P^{*\mu}, \theta_t^*)$ est un processus fortement markovien de semi-groupe $E_x[f(r-t, X_t)\, 1_{\{t<r\}}] = P_t^* f(x,r)$.

Démonstration . On remarque, comme au théorème 22, que si $A \in G_{T^*}^*$, $T_A^*$ est un temps d'arrêt de ces tribus : il suffit donc de vérifier que pour tout temps d'arrêt $T^*$ des tribus $G_t^*$,

$$E^*_{(x,r)}[f(X^*_{T^*+t})\, 1_{\{T^*<\zeta^*\}}] = E^*_{(x,r)}[1_{\{T^*<\zeta^*\}} E^*_{X^*_{T^*}}(f(X_t))].$$

Par définition $E^*_{(x,r)}[f(X^*_{T^*+t})\, 1_{\{T^*<\zeta^*\}}] = E_x[f(r-T^*(r)-t)^+, X_{T^*(r)+t})\, 1_{\{T^*(r)+t<\zeta\wedge r\}}]$.

D'après le lemme 1 ceci vaut encore :

$$E_x[f(r-T_r-t)^+, X_{T_r+t}\ 1_{\{T_r+t<\zeta\wedge r\}}] \text{ où } T_r \text{ est un } F_t \text{ temps d'arrêt}$$

$$= E_x[1_{\{Tr<\zeta\wedge r\}} E_{X_{T_r}}[f((r-T_r-t)^+, X_t)\, 1_{\{t<\zeta\wedge r-T_r\}}]]$$

$$= E^*_{x,r}[1_{\{T^*<\zeta^*\}}\ E^*_{X^*_{T^*}}[f(X_t^*)\quad t<\zeta^*]] \text{ , d'où le résultat.}$$

Remarque : les potentiels des fonctions du type $e^{-\mu t}f(x)$ $\mu > 0$ , f borélienne, sont presque boréliennes dans $E^* = E \times \overline{R}^+$ si le processus initial satisfait aux hypothèses droites, en effet

$$E^*_{(x,r)}\int_e^{\infty} e^{-ps}\, e^{-\mu v} f(X_s^*(\omega,v))ds = E_x\int_0^r e^{-\mu(r-s)}\, f(X_s)\, e^{-ps}\, ds .$$

Le processus $X^*$ satisfait donc aux hypothèses droites.

Notons $L(\omega,r) = L_r(\omega)$ (où $L(r)$ est la variable définie plus haut pour le processus $X$ : $L_r(\omega) = \sup\{ s \leqslant r , (\omega,s) \in M\}$ , $L^*$ est le dernier temps de passage de $X^*$

dans M (rappelons que $M \subset ]0\ \zeta[$).

La fonction $E^*_{(x,r)}(0 < L^* < \zeta^* 1_F(X^*_L))$ est donc un potentiel régulier pour le processus $X^*$, il existe alors une fonctionnelle additive $A^*_t$ continue parfaite, telle que, (en particulier) pour tout Z bien-mesurable par rapport aux tribus $\underline{\underline{F}}_t$,

$$E^{*\mu}(Z_{L^*}\ 0 < L^* < \zeta^*\ 1_F(X^*_L)) = E^{*\mu}\int_0^\infty Z_s\, d A^*_s .$$

Puisque $A^*_t$ est additive pour le processus $X^*$, on a

$$A^*_{t+s}(\omega,r) = A^*_t(\omega,r) + A^*_s[\theta_t\omega, (r-t)^+] .$$

Définissons $B_t = \int_0^{+\infty} e^{-r}\, dr\, A^*_t(\omega,r)$ . $B_t$ est une fonctionnelle 1-additive du processus initial, continue en effet :

$$B_{t+s} = \int_0^{+\infty} e^{-r} A^*_t(r,\omega)\, dr + \int_0^{+\infty} e^{-r} A^*_s(\theta_t\omega, (r-t)^+)dr$$

$$= B_t + \int_t^{+\infty} e^{-r} A^*_s(\theta_t\omega, r-t)dr$$

$$= B_t + e^{-t} B_s \circ \theta_t(\omega)$$ d'où le résultat.

<u>Lemme 41</u>. La fonctionnelle additive $e^{-t} A^*_t(\omega,r)$ est absolument continue par rapport à la fonctionnelle $B^*_t(\omega,r) = B_{t\wedge r}(\omega)$ .

<u>Démonstration</u>. Il s'agit de vérifier que $E^*_{x,r}\int_0^{+\infty} f(X^*_s)dB^*_s = 0$ entraîne $E^*_{x,r}\int_0^{+\infty} e^{-s}f(X^*_s)dA^*_s = 0$ . Calculons

$$E^*_{x,r}\int_0^{+\infty} f(X^*_s)dB^*_s = E_x\int_0^r f(r-s, X_s)dA_s(\omega,\lambda)\int_0^{+\infty} e^{-\lambda}d\lambda$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda}d\lambda\, E_x[\, f(r-L(\lambda), X_{L(\lambda)})\ 1_{\{0 < L(\lambda) < \lambda\}}\, 1_{\{L(\lambda) < r\}}\,] ;$$

$E^*_{x,r}\int_0^{+\infty} f(X^*_s)dB^*_s$ est donc supérieur ou égal à

$E_x[1_{\{0 < L(r) < r\}} f(r-L(r), X_{L(r)})(e^{-L(r)} - e^{-D(r)})]$ qui revient à ne compter que l'incursion (L(r), D(r)) avec en plus $L(r) < r$ . Supposons f positive :

$E^*_{x,r}\int_0^{+\infty} f(X^*_s)dB^*_s = 0$ entraîne que

$$E_x(1_{\{0 < L(r) < r\}} f(r-L(r), X_{L(r)})(e^{-L(r)} - e^{-D(r)})] = 0 \ ,$$

or $1 - e^{-(D(r)-L(r))} \neq 0$ si $0 < L(r) < r$ , donc

$$E_x[1_{\{0 < L(r) < r\}} f(r-L(r))\, X_{L(r)})\, e^{-L(r)}] = 0 \ .$$

Il ne reste plus qu'à exploiter cette propriété :

Pour toute fonction $h$ presque-borélienne sur $E \times \bar{R}^+$ , il existe une fonction $Q^* h$ presque borélienne, telle que

$$E^{*\mu}[e^{-L^*} Z_{L^*} 1_{\{0 < L^* < \zeta^*\}} 1_F(X^*_{L^*})\, h(X^*_{\zeta^-})] = E^{*\mu}\int_0^{+\infty} Z_s\, Q^* h(X^*_s)\, dB^*_s \ .$$

Théorème 42. $E^\mu(Z_{L(r)}\ 0 < L(r) < r\ 1_F(X_{L(r)})\, h(X_r)] = E^\mu \int_{]0,r[} Z_s Q^* h(X_s, r-s) dB_s$

$$E^\mu \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(s)}\, e^{-L(s)}\, 1_{\{0<L(s)<s\}} 1_F(X_{L(s)}) h(X_s) ds = E\int_0^{\infty} e^{-\lambda(s)}\, V^{*\lambda} h(X_s) dB_s$$

où $V^{*\lambda} h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(r)}\, Q^* h(x,r) dr.$

Remarque. Par construction $e^s V^{*1} 1(X_s) = 1$ B p.s. et le théorème est un théorème d'intégration sur $\vec{M}_\pi$ analogue à la proposition 12.

On applique la formule à $\mu^* = \varepsilon_r \otimes \mu$ , en remarquant qu'il ne peut y avoir de sauts à l'instant $\zeta \wedge r$ , temps d'arrêt accessible

$$E^{*(\varepsilon_r \otimes \mu)}(e^{-L^*} Z_{L^*}\ 0 < L^* < \zeta^*\ 1_F(X^*_{L^*})\, h(X^*_{\zeta^-})]$$

$= E^\mu[e^{-L(r)} Z_{L(r)}\ 0 < L(r) < r\ 1_F(X_{L(r)})\, h(X_r)]$ qui est égal d'après la relation à $E^\mu(\int_{]0,r[} Q^* h(X_s, r-s)\, dB_s$ .

La seconde relation se déduit immédiatement de cette dernière, en intégrant par rapport en $r$ par la mesure $e^{-\lambda(r)} dr$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(r)} dr\, E^\mu \int_{]0,r[} Q^* h(X_s, r-s) dB_s = E^\mu \int_0^{+\infty} dB_s \int_s^{+\infty} e^{-\lambda(r)} Q^* h(X_s, r-s) dr$$

$$= E^\mu \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(s)}\, dB_s\, V^{*\lambda(r)} h(X_s)$$

où $V^{*\lambda}h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(r)}\, Q^{*}h(x,r)dr$ .

On pourrait de la même façon retrouver des formules de conditionnement.

# CHAPITRE (IX).- BALAYAGE SUR UN PARFAIT ALEATOIRE. APPLICATION A L'ETUDE DU GENERATEUR.

Dans ce chapitre nous supposons que $M$ est un ensemble parfait. Au premier paragraphe nous reprenons dans ce cas particulier des résultats des chapitres précédents pour obtenir une décomposition de la résolvante et une décomposition du semi-groupe du processus droit que l'on balaye. Dans le paragraphe deux on étend la notion de générateur et on met ainsi en évidence deux opérateurs analogues au générateur à l'intérieur et à la condition frontière qu'on rencontre dans l'étude des diffusions sur une variété à bord. Au paragraphe trois on étudie ces opérateurs et au paragraphe quatre on donne une application à $\mathbb{R}^n$.

## § 1. Décomposition de la résolvante et du semi-groupe.

Puisque $M$ est parfait $M = \bar{\rho}_F$ d'après la proposition 2, $D$ est donc aussi le temps d'entrée dans $\rho_F$ ou $\rho_{\bar{F}}$ c'est-à-dire le temps d'entrée dans $F$. Rappelons que $F$ est un fermé fin presque borélien et régulier.

La décomposition de $M^{\rightarrow}$ est alors plus simple, tout élément $g$ de $M^{\rightarrow}$ est point d'accumulation à gauche de points de $M$ et $X_{g^-} \in F$ donc $M_a^{\rightarrow}$ et $M_{si}^{\rightarrow}$ sont vides : $M^{\rightarrow} = M_{\pi}^{\rightarrow} + M_{sr}^{\rightarrow}$ $\quad M_b^{\rightarrow} = M_{sr}^{\rightarrow} = \{ g \in M^{\rightarrow} \; X_{g^-} \in F \,,\, X_g \in F^c \}$

$$M_{\pi}^{\rightarrow} = \{ g \in M^{\rightarrow} \; X_g = X_{g^-} \in F \}.$$

Nous allons reprendre les résultats concernant les projections prévisibles. Soit $\hat{K}$ la 1-balayée prévisible de la fonction 1, puisque $M_a^{\rightarrow}$ est vide $\hat{K}$ est continue et $K = \Gamma_t^1(1)$ est absolument continue par rapport à $\hat{K}$. Nous noterons $\gamma$ une densité $\mathcal{B}_e$ mesurable de K par rapport à $\hat{K}$ . La projection duale prévisible (ou bien mesurable) de la mesure $\sum_{g \in M_\pi^{\rightarrow}} c \circ \theta_g \; \varepsilon_g(dt)$ est la mesure $\gamma(X_s) \; \hat{E}^{X_s}(c) d\hat{K}_s$ .

Si (N, H) désigne le système de Lévy du processus droit X , la projection duale prévisible de $\sum_{g \in M_b^{\rightarrow}} v(X_g) \; \varepsilon_g(dt)$ est égale à $N(1_{F^c} v)(X_s) dH_s$ ; comme $\sum_{g \in M_b^{\rightarrow}} v(X_g) \; \varepsilon_g(dt) = d\beta_t^1(1)$ est absolument continue par rapport à $\hat{K}$ il est clair que $N(1_{F^c} v)(X_s) dH_s << \hat{K}$ . Nous noterons n une densité $\mathcal{B}_e$ mesurable de cette derniere fonctionnelle par rapport à $\hat{K}$ et nous poserons

$$S(x,h) = \begin{cases} n(x) \dfrac{N(x, 1_{F^c} h \, v)}{N(x, 1_{F^c} v)} & \text{si } N(x, 1_{F^c} v) \neq 0 \\ \varepsilon_{\{\delta\}} & \text{sinon} \end{cases}$$

nous poserons aussi $\hat{E}_S^x(c) = S(x, \frac{E_\cdot(c)}{v})$ ; avec ces notations la projection duale prévisible de la mesure $\sum_{g \in M_b^{\rightarrow}} c \circ \theta_g \; \varepsilon_g(dt)$ est la mesure $\hat{E}_S^{X_s}(c) d\hat{K}_s$ d'après le théorème 32.

Soit $\delta(.)$ la densité de $\int_0^t 1_F(X_s) ds$ par rapport à $\hat{K}_t$ , soit par ailleurs $\hat{\hat{E}}^x$ la mesure définie pour tout x de F par $\hat{\hat{E}}^x(c) = \gamma(x) \; \hat{E}^x(c) + \hat{E}_S^x(c)$ la projection prévisible de $\sum_{g \in M^{\rightarrow}} c \circ \theta_g \; \varepsilon_g(dt)$ est donc $\hat{\hat{E}}^{X_s}(c) d\hat{K}_s$ ; on notera $\hat{\hat{P}}_t f(x) = \hat{\hat{E}}_x^x [ f(X_t) ]$ le semi-groupe correspondant, $\hat{\hat{V}}^\lambda$ la résolvante et $\hat{\hat{Q}}_t f(x) = \hat{\hat{E}}^x [ f(X_t) \, 1_{\{ t < D \}} ]$ le semi-groupe subordonné, nous utiliserons très souvent le fait que $\hat{\hat{V}}^\lambda$ ne dépend que de $V^\lambda$ c'est-à-dire que $V^\lambda f = V^\lambda g$ entraîne que $\hat{\hat{V}}^\lambda f = \hat{\hat{V}}^\lambda g$ .

Les deux formules suivantes expriment avec ces notations des résultats déjà établis sur le balayage :

Décomposition des résolvantes.

Il existe un noyau sous markovien sur le compactifié de Ray-Knight du v-processus, soit $\pi(x, dy)$ $x \in F$, et des fonctions p-excessives du compactifié soit $\overline{\frac{V^{p+1}h}{v}}$, prolongeant $\frac{V^{p+1}h}{v}$ (où h est presque borélienne), telles que, pour toute h presque borélienne bornée, $\forall p > 0$

$$\text{(IX.1.1.)} \qquad U^p h(x) = V^p h(x) + E_x\int_0^\infty e^{-pt}\, d\hat{K}_t[\delta(X_t)h(X_t) + \gamma(X_t)\pi(X_t, \overline{\frac{V^p h}{v}}) + S(X_t, \frac{V^p h}{v})]$$

Décomposition des semi-groupes.

$$\text{(IX.1.2.)} \qquad E_x[h(X_t)] = E_x[h(X_t)\ t < D)] + E_x[h(X_t), X_t \in F] + E_x\int_{]0,t[} \hat{Q}_{t-s}h(X_s)d\hat{K}_s$$

Nous concluons ce paragraphe, en rappelant un résultat de Bernard Maisonneuve qui nous sera très utile dans l'étude qui va suivre :

Proposition 43. Posons $\tilde{P}_t(r,x)(f) = f(r-t, x)$ si $t < r$

$$= E^x[f(D \circ \theta_{t-r}, X_{D(t-r)}] \quad \text{si} \quad t \geq r .$$

Pour toute loi $P^\mu$, le processus $(D \circ \theta_t, X_D \circ \theta_t)$ est fortement markovien par rapport à la famille $\tilde{F}_t = F_{D(t)}$ et admet $\tilde{P}_t$ comme semi-groupe de transition.

Ceci est vrai dans un cadre très général.

Dans le cadre précisé ici, le processus $X_{D(t)}$ lui-même est fortement markovien. Nous l'appelerons processus sur le bord.

Remarque. Sous l'hypothèse que M est sans point isolé, le processus D(t) (continu à droite) est quasi-continu à gauche c.à.d. que pour tout temps d'arrêt prévisible T , $D(T)^- = D(T)$.

En effet, les sauts du processus D(t) sont les éléments de $M^{\rightarrow}(\omega)$, et dans

$\vec{M}$ ne passe aucun graphe de temps d'arrêt prévisible, puisque $\vec{M} = \vec{M}_\pi \cup \vec{M}_{s,r}$ et que dans $\vec{M}_\pi$ il ne passe aucun graphe de temps d'arrêt et dans $\vec{M}_{s,r}$ que des graphes de temps d'arrêt totalement inaccessibles, dès lors si $X_t$ est quasi-continu à gauche $X_{D(t)}$ l'est aussi.

## § 2. Extension de la notion de générateur.

Nous nous intéressons maintenant au générateur de $X$ ; dans le cas où $F$ est la frontière topologique du domaine dans lequel le processus prend ses valeurs, nous aurons des résultats analogues à ceux qu'on rencontre en théorie des frontières. Nous donnons auparavant une définition valable pour n'importe quel processus droit, supposé sans point de branchement.

Définition 44. Soient $(W, Y_t, \underline{\underline{G}}_t, \pi^x)$ un processus droit de résolvante $K^\lambda$ et de semi-groupe $\pi_t$, et $A$ une fonctionnelle additive continue satisfaisant à $E^x(A_t) < \infty$ pour tout $t$ et tout $x$. Nous dirons qu'une fonction $f$ universellement mesurable bornée appartient au domaine étendu de la fonctionnelle $A$ pour $X$, que nous noterons $D_e(A)$, s'il existe une fonction universellement mesurable bornée $g$, telle que

(IX.2.1) $\quad f(Y_t) - f(Y_o) - \int_0^t g(Y_s)dA_s$ soit une $\pi_x$ martingale pour tout $x$ pour les tribus $\underline{\underline{G}}_t$.

Nous noterons $Df$ la fonction $g$, nous dirons que $D$ est l'opérateur de dérivation par rapport à $A$.

Lemme 45. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\quad f \in D_e(A)$ et $g = Df$

(2) $\quad \pi_t f(x) = f(x) + E_x \int_0^t g(Y_s)dA_s$

(3) $\quad \lambda K^\lambda f(x) = f(x) + E_x \int_0^\infty e^{-\lambda s} g(Y_s)dA_s$

Démonstration. Seul 3) $\rightarrow$ 1) demande des explications : on suppose d'abord que $f = K^{\lambda}\varphi$ et l'implication résulte de la propriété de Markov et de l'unicité des transformées de Laplace. On conclut comme d'habitude.

Nous allons maintenant rappeler une définition due à Mokobodski [21].

Définition 46. Soit $(X,\mathfrak{B})$ un espace mesurable et $(V^{\lambda})_{\lambda>0}$ une famille résolvante sous-markovienne de noyaux positifs sur $(X,\mathfrak{B})$. On suppose que $V = \sup_{\lambda} V^{\lambda}$ est un noyau borné. Soit $C$ le cône des fonctions surmédianes par rapport à cette résolvante, un opérateur $D$ de $C$ dans $X^{\overline{R}}$ est presque positif si

(P.P.) $\quad v_1, v_2 \in C\,,\ v_1 \geq v_2 \quad v_1(x) = v_2(x) \implies Dv_1(x) \leq Dv_2(x)$ .

Il est appelé un " bon opérateur presque positif" si :

a) $D(w_1+w_2) \geq D(w_2) \geq 0 \qquad \forall w_1 + w_2 \in C$

b) $D(w) \geq 0 \quad \forall w \in C$ et $D(w+\varepsilon V 1) \leq D(w) + \varepsilon D V 1$

c) pour toute fonction $\varphi \geq 0$ de la forme $\varphi = g_1 - g_2$ où $g_1$ et $g_2$ sont des fonctions excessives bornées, $\quad DV\varphi = \varphi$ .

Le premier exemple est $\limsup_{\lambda \to \infty} \lambda(I - \lambda V^{\lambda})$ (ou $\liminf_{\lambda\to\infty}$).

On trouvera en annexe les propriétés dont nous nous servirons.

Proposition 47. a) La fonction $Df$ est unique $A$ p.s.

b) Supposons que la fonctionnelle $T : T_t = t \wedge \zeta$ soit absolument continue par rapport à $A$, soit ${}_{\alpha}\tilde{K}^{\lambda} g(x) = E_x \int_0^{\infty} e^{-\alpha t - \lambda A_t} g(X_t)\,dA_t$ une résolvante, et $D_A^{\alpha} f$ un bon-opérateur presque positif pour cette résolvante, soit $\rho$ la densité de $T$ par rapport à $A$ :

$$Df = \alpha\rho f - D_A^{\alpha} f \qquad A \text{ p.s.}$$

Remarque. Il est facile d'établir que ${}_\alpha\hat{K}^\lambda$ est la résolvante du processus déduit du processus tué de X par $e^{-\beta t}$, par le changement de temps associé à A (une démonstration figure dans [a]).

Démonstration. a) Supposons qu'il existe deux fonctions g et g' satisfaisant (IX.2.1.), les processus croissants $\int_0^t g(Y_s)dA_s$ et $\int_0^t g'(Y_s)dA_s$ ne diffèrent alors que par une martingale, ils sont donc $\pi_x$ p.s. égaux.

b) Soit $U_A^\alpha\varphi$ le $\alpha$ potentiel de $\varphi$ par rapport à A, la formule 3 s'écrit alors $f = U_A^\alpha(\alpha\,\rho\, f - g)$ comme $U_A^\alpha = {}_\alpha K^0$

$U_A^\alpha[D_A^\alpha(U_A^\alpha(\alpha\,\rho\, f - g))] = U_A^\alpha(\alpha\,\rho f - g) = f = U_A^\alpha(D_A^\alpha f)$,

l'équation résolvante $U_A^\lambda - U_A^\mu = (\mu - \lambda)\, K^\mu U_A^\lambda = (\mu - \lambda)\, K^\lambda\, U_A^\mu$ entraîne alors que $\lambda\, K^\lambda f = f + U_A^\lambda(\alpha\,\rho\, f - D_A^\alpha f)$ d'où le résultat.

Nous revenons maintenant au cadre précisé au début du chapitre et nous donnons une deuxième définition.

Définition 48. Nous dirons qu'une fonction f universellement mesurable bornée, appartient au domaine généralisé du processus X, que nous noterons $D_g(X)$, s'il existe deux fonctions universellement mesurables bornées, que nous noterons Lf et $\Pi f$ telles que :

(IX.2.2.) Pour tout x, $f(X_t) - f(X_o) - \int_0^t 1_{F^c}(X_s)Lf(X_s)ds - \int_0^t \Pi f(X_s)d\hat{K}_s$

est une $P_x$ martingale pour les tribus $\underline{\underline{F}}_t$.

Remarque. Cela revient à dire que f appartient au domaine étendu de la fonctionnelle $1_{F^c}.T + \hat{K}$, alors $Lf = 1_{F^c}\,Df$ et $\Pi f = 1_F\, Df$.

Notations. Nous noterons $\overset{o}{X}$ le processus stoppé à l'instant D, $\overset{o}{D}_e(T)$ le domaine étendu de T pour $\overset{o}{X}$ et $\overset{o}{D}$ l'opérateur de dérivation correspondant. Nous désignerons pour $\tilde{X}$ le processus sur le bord, c'est-à-dire le processus $X_{D(t)}$, $\hat{D}_e(\hat{K})$ et $\check{D}$ désigneront le domaine étendu de $\hat{K}$ et d'opérateur de dérivation correspondant pour $\hat{\tilde{X}}$ .

Théorème 49. Il y a équivalence entre

a) $f \in D_g(X)$

b) $f \in \overset{o}{D}_e(T)$ et $f/F \in \tilde{D}_e(\hat{K})$ .

Si a) (ou b)) est réalisé $1_{F^c} Lf = \overset{o}{D}f$ T p.s.

$$\Gamma f = \check{D}f + \widehat{\widehat{f - Hf}} \qquad \hat{K} \text{ p.s.}$$

où $\widehat{\widehat{f - Hf}}$ désigne la limite de $\hat{Q}_u(f - Hf)$.

Démonstration. a) Nous allons d'abord montrer que $f \in D_g(X) \Rightarrow f \in \overset{o}{D}_e(T)$ et $1_{F^c}Lf = \overset{o}{D}f$ T p.s..

D'après le théorème de Doob et la relation (IX.2.2.)

(IX.2.3.) $f(X_{t\wedge D}) - f(X_o) - \int_0^{t\wedge D} 1_{F^c}(X_s)Lf(X_s)ds$ est une $P_x$-martingale des tribus $\underline{\underline{F}}_{t\wedge D}$ car $\hat{K}$ ne croît qu'après D , or

$\int_0^{t\wedge D} 1_{F^c}(X_s)Lf(X_s)ds = \int_0^t 1_{F^c}(X_{s\wedge D})Lf(X_{s\wedge D})ds$ donc $f \in \overset{o}{D}_e(T)$ et $1_{F^c}Lf = \overset{o}{D}f$ T' p.s. où $T'_t = t\wedge \zeta \wedge D$ par définition, on veut démontrer que $1_{F^c}Lf = \overset{o}{D}f$ T p.s., comme $1_{F^c}Lf = 0$ sur $F^c$ ceci revient à vérifier que $\overset{o}{D}f = 0$ sur F [alors $\int_0^t 1_{F^c}(X_s)Lf(X_s) = \int_0^t \overset{o}{D}f(X_s)ds$] .

Rappelons que $\overset{o}{X}$ , stoppé de X à D , est à valeur dans $F \cup F^c$ .

Soit $H^\lambda f(x) = E_x(e^{-\lambda D}f(X_D))$, la résolvante du processus $\overset{o}{X}$ est $\overset{o}{V}{}^\lambda = V^\lambda + \frac{H^\lambda}{\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$ ; si $\lambda = 0$ on désignera $H^o$ par H .

L'opérateur $\overset{o}{D}{}^{\alpha}_{T} f = \lim_{\lambda} \sup [\lambda - \lambda(\overset{o}{V}{}^{\lambda+\alpha} f + \frac{H^{\lambda+\alpha} f}{\lambda+\alpha})]$ est un bon opérateur presque positif pour la résolvante $\{\overset{o}{V}{}^{\lambda+\alpha}\}_{\lambda>0}$ ; donc, d'après la proposition 47 $\overset{o}{D}f = \alpha f - \overset{o}{D}{}^{\alpha}_{T} f$ ; or si $x \in F$ $U^{\lambda+\alpha}f(x) = 0$ et $H^{\lambda+\alpha}f(x) = f(x)$, ainsi $\overset{o}{D}{}^{\alpha}_{T} f(x) = \alpha f$ par suite $\overset{o}{D} f = 0$ sur $F$ .

b) Vérifions que $f \in \overset{o}{D}_e(T) \Longrightarrow f - Hf \in D_g(X)$ ; il est immédiat de démontrer que $Hf(\overset{o}{X}_t)$ est une $\underline{\mathcal{F}}_{t \wedge D}$ martingale, donc dans le cas présent $f - Hf \in \overset{o}{D}_e(T)$ et $\overset{o}{D}(f-Hf) = \overset{o}{D}f$ (T p.s.) ce qu'on écrira ainsi :

(IX.2.4.) $$Q_t(f - Hf) = f - Hf + \int_0^t Q_s \overset{o}{D}f \, ds \ .$$

Il résulte alors du lemme 45 (3), qu'il existe une fonction $\varphi$ telle que $f\text{-}Hf = V^{\lambda}\varphi$ .

Considérons

$$\hat{Q}_t(f\text{-}Hf) = \gamma(x)\, \hat{E}^x[(f\text{-}Hf)(X_t)\, 1_{\{t<D\}}] + \hat{E}^x_S[(f\text{-}Hf)(X_t)]$$

Si $t \searrow 0$ , cette expression converge alors vers $\gamma(x)\, \hat{V}^{\lambda}_{\varphi} + S(\frac{V^{\lambda}\varphi}{v})$ que nous noterons $\widehat{\widehat{f - Hf}}$ , cette expression ne dépend de $\varphi$ que par l'intermédiaire de $V^{\lambda}\varphi$ . Montrons que la relation (IX.2.4.) s'étend à $\hat{\hat{Q}}$ sous la forme suivante :

(IX.2.5.) $$E_x\int_0^t \hat{\hat{Q}}_{t-s}(f\text{-}Hf)(X_s)d\hat{K}_s = E_x\int_0^t \widehat{\widehat{f\text{-}Hf}}\,(X_s)d\hat{K}_s + E_x\int_0^t d\hat{K}_s\int_0^{t-s} \hat{\hat{Q}}_u \overset{o}{D}f(X_s)du.$$

En effet $E_x\int_0^t \hat{\hat{Q}}_{t-s}(f\text{-}Hf)X_s)d\hat{K}_s = E_x( \sum_{\substack{g \in M^{\to} \\ g < b}} (f\text{-}Hf)(X_t)\, 1_{\{g < t < Dg\}} ]$ .

$$= \lim_{u \to 0} E_x [ \sum_{\substack{g \in M^{\to} \\ g+u < t}} E_{X_{g+u}}[(f\text{-}Hf)(X_{t-(g+u)})1_{\{0 < t-(g+u) < D\}}]1_{\{g+u < Dg\}} ]$$

on peut transformer cette dernière expression en utilisant la formule (IX.2.4.) appliquée aux temps d'arrêt permettant d'énumérer les $g+u$ soit :

$$E_x\int_0^t \hat{Q}_{t-s}(f-Hf)(X_s)d\hat{K}_s = \lim_{u\to 0} E_x\Big(\sum_{\substack{g\in \vec{M}\\ g+u<t}} (f-Hf)(X_{g+u})\, 1_{\{g+u<D(g)\}}\Big)$$

$$+\lim_{u\to 0} E_x\Big(\sum_{\substack{g\in \vec{M}\\ g+u<t}} E_{X_{g+u}}\int_0^{t-g+u\wedge D_0} \mathring{D}f(X_s)ds\, 1_{\{g+u<D(g)\}}\Big) .$$

Par définition des opérateurs $\hat{\hat{\ }}$, en faisant tendre $u$ vers zéro on obtient (IX.2.5.). Il reste à vérifier que ceci entraîne bien que $f-Hf \in Dg(X)$.

La formule de représentation des semi-groupes (IX.1.2.) permet ici d'écrire que :

$$E_x[(f-Hf)(X_t)] = E_x[(f-Hf)(X_t)1_{\{t<D\}}] + E_x\int_{]0,t[} \hat{\hat{Q}}_{t-s}(f-Hf)(X_s)d\hat{K}_s .$$

$f-Hf$ appartenant à $D_e(T)$, on peut expliciter cette relation en tenant compte des relations (IX.2.4.) et (IX.2.5.). Il vient alors :

$$E_x[(f-Hf)(X_t)] = (f-Hf)(x) + E_x\int_0^{t\wedge D} 1_{F^c}(X_s)\,\mathring{D}f(X_s)ds + E_x\int_{]0,t[} \widehat{\widehat{f-Hf}}(X_s)d\hat{K}_s$$

$$+ E_x\int_{]0,t[} d\hat{K}_s\int_0^{t-s} \hat{\hat{Q}}_u\, \mathring{D}f(X_s)du .$$

Etudions ce que représente u dernier terme, en faisant le changement de variable $v = u+s$

$$E_x\int_{]0,t[} d\hat{K}_s\int_0^{t-s} \hat{\hat{Q}}_u \mathring{D}f(X_s)du = E_x\int_{]0,t[} d\hat{K}_s\int_s^t \hat{\hat{Q}}_{v-s}\, \mathring{D}f(X_s)dv$$

$$= E_x\int_{]0,t[} dv\int_{]0,v[} \hat{\hat{Q}}_{v-s}\, \mathring{D}f(X_s)d\hat{K}_s ,$$

après interversion de l'ordre d'intégration.

Or, par définition $E_x\int_{]0,v[} \hat{\hat{Q}}_{v-s}\, \mathring{D}f(X_s)d\hat{K}_s = E_x[\mathring{D}f(X_v)\, 1_{F^c}(X_v)\, 1_{\{v\geq D\}}]$ .

En intégrant par rapport à $v$ , et en regroupant tous ces calculs, on montre donc que

$$E_x[(f-Hf)(X_t)] = (f-Hf)(x) + E_x\int_0^t 1_{F^c}(X_s)\,\overset{o}{D}f(X_s)ds + E_x\int_{]0,t[} \widehat{\widehat{f-Hf}}(X_s)d\hat{K}_s$$

qui est le résultat cherché.

c) Pour caractériser complètement les fonctions qui appartiennent au domaine généralisé de $X$, il reste à étudier la classe des fonctions $f$ pour lesquelles $Hf$ appartient à $D_g(X)$. Il suffit de remarquer que $\overset{o}{D}Hf = 0$, $Hf \in D_g(X)$ est équivalent à :

$$E_x[Hf(X_t)] = Hf(x) + E_x\int_0^t \Gamma Hf(X_s)d\hat{K}_s .$$

$\hat{K}_s$ a son support contenu dans $F$, c'est donc aussi une fonctionnelle additive du processus $\tilde{X}$. La relation ci-dessus signifie donc que $f/_F$ appartient à $\tilde{D}_e(\hat{K})$ et réciproquement.

Regroupant tous ces résultats, on voit qu'on a montré également que :

$$K \text{ p.s.} \quad \Gamma f = \Gamma Hf + \widehat{\widehat{f-Hf}} \qquad \text{et} \qquad K \text{ p.s.} \quad \Gamma Hf = \tilde{D}(f/_F).$$

§ 3. Etude de l'opérateur $\Gamma f$.

Nous nous proposons de préciser un peu la nature de $\Gamma f$, en montrant qu'on peut l'écrire sous la forme de la somme de deux opérateurs, l'un traduisant l'influence des incursions (dépendant donc de tout le processus) l'autre ne dépendant que de ce qui se passe sur $F$ "indépendamment du comportement du processus à l'intérieur".

La forme explicite de $\Gamma$ que nous donnerons dans le cadre des processus de réflections dans un domaine fermé de $R^n$, fera mieux comprendre ce type de décomposition (cf. paragraphe suivant).

A - Définition de l'opérateur $\Delta$. Propriétés.

Pour toute fonction $G$ de $\mathcal{B}(F) \otimes \mathcal{B}(F)$ positive, la fonction définie sur $F$

par $\hat{\hat{E}}^x[G(X_o,X_D)\,1_{\{u<D\wedge\zeta\}}]$ croît si u décroît vers zéro, la limite étant éventuellement infinie, si cette limite est finie, la surmartingale $\frac{E^{Q}_{X_u}[G(X_o,X_D)]}{v(X_u)}\,1_{\{u<D\wedge\zeta\}}$ (pour la loi $\hat{\hat{E}}^{x/v}$), a alors des limites le long des trajectoires, lorsque u tend vers zéro.

Il parait raisonnable que cela se produira plus fréquemment lorsque $G(x,x) = 0$.

<u>Définition 50</u>. Pour toute fonction $f \in \overset{o}{D}_e(T)$, on définit l'opérateur

$$\Delta f = \widehat{\widehat{f - Hf}} + \lim_{u\to 0} \hat{\hat{E}}^x[(Hf(X_u) - f(X_o))\,1_{\{u<D\}}]$$

(bien noter qu'il s'agit de $X_o$ et non de $X_o^{\rightarrow}$).

<u>Proposition 51</u>. La mesure $\sum_{g\in M^{\rightarrow}}[f(X_{D(g)}) - f(X_g^-)]\,\varepsilon_g(dt)$, qui représente la fonctionnelle des sauts du processus sur le bord dus aux incursions a pour projection prévisible $\Delta Hf.d\hat{K}$.

<u>Démonstration</u>. Les sauts du processus $X_{D(t)}$ dus aux incursions se produisent aux instants de $M^{\rightarrow}$ (y compris le saut en $\delta$), et si $s\nearrow g = D(t)$ $X_{D(s)}$ converge vers $X_g^{\rightarrow}$ : l'expression représente donc bien les sauts en question.

Pour simplifier l'écriture on notera $\Delta^u Hf$ l'opérateur $\hat{\hat{E}}^x[(Hf(X_u)-f(X_o))1_{\{u<D\}}]$ $\Delta^u Hf(X_s)d\hat{K}_s$ est par définition de $\hat{\hat{E}}$ la projection duale prévisible de

$$\sum_{g\in M^{\rightarrow}}[f(X_{D(g)}) - f(X_{g^-})]\,1_{\{g+u<D(g)\}}\,\varepsilon_g(dt),$$

il suffit alors d'appliquer le lemme 7.

B - <u>Etude de l'opérateur</u> $\Gamma f - \Delta f$ .

Dans ce paragraphe on suppose que $\Delta Hf$ existe et est fini p.s.. Alors par définition $\Gamma f - \Delta f = \Gamma Hf - \Delta Hf$ .

On se propose de montrer que l'opérateur $\Gamma f - \Delta f$ satisfait "presque" au principe du maximum sur le bord.

Lemme 52. Supposons que $f/F$ soit maximum en un point $x$. Alors pour tout temps d'arrêt $\tau$,

$$E_x[f(X_{D(\tau\wedge u)}) - \int_{]0,\tau\wedge u]} \Delta^u Hf(X_s)d\hat{K}_s] \leqslant f(x) .$$

Démonstration. D'après la proposition précédente

$$E_x\int_{]0,\tau\wedge u]} \Delta^u Hf(X_s)d\hat{K}_s = E_x(\sum_{g\in \vec{M}} [f(X_{D(g)}) - f(X_g^-)] 1_{\{g+u<D(g)\}} 1_{\{g<\tau\wedge u\}}) .$$

Or entre les instants $0$ et $u$, il n'y a pu avoir qu'au plus une extrémité gauche d'intervalle contigu à $M$ de longueur strictement plus grande que $u$ donc :

$$E_x\int_{]0,\tau\wedge u]} \Delta^u Hf(X_s)d\hat{K}_s = E_x[(f(X_{D(\tau\wedge u)}) - f(X^-_{L(\tau\wedge u)})] 1_{\{0<L(\tau\wedge u)+u<D(\tau\wedge u)\}}]$$

$$E_x[f(X_{D(\tau\wedge u)}) - \int_{]0,\tau\wedge u]} \Delta^u Hf(X_s)d\hat{K}_s] = E_x[f(X_{D(\tau\wedge u)}) - 1_{\{0<L(\tau\wedge u)+u<D(\tau\wedge u)\}^c}$$

$$+ f(X^-_{L(\tau\wedge u)}) 1_{\{0<L(\tau\wedge u)+u<D(\tau\wedge u)\}}]$$

$$f(X_{D(\tau\wedge u)}) \leqslant f(x) , \quad f(X^-_{L(\tau\wedge u)}) \leqslant f(x)$$

donc $E_x[f(X_{D(\tau\wedge u)}) - \int_{]0,\tau\wedge u]} \Delta^u Hf(X_s)d\hat{K}_s] \leqslant f(x)$ .

Remarque. On peut montrer que $\Gamma Hf - \Delta Hf$ appartient au domaine étendu par rapport à $\hat{K}$ d'un vrai processus, obtenu à partir du processus sur le bord par une transformation visant à lui ôter les sauts du processus $D_0\theta_t$ d'amplitude strictement supérieure à $u$. L'opération n'étant pas simple nous ne l'indiquons que sommairement ici. Notons $\theta$ la densité de mort du processus $X_{D(t)}$ due aux incursions, par rapport à $\hat{K}_t$, et $k_u(.,.)$ une fonction telle que la fonctionnelle retorse du processus sur le bord $\sum_{s<t} f(X_{D(s)}) 1_{\{X^-_{D(s)} \neq X^-_s\}} 1_{\{D(s)-s>u\}} 1_{\{D(s)<\infty\}}$ ait même projection prévisible que $\sum_{s<t} f(X_{D(s)}) 1_{\{X^-_{D(s)} \neq X^-_s\}} k_u(X^-_s, X_{D(s)}) 1_{\{s<D(s)<+\infty}$

(cf. Théorie du système de Levy, Benveniste et Jacod).

Si $x \in \partial G$, $E_x[e^{\int_0^t \theta(X_s)d\hat{K}_s} f(X_t) \prod_{s<t} [1 - k_u(X_s^-, X_s)]]$ définit un semi-groupe de Markov, le processus associé satisfait à la condition annoncée.

Les opérateurs $\Gamma$ et $\Delta$ n'étant définis que $\hat{K}$ p.s., il n'est pas possible de définir un vrai principe du maximum. Aussi sommes nous amenés à donner la définition suivante :

Définition 53. Nous dirons qu'un opérateur satisfait au principe du maximum $\hat{K}$ presque sûr, s'il existe un opérateur satisfaisant au principe du maximum qui lui est $\hat{K}$ p.s. égal.

Théorème 54. L'opérateur $\Gamma - \Delta$ satisfait au principe du maximum sur le bord (c.à.d. pour $f/F$) $\hat{K}$ p.s.

L'opérateur $\Delta$ satisfait au principe du maximum $\hat{K}$ p.s.

Démonstration. a) Soit $V$ un voisinage fin de $x$ et $\mathcal{F}(x,V)$ la famille des voisinages fins de $x$, contenus dans $V$. Notons $\tau(v)$ le premier temps de sortie de l'intérieur de $U$. Alors l'expression

$$\limsup_{V\downarrow\{x\}} \sup_{v\in F(x,V)} \frac{E_x[f(X_{\tau(v')\wedge u}) - \int_{]0,\tau(v')\wedge u[} \Delta^u Hf(X_s)d\hat{K}_s] - f(x)}{E_x[\hat{K}_{\tau(v')\wedge u}]} \quad \text{est } \leqslant 0$$

si $f/F$ atteint son maximum en $x$ et si on convient de considérer l'expression précédente comme nulle si elle n'est pas définie.

L'opérateur ainsi défini est égal $\hat{K}$ p.s. à $\Gamma Hf - \Delta^u Hf$ d'après les résultats cités en annexe de Mokobodski. Par suite

$$\limsup_{\substack{u\to 0\\ \text{sur les rationnels}}} \limsup_{V\downarrow\{x\}} \frac{E_x[f(X_{\tau(v')\wedge u}) - \int_{]0,\tau(v')\wedge u[} \Delta^u Hf(X_s)d\hat{K}_s] - f(x)}{E_x[\hat{K}_{\tau(v')\wedge u}]}$$

satisfait au principe du maximum sur le bord et est égal $K$ p.s. $\Gamma Hf - \Delta Hf$ d'où le résultat.

b) Revenons à la définition de $\Delta$ et supposons que $f$ présente un maximum au point $x$ de $F$ ; comme $\Delta f = \lim_{u \to 0} \hat{\hat{E}}_Q^{x/v} \left[\frac{f(X_u) - f(X_o)}{v(X_u)} 1_{\{u<D\wedge\zeta\}}\right]$, $\Delta f(x)$ est donc négatif.

Corollaire. $f \in D_e(T) \iff \delta Lf = \Gamma f \quad \hat{K}$ p.s.

§. 4. Application à l'étude du générateur des processus de réflexion dans $\mathbb{R}^n$

Définition 55. Nous appelerons processus de réflexion, un processus à valeurs dans un domaine $\bar{G}$ de $R^d$, d'intérieur $G$ et de frontière $F$, où $F$ est une variété de dimension $d-1$ tel que tout point est régulier pour $F$, et dont le domaine généralisé contient toutes les fonctions de $\mathcal{C}^2_K(\bar{G})$. Il existe donc deux opérateurs $\Gamma$ et $L$ tels que, $\forall f \in \mathcal{C}^2_K(\bar{G})$

$$f(X_t) - f(X_o) - \int_0^t 1_G(X_s) Lf(X_s) ds - \int_0^t \Gamma f(X_s) d\hat{K}_s \quad \text{soit une } P_x\text{-martingale.}$$

Nous allons expliciter les opérateurs $L$ et $\Gamma$.

Définition 56. On appelle opérateur de diffusion sur $G$, un opérateur $A$ tel que

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi_i \partial\varphi_j} + \sum_{1=i}^{q} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial\varphi_i} + c(x)\, u(x) \qquad x \in U, \quad u \in C^2_K(\bar{G})$$

$(U, \varphi)$ étant une carte quelconque.

On appelle opérateur de Lévy $T$ de noyau $t$, une application linéaire de $\mathcal{C}^2(\bar{G})$ dans $B(F)$ telle que $\forall x \in F$, $x \notin \operatorname{supp} u$ ; pour toute carte $(U,\varphi)$ $U \cap F \neq \emptyset$

$$T\,u(x) = \int_U t(x,dy)\left[u(y) - u(x) - \sum_{1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial\varphi_i}(x)(\varphi_i(y) - \varphi_i(x))\right].$$

Théorème 57. Soit $X$ un processus de réflexion sur $\bar{G}$ , les opérateurs $L$ et $\Gamma$ ont nécessairement la forme suivante :

$L$ est un opérateur de diffusion sur $G$ , $\Gamma = \alpha \frac{\partial u}{\partial \nu} + \Lambda(u/F) + Tu$

où $\alpha \in B^+(F)$ $\nu$ est un champ de vecteur de classe $C^0$ dirigé strictement vers l'intérieur ; $\Lambda$ est un opérateur de diffusion sur $F$ et $\Gamma$ un opérateur de Lévy.

Démonstration. Considérons d'abord le cas où $\bar{G} = \{x^1 \geqslant 0\}$ . Soit $K_n$ une suite croissante de compacts recouvrant $\{x^1 \geqslant 0\}$ et $T_n$ le premier temps de sortie de $K_n$ , il existe des fonctions de classe $C_K^2$ coihcidant avec les coordonnées sur chacun des compact $K_n$ . L'hypothèse entraîhant que chaque coordonnée est une semi-martingale locale, il existe des fonctions presque-boréliennes bornées $b^i$ et $\gamma^i$ telles que : les expressions suivantes

$M_t^i = X_t^i - X_o^i - \int_0^t 1_{F^c}(X_s)\, b^i(X_s)ds - \int_0^t \gamma^i(X_s)d\hat{K}_s$ soient des martingales locales continues à droite, dont la partie continue des processus croissants $\langle M^i, M^j \rangle$ soit de la forme $\int_0^t a_{ij}(X_s)\, 1_G(X_s)ds + \int_0^t \alpha_{ij}(X_s)d\hat{K}_s$ .

Il ne reste plus qu'à appliquer la formule d'Ito. Si $f \in \mathcal{C}_K^2$

$$f(X_t)-f(X_o)-\int_0^t 1_G(X_s)L^1 f(X_s)ds - \int_0^t \Gamma^1 f(X_s)d\hat{K}_s - \sum_{s \leqslant t} f(X_s)-f(X_{s^-})- \sum_{i=1}^n D^i f X_s^- (X_s^i - X_{s^-}^i)$$

est une $P_x$-martingale locale pour tout $x$ où :

$$L^1 f = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

et $$\Gamma^1 f = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n \gamma_j \frac{\partial f}{\partial x_j} .$$

Or par hypothèse, il existe des opérateurs $\Gamma$ et $L$ tels que

$f(X_t) - f(X_o) - \int_0^t 1_G(X_s) Lf(X_s) ds - \int_0^t \Gamma f(X_s) d\hat{K}_s$ soit une $P_x$-martingale.

$$E_x\Big(\sum_{s \leqslant t} f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i=1}^{n} D^i f(X_{s-})(X^i_{s-} - X^i_{s-})\Big] = E_x \int_0^t N(f(.)-f(X_s)-\sum_{i=1}^{n} D^i f(X_s)(.-X^i_s)] dH_s$$

est donc absolument continu par rapport à $1_G . T + \hat{K}$ .

Notons $\gamma$ la densité de Radon-Nykodym de $H$ par rapport à $1_G . T + \hat{K}$ et

posons $s(x,dy) = N(x,dy)\, 1_{F^c}(x)\, \gamma(x)$

$t(x,dy) = N(x, dy)\, 1_F(x)\, \gamma(x)$ .

Il est alors évident qu'on peut choisir $L$ de la forme

$$Lf = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \int_{\{x>0\}} [f(y)-f(x) - \sum_{i=1}^{n} D^i f(x)(y^i - x^i)] s(x,dy) \quad \text{si } x \in F^c$$

$= 0$ si $x \in F$ (ou n'importe quoi d'autre d'ailleurs)

et $$\Gamma f = \sum_{i,j=2}^{n} \alpha_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^1 \frac{\partial f}{\partial x_j} + \int [f(y) - f(x) - \sum_{i=1} D^i f(x)(y^i - x^i) t(x,dy)$$

si $x \in F$ .

Précisons la forme de $\Gamma$ de manière à retrouver les opérateurs $\Delta f$ et $\Gamma Mf - \Delta Hf$ . Pour cela, nous allons calculer de deux façons différentes $(X^1_t)^2$ .

La formule d'Ito donne d'une part que

$$(X^1_t)^2 = (X^1_o)^2 + \int_0^t 2 X^1_s dM^1_s + \int_0^t 1_{F^c}(X_s)\, Lx^2(X_s) ds + \int_0^t \alpha_{11}(X_s) d\hat{K}_s .$$

D'autre part $x \rightsquigarrow x^{2+r}$ si $x > 0$ est de classe $\mathcal{C}^2$ donc

$$(X^1_t)^{2+r} = (X^1_o)^{2+r} + (2+r)\int_0^t (X^1_s)^{1+r} dM^1_s + \int_0^t 1_{F^c}(X_s) Lx^{2+r}(X_s) ds .$$

Nous avons tenu compte dans ces calculs du fait que $\hat{K}$ ne charge que $X^1 = 0$.

On vérifie facilement que si l'on fait tendre $r$ vers zéro, chacun des termes converge vers le terme correspondant dans l'expression de $(X^1_t)^2$. On ne retrouve pas de terme en $\int_0^t \alpha_{11}(X_s) dK_s$ qui est donc nul p.s.

$$\left|\int_0^t 1_F(X_s) < dM^1, dM^j >_s\right| = \left|\int_0^t 1_F(X_s)\alpha_{sj}(X_s)d\hat{K}_s\right| \leq \sqrt{\int_0^t \alpha_{11}(X_s)d\hat{K}_s}\sqrt{\int_0^t \alpha_{jj}(X_s)d\hat{K}_s} \quad .$$

On a donc $\hat{K}$ p.s. $\alpha_{1,j}(X_s) = 0$ .

D'autre part les termes de la forme $E_x[\sum_{s\leq t} \frac{\partial f}{\partial x^1}(X_s^-)(X_s^1 1_F(X_s)]$ se représentent sous la forme $E_x\int_0^t Y_1^2(X_s)\frac{\partial f}{\partial x^1}(X_s)d\hat{K}_s$ .

On peut donc écrire l'opérateur $\Gamma$ sous la forme suivante :

$$\Gamma f = Y^1(x)\frac{\partial f}{\partial x^1} + \sum_{j=2}^n Y_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j=2}^n \alpha_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \int [f(y)-f(x)-\sum_{i=2}^n D^i f(x)(y^i-x^i)]t(x,dy).$$

Dans le cadre d'un domaine plus général (ou d'une variété de dimension d) on procède par difféomorphisme à l'aide de cartes locales $(U,\chi)$ telles que $\chi(U)$ soit un ouvert de $\overline{R^n}^+ = \{x^1 \geqslant 0\}$ le bord étant défini à l'aide de $x^1$ .

On obtient alors facilement la forme des opérateurs pour toute fonction f dont le support est contenu dans U , ce qui permet de déterminer de la même façon les opérateurs L et $\Gamma$.

Corollaire 56. Pour qu'un processus de Markov sur une variété à bord contienne les fonctions de classe $\mathscr{C}_K^2$ dans le générateur étendu, il est nécessaire et suffisant que ces fonctions appartiennent au domaine étendu du générateur du processus stoppé, et que restreintes à F , elles appartiennent au domaine étendu du processus sur le bord.

Sous ces hypothèses les fonctions de $\mathscr{C}_K^2$ qui appartiennent à $D_e(\Gamma)$ sont limitées par la condition frontière $\delta$ $Lf = \Gamma f$ .

Remarque. Ce théorème qui généralise le théorème de Ventcell', justifie le point de vue que nous avons utilisé dans [13] pour construire des processus de réflexion sur $R^n$ .

Nous sommes alors en mesure d'expliciter les opérateurs $\Delta f$ et $\Gamma Hf - \Delta Hf$ du théorème, ce que nous ferons dans le cadre du demi-espace $\{x^1 \geqslant 0\}$.

Si $f \in \mathcal{E}^2_K$ $\quad \Delta f = \gamma^1 \dfrac{\partial f}{\partial x^1} + \displaystyle\int_{F^c} (f(y) - f(x))\, t(x,dy)$ et

$$\Gamma Hf - \Delta Hf = \sum_{i,j=2}^{n} \alpha_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=2}^{n} \gamma_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \int_F [f(y) - f(x) - \sum_{i=2}^{n} D^i f(x)(y^i - x^i)]\, t(x,dy).$$

Ces opérateurs possèdent alors manifestement les propriétés annoncées.

On aurait pu partir de ce point de vue pour retrouver la forme de $\Gamma$ .

# CHAPITRE (X). APPENDICE.- DENSITE RELATIVE DE POTENTIELS COMPARABLES ET OPERATEURS PRESQUE POSITIFS.

Nous nous proposons de rappeler ici quelques uns des résultats de Mokobodski et de montrer leur importance.

Soit $(X,\underline{\underline{B}})$ un espace mesurable et $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille résolvante sous-markovienne de noyaux positifs sur $(X,\underline{\underline{B}})$. On suppose que $V = \sup\limits_\lambda V_\lambda$ est un noyau borné. On appelle opérateur de dérivation de la famille résolvante $V_\lambda$, l'opérateur $D^o$ défini sur $\underline{\underline{B}}$ par

$$D^o f = \lim_{\lambda\to\infty} \sup \lambda(f - \lambda V^\lambda f).$$

<u>Théorème A.1.</u> Soit $\varphi$ mesurable telle que $V\varphi$ soit partout finie et soient $u_1$ et $u_2$ des fonctions excessives telles que $u_1 + u_2 = V\varphi$, alors

$$u_1 = V D^o u_1 \quad , \quad u_2 = V D^o u_2 .$$

Si $V\varphi$ est finie $\lambda V^\lambda \varphi$ converge $V$ p.s. vers $D^o V\varphi$ sans autre condition.

Une application immédiate, mais importante, est le résultat suivant

<u>Théorème A.2.</u> Soit $A$ une fonctionnelle additive de $\alpha$-potentiel fini continue, soit $B$ une fonctionnelle absolument continue par rapport à $A$, c'est-à-dire telle que $U_A^\alpha 1 - U_B^\alpha 1$ soit excessive, alors, U existe une fonction $g$, <u>mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{B}_e$ engendrée par ces fonctions excessives</u>, et telle que $B = g.A$.

<u>Démonstration</u>. Il est classique de déduire A.2 de A.1 (voir par exemple la démonstration de Getoor cité dans Séminaire de Probabilités de Strasbourg V. Meyer - retournement du temps) en général on ne réalise pas qu'on obtient le

résultat de mesurabilité.

On peut toujours supposer A strictement croissante de sorte que les fonctions excessives du processus et de son changé de temps par A sont les mêmes.

Notons $W\ f(x) = E_x\int_0^\infty e^{-\lambda A_t-\alpha t}f(X_t)dA_t$ ; $\infty > U_A^\alpha 1 = W^o 1 = U_B^\alpha 1 + \varphi$

$U_B^\alpha 1$ et $\varphi$ sont excessives pour $W^\lambda$, $U_B^\alpha 1$ est donc égale au $W^o$ potentiel de $g = \overline{\lim}\ \lambda(U_B^\alpha 1 - \lambda W^\lambda U_B^\alpha 1)$ qui est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les fonctions excessives ; $U_B^\alpha 1 = U_A^\alpha g$ donc $B = gA$.

Il est remarquable qu'on peut en fait remplacer l'opérateur $D^o$ par n'importe quel autre opérateur ayant des propriétés similaires, ce qui permet éventuellement d'obtenir des résultats très maniables et en particulier d'exprimer la densité en terme du processus initial.

Dans cet ordre d'idée nous allons donner, dans le cas où $V^\lambda$ est la résolvante d'un processus, une démonstration simple du théorème A.1.

Soit $P_t$ le semi-groupe du processus : $\lim\limits_{h\to 0}\sup \frac{1}{h}(P_h u - u) = -D_o u$.

Soit u excessive fortement majorée par $V\varphi < \infty$, A un processus croissant engendrant $u(X_t)$ et $A^x$ la projection duale prévisible de A (à x fixé) $A^x$ est absolument continu par rapport au temps et on peut trouver une densité $\psi^x$ telle que $u(x) = E_x\int_0^\infty \psi^x(s,\omega)ds$.

Soit Z prévisible ; nous allons montrer que $\psi^x(s,\omega) = -\lim\limits_{h\to 0}\sup \frac{1}{h}(P_h u-u)(X_s)$.

En effet : $-E_x\int_0^\infty Z_s \lim\sup \frac{1}{h}(P_h u-u)(X_s)ds = E_x\int_0^\infty Z_s \lim\sup \frac{1}{h}[E^{F_s}\int_s^{s+h}\psi^x(u)du]ds$

$$\leqslant E_x\int_0^\infty Z_s \lim\sup\left(\frac{1}{h}\int_s^{s+h}\psi(u)du\right)ds .$$

Comme $\frac{1}{h}\int_s^{s+h}\psi(u)du$ a, pour presque tout s, une limite $\psi(s)$

$$E_x\int_0^\infty Z_s\, D_o h(X_s)ds \leqslant E_x\int_0^\infty Z_s\, \psi^x(s)ds\ .$$

De même $E_x\int_0^\infty Z_s\, \overline{\lim}\ \frac{1}{h}\,(E^{\underline{\underline{F}}_s}\int_s^{s+h}\psi)ds \geqslant \overline{\lim}\ E_x\int_0^\infty Z_s\,\frac{1}{h}(\int_s^{s+h}\psi)ds$

$$\geqslant \underline{\lim}\ E_x\int_0^\infty Z_s(\frac{1}{h}\int_s^{s+h}\psi)ds \geqslant E_x\int_0^\infty Z_s\ \underline{\lim}(\frac{1}{h}\int_s^{s+h}\psi)ds = E_x\int_0^\infty Z_s\,\psi^x(s)ds$$

ce qui établit A.1. dans ce cas.

$D_o$ qui apparait comme un prolongement de l'opérateur caractéristique A. peut être aussi bien remplacé par un prolongement de l'opérateur de Dynkin $\mathfrak{a}$ (avec ce que cela implique de local !) c'est ce que nous allons voir, après avoir donné la définition suivante.

<u>Définition A.3.</u> Soit C le cône des fonctions surmédianes par rapport à la résolvante $V^\lambda$ . Un opérateur D de C dans $X^{\overline{R}}$ est dit presque-positif si

(P.P.) $[v_1, v_2 \in C,\ v_1 \geqslant v_2,\ v_1(x) = v_2(x)] \Rightarrow D\,v_1(x) \leqslant D\,v_2(x).$

Il est dit "bon opérateur presque-positif" si en outre

a) $D(w_1 + w_2) \geqslant D(w_1) \geqslant 0 \qquad \forall\ w_1 + w_2 \in C$

b) $D(w) \geqslant 0 \qquad \forall\ w \in C$

$D(w + \epsilon V1) \leqslant D(w) + \epsilon\, DV1 \qquad \forall w \in C\ ,\ \epsilon > 0$

c) $\forall\ \varphi \geqslant 0 \quad \varphi = g_1 - g_2$ où $g_1$ et $g_2$ sont excessives bornées

(I) $DV\varphi = \varphi$ .

Le premier exemple de tel opérateur est précisément $D^o$ , ou $\underline{\lim}\ \lambda(I - \lambda V^\lambda)$.

<u>Théorème A.4.</u> Soit D un bon opérateur presque positif

(II) $D\,V\,\varphi = D^o V\,\varphi \qquad \forall\ \varphi \in \underline{\underline{\mathcal{B}}}_e \qquad V$ presque-partout

l'ensemble négligeable ne dépendant que de $\varphi$ et non de D .

Exemple. On suppose que $V_\lambda$ est la résolvante d'un processus droit, on note $\hat{w}$ la régularisée 1-excessive de w surmédiane (on rappelle que $\hat{w} \leq w$ et $\hat{w} = w$ V p.s.).

Pour chaque x de X et chaque voisinage fini V de x on note $\mathcal{F}(x,V)$ la famille des voisinages fins de x contenus dans V et $\tau(V)$ le premier temps de sortie de l'intérieur de V, on remarque que $0 < E_x(\tau(V)) < \infty$ car V 1 est bornée, alors l'opérateur

$$D\,w(x) = \lim_{V \downarrow \{x\}} \sup_{V' \in \mathcal{F}(x,V)} \frac{w(x) - E_x(\hat{w}(X_{\tau(V')}))}{E_x \tau(V')}$$

est un "bon opérateur presque positif".

Le seul point à vérifier est le point c). Soit $\varphi$ différence de deux fonctions excessives :

$$\frac{V\varphi(x) - E_x[V\varphi X_{\tau(V')}]}{E_x \tau(V')} = \frac{E_x \int_0^{\tau(V')} \varphi(X_s)ds}{E_x \tau(V')}$$

pour tout $\varepsilon$ il existe un voisinage fin $V_\varepsilon$ de x tel que

$$E_x \int_0^{\tau(V_\varepsilon)} |\varphi(X_s) - \varphi(X_0)|\, ds < \varepsilon \quad E_x\, \tau(V_\varepsilon) \qquad \text{donc } D\,V\varphi = V\varphi\ .$$

Remarque. On obtient évidemment le même résultat en prenant pour V le potentiel $w^0 = U_A^1$ d'une fonctionnelle additive A et en remplaçant $E_x(\tau(V'))$ par $E_x \int_0^{\tau(V')} e^{-s} dA_s$. Naturellement on peut aussi remplacer lim sup par lim inf.

Corollaire A.5. Soit D un opérateur presque positif relativement à $w^\lambda$, on peut choisir pour densité de B par rapport à A la fonction $D\,U_A^\alpha 1$.

Démonstration. $U_B^\alpha 1 = U_A^\alpha g$ est de la forme $w^\lambda \varphi$ donc $U_A^\alpha D U_B^\alpha 1 = U_A^\alpha D^0 U_B^\alpha 1$.

Corollaire A.6. On peut choisir pour densité de B par rapport à A la fonction

$$g(x) = \lim_{U \downarrow \{x\}} \sup \frac{E_x \int_0^{\tau(U)} e^{-s} dB_s}{E_x \int_0^{\tau(U)} e^{-s} dA_s} \qquad \text{(ou bien sûr lim inf)}$$

<u>Démonstration</u>. Si A est strictement croissante on considère l'opérateur D déjà défini.

Si A n'est pas strictement croissante on peut prendre comme densité de A par rapport à A+T l'une ou l'autre des fonctions

$$\limsup_{U\downarrow\{x\}} \frac{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}dA_s}{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}d(A+T)_s} \quad \text{ou} \quad \liminf_{U\downarrow\{x\}} \frac{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}dA_s}{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}d(A+T)_s}$$

de même on peut choisir pour densité de B par rapport à A+T

$$\limsup_{U\downarrow\{x\}} \frac{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}dB_s}{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}d(A+T)_s} \quad \text{ou la } \liminf \text{ correspondante}$$

dès lors en convenant que $0/0 = 0$ les fonctions

$$\frac{\liminf \dfrac{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}dB_s}{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}d(A+T)_s}}{\limsup \dfrac{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}dA_s}{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}d(A+T)_s}} \quad \text{et} \quad \frac{\limsup \dfrac{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}dB_s}{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}d(A+T)_s}}{\liminf \dfrac{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}dA_s}{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}d(A+T)_s}}$$

sont $w^o$ p.s. égales et sont des densités de B par rapport à A comme g est comprise entre les deux ceci établit le résultat.

<u>Théorème A.7</u>. Avec les notations du chapitre II

$$\hat{V}^{p+1}f(x) = \limsup_{U\downarrow\{x\}} \frac{E_x[e^{-\tau(U)}\, 1_F(X_{L(\tau(U))})V^{p+1}f(X_{L(\tau(U))})]}{E_x[e^{-\tau(U)}\, 1_F(X_{L(\tau(U))})\, v(X_{\tau(U)})]}$$

si $x \in F$ .

On constate bien que $\hat{V}^{p+1}f$ ne dépend que de $V^{p+1}f$ , cette forme explicite conduit précisément à rechercher une loi d'entrée sur le compactifié ne changeant que l'espace des trajectoires qui pour $t>0$ appartiennent à $F^c$ (on peut évidemment choisir aussi bien lim inf).

Démonstration. $\hat{V}^{p+1}f$ est la densité de la projection bien-mesurable $\check{I}^{p+1}f$ de $\sum_{\substack{g\in M_\pi^{\to}\\ g<t}} e^{pg}\int_g^{D(g)} e^{-(p+1)s}f(X_s)ds$ par rapport à $K$ où $K=\tilde{I}^1\,1$.

D'après ce qui précède on peut choisir sur $F$ comme densité

$$\limsup_{U\downarrow\{x\}} \frac{E_x \sum_{g\in M_\pi^{\to}} 1\{g<\tau(U)\}\, e^{pg}\int_g^{D(g)} e^{-(p+1)s}f(X_s)ds}{E_x \sum_{g\in M_\pi^{\to}} 1\{g\leqslant\tau(U)\}\int_g^{D(g)} e^{-s}\,1(X_s)ds}$$

soit encore $\displaystyle\limsup_{U\downarrow\{x\}} \frac{E_x\int_0^{D(\tau(U))} e^{-s}e^{-p(s-L(s))}1_F(X_{L(s)})1_{F^c}(X_s)f(X_s)ds}{E_x\int_0^{D(\tau(U))} e^{-s}1_F(X_{L(s)})1_{F^c}(X_s)ds}$

qui vaut encore $\displaystyle\limsup_{U\downarrow\{x\}} \frac{E_x\int_{\tau(U)}^{D(\tau(U))} e^{-s}\,e^{-p(s-L(s))}1_F(X_{L(s)})\,1_{F^c}(X_s f(X_s)ds}{E_x\int_{\tau(U)}^{D(\tau(U))} e^{-s}\,1_F(X_{L(s)})\,1_{F^c}(X_s)ds}$

car $\displaystyle\limsup_{U\downarrow\{x\}} \frac{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}\,e^{-p(s-L(s))}1_F(X_{L(s)})\,1_{F^c}(X_s)f(X_s)ds}{E_x\int_0^{\tau(U)} e^{-s}\,dK_s}$ est une densité de $\int_0^t e^{-s-p(s-L(s))}1_F(X_{L(s)})\,1_{F^c}(X_s)ds$ par rapport à $\int_0^{t\wedge\zeta} e^{-s}dK_s$ qui est nulle si $x\in F$ de sorte que la lim sup est nulle $K$ p.s., de même si $p=0$ $f\equiv 1$. Sur $F^c$ on choisit évidemment $0$ puisque $K$ ne croît que sur $F$.

Il reste à exprimer $\hat{V}^{p+1}f$ en fonction de $V^{p+1}f$, il suffit pour cela de noter que $E_x \int_{\tau(U)}^{D(\tau(U))} e^{-s}\, e^{-p(s-L(s))}\, 1_F(X_{L(s)}) 1_{F^c}(X_s) f(X_s)\, ds$

$$= E_x\left[e^{pL(\tau(U))} 1_F X_{L(\tau(U))} e^{-(p+1)\tau(U)}\, V^{p+1}(f.1_{F^c}) X(\tau(U))\right]$$

de même pour la fonction $1$ et $V^1(1) = v$ .

## BIBLIOGRAPHIE


[1] J. AZEMA. Quelques applications de la théorie générale I. Inventiones Math. 18, Springer Verlag (1972) pp. 293-336.

[2] J. AZEMA. Théorie générale des processus et retournement du temps. Ann. Sc. Ecole Normale Sup., série 4, t. 6 Fasc. 4 (1973) pp. 459-519.

[3] J. AZEMA. Une remarque sur les temps de retour, trois applications. Sem. de Proba. Strasbourg VI. Lecture Notes Vol. 258, Springer-Verlag (1972) pp. 35-51.

[4] A. BENVENISTE et J. JACOD. Systèmes de Lévy des processus de Markov. Inventiones Math. 21, Springer Verlag (1973) pp. 183-198.

[5] R.M. BLUMENTHAL et R.K. GETOOR. Markov processes and potential theory. N.Y. Academic Press (1968).

[6] C. DELLACHERIE. Capacités et Processus stochastiques. Ergeb. der Math. und Grenzgebiete, Springer Verlag (1972).

[7] C. DELLACHERIE. Temps d'arrêt totalement inacessibles. Sem. de Proba. Strasbourg VII, Lecture Notes Vol. 321, Springer Verlag (1973) pp. 36-38.

[8] E.B. DYNKIN. On extension of Markov Processes (Russian). Theory of Prob. Appl. 14 (1968) pp. 708-713.

[9] E.B. DYNKIN et A.A. YUSHKEVICH. On the starting points of incursions of Markov Processes (translated in English). Theory of Prob. Appl. 13 (1968) pp. 468-471.

[9'] E.B. DYNKIN. Wanderings of Markov Processes. Theory of Prob. Appl. 16 (1971) pp. 401-428 (in english).

[10] R.K. GETOOR et M.J. SHARPE. Last exit decompositions and distributions. Indiana University J. vol. 23 n° 5 (1973) pp. 377-404.

[11] R.K. GETOOR et M.J. SHARPE. Last exit times and additive functionnals. Annals in Prob. vol. 1 n° 4 (1973) pp. 550-569.

[12] R.K. GETOOR et M.J. SHARPE. Balayage and multiplicative functionnals. Zeitschrift. für Wahrsch. n° 2 (1974) pp. 139-165.

[13] N. EL-KAROUI. Thèse (à paraître).

[14] B. MAISONNEUVE. Systèmes régénératifs. Astérisque n° 15 (1974).

[15] J.F. MERTENS. Processus de Ray et théorie du balayage. Inventiones Math.

[16] P.A. MEYER. Ensembles aléatoires homogènes I. Sem. de Proba. Strasbourg VIII, Springer Verlag (1974).

[17] P.A. MEYER. Ensembles aléatoires homogènes II. Sem. de Proba. Strasbourg VIII, Springer Verlag (1974).

[18] P.A. MEYER, R.T. SMYTHE et J.B. WALSH. Birth and death of Markov Processes. 6th Berkeley symp. III (1971) pp. 295-306.

[19] P.A. MEYER et J.B. WALSH. Quelques applications des résolvantes de Ray. Inventiones Math. 14, Springer Verlag (1971) pp. 143-166.

[20] G. MOKOBODSKI. Densité relative de deux potentiels comparables. Sem. de Proba. Strasbourg IV. Lecture Notes vol. 124, Springer Verlag (1970) pp. 170-195.

[21] G. MOKOBODSKI. Opérateurs presque positifs. Sem. de Proba. Strasbourg IV, Lecture Notes vol. 124, Springer Verlag (1970) pp. 196-208.

[22] M. MOTOO. The sweeping-out of additive functionnals and process on the boundary. Ann. Inst. Statist. Math. vol. 16 (1964) pp. 317-345.

[23] M. MOTOO. Application of additive functionnals to the boundary Problem of Markov processes. 5th Berkeley symp. II Part 2 (1967) pp. 75-110.

[24] Y. OKABE. The resolution of an irregularity of boundary points in the boundary problem for Markov processes. J. Math. Soc. Japan, vol. 22 n° 1 (1970) pp. 47-104.

[25] A.O. PITTENGER et C.T. SHIH. Coterminal families and the strong Markov property. Trans. Amer. Math. Soc. (1973) pp. 1-43.

[26] J.B. WALSH. The perfection of multiplicative functionnals. Sem. Proba. Strasbourg VI, Lecture Notes vol. 258, Springer-Verlag (1972) pp. 233-243.

[27] N. EL KAROUI et H. REINHARD. Notes au Séminaire de proba. n° I, Paris VI (1971).

Nicole EL KAROUI
Département de Mathématiques
Centre Universitaire du Mans
Route de Laval
72000 LE MANS

Hervé REINHARD
Probabilités - Tour 56-66
Université Paris VI
4 place Jussieu
75005 PARIS

## ABSTRACT

In a paper of the 5th Symposium of Berkeley, Motoo has proposed the following problem : Let $G$ be a dense open set in a compact $S$ . Then describe all processes such that their behaviours before reacting $\partial G$ , the boundary of $G$ , is the same as that of a given minimal process.

Much progress of the solving of one aspect of the problem -actually in a generalized form- is due to Getoor and Sharpe [21], using Chung's and Azema's sweeping out techniques and finally obtaining "last exit decomposition" and contionning formulas. Further work has been done by Meyer [17]. In our paper, we start again, for more clearness, with Meyer's presentation, but we are mostly interested on the description of processes by means of compactification. More general theorems than Getoor and Sharpe are obtained, and simple interpretations are given to some concepts.

A chapter is reserved to the $\mathbb{R}^n$ case.