Astérisque

SERGE ALINHAC

Systèmes hyperboliques singuliers

Astérisque, tome 19 (1974), p. 3-24

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__19__3_0>

Astérisque
n°19 (1974) p.3-24

SYSTEMES HYPERBOLIQUES SINGULIERS

Serge ALINHAC

Université Paris XI

Centre d'Orsay

Société Mathématique de France

SYSTEMES HYPERBOLIQUES SINGULIERS

par Serge ALINHAC

Introduction.

Cet article étudie le problème de Cauchy unilatéral pour une classe de systèmes hyperboliques du premier ordre, ayant une singularité sur la surface portant les données initiales.

La surface initiale ayant pour équation $t=0$, on considère des systèmes de la forme

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{B}{t} \qquad (*)$$

où A_i et B sont des matrices $(p \times p)$ complexes et bornées. On suppose la partie "principale" $\tilde{L}$ de L , définie par

$$\tilde{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

hyperbolique symétrisable dans la direction normale à la surface initiale, au sens où l'entend Friedrichs [6], rappelé en I.2 ci-après.

Le type de la singularité choisie est celui qui apparaît lorsque l'on réduit une équation différentielle ordinaire du type de Fuchs à un système du premier ordre. Baouendi et Goulaouic [4] ont introduit une généralisation naturelle de ces opérateurs au cas de plusieurs variables, et ont étudié ces opérateurs "de Fuchs généralisés" dans le cas où données et coefficients sont analytiques en la variable d'espace. On montre en [3] comment l'on peut réduire aussi ces opérateurs à un système de la forme (*) .

Pour de tels systèmes singuliers, on ne peut espérer l'unicité d'une solution appartenant à un espace L^2_μ (c'est-à-dire l'espace des fonctions f telles que $t^\mu f \in L^2$) que si μ est assez petit, comme on le voit sur les exemples les plus simples à une ou deux variables (cf. aussi [1]).

On établit ici un théorème d'existence et d'unicité dans L^2_μ pour une fermeture convenable de L (resp. $L^{(*)}$) , lorsque μ est petit (resp. μ est grand); ces théorèmes sont soit globaux (dans une bande), soit locaux (dans un domaine de forme appropriée). D'une façon plus générale, on peut étudier pour quels opérateurs P le problème de Cauchy plat avec unicité est bien posé, c'est-à-dire :

i) il existe un domaine D tel que, pour toute $f \in C^\infty(D)$, plate sur $t=0$, il existe un unique $u \in C^\infty(D)$, plat sur $t=0$, tel que $Pu=f$.

ii) pour tout voisinage V de zéro et toute $u \in C^\infty(V)$, plate sur $t=0$, telle que $Pu=0$, alors $u \equiv 0$ dans V . Les théorèmes prouvés en [3] indiquent que les seuls opérateurs qui conviennent, parmi ceux dont les coefficients s'annulent à un ordre fixe sur $t=0$, sont les opérateurs "de Fuchs généralisés" ayant leurs caractéristiques simples réelles ; cela justifie la forme (*) choisie et l'hypothèse d'hyperbolicité faite sur $\tilde{L}$.

Les questions de régularité ne sont pas abordées dans le cas général. Elles ne sont envisagées qu'incidemment dans le cas particulier simple où A_i et B ne dépendent que de t , en vue de montrer l'usage que l'on peut faire du théorème principal, au caractère "asymptotique", pour obtenir des résultats dans la classe $C^\infty(D_{L^2}$ dans une bande).

Les théorèmes du paragraphe V précisent dans quelle mesure on peut, pour ces opérateurs, bien poser le problème de Cauchy en termes d'images et de traces sur $t=0$.

Le cas des opérateurs d'Euler-Poisson-Darboux est traité à la fin à titre d'exemple.

I. Généralités, notations, résultats.

1) Domaines.

Ce sont des ouverts du demi-espace $H = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, t>0\}$.

a) Cas global : On note $\beta = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, 0<t<T\}$ la bande de hauteur T ($T>0$ donné), et $\beta_i = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, t=0\}$,

$\beta_s = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, t=T\}$ les bords inférieur et supérieur de β.

Pour $T>\epsilon>0$, $\beta_\epsilon = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \epsilon<t<T\}$.

b) Cas local : le domaine D envisagé est limité par un ouvert borné régulier Ω de $\mathbb{R}^n_x$ et par une surface S régulière au-dessus de Ω , s'appuyant sur $\partial\Omega$; plus précisément, étant donnés Ω et $\Phi \in C^1(\bar{\Omega})$, $\Phi>0$ dans Ω , $\Phi=0$ sur $\partial\Omega$, $d\Phi \neq 0$, le domaine D est défini par

$$D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, x \in \Omega, 0<t<\Phi(x)\} \text{ ; de plus}$$

$$D_\epsilon = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, x \in \Omega, \epsilon<t<\Phi(x)\} \text{ et}$$

$$S = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, x \in \bar{\Omega}, t = \Phi(x)\} .$$

2) Opérateurs.

On étudie, dans β ou dans D , des sytèmes du premier ordre du type

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{B}{t} .$$

La matrice B est bornée, les matrices A_i le sont aussi ainsi que leurs dérivées premières tangentielles.

On pose $L^{(*)} = -\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i^H + \frac{B^H}{t}$, où M^H désigne la transposée hermitienne de la matrice M , et on appelle $L^{(*)}$ l'adjoint formel de L .

Dire que $\tilde{L}$ est hyperbolique symétrisable en direction normale signifie ceci : il existe un symbole $r(x,t,\xi,\tau)$ d'ordre zéro et de degré deux (i.e. $D^{\alpha}_{x,t} D^{\beta}_{\xi,\tau} r$ est d'ordre $-|\beta|$ pour tous multiindices α, β , $|\alpha| \leq 2$) tel que, si on pose $a(x,t,\xi,\tau) = \tau \text{ id} + \sum_{i=1}^{n} A_i(x,t)\xi_i$ (a est le symbole de $\tilde{L}$) , on ait

$$r\,a = a^H r^H \qquad (r \text{ "symétrise" } a)$$

avec les propriétés supplémentaires

$s_1)$ $r + r^H > \alpha_0 \,\mathrm{Id}$, où α_0 est un nombre positif fixe.

$s_2)$ $r(x,t,\xi,\tau) \to r_\infty(x,t,\xi)$ lorsque $\tau \to \pm\infty$,

et $r - r_\infty$ est d'ordre zéro en $\frac{|\xi|}{|\tau|}$.

$s_3)$ $r(x,t,\xi,\tau)$ se prolonge analytiquement en τ dans C .

En fait, il est montré dans Friedrichs [6] que l'existence d'un tel symétriseur implique celle d'un symétriseur "de surface" $r(x,\xi)$ ayant la propriété $s_1)$. C'est ce dernier, noté désormais $r(x,\xi)$, que nous emploierons dans les calculs.

3) Prédomaines des opérateurs L et $L^{(*)}$.

Les définitions, données dans le cas d'une bande β , se modifient de manière évidente dans le cas d'un domaine D .

Pour $\mu \in \mathbb{R}$, on pose

$D_\mu = \{u \in L^2_{\frac{\mu-1}{2}}(\beta)$, u continue sur $]0,T]$ et, pour $|\alpha| = 1$, $D^\alpha u \in L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(\beta)\}$, et

$$D_\mu^{(*)} = \{v \in L^2_{-\frac{\mu+1}{2}}(\beta) \ , \ v \text{ continue sur }]0,T] , \ v(T) \equiv 0 \ , \text{ et pour } |\alpha|=1 \ ,$$

$$D^\alpha v \in L^2_{-\frac{\mu-1}{2}}(\beta)\} \ .$$

On note alors L_μ (resp. $L_\mu^{(*)}$) les opérateurs non bornés de domaines D_μ (resp. $D_\mu^{(*)}$) dans $L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(\beta)$ (resp. $L^2_{-\frac{\mu-1}{2}}(\beta)$) définis par

$$u \in D_\mu \ , \ L_\mu u = \underset{\bullet}{L} u \ ,$$

$$v \in D_\mu^{(*)} \ , \ L_\mu^{(*)} v = L^{(*)} v \ .$$

Le lemme II.1 ci-après prouve que les graphes de L_μ (resp. $L_\mu^{(*)}$) dans $L^2_{\frac{\mu-1}{2}} \times L^2_{\frac{\mu+1}{2}}$ (resp. $L^2_{-\frac{\mu+1}{2}} \times L^2_{-\frac{\mu-1}{2}}$) ont pour adhérences dans ces espaces produit des graphes fonctionnels ; on note alors $\bar{L}_\mu$ (resp. $\overline{L_\mu^{(*)}}$) les opérateurs, de domaines $\bar{D}_\mu$ (resp. $\overline{D_\mu^{(*)}}$) qui ont pour graphes ces adhérences.

4) Théorème principal.

Théorème I.4. On suppose que l'opérateur L vérifie dans les domaines considérés, les hypothèses du I.2).

a) Cas global : pour tout $T>0$, il existe un réel μ_0 tel que, pour $\mu<\mu_0$, $\bar{L}_\mu$ et $\overline{L_\mu^{(*)}}$ sont à indice.

b) Cas local : on suppose D de forme telle qu'en tout point de S la normale sortante à D soit une direction d'hyperbolicité pour L (au sens de I.2)).

Alors il existe un réel μ tel que pour $\mu<\mu_0$, $\bar{L}_\mu$ et $\overline{L_\mu^{(*)}}$ sont à indice.

Preuve. Elle est complètement développée en II et III pour le cas a), et esquissée (étant analogue) en IV, pour le cas b).

II. Une formule de Green pour L_μ et $L_\mu^{(*)}$.

1) Lemme II.1. Pour tous $u \in D_\mu(\beta)$ et $v \in D_\mu^{(*)}(\beta)$, on a

$$(L_\mu u, v)_\beta = (u, L_\mu^{(*)} v)_\beta .$$

Preuve. Soit $T > \epsilon > O$; on intègre par parties $(L_\mu u, v)_{\beta_\epsilon}$ comme suit :

$$(L_\mu u, v)_{\beta_\epsilon} = (t^{\frac{\mu+1}{2}} L_\mu u, t^{-\frac{\mu+1}{2}} v)_{\beta_\epsilon} = (t^{\frac{\mu-1}{2}} u, B^H t^{-\frac{\mu+1}{2}} v)_{\beta_\epsilon} + (t^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t}, t^{-\frac{\mu+1}{2}} v)_{\beta_\epsilon}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} (t^{\frac{\mu+1}{2}} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, t^{-\frac{\mu+1}{2}} v)_{\beta_\epsilon} .$$

Or $\frac{\partial}{\partial t}(t^{\frac{\mu+1}{2}} u) = t^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\mu+1}{2} t^{\frac{\mu-1}{2}} u$, d'où

$$(L_\mu u, v)_{\beta_\epsilon} = (L(t^{\frac{\mu+1}{2}} u), t^{-\frac{\mu+1}{2}} v)_{\beta_\epsilon} - \frac{\mu+1}{2} (t^{\frac{\mu-1}{2}} u, t^{-\frac{\mu+1}{2}} v)_{\beta_\epsilon} .$$

Le premier terme écrit s'intègre par parties et vaut

$$(t^{\frac{\mu-1}{2}} u, tL^{(*)}(t^{-\frac{\mu+1}{2}} v))_{\beta_\epsilon} + \underbrace{(u,v)_{\beta_S}}_{O} - (u,v)_{t=\epsilon} .$$

Or $\frac{\partial}{\partial t}(t^{-\frac{\mu+1}{2}} v) = -\frac{\mu+1}{2} t^{-\frac{\mu+1}{2}-1} v + t^{-\frac{\mu+1}{2}} \frac{\partial v}{\partial t}$, d'où

$$(t^{\frac{\mu-1}{2}} u, tL^{(*)}(t^{-\frac{\mu+1}{2}} v))_{\beta_\epsilon} = \frac{\mu+1}{2} (t^{\frac{\mu-1}{2}} u, t^{-\frac{\mu+1}{2}} v)_{\beta_\epsilon} + (t^{\frac{\mu-1}{2}} u, t^{-\frac{\mu-1}{2}} L^{(*)} v)_{\beta_\epsilon}$$

Soit enfin $(L_\mu u, v)_{\beta_\epsilon} = (u, L_\mu^{(*)} v)_{\beta_\epsilon} - (u,v)_{t=\epsilon}$.

La fonction $\Phi : \epsilon \to |(u,v)|_{t=\epsilon}$ est telle que $\int_O^T \frac{\Phi(\epsilon)}{\epsilon} d\epsilon < +\infty$, car

$\frac{\Phi(\epsilon)}{\epsilon} < \|\epsilon^{\frac{\mu-1}{2}} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)} \|\epsilon^{-\frac{\mu+1}{2}} v\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}$ il existe donc une suite $\epsilon_n \underset{>}{\to} O$ telle que $\Phi(\epsilon_n) \to O$. En donnant à ϵ les valeurs ϵ_n dans la formule précédente et en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient

$$(L_\mu u, v)_\beta = (u, L_\mu^{(*)} v)_\beta \; .$$

2) Une conséquence immédiate de 1) est la suivante :

Si (O, w) est adhérent, au sens de $L^2_{\frac{\mu-1}{2}} \times L^2_{\frac{\mu+1}{2}}$ (resp. $L^2_{-\frac{\mu+1}{2}} \times L^2_{-\frac{\mu-1}{2}}$) au graphe de L_μ (resp. $L_\mu^{(*)}$), alors $w=O$. Cela permet de définir $\bar{L}_\mu$ et $L_\mu^{(*)}$ et l'on a le

<u>Lemme II.2</u>. Pour $u \in \overline{D_\mu}$, $v \in \overline{D_\mu^{(*)}}$, $(\bar{L}_\mu u, v) = (u, \overline{L_\mu^{(*)}} v)$.

III) <u>Inégalités d'énergie</u>.

1) <u>Identité quadratique de base</u> :

<u>Lemme III.1</u>. Soit R l'opérateur de symbole r, il existe des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre zéro N' et Q tels que, pour tout $\lambda \in R$ et $u \in D_\lambda(\beta)$, on ait l'identité

$$2\,\mathrm{Re}(R t^{\frac{\lambda+1}{2}} Lu, t^{\frac{\lambda-1}{2}} u) = -\lambda\,\mathrm{Re}(Rv, v) + 2\,\mathrm{Re}(RBv, v) + \mathrm{Re}(N'tv, v) - \mathrm{Re}(v, Qv) + \mathrm{Re}(R^* tv, v)_{\beta_s} ,$$

où l'on a posé $v = t^{\frac{\lambda-1}{2}} u$.

<u>Preuve</u>. On intègre "à demi" par parties d'expression $(R t^{\frac{\lambda+1}{2}} \tilde{L}u, t^{\frac{\lambda-1}{2}} u)_{\beta_\epsilon}$, puis l'on fait tendre convenablement ϵ vers O.

En effet $t \frac{\partial}{\partial t}(t^{\frac{\lambda-1}{2}} u) = \frac{\lambda-1}{2} t^{\frac{\lambda-1}{2}} u + t^{\frac{\lambda+1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t}$, d'où

$$(R t^{\frac{\lambda+1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t}, t^{\frac{\lambda-1}{2}} u)_{\beta_\epsilon} + \sum_{i=1}^{n} (R A_i \frac{\partial}{\partial x_i} t^{\frac{\lambda+1}{2}} u, t^{\frac{\lambda-1}{2}} u)_{\beta_\epsilon} = -\frac{\lambda-1}{2}(Rv, v)_{\beta_\epsilon}$$

$$+ \underbrace{(R t \frac{\partial}{\partial t} v + \sum_{i=1}^{n} R t A_i \frac{\partial v}{\partial x_i}, v)_{\beta_\epsilon}}_{T} .$$

On intègre par parties le terme T :

$$T = (\frac{\partial v}{\partial t}, t R^{*}v)_{\beta_\epsilon} + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial v}{\partial x_i}, t A_i^H R^{*} v)_{\beta_\epsilon}$$

$$= -(v, \frac{\partial}{\partial t}(tR^{*}v))_{\beta_\epsilon} - \sum_{i=1}^{n}(v, \frac{\partial}{\partial x_i}(t A_i^H R^{*}v))_{\beta_\epsilon} + (Rtv, v)_{\beta_s} - (Rtv, v)_{t=\epsilon} .$$

$$T = -(v, [tR_t^{*} + \sum_{i=1}^{n}(t A_i^H R^{*})_{x_i}]v)_{\beta_\epsilon} - (v, R^{*}v)_{\beta_\epsilon} - (Rtv, \frac{\partial v}{\partial t})_{\beta_\epsilon} - \sum_{i=1}^{n} (R t A_i v, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{\beta_\epsilon}$$

$$+ (Rtv, v)_{\beta_s} - (Rtv, v)_{t=\epsilon} .$$

L'opérateur $[tR_t^{*} + \sum_{i=1}^{n} (TA_i^H R^{*})_{x_i}]$, noté Q, est d'ordre zéro grâce aux hypothèses faites sur r et les A_i.

On transforme maintenant les termes $(Rtv, \frac{\partial v}{\partial t})_{\beta_\epsilon} + \sum_{i=1}^{n} (Rt A_i v, \frac{\partial v}{\partial x_i})$ de façon à faire apparaître le terme $\bar{T}$ (conjugué de T) :

$$(Rtv, \frac{\partial v}{\partial t}) + \sum_{i=1}^{n} (Rt A_i v, \frac{\partial v}{\partial x_i}) = (R^{*}tv, \frac{\partial v}{\partial t}) + \sum_{i=1}^{n} (A_i^H R^{*}tv, \frac{\partial v}{\partial x_i})$$

$$+ ((R-R^{*})tv, \frac{\partial v}{\partial t}) + \sum_{i=1}^{n} ((RA_i - A_i^H R^{*})tv, \frac{\partial v}{\partial x_i}) .$$

On utilise alors la formule

$$((R-R^{*})tv, \frac{\partial v}{\partial t})_{\beta_\epsilon} = -(\frac{\partial}{\partial t}(R-R^{*})tv, v)_{\beta_\epsilon} + ((R-R^{*})tv, v)_{\beta_s} - ((R-R^{*})tv, v)_{t=\epsilon}$$

qui permet d'écrire

$$((R-R^{*})tv, \frac{\partial v}{\partial t}) + \sum_{i=1}^{n} ((RA_i - A_i^H R^{*})tv, \frac{\partial v}{\partial x_i}) = -(Nv, v)_{\beta_\epsilon} + ((R-R^{*})tv, v)_{\beta_s}$$

$$- ((R-R^{*})tv, v)_{t=\epsilon} ,$$

où l'on a posé $N = N't$, $N' = \frac{\partial}{\partial t}(R-R^{*}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(RA_i - A_i^H R^{*})$.

Finalement

$$T = -(v,Qv)_{\beta_\epsilon} - (v,R^*v)_{\beta_\epsilon} + (Nv,v)_{\beta_\epsilon} + (R^*tv,v)_{\beta_s} - (R^*tv,v)_{t=\epsilon} - \bar{\bar{T}} ,$$

soit $2\operatorname{Re}(Rt^{\frac{\lambda+1}{2}}Lu, t^{\frac{\lambda-1}{2}}u)_{\beta_\epsilon} = -\lambda \operatorname{Re}(Rv,v)_{\beta_\epsilon} - \operatorname{Re}(v,Qv)_{\beta_\epsilon} + \operatorname{Re}(Nv,v)_{\beta_\epsilon}$

$$+ 2\operatorname{Re}(RBv,v)_{\beta_\epsilon} + \operatorname{Re}(R^*tv,v)_{\beta_s} - \operatorname{Re}(R^*tv,v)_{t=\epsilon} .$$

Il ne rest plus qu'à établir maintenant, grâce à l'hypothèse que r symétrise a, que N' est d'ordre 0 : or $N' = \underbrace{R\tilde{L} - (R\tilde{L})^H} + \underbrace{(R\tilde{L})^H - (R\tilde{L})^*}$; le premier opérateur a pour symbole principal $ra - a^H r^H = 0$; le second est d'ordre zéro grâce aux hypothèses de régularité faites sur R et les A_i . En faisant tendre ϵ convenablement vers zéro (comme en II.1), on obtient l'identité promise.

2) <u>Dérivation des inégalités d'énergie</u>.

a) <u>Généralités</u> . On va utiliser l'hypothèse $r+r^H > \alpha_0$ Id. L'opérateur $R+R^H$ a un symbole hermitien positif ; on peut donc l'écrire

$R+R^H = \Lambda + T_{-1}$, où T_{-1} est un opérateur d'ordre -1 et Λ un opérateur hermitien positif (c'est l'inégalité de Garding, citée en [6]).

L'opérateur T_{-1} étant lui-même assez régulier, peut être approché en norme par des opérateurs de rang fini dans L^2 . On obtient finalement

$$2\operatorname{Re}(Rv,v)_\beta = \operatorname{Re}(\Lambda' v,v)_\beta + \operatorname{Re}(T_f v,v)_\beta ,$$

où T_f est de rang fini et Λ' hermitien positif. De façon analogue, on a pour le terme de bord

$$\operatorname{Re}(t Rv,v)_{\beta_s} = \operatorname{Re}(t\Lambda'' v,v)_{\beta_s} + \operatorname{Re}(T_f' v,v)_{\beta_s} ,$$

où T_f' est de rang fini et Λ'' hermitien positif. En posant $P_0 = N - Q^* + 2RB$, l'identité du lemme III.1. s'écrit

$$2\mathrm{Re}(Rt^{\frac{\lambda+1}{2}} L\dot{u},v)_\beta = -\frac{\lambda}{2}\mathrm{Re}(\Lambda' v,v)_\beta - \frac{\lambda}{2}\mathrm{Re}(T_f v,v)_\beta + \mathrm{Re}(P_o v,v)_\beta + \mathrm{Re}(t\Lambda'' v,v)_{\beta_s}$$
$$+ \mathrm{Re}(T_f' v,v)_{\beta_s} \quad .$$

b) Inégalités d'énergie.

Lemme III.2. i) il existe μ_o tel que si $\mu<\mu_o$, pour tout $u \in \bar{D}_\mu$ (sauf éventuellement dans un sous espace de dimension finie) on a

$$(\mu_o-\mu)\|u\|_{L^2_{\frac{\mu-1}{2}}(\beta)} \leq \mathrm{Cte}\|\bar{L}_\mu u\|_{L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(\beta)} \quad .$$

ii) il existe μ_o^* tel que si $\mu<\mu_o^*$, pour tout $v \in \overline{D_\mu^{(*)}}$ (sauf éventuellement dans un sous espace de dimension finie), on a

$$(\mu_o^*-\mu)\|v\|_{L^2_{-\frac{\mu+1}{2}}(\beta)} \leq \mathrm{Cte}\|\overline{L_\mu^{(*)}}v\|_{L^2_{\frac{\mu-1}{2}}(\beta)} \quad .$$

Preuve du lemme

i) On choisit $\lambda=\mu$. Grâce à la positivité stricte de Λ' (dans l'inégalité de III.2.a), on voit que si μ_o est assez petit et u dans un sous-espace de codimension finie de D_μ (où les termes $(T_f v,v)_\beta$ et $(T_f' v,v)_{\beta_s}$ sont nuls), l'inégalité cherchée pour u suit de l'inégalité III.2.a, et s'étend aisément à la fermeture de L .

ii) On choisit $\lambda=-\mu$, le terme de bord de $\mathrm{Re}(tRv,v)_{\beta_s}$ étant nul dans ce cas. Après multiplication par -1 des deux membres de l'égalité III.2.a, on procède comme en i) .

3) Fin de la preuve du théorème I.4.

Elle repose sur le

<u>Lemme III.3.</u> Pour tout $\mu \in R$, on a les identités

$$\overline{(L_\mu^{(*)})^*} = \bar{L}_\mu \, , \quad (\bar{L}_\mu)^* = \overline{L_\mu^{(*)}} \, .$$

<u>Preuve</u>. On montre que $(\bar{L}_\mu)^* = \overline{L_\mu^{(*)}}$, l'autre égalité se prouvant d'une façon analogue, mais beaucoup plus aisément à cause de l'absence de traces dans la définition de D_μ .

Le lemme II.2 implique déjà que $\overline{L_\mu^{(*)}} \subset (\bar{L}_\mu)^*$. Soit maintenant $v \in L^2_{-\frac{\mu+1}{2}}(\beta) \cap D(\bar{L}_\mu)^*$ telle que $(\bar{L}_\mu)^* v = f$, ce qui signifie qu'il existe $f \in L^2_{-\frac{\mu-1}{2}}(\beta)$ telle que $\forall u \in \bar{D}_\mu(\beta)$, $(u,f) = (\bar{L}_\mu u, v)$. On se donne $0<\eta<T$ et $\Phi(t)$ une fonction réelle test dans $]0,T]$, avec $\Phi(t) = 1$ pour $\eta \leq t \leq T$. La fonction tronquée Φv est solution de $(\bar{L}_\mu)^*(\Phi v) = \tilde{f}$, avec

$$\tilde{f} = \Phi f - \Phi' v \, .$$

Les poids ne jouent maintenant plus aucun rôle dans la démonstration, qui s'effectue comme dans Lax et Phillips [7] . On obtient ainsi que v est continue sur $]0,T]$ à valeurs dans $H^{-1}(R^n_x)$, et $v(T) \equiv 0$; de plus $v_t \in L^2_{-\frac{\mu-1}{2}}([0,T], H^{-1}(R^n_x))$. Si maintenant $\Phi_\epsilon(x)$ désigne un régularisateur horizontal, alors $v_\epsilon = v * \Phi_\epsilon \in D_\mu^{(*)}$, $v_\epsilon \to v$ dans l'espace $L^2_{-\frac{\mu+1}{2}}(\beta)$ et $L^{(*)} v_\epsilon \to f$ dans $L^2_{-\frac{\mu-1}{2}}(\beta)$, ce qui signifie que $v \in D_\mu^{(*)}$ et $L_\mu^{(*)} v = f$.

Ce lemme prouvé, la démonstration du théorème s'achève de la façon habituelle.

<u>Remarque.</u> Si l'opérateur R est lui-même positif, ou si $r(x,\xi)$ ne dépend que de x seul ou de ξ seul, alors, dans les conditions du théorème I.4, $\bar{L}_\mu$ et $L_\mu^{(*)}$ sont des isomorphismes.

IV. Cas local.

On indique ici rapidement les modifications à apporter à la preuve du théorème I.4 dans le cas local.

a) Inégalité pour $L_\mu^{(*)}$

Les fonctions de $D_\mu^{(*)}$ s'annulent sur S ; après prolongement par z zéro hors de D, on intègre par parties comme en III.

b) Inégalité pour L_μ

On choisit une fonction C^∞ réelle non négative $\psi(t)$, telle que $\psi(t) = 0$ si $t \leq 1$, $\psi(t) = 1$ si $t \geq 2$, puis on pose $u_\epsilon(x,t) = \psi(t/\epsilon)\, u(x,t)$. On vérifie aisément que $u_\epsilon \to u$ dans $L^2_{\frac{\mu-1}{2}}(D)$, et que $Lu_\epsilon \to Lu$ dans $L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(D)$, lorsque $\epsilon \underset{>}{\to} 0$. Soit d'autre part θ une fonction test de R^{n+1} prolongeant la fonction t hors de D.

Pour intégrer par parties, on effectue d'abord la transformation

$$(\sim) : \quad \begin{aligned} x' &= x \\ t' &= \Phi(x) - t \end{aligned}$$

, qui transforme S en une partie de R^n_x, puis on prolonge par 0 la fonction transformée $\tilde{u}_\epsilon$ hors du nouveau domaine $\tilde{D}$.

On calcule alors comme en III.I., et ce faisant seuls les commutateurs du type $[\tilde{R},\tilde{\theta}]D^\alpha$ (où $|\alpha|=1$) apparaissent, ce qui modifie tout au plus l'opérateur noté P_0 en III.2.a d'un opérateur d'ordre 0. Revenant aux coordonnées (x,t) et passant à la limite lorsque $\epsilon \underset{>}{\to} 0$, on achève la discussion des signes comme en III.2.a, en notant que l'hypothèse faite sur la normale extérieure à S assure la positivité (au sens de III.2.a) du terme de bord sur S.

V. Quelques exemples d'application à la résolution dans les fonctions régulières.

On suppose dorénavant que les A_i et B sont des matrices C^∞ dépendant de t seul.

Dans le cas global , r ne dépend alors que de ξ et les inégalités du lemme III.2. sont vraies sans exception.

Dans le cas local, on obtient des inégalités vraies sans exception lorsque ne dépend que de ξ (cf. l'exemple traité plus loin).

1) Un lemme de régularité.

Lemme V.1. On suppose $\mu<\mu_o$.

i) Si $u \in \bar{D}_\mu(\beta)$, $\bar{L}_\mu u = f$, et $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(\beta)$, alors $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \bar{D}_\mu(\beta)$.

ii) En notant $\partial = t\frac{\partial}{\partial t}$, si $u \in \bar{D}_\mu(\beta)$, $\bar{L}_\mu u = f$, et $\partial^\ell \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f \in L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(\beta)$ pour tous ℓ,α tels que $\ell+|\alpha|\leq p$, alors $\partial^\ell \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u \in L^2_{\frac{\mu-1}{2}}(\beta)$ pour tous ℓ,α , $\ell+|\alpha|\leq p$.

Preuve du lemme. i) $\Phi_\epsilon(x)$ étant un régularisateur horizontal, on pose $u_n = \frac{\partial}{\partial x_i}(u * \Phi_{1/n})$. On a $u_n \in D_\mu$ (cela suit la preuve de III.3), et $Lu_n = \frac{\partial f}{\partial x_i} * \Phi_{1/n}$. Donc $Lu_n \to \frac{\partial f}{\partial x_i}$ lorsque $n \to +\infty$, dans $L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(\beta)$.
L'inégalité d'énergie relative à $\bar{L}_\mu$ montre que u_n est de Cauchy dans $L^2_{\frac{\mu-1}{2}}(\beta)$, et converge vers $v \in L^2_{\frac{\mu-1}{2}}(\beta)$. De fait, $v=\frac{\partial u}{\partial x_i}$ au sens des distributions, et $v \in \bar{D}_\mu$.

ii) La preuve , aisée, est laissée au lecteur.

2) Un calcul sur des développements limités.

Soit $u(x,t)$ une fonction de la forme

$$u(x,t) = t^\rho(a_o(x)+\dots\dots+t^k a_k(x)).$$

On notera, provisoirement :

$$A_i(t) = A_i(O) + t A_i'(O) + \dots + \frac{t^k}{k!} A^{(k)}(O) + \bar{A}_i$$
$$B(t) = B(O) + \dots + \frac{t^k}{k!} B^{(k)}(O) + \bar{B} \quad .$$

On se propose d'écrire Lu en un développement suivant les puissances croissantes de t, avec un reste d'ordre $\rho+k$ en t.

On a $\frac{\partial u}{\partial t} = \rho t^{\rho-1}(a_o + \dots + t^k a_k) + t^\rho(a_1 + \dots + kt^{k-1} a_k)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = t^\rho \left(\frac{\partial a_o}{\partial x_i} + \dots + t^k \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right)$$

d'où

$$Lu = t^{\rho-1}(\rho+B(O))a_o + \dots + t^{\rho+j} \left[(\rho+j+1+B(O))a_{j+1} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=O}^{j} \frac{A_i^{(j-\ell)}(O)}{(j-\ell)!} \frac{\partial a_\ell}{\partial x_i}\right.$$
$$\left. + \sum_{\ell=O}^{j} \frac{B^{(j+1-\ell)}}{(j+1-\ell)!} a_\ell \right] + R \; ;$$

où j varie de O à $k-1$, et où R est le produit par $t^{\rho+k}$ d'une fonction C^∞ de t, ayant en x une régularité aisément déduite de celle des a_i.

3) <u>Théorème V.3.</u> Soit $\rho \in R$ tel que $\forall q \in N$, $p+1+q$ n'est pas valeur propre de $-B(O)$. Alors, pour toute fonction f telle que $t^{-\rho} f \in D_{L^2}(\beta)$, il existe une unique fonction u telle que $t^{-(\rho+1)} u \in D_{L^2}(\beta)$ et

$$Lu = f \quad .$$

<u>Preuve.</u> a) on choisit un entier k tel que $-2(\rho+k+1)-1 < \mu_o$, puis on développe f sous la forme

$$f(x,t) = t^\rho(f_o(x)+tf_1(x) + \dots + t^k f_k(x)) + \bar{f}(x,t) \quad .$$

Ici, les $f_i(x) \in D_{L^2}(R^n_x)$ et $\bar{f}$ est telle que $t^{-(\rho+k+1)}\bar{f} \in L^2(\beta)$.

On construit alors une solution, notée u_k, de $Lu=f$, de la façon suivante :

$u_k = u_k' + u_k''$, et chacune des fonctions u_k' et u_k'' est construite ainsi :

i) $u'_k(x,t)$ est prise sous la forme

$$u'_k(x,t) = t^{\rho+1}(a_0(x) + \dots + t^k a_k(x))$$

les $a_i(x)$ étant des fonctions de $D_{L^2}(R^n_x)$ déterminées par les relations de récurrence

$$\{ [(\rho+j+1)+B(0)] a_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=0}^{j-1} \frac{A_i^{(j-1-\ell)}}{(j-1-\ell)!} \frac{\partial a_\ell}{\partial x_i} + \sum_{\ell=0}^{j-1} \frac{B^{(j-\ell)}}{(j-\ell)!} a_\ell = f_j \quad \text{où } j = 0,\dots,k \,,$$

en sorte que

$$Lu'_k - f = -R \,, \text{ avec } t^{-(\rho+k+1)}R \in L^2(\beta) \,.$$

ii) u''_k est l'unique élément de $\bar{D}_{-2(\rho+k+1)-1}(\beta)$ tel que

$$Lu''_k = R = f - Lu'_k \,.$$

b) Supposons alors choisi un entier $k' > k$, et soit $u_{k'} = u'_{k'} + u''_{k'}$ la solution de $Lu = f$ construite comme indiqué en a).

La fonction $v = u_k - u_{k'}$ est telle que $Lv = 0$.

De plus,

$$u''_{k'} \in \bar{D}_{-2(\rho+k'+1)-1}(\beta) \subset \bar{D}_{-2(\rho+k+1)-1}(\beta)$$

et comme il est clair par construction

$$u'_{k'} - u'_k \in D_{-2(\rho+k+2)+1}(\beta) = D_{-2(\rho+k+1)-1}(\beta) \,,$$

en sorte que finalement $v \in \bar{D}_{-2(\rho+k+1)-1}(\beta)$. D'où $v = 0$.

c) $u'_{k'}$ est telle que $t^{-(\rho+1)}u'_{k'} \in D_{L^2}(\beta)$, par construction. D'autre part, le lemme de régularité et les hypothèses faites sur f montrent que $t^{-(\rho+1)}u''_{k'}$ possède des dérivées horizontales de tous ordres dans $L^2(\beta)$ et des dérivées par rapport à t qui sont dans $L^2(\beta)$ jusqu'à l'ordre k'.

Donc, puisque pour tout $k' > k$,

$$t^{-(\rho+1)}u_k = t^{(\rho+1)}u_{k'} = t^{(\rho+1)}u'_{k'} + t^{-(\rho+1)}u''_{k'} \,,$$

on a $t^{-(\rho+1)}u_k \in D_{L^2}(\beta)$.

d) Soit $u = t^{\rho+1}v$, $v \in D_{L^2}(\beta)$, telle que $Lu = 0$. En développant v à un ordre suffisant et en utilisant le calcul 2), puis le théorème d'unicité de III), on obtient $u = 0$.

4) Théorème V.4. Soit $\lambda \in R$ tel que λ soit valeur propre de $-B(0)$, mais qu'aucun des nombres $\lambda+1+q$, $q \in N$, ne le soit. Alors pour tout $u_0 \in D_{L^2}(R^n_x)$, $u_0 \in \ker(\lambda+B(0))$, il existe un unique u tel que

$$t^{-\lambda}u \in D_{L^2}(\beta)\ ,\ t^{-\lambda}u_{|t=0} = u_0\ ,\ Lu = 0 \text{ dans } \beta .$$

Preuve. a) On choisit $k \in N$ en sorte que $-2(\lambda+k)-1 < \mu_0$, puis l'on détermine des fonctions $a_0, \ldots, a_k$ de $D_{L^2}(R^n_x)$ par les conditions $a_0 = u_0$ et

$$\{[(\lambda+j+1)+B(0)]a_{j+1} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=0}^{j} \frac{A_i^{(j-\ell)}}{(j-\ell)!} \frac{\partial a_\ell}{\partial x_i} + \sum_{\ell=0}^{j} \frac{B^{(j+1-\ell)}}{(j+1-\ell)!} a_\ell = 0 .$$

où $j = 0, \ldots, k-1$.

De cette façon, si l'on pose $v = t^{\lambda}(a_0(x) + \ldots + t^k a_k(x))$, on a $t^{-\lambda}v|_{t=0} = u_0$ et $t^{-(\lambda+k)}Lv \in D_{L^2}(\beta)$.

D'après le théorème V.3), il existe w tel que $t^{-(\lambda+k+1)}w \in D_{L^2}(\beta)$ et $Lw = Lv$.

La fonction $u = v - w$ est une solution du problème posé.

b) Soit u tel que $t^{-\lambda}u \in D_{L^2}(\beta)$, $t^{-\lambda}u_{|t=0} = 0$, et $Lu = 0$.

Le calcul 2) et les hypothèses montrent que u s'annule suffisamment pour qu'on puisse conclure $u = 0$.

Remarque. Dans certains cas (par exemple λ et $\lambda+1$ valeurs propres de $-B(0)$, mais non les autres nombres $\lambda+1+q$, $q \in N$) on obtient des solutions du noyau avec d'autres traces que celles indiquées dans le théorème 4). Les traces imposées doivent alors vérifier les conditions de compatibilité déduites des relations de récurrence de 2).

5) Illustration des méthodes et des résultats sur un exemple

On considère l'opérateur

$$P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{b(t)}{t}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c(t)}{t^2} ,$$

pour lequel la matrice $A = (a_{ij})$ est hermitienne et telle que $\mathrm{Re}(\sum_{j,i=1}^{n} a_{ij}\xi_i\bar{\xi}_j) \geq \alpha_o |\xi|^2$, où $\xi \in \mathbb{C}^n$ et $\alpha_o > 0$ est un nombre fixe. Parmi ces opérateurs, on trouve les opérateurs d'Euler-Poisson-Darboux : $\square + \frac{\lambda}{t}\frac{\partial}{\partial t}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$.

Ceux-là, très étudiés, interviennent en particulier dans des problèmes de moyennes de fonctions de la façon suivante : étant donnée $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, la "fonction moyenne" $u(x,t)$ (= moyenne de f sur la boule de centre x et de rayon t (resp. la sphère)), est, pour $t>0$, la solution du problème

$$\begin{cases} (\square + \frac{n+1}{t}\frac{\partial}{\partial t})u = 0 \qquad (\text{resp.}\ \square + \frac{n-1}{t}\frac{\partial}{\partial t}) \ . \\ u(x,0) = f(x) \\ u'_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

L'étude du problème de Cauchy pour P a donc une origine géométrique (cf. par exemple [5], [2]). La réduction de P à un système du type (*) et l'application des théorèmes V.3 et V.4. (dans le cas où $\lambda = 0$) conduisent aux théorèmes suivants :

Théorème V.5.a. On suppose que les racines de l'équation $\lambda^2+\lambda(b(0)+1)+b(0)+c(0)=0$ ne sont pas des entiers non nuls (positifs). Alors, pour tout $f \in C^\infty(\bar{D})$, il existe un unique $u \in C^\infty(\bar{D})$ tel que

$$Pu = f \ , \ u_{|t=0} = 0 \ , \ u'_t{}_{|t=0} = 0 \ .$$

Théorème V.5.b. On fait la même hypothèse qu'en V.5.a.

i) Si $c(0)=0$, $b(0) \neq 0$, pour tout $g \in C^\infty(\bar{\Omega})$, il existe un unique $u \in C^\infty(\bar{D})$ tel que

$$Pu = 0 \ , \ u_{|t=0} = g \ , \ u'_t{}_{|t=0} = -\frac{c'(0)}{b(0)} g \ .$$

ii) Supposons $c(0) \neq 0$:

. Lorsque de plus $b(0)+c(0) \neq 0$, pour tout $u \in C^\infty(\bar{D})$ avec $Pu = 0$, est identiquement nul.

. Lorsque $b(0) = c(0) = 0$, pour tout $h \in C^\infty(\bar{\Omega})$, il existe un unique $u \in C^\infty(\bar{D})$ tel que

$$Pu = 0 \ , \ u_{|t=0} = 0 \ , \ u'_t{}_{|t=0} = h(x).$$

Preuve des théorèmes V.5.a et b .

a) Réduction à un système. Si u est une solution régulière de $Pu=f$, en posant $u_0=u'_t$, $u_i=u'_{x_i}$, $u_{n+1}=u/t$, on observe que le vecteur $\mathcal{U}=(u_0,\dots\dots,u_{n+1})$ est solution de $L\mathcal{U} = \mathcal{F}$, avec

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a_{i1}, & \cdots & ,-a_{in}, & 0 \\ \vdots & & & & \\ -1 & & 0 & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}}_{A_i} + \underbrace{\begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & c \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -1 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \frac{1}{t}$$

$i+1$ ligne

et $\mathcal{F}=(f,0,\dots,0)$.

On peut choisir comme symétriseur

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & & \vdots \\ \vdots & A & 0 \\ 0 \cdots\cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } R+R^H > 0$$

Le terme de bord sur S s'écrit

$$\mathrm{Re}(tRv, A_\nu v)_S \ , \text{ où } A_\nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_i A_i \ , \ \nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$$

étant le vecteur unitaire normal à S, dirigé vers l'extérieur de D . Soit $A_\nu = \frac{1}{\sqrt{1+|\mathrm{grad}\,\Phi|^2}}(1-\sum_{i=1}^{n} \Phi_i A_i)$, où $t=\Phi(x)$ est l'équation de S au-dessus de Ω et $\Phi_i = \Phi_{x_i}$.

Le terme s'écrit donc

$$\mathrm{Re}\int_S t^\lambda \frac{d\sigma}{\sqrt{1+|\mathrm{grad}\,\Phi|^2}}\Big[(Ru,u)-\sum_{i=1}^n \Phi_i(u,RA_iu)\Big],$$ et il est non négatif dès que les Φ_i sont assez petits, selon l'hypothèse du théorème I.4.b.

Supposons en particulier que S soit caractérisitque au-dessus de tout Ω, i.e. $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\,\Phi_i\,\Phi_j = 1$; c'est en fait le cas qui fournit le plus grand domaine D où l'on peut résoudre avec unicité. On a alors

$$(Ru,u)-\sum_{i=1}^n \Phi_i(u,RA_iu) = |u_{n+1}|^2+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\,\tilde{u}_i\,\bar{\tilde{u}}_j\ ,$$

où bien sûr $\tilde{u}_i = u_i + \Phi_i u_o$ (dérivées le long de S) .

b) <u>Calcul des valeurs propres de</u> $-B(O)$. On a

$\det(\lambda+B(O)) = \lambda^n[\lambda^2+(b(O)+1)+b(O)+c(O)]$. L'application des théorèmes V.3 et V.4. pour les valeurs $\rho=O$ et $\lambda=O$ est donc possible dans l'hypothèse de V.5.a.

Le théorème V.3 indique alors ceci :

$$\forall\,\mathcal{F}\in C^\infty(\bar{D})\ ,\quad \exists\ \text{unique},\ \mathcal{U}\in C^\infty(\bar{D}),\ \mathcal{U}_{|t=o}=O\ ,$$

et

$$L\mathcal{U}=\mathcal{F}\ .$$

En vue d'un retour à l'opérateur P, prenons $\mathcal{F}=(f,O,\ldots\ldots,O)$, et posons $u=tu_{n+1}$. L'équation $L\mathcal{U}=\mathcal{F}$ implique

$$u'_t = u_{n+1} + tu'_{{n+1}_t} = u_{n+1}+t\Big(\frac{u_o}{t}-\frac{u_{n+1}}{t}\Big) = u_o\ ,$$ puis

$(u_{x_i})_t-(u_i)_t=(u_o)_{x_i}-(u_i)_t=O$. Puisque $u_{x_i|t=o}=u_{i|t=o}=O$, on a $u_{x_i}=u_i$, et donc $Pu=f$. On a obtenu le théorème V.5.a.

Pour appliquer le théorème V.4, calculons $\ker B(O)$:

si $b(O)+c(O)\neq O$, $\ker B(O)=\{(v_o,\ldots,v_{n+1})\ ,\ v_o=v_{n+1}=O\}$

si $b(O)+c(O)=O$, $\ker B(O)=\{(v_o,\ldots\ldots,v_{n+1})\ ,\ v_o=v_{n+1}\}$.

Cas i : $c(O)=O$, $b(O) \neq O$.

Si en fait $c \equiv O$, il suffit de choisir, pour appliquer le théorème V.4, $\mathcal{U}|_{t=o} = (O, g_{x_i}, \ldots, g_{x_n}, O)$. On pose ensuite $u = tu_{n+1} + g(x)$, d'où $u'_t = u_o$, $(u_{x_i} - u_i)_t = O$ et $u_{x_i} - u_i|_{t=o} = O$, soit enfin

$$u \in C^\infty(\bar{D}) \text{ , } u_{|t=o} = g(x) \text{ , } u'_t|_{t=o} = O \text{ , } Pu=O \text{ .}$$

Sinon, on peut utiliser la remarque qui suit le théorème V.4 et appliquer ce dernier avec $\lambda=-1$; on obtient ceci :

Si $a_o \in \ker(B(O)-1)$, et a_i est tel que

$$Ba_1 + \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial a_o}{\partial x_i} + B'(O)a_o = O$$, il existe un unique $\mathcal{U}$ tel que $t\,\mathcal{U} \in C^\infty(\bar{D})$, $t\,\mathcal{U}_{|t=o} = a_o$, $(t\mathcal{U})'_{t|t=o} = a_1$, et $L\mathcal{U} = O$. On prend ici $a_o = (O, \ldots, O, g)$ et $a_1 = (-\frac{c'(O)}{b(O)} g, g'_{x_1}, \ldots, g'_{x_n}, -\frac{c'(O)}{b(O)} g)$. On pose alors $u = tu_{n+1}$, et l'on en déduit l'existence de $u \in C^\infty(\bar{D})$ tel que $Pu = O$, $u_{|t=o} = g$, $u'_t|_{t=o} = -\frac{c'(O)}{b(O)} g$

Cas ii : Si $b(O) + c(O) \neq O$, on est ramené au cas du théorème V.3.

Si $b(O) + c(O) = O$, pour tout $h(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ on trouve, par application du théorème V.4, un unique $\mathcal{U} \in C^\infty(\bar{D})$ tel que $\mathcal{U}_{|t=o} = (h(x), O, \ldots, O, h(x))$, et $L\mathcal{U} = O$. On en déduit l'existence d'un $u \in C^\infty(\bar{D})$ tel que $u_{|t=o} = O$, $u'_t|_{t=o} = h(x)$, $Pu = O$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ALINHAC - " L'opérateur $y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial y}$ dans le demi-plan $y \leq O$ " . Orsay I973

[2] S. ALINHAC - " Une caractérisation des fonctions harmoniques dans un ouvert borné par des propriétés de moyenne sur certaines boules". Thèse de 3ème cycle, Orsay I972 .

[3] S. ALINHAC - " Problèmes de Cauchy pour des opérateurs singuliers". A paraître.

[4] BAOUENDI et GOULAOUIC - " Cauchy Problems with characteristic initial hypersurface".
A paraître aux Communications on Pure and Applied Mathematics.

[5] J. DELSARTRE et J.L. LIONS - "Moyennes généralisées".
Bulletin de la S.M.F. , 1959.

[6] K.O. FRIEDRICHS - "Pseudo differential operators".
Courant Institute of Math. Science, New York University.

[7] P.D. LAX et PHILIPPS - "Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators".
Communications on Pure and Applied Math., vol.13 (1960).

[8] J.L. LIONS - "Opérateurs de Delsarte et problèmes mixtes".
Bull. de la S.M.F., 84 (1956).