PIERRE BOLLEY

JACQUES CAMUS

B. HANOUZET

Étude de l'analyticité et de la régularité Gevrey pour une classe de problèmes aux limites elliptiques et dégénérés

Astérisque, tome 19 (1974), p. 25-48

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__19__25_0>

Astérisque
n°19 (1974) p.25-48

ETUDE DE L'ANALYTICITE ET DE LA REGULARITE GEVREY POUR UNE CLASSE DE PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES ET DEGENERES

P. BOLLEY - J. CAMUS - B. HANOUZET

Université de Rennes

Société Mathématique de France

INTRODUCTION.

On se propose d'étudier la régularité analytique et la régularité dans les classes de Gevrey pour les problèmes aux limites associés aux opérateurs elliptiques dégénérés considérés dans [2].

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{\Omega}$ soit une variété à bord de classe de Gevrey d'ordre s, de bord Γ. Soit φ une fonction de Gevrey d'ordre s de $\mathbb{R}^n$ dans R vérifiant :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi(x) > o\}, \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi(x) = o\}, \\ \text{grad } \varphi(x) \neq o \text{ pour tout } x \text{ appartenant à } \Gamma. \end{cases}$$

On introduit un opérateur différentiel sur Ω défini par :

$$Lu(x) = \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)} P^{2m-h}(x \ ; D_x) \{(\varphi(x))^{k-h} u(x)\}.$$

où k et m sont deux entiers, $P^{2m-h}(x \ ; D_x)$ est un opérateur différentiel d'ordre 2m-h au plus, $P^{2m}(x \ ; D_x)$ étant d'ordre 2m exactement et proprement elliptique dans $\overline{\Omega}$.

On donne de plus une famille d'opérateurs frontière :

$B \gamma u = (B_1 \gamma u, \ldots, B_q \gamma u)$.

On montre que, sous certaines conditions sur les opérateurs L et B_j pour $j=1,\ldots,q$, pour tout ouvert ω de $\mathbb{R}^n$, si u est une fonction de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$ telle que Lu soit de classe de Gevrey d'ordre s sur $\omega \cap \overline{\Omega}$ et $B_j \gamma u$ soit de classe de Gevrey d'ordre s sur $\omega \cap \Gamma$ pour $j = 1,\ldots,q$, alors u est de classe de Gevrey d'ordre s sur $\omega \cap \overline{\Omega}$. En particulier, on obtient les résultats de régularité analytique (pour s=1).

Si $\overline{\omega}$ est contenu dans Ω, le résultat est classique (cf. [4], par exemple). Le problème est donc l'étude de la régularité au bord. La méthode d'étude est une adaptation de celle donnée dans [5] déjà utilisée dans [1] pour un opérateur elliptique dégénéré d'ordre 2. On rencontre quelques difficultés techniques supplémentaires dues à la présence des opérateurs frontière $B_j \gamma$ qui font intervenir des "traces généralisées". D'autre part, la forme générale de l'opérateur L nécessite l'utilisation d'inégalités a priori d'ordre élevé alors que dans [1] les inégalités avec second membre dans $L^2(\Omega)$ suffisent. Ces inégalités a priori permettent d'obtenir la majoration des dérivées presque tangentielles (c'est-à-dire des dérivées dont l'ordre suivant la direction normale reste inférieur ou égal à une constante fixée) ; puis, en fixant l'ordre des inégalités utilisées, cet ordre étant choisi suffisamment grand, par des inégalités de Hardy et une récurrence d'un type particulier, on majore toutes les dérivées en revenant à l'expression de Lu.

Ces résultats ont été annoncés dans [3].

Le plan suivi est le suivant :

I - Notations et hypothèses.

II - Transformation des inégalités a priori.

III - Majoration des dérivées presque tangentielles.

IV - Majoration de toutes les dérivées.

V - Conclusion locale dans le demi-espace $\mathbb{R}^n_+$.

VI - Conclusions locale et globale dans l'ouvert Ω.

I. NOTATIONS ET HYPOTHESES.

On s'intéresse tout d'abord au problème localisé dans le demi-espace $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_n > o\}$. Pour l'essentiel des propriétés, on renvoie à [2].

1°) Les espaces.

Pour s appartenant à $\mathbb{R}$, on désigne par $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ (resp. $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$) l'espace de Sobolev d'ordre s sur $\mathbb{R}^n_+$ (resp. $\mathbb{R}^{n-1}$).

Etant donnés deux entiers ℓ et k de $\mathbb{N}$, on définit les espaces de Sobolev avec poids suivants :

$$W^\ell_k(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in H^{\ell-k}(\mathbb{R}^n_+) \ ; \ x_n^k \, u \in H^\ell(\mathbb{R}^n_+)\}$$

muni de la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{W^\ell_k(\mathbb{R}^n_+)} = \{\|u\|^2_{H^{\ell-k}(\mathbb{R}^n_+)} + \|x_n^k \, u\|^2_{H^\ell(\mathbb{R}^n_+)}\}^{\frac{1}{2}} .$$

L'espace $W^\ell_k(\mathbb{R}^n_+)$ s'identifie à l'espace $\{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+) \ ; \ x_n^{k-h} \, u \in H^{\ell-h}(\mathbb{R}^n_+),$ $h = o,\dots,k\}$. L'espace $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$(*) est dense dans $W^\ell_k(\mathbb{R}^n_+)$; en utilisant les inégalités de Hardy suivantes (cf. [1]), pour tout entier i et j et u appartenant à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, on a :

$$\text{(I.1)} \qquad \|D^i_{x_n} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq \left[(i+\tfrac{1}{2}) \ \dots \ (i+j-\tfrac{1}{2})\right]^{-1} \|D^{i+j}_{x_n}(x_n^j \, u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} ,$$

on obtient ainsi une nouvelle caractérisation de $W^\ell_k(\mathbb{R}^n_+)$: l'espace $W^\ell_k(\mathbb{R}^n_+)$ coïncide algébriquement et topologiquement avec le complété de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ pour la norme

$$\text{(I.2)} \qquad u \longmapsto \|x_n^k \, u\|_{H^\ell(\mathbb{R}^n_+)} .$$

Remarque. Les inégalités (I.1) sont valables dans un cadre bien plus général. Par exemple, elles subsistent si on remplace $\mathbb{R}^n_+$ par $\omega' \times \,]o,a[$ où ω' est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et a un nombre > o.

(*) $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ désigne l'espace des restrictions à $\mathbb{R}^n_+$ des fonctions de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^n$ et à support compact dans $\mathbb{R}^n$.

Etant donné un élément u appartenant à $W_k^\ell(\mathbb{R}_+^n)$, on lui associe ℓ fonctions $\gamma_q\, u(x')$, appelées traces généralisées de u (cf. [6]) et définies par :

(I.3) $$\gamma_q\, u(x') \begin{cases} D_{x_n}^q\, u(x',0) \text{ pour } q = 0,\dots,\ell-k-1, \text{ si } 0 \leq k < \ell, \\ (-1)^{-q-1} \displaystyle\int_0^{+\infty} x_n^{-q-1}\, \chi(x_n)\, u(x',x_n)\, dx_n \\ \qquad \text{pour } q = -k,\dots,\min(-1,\ell-k-1) \text{ si } k \geq 1, \end{cases}$$

où χ est une fonction de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$, égale à 1 dans un voisinage de 0. Dans la suite, on supposera que le support de χ est suffisamment petit. On note

$$\gamma\, u = \{\gamma_{-k}\, u,\dots,\gamma_{\ell-k-1}\, u\}.$$

L'opérateur γ est un opérateur linéaire, continu et surjectif de $W_k^\ell(\mathbb{R}_+^n)$ dans

$$\prod_{q=-k}^{\ell-k-1} H^{\ell-k-q-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

2°) <u>Les opérateurs</u>.

Soit l'opérateur $L \equiv L(x\,;\,D_x)$ défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

(I.4) $$Lu(x) \equiv L(x\,;\,D_x)\,\{u(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} P^{2m-h}(x\,;\,D_x)\,\{x_n^{k-h}\, u(x)\}$$

où k et m sont deux entiers de $\mathbb{N}$, et où :

(i) $P^{2m-h}(x\,;\,D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles, à coefficients indéfiniment dérivables et à dérivées bornées dans $\mathbb{R}^n$, d'ordre 2m-h au plus de la forme $$P^{2m-h}(x\,;\,D_x) = \sum_{|\alpha|\leq 2m-h} p_\alpha^{2m-h}(x)\, D_x\ ;$$

(ii) $P^{2m}(x\,;\,D_x)$ est un opérateur d'ordre 2m, proprement elliptique dans $\overline{\mathbb{R}_+^n}$.

Soit p un entier de $\mathbb{N}$ fixé pour toute la suite. On considère χ_p opérateurs frontière $B_j \equiv B_j(x'\,;\,D_{x'})$ pour $j=1,\dots,\chi_p$ définis, pour u appartenant à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)$, par :

(I.5) $$B_j(x'\,;\,D_{x'})\,\gamma u(x') = \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{jq}(x'\,;\,D_{x'})\,\gamma_q\, u(x')$$

où $B_{jq}(x', D_{x'}) = \sum_{|\mu| \leq m_j - q} b^{\mu}_{j,q}(x') D^{\mu}_{x'}$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment dérivables et à dérivées bornées dans $\mathbb{R}^{n-1}$, d'ordre m_j-q au plus, m_j étant un entier vérifiant $-k \leq m_j \leq 2m+p-k-1$ (si m_j-q est négatif l'opérateur $B_{jq}(x' ; D_{x'})$ correspondant est par définition l'opérateur nul).

Remarque. Pour certains entiers p, on prendra $\chi_p = 0$; dans ce cas, la famille d'opérateurs frontière est vide (c'est par exemple le cas étudié dans [1]). Les résultats suivants sont tous écrits en supposant $\chi_p > o$; les modifications à faire lorsque $\chi_p = o$ étant évidentes.

3°) Estimations a priori.

On suppose que l'opérateur L, l'entier p, les opérateurs frontière B_j pour $j=1,\dots,\chi_p$ sont tels que : pour tout entier $r \geq p$, il existe une constante $C_r > 0$ telle que pour toute fonction u de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ à support suffisamment petit contenu dans un voisinage de l'origine, on ait :

$$\text{(I.6)} \quad \|u\|_{W_k^{2m+r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C_r \left\{ \|Lu\|_{H^r(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=1}^{\chi_p} \|B_j \gamma u\|_{H^{2m+r-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W_k^{2m+r-1}(\mathbb{R}^n_+)} \right\},$$

soit encore :

$$\text{(I.7)} \quad \|x_n^k u\|_{H^{2m+r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C_r \left\{ \|Lu\|_{H^r(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=1}^{\chi_p} \|B_j \gamma u\|_{H^{2m+r-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|x_n^k u\|_{H^{2m+r-1}(\mathbb{R}^n_+)} \right\}.$$

Dans [2], on donne des conditions suffisantes sur l'opérateur L et les opérateurs B_j pour que de telles estimations soient réalisées.

Dans la deuxième partie, nous allons transformer cette inégalité en supposant de plus que les coefficients de L et de B_j sont dans des classes de Gevrey. Rappelons que si K est un compact de $\mathbb{R}^n$, s un nombre réel ≥ 1, on appelle classe de Gevrey d'ordre s sur K, l'espace $G_s(K)$ des fonctions u de classe C^∞ sur K à valeurs complexes telles qu'il existe une constante $L > o$ avec :

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{N}^n} L^{-|\alpha|} (|\alpha|!)^{-s} \|D^\alpha u\|_{L^2(K)} < +\infty.$$

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $G_s(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ sur Ω qui sont de classe de Gevrey d'ordre s sur tout compact contenu dans Ω. Pour s=1, on obtient les fonctions analytiques. On peut aussi définir ces espaces en utilisant les normes L^∞ au lieu des normes L^2.

II. TRANSFORMATION DES INEGALITES A PRIORI.

Soient a et b deux nombres réels tels que $o < b < a$. Soit ω' un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\omega = \omega' \times [o,a[$ le cylindre correspondant dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$. Pour $o < \varepsilon < a$, on pose :

$\omega'_\varepsilon = \{x\in\omega' \ ; \ d(x,\partial\omega') > \varepsilon\}$ où $d(x,\partial\omega')$ est la distance de x à la frontière $\partial\omega'$ de ω' ;

$\omega_\varepsilon = \omega'_\varepsilon \times [o,a-\varepsilon[$;

$N'_\varepsilon(v) = \|v\|_{L^2(\omega'_\varepsilon)}$;

$N_\varepsilon(u) = \|u\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}$.

On suppose que les coefficients des opérateurs L et B_j sont de classe de Gevrey d'ordre s sur $\overline{\omega}$ et $\overline{\omega}'$ respectivement, c'est-à-dire, plus précisément :

(II.1) : Il existe une constante $K_1 > o$ telle que pour tout γ de $\mathbb{N}^n$, on ait :

$$\sup_{\alpha,h} \|D_x^\gamma p_\alpha^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega)} \leq K_1^{|\gamma|+1} (|\gamma|!)^s \ ;$$

(II.2) : Il existe une constante $K_2 > o$ telle que pour tout γ' de $\mathbb{N}^{n-1}$, on ait :

$$\sup_{\mu,j,q} \|D_x^{\gamma'} b^\mu_{j,q}\|_{L^\infty(\omega')} \leq K_2^{|\gamma'|+1} (|\gamma'|!)^s.$$

Dans la suite, on choisira $K_1 = K_2 = K$.

On suppose aussi que la fonction χ intervenant dans la définition des traces γ_q (cf. (I.3)) a son support dans $[o,b[$.

En supposant que les estimations a priori (I.7) sont valables dès que le support de u est dans ω et en utilisant la méthode "des ouverts emboités" de Morrey et Nirenberg, on se propose d'obtenir une majoration valable pour des u à support quelconque.

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon_1 > 0$ tels que $\varepsilon + \varepsilon_1$ soit inférieur à a-b, il existe une fonction ψ appartenant à $\mathcal{D}(\omega_{\varepsilon_1})$ telle que :

$$\text{(II.3)}\quad \begin{cases} \psi(x',x_n) = \psi_1(x')\,\psi_2(x_n)\ ; \\ \psi(x) = 1 \text{ pour } x \text{ appartenant à } \omega_{\varepsilon+\varepsilon_1}\ ; \\ \|D^{\gamma}_{x'}\,\psi_1\|_{L^{\infty}(\omega')} \leq C_1\,\varepsilon^{-|\gamma|} \text{ pour tout } \gamma \text{ de } \mathbb{N}^{n-1}\ ; \\ \|D^{\nu}_{x_n}\,\psi_2\|_{L^{\infty}(0,a)} \leq C_1\,\varepsilon^{-\nu} \text{ pour tout } \nu \text{ de } \mathbb{N}, \end{cases}$$

la constante C_1 étant indépendante de ε et ε_1 .

Appliquant l'estimation (I.7) à ψu , pour u dans $C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, on obtient une première majoration.

Lemme II.1. *Il existe une constante* $C_2 > 0$ *dépendant des coefficients de* L, *de* B_j *et de l'entier* $r \geq p$ *telle que, pour tout* u *appartenant à* $C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, *pour tout* $\varepsilon > 0$ *et* $\varepsilon_1 > 0$ *avec* $\varepsilon + \varepsilon_1 < a-b$ *et pour tout* ν *appartenant à* $\mathbb{N}^n$ *avec* $|\nu| \leq 2m+r$, *on ait :*

$$N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^{\nu}_x(x^k_n\, u)) \leq C_2 \Big\{ \sum_{|\beta|\leq r} \varepsilon^{-r+|\beta|}\, N_{\varepsilon_1}(D^{\beta}_x\,(Lu)) + \sum_{|\beta|\leq 2m+r-1} \varepsilon^{-2m-r+|\beta|}\, N_{\varepsilon_1}(D^{\beta}_x\,(x^k_n\, u)) + \sum_{j=1}^{p} \|\psi_1\, B_j\,\gamma\,(\psi_2\, u)\|_{H^{2m+r-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \Big\}.$$

Démonstration : en utilisant l'estimation (I.7) et les propriétés de la fonction ψ on obtient :

$$N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^{\nu}_x(x^k_n\, u)) \leq \|x^k_n\,(\psi u)\|_{H^{2m+r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C_r \Big\{ \|L(\psi u)\|_{H^r(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=1}^{p} \|B_j\,\gamma(\psi u)\|_{H^{2m+r-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|x^k_n\,\psi u\|_{H^{2m+r-1}(\mathbb{R}^n_+)} \Big\}.$$

Dans la suite, C désignera une constante dépendant de L, B_j et r mais qui peut varier à chaque étape. On a tout d'abord :

$$\|x_n^k\,(\psi u)\|_{H^{2m+r-1}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C. \sum_{|\alpha|\leq 2m+r-1} \sum_{\beta\leq\alpha} |D_x^{\alpha-\beta}\,\psi|_{L^\infty(\omega_{\varepsilon_1})} N_{\varepsilon_1}\,(D_x^\beta\,(x_n^k\,u))$$

$$\leq C. \sum_{|\beta|\leq 2m+r-1} \varepsilon^{-2m-r+|\beta|}\, N_{\varepsilon_1}\,(D_x^\beta\,(x_n^k\,u)).$$

On a ensuite :

$$\|L(\psi u)\|_{H^r(\mathbb{R}_+^n)} \leq \|\psi\,Lu\|_{H^r(\mathbb{R}_+^n)} + \|[L,\psi]u\|_{H^r(\mathbb{R}_+^n)}$$

où $[L,\psi]u = L(\psi u) - \psi\,Lu$. On a directement :

$$\|\psi\,Lu\|_{H^r(\mathbb{R}_+^n)} \leq C. \sum_{|\beta|\leq r} \varepsilon^{-r+|\beta|}\, N_{\varepsilon_1}\,(D_x^\beta\,(Lu)),$$

et en utilisant les inégalités de Hardy (cf. (I.1)), on a :

$$\|[L,\psi]u\|_{H^r(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \sum_{|\beta|\leq 2m+r-1} \varepsilon^{-2m-r+|\beta|}\, N_{\varepsilon_1}\,(D_x^\beta(x_n^k\,u)).$$

On majore maintenant les termes faisant intervenir les opérateurs frontière. On a :

$$\|B_j\;\gamma(\psi u)\|_{H^{2m+r-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|\psi_1\;B_j\;\gamma(\psi_2 u)\|_{H^{2m+r-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$+ \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} \|\gamma_q\;[B_{jq},\psi_1]\;\psi_2 u\|_{H^{2m+r-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

On a :

$$\|\gamma_q\;[B_{jq},\psi_1]\;\psi_2 u\|_{H^{2m+r-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\,\|[B_{jq},\psi_1]\;\psi_2 u\|_{W_k^{2m+r+q-m_j}(\mathbb{R}_+^n)}$$

$$\leq C\,\|[B_{jq},\psi_1]\;(\psi_2 x_n^k u)\|_{H^{2m+r+q-m_j}(\mathbb{R}_+^n)}.$$

Puisque $[B_{jq},\,\psi_1]$ est d'ordre m_j-q-1 au plus, ce dernier terme est majoré par :

$$C\;.\sum_{|\beta|\leq 2m+r-1} \varepsilon^{-(2m+r)+|\beta|}\, N_{\varepsilon_1}\,(D_x^\beta(x_n^k\,u)).$$

En regroupant les inégalités précédentes, on obtient le lemme II.1.

On va obtenir de nouvelles inégalités en remplaçant u par D_x^α,u dans le lemme II.1.

Lemme II.2. *Il existe une constante* $C_3 > 0$ *dépendant des coefficients de* L, *de* B_j *et de l'entier* $r \geq p$ *telle que pour tout* u *appartenant à* $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, *pour tout* $\varepsilon > 0$ *et* $\varepsilon_1 > 0$ *avec* $\varepsilon + \varepsilon_1 < a-b$ *et pour tout* α *appartenant à* $\mathbb{N}^{n-1}$ *et* ν *appartenant à* $\mathbb{N}^n$ *avec* $|\nu| \leq 2m+r$, *on ait :*

$$N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\alpha_{x'} D^\nu_x (x^k_n u)) \leq C_3 \Big\{ \sum_{|\beta|\leq r} \varepsilon^{-r+|\beta|} N_{\varepsilon_1}(D^\alpha_{x'} D^\beta_x (Lu)) +$$

$$+ \sum_{|\beta|\leq 2m+r-1} \varepsilon^{-2m-r+|\beta|} N_{\varepsilon_1}(D^\alpha_{x'} D^\beta_x (x^k_n u)) +$$

$$+ \sum_{|\beta|\leq r} \sum_{|\delta|\leq 2m} \varepsilon^{-r+|\beta|} \sum_{\substack{\alpha'\leq\alpha \\ |\alpha'|\neq 0}} \sum_{\beta'\leq\beta} \binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'} K^{|\alpha'|+|\beta'|+1} ((|\alpha'|+|\beta'|!)^s$$

$$N_{\varepsilon_1}(D^{\delta+\beta-\beta'}_x D^{\alpha-\alpha'}_{x'} (x^k_n u))$$

$$+ \sum_{j=1}^{x_p} \sum_{|\beta|\leq 2m+r-k-m_j} \varepsilon^{-(2m+r-k-m_j)+|\beta|} N'_{\varepsilon_1}(D^{\alpha+\beta}_{x'} B_j \gamma u)$$

$$+ \sum_{j=1}^{x_p} \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} \sum_{|\mu|\leq m_j-q} \sum_{\substack{\alpha'\leq\alpha \\ |\alpha'|\neq 0}} \sum_{|\beta|\leq 2m+r-m_j+q} \sum_{\beta'\leq\beta} \sum_{\delta\leq\beta-\beta'} \binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'}$$

$$K^{|\alpha'|+|\beta'|+1}((|\alpha'|+|\beta'|)!)^s \binom{\beta-\beta'}{\delta} \varepsilon^{-|\delta|} N_{\varepsilon_1}(D^{\mu+\alpha-\alpha'}_{x'} D^{\beta-\beta'-\delta}_x (x^k_n u))\Big\}.$$

Démonstration. On applique le lemme II.1 à la fonction $D^\alpha_{x'} u$. Ce qui donne :

$$(II.4) \qquad N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\nu_x D^\alpha_{x'} (x^k_n u)) \leq C_2 \Big\{ \sum_{|\beta|\leq r} \varepsilon^{-r+|\beta|} N_{\varepsilon_1}(D^\alpha_{x'} D^\beta_x (Lu)) +$$

$$+ \sum_{|\beta|\leq r} \varepsilon^{-r+|\beta|} N_{\varepsilon_1}(D^\beta_x [D^\alpha_{x'}, L] u)$$

$$+ \sum_{|\beta|\leq 2m+r-1} \varepsilon^{-2m-r+|\beta|} N_{\varepsilon_1}(D^\beta_x D^\alpha_{x'} (x^k_n u)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{x_p} \|\psi_1 D^\alpha_{x'} B_j \gamma(\psi_2 u)\|_{H^{2m+r-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$+ \sum_{j=1}^{x_p} \|\psi_1 [B_j, D^\alpha_{x'}] \gamma\psi_2 u\|_{H^{2m+r-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)}\Big\} .$$

On majore tout d'abord le deuxième terme du deuxième membre de cette inégalité (II.4) On a :

$$N_{\varepsilon_1}(D_x^\beta[D_{x'}^\alpha,L]u) \leq \sum_{h=o}^{\min(k,2m)} \sum_{|\gamma|\leq 2m-h} \sum_{\beta'\leq\beta} \sum_{\substack{\alpha'\leq\alpha \\ |\alpha'|\neq o}} \binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'} \| D_{x'}^{\alpha'} D_x^{\beta'} p_\gamma^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega)} N_{\varepsilon_1}(D_x^{\gamma+\beta-\beta'} D_{x'}^{\alpha-\alpha'} (x_n^{k-h} u)).$$

D'après l'hypothèse (II.1) et l'inégalité de Hardy (I.1), on obtient :

$$\|D_{x'}^{\alpha'} D_x^{\beta'} p_\gamma^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega)} N_{\varepsilon_1}(D_x^{\gamma+\beta-\beta'} D_{x'}^{\alpha-\alpha'} (x_n^{k-h} u)) \leq C\, K^{|\alpha'|+|\beta'|+1}((|\alpha'|+|\beta'|)!)^s N_{\varepsilon_1}(D_{x_n}^h D_x^{\gamma+\beta-\beta'} D_{x'}^{\alpha-\alpha'} (x_n^k u)).$$

Comme $h+|\gamma| \leq 2m$, on obtient une majoration de la forme :

$$N_{\varepsilon_1}(D_x^\beta[L,D_{x'}^\alpha]u) \leq C. \sum_{|\delta|\leq 2m} \sum_{\beta'\leq\beta} \sum_{\substack{\alpha'\leq\alpha \\ |\alpha'|\neq o}} \binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'} K^{|\alpha'|+|\beta'|+1} ((|\alpha'|+|\beta'|)!)^s N_{\varepsilon_1}(D_x^{\delta+\beta-\beta'} D_{x'}^{\alpha-\alpha'} (x_n^k u)).$$

On majore maintenant le quatrième terme du deuxième membre de l'inégalité (II.4).

On a :

$$\|\psi_1 D_{x'}^\alpha B_j \gamma u\|_{H^{2m+r-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\, \|\psi_1 D_{x'}^\alpha B_j \gamma u\|_{H^{2m+r-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\leq C \sum_{|\beta|\leq 2m+r-k-m_j} \varepsilon^{-(2m+r-k-m_j)+|\beta|} N'_{\varepsilon_1}(D_{x'}^{\beta+\alpha} B_j \gamma u).$$

On majore enfin le cinquième terme du deuxième membre de l'inégalité (II.4). On a :

$$[B_j , D_{x'}^\alpha] = - \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} \sum_{|\mu|\leq m_j-q} \sum_{\substack{\alpha'\leq\alpha \\ |\alpha'|\neq o}} \binom{\alpha}{\alpha'}(D_{x'}^{\alpha'} b_{jq}^\mu) D_{x'}^{\mu+\alpha-\alpha'}$$

D'après les hypothèses II.2 et II.3, on obtient :

$$\|\gamma_q [\psi_1 (D_{x'}^{\alpha'} b_{jq}^\mu) D_{x'}^{\mu+\alpha-\alpha'} (\psi_2 u)]\|_{H^{2m+r-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\leq \|\psi_1 .(D_{x'}^{\alpha'} b_{jq}^\mu). D_x^{\mu+\alpha-\alpha'} (\psi_2 x_n^k u)\|_{H^{2m+r-m_j+q}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\leq C. \sum_{|\beta|\leq 2m+r-m_j+q} \sum_{\beta'\leq\beta} \binom{\beta}{\beta'} K^{|\alpha'|+|\beta'|+1}((|\alpha'|+|\beta'|)!)^s$$

$$\sum_{\delta\leq\beta-\beta'} \binom{\beta-\beta'}{\delta} \varepsilon^{-|\delta|} N_{\varepsilon_1}(D_{x'}^{\mu+\alpha-\alpha'} D_x^{\beta-\beta'-\delta} (x_n^k u)).$$

d'où :

$$\|\psi_1 [B_j , D^\alpha_{x'}] \gamma\psi_2 u\|_{H^{2m+r-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C. \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} \sum_{|\mu|\leq m_j-q} \sum_{\substack{\alpha'\leq\alpha \\ |\alpha'|\neq 0}} \sum_{|\beta|\leq 2m+r-m_j+q}$$

$$\sum_{\beta'\leq\beta} \sum_{\delta\leq\beta-\beta'} \binom{\alpha}{\alpha'} \binom{\beta}{\beta'} K^{|\alpha'|+|\beta'|+1} ((|\alpha'|+|\beta'|)!)^s \binom{\beta-\beta'}{\delta} \varepsilon^{-|\delta|}$$

$$N_{\varepsilon_1}(D^{\mu+\alpha-\alpha'}_{x'} D^{\beta-\beta'-\delta}_x (x_n^k u)).$$

En regroupant les inégalités précédentes, on obtient le lemme II.2.

III. MAJORATIONS DES DERIVEES PRESQUE TANGENTIELLES.

Dans ce paragraphe, u est une fonction de classe C^∞ sur un voisinage de $\overline{\omega}$ telle que Lu soit de classe de Gevrey d'ordre s sur $\overline{\omega}$ et que $B_j \gamma u$ soit de classe de Gevrey d'ordre s sur $\overline{\omega}'$ pour $j=1,\dots,\chi_p$. On traduit ces hypothèses par les inégalités suivantes :

(III.1) : Il existe une constante $K_3 > o$ telle que, pour tout α de $\mathbb{N}^n$, on ait :

$$\|D^\alpha_x \, Lu\|_{L^2(\omega)} \leq K_3^{|\alpha|+1} \, (|\alpha|!)^s \;;$$

(III.2) : Il existe une constante $K_4 > o$ telle que, pour tout α de $\mathbb{N}^{n-1}$, on ait :

$$\|D^\alpha_{x'} \, B_j \gamma u\|_{L^2(\omega')} \leq K_4^{|\alpha|+1} \, (|\alpha|!)^s .$$

Dans la suite, on choisira $K_3 = K_4 = K$.

L'entier r étant fixé $\geq p$, on dit qu'une dérivation D^α_x avec α dans $\mathbb{N}^n$ est presque tangentielle, si $\alpha_n \leq 2m+r$. Les hypothèses III.1, III.2 et le lemme II.2 permettent d'obtenir une majoration des dérivées presque tangentielles de $x_n^k u$.

Lemme III.1. *Pour tout entier* $r \geq p$, *il existe une constante* $M = M(r) > o$ *telle que, pour tout* α *appartenant à* $\mathbb{N}^n$ *avec* $\alpha_n \leq 2m+r$ *et pour tout* $\varepsilon > o$ *avec* $0 < \varepsilon \leq \frac{a-b}{|\alpha|}$, *on ait :*

(III.3) $$N_{|\alpha|\varepsilon} (D^\alpha_x(x_n^k u)) \leq M^{|\alpha|+1} \varepsilon^{-|\alpha|s} .$$

<u>Démonstration</u>. Pour plus de commodité, on suppose dans la suite que $a-b < 1$ (mais cette hypothèse peut être écartée).

On raisonne par récurrence sur l'entier $j=|\alpha|$ (avec $\alpha_n \leq 2m+r$).

Supposons que (III.3) soit vraie jusqu'à l'ordre $j \geq o$ avec une constante $M \geq 1$. Soit α' appartenant à $\mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha'|=j+1$ et $\alpha'_n \leq 2m+r$; on peut écrire $\alpha' = \alpha+\nu$ avec $|\nu|=2m+r$ et $\alpha_n=o$, donc $|\alpha| = j+1-2m-r$. Le lemme II.2 appliqué à ε avec $o < \varepsilon < \frac{a-b}{j+1}$ et $\varepsilon_1 = j\varepsilon$ donne :

$$N_{(j+1)\varepsilon}\,(D_x^\alpha,\ D_x^\nu\,(x_n^k u)) \leq C_3 \cdot \sum_{i=1}^{5} A_i$$

où A_i désigne le $i^{\text{ème}}$ terme intervenant dans la majoration fournie par le lemme II.2. On majore séparément chacun des termes A_i. Dans la suite, C désigne, comme d'habitude, une constante positive pouvant changer d'une étape de calcul à la suivante, mais elle reste toujours indépendante de j.

On a :

$$A_1 = \sum_{|\beta|\leq r} \varepsilon^{-r+|\beta|}\, N_{\varepsilon_1}\,(D_x^\alpha,\ D_x^\beta\,(Lu)).$$

D'après l'hypothèse (III.1) et l'hypothèse $\varepsilon(j+1) < 1$, on en déduit que :

$$A_1 M^{-j-2}\ \varepsilon^{(j+1)s} \leq C\ (K\ M^{-1})^{j+2}.$$

On a :

$$A_2 = \sum_{|\beta|\leq 2m+r-1} \varepsilon^{-2m-r+|\beta|}\, N_{\varepsilon_1}\,(D_x^\alpha,\ D_x^\beta\,(x_n^k\ u)).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on déduit que :

$$A_2\ M^{-j-2}\ \varepsilon^{(j+1)s} \leq C\ M^{-1}.$$

On a :

$$A_3 = \sum_{|\beta|\leq r}\ \sum_{|\delta|\leq 2m} \varepsilon^{-r+|\beta|} \sum_{\substack{\alpha'\leq\alpha \\ |\alpha'|\neq o}}\ \sum_{\beta'\leq\beta} \binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'}\, K^{|\alpha'|+|\beta'|+1}((|\alpha'|+|\beta'|)!)^s$$
$$N_{\varepsilon_1}(D_x^{\delta+\beta-\beta'}\ D_{x'}^{\alpha-\alpha'}(x_n^k\ u)).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on déduit que :

$$A_3\ M^{-j-2}\ \varepsilon^{(j+1)s} \leq \sum_{|\beta|\leq r}\ \sum_{|\delta|\leq 2m}\ \sum_{\substack{\alpha'\leq\alpha \\ |\alpha'|\neq o}}\ \sum_{\beta'\leq\beta} K\ (2^s\ KM^{-1})^{|\alpha'|+|\beta'|},$$

puisque $\binom{|\alpha|}{|\alpha'|}\binom{|\beta|}{|\beta'|}\,((|\alpha'|+|\beta'|)!) \leq 2^{|\alpha'|+|\beta'|}$.

Si l'on suppose que $2^s\ n\ KM^{-1} < 1$, on obtient :

$$A_3\ M^{-j-2}\ \varepsilon^{(j+1)s} \leq C\ \frac{2^s\ n\ KM^{-1}}{1-2^s\ n\ KM^{-1}}\ .$$

On a :

$$A_4 = \sum_{j=1}^{\chi_p}\ \sum_{|\beta|\leq 2m+r-k-m_j} \varepsilon^{-(2m+r-k-m_j)+|\beta|}\ N'_{\varepsilon_1}\ (D_{x'}^{\alpha+\beta}\ B_j\ \gamma u).$$

D'après l'hypothèse (III.2) et l'hypothèse $\varepsilon(j+1) < 1$, on en déduit que (comme pour A_1) :

$$A_4\ M^{-j-2}\ \varepsilon^{(j+1)s} \leq C\ (KM^{-1})^{j+2}.$$

On a :

$$A_5 = \sum_{j=1}^{\chi_p}\ \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1}\ \sum_{|\mu|\leq m_j-q}\ \sum_{\substack{\alpha'\leq\alpha \\ |\alpha'|\neq o}}\ \sum_{|\beta|\leq 2m+r-m_j+q}\ \sum_{\beta'\leq\beta}\ \sum_{\delta\leq\beta-\beta}\ \binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'}$$

$$K^{|\alpha'|+|\beta'|+1}((|\alpha'|+|\beta'|!)^s\ \binom{\beta-\beta'}{\delta}\ \varepsilon^{-|\delta|}\ N_{\varepsilon_1}(D_{x'}^{\mu+\alpha-\alpha'}\ D_x^{\beta-\beta'-\delta}(x_n^k\ u)).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que (comme pour A_3), si l'on suppose $2^s\ n\ KM^{-1} < 1$, alors :

$$A_5\ M^{-j-2}\ \varepsilon^{(j+1)s} \leq C\ \frac{2^s\ n\ KM^{-1}}{1-2^s\ n\ KM^{-1}}\ .$$

En regroupant les inégalités précédentes, on obtient que si $2^s\ n\ KM^{-1} < 1$, alors :

$$N_{(j+1)\varepsilon}\ (D_{x'}^{\alpha},\ D_x^{\nu}(x_n^k\ u)) \leq C_3\ M^{j+2}\ \varepsilon^{-(j+1)s}\ C\left\{2(KM^{-1})^{j+2} + M^{-1} + 2\ \frac{2^s\ nKM^{-1}}{1-2^s nKM^{-1}}\right\}$$

Cette inégalité montre que l'on peut choisir M grand vis à vis de K et indépendant de j pour que :

$$N_{(j+1)\varepsilon}\ (D_{x'}^{\alpha},\ D_x^{\nu}\ (x_n^k\ u)) \leq M^{j+2}\ \varepsilon^{-(j+1)s}.$$

C'est l'inégalité (III.3) à l'ordre j+1.

Lemme III.2. *Pour tout entier* $r \geq p$, *il existe une constante* $N = N(r) > o$ *telle que pour tout* α *appartenant à* $\mathbb{N}^n$ *avec* $\alpha_n \leq 2m+r$ *et pour tout* b *avec* $o < b < a$, *on ait :*

(III.4) $$N_{a-b}\ (D_x^{\alpha}\ (x_n^k\ u)) \leq N^{|\alpha|+1}\ (|\alpha|!)^s.$$

Démonstration : dans (III.3), on choisit $\varepsilon = \frac{a-b}{|\alpha|}$ ce qui donne

$$N_{a-b}\,(D_x^\alpha\,(x_n^k\,u)) \leq M^{|\alpha|+1}\,(a-b)^{-|\alpha|s}\,|\alpha|^{|\alpha|s}.$$

On en déduit (III.4) grâce à la formule de Stirling.

Ainsi, le lemme III.2 permet d'obtenir une majoration des dérivées presque tangentielles de $x_n^k\,u$ sur tout compact $\mathcal{K}$ contenu dans ω : il suffit de choisir b tel que $\mathcal{K}$ soit contenu dans ω_{a-b}.

IV. MAJORATION DE TOUTES LES DERIVEES.

Dans ce paragraphe, u est encore une fonction de classe C^∞ sur un voisinage de $\overline{\omega}$ et vérifie les hypothèses III.1 et III.2. On se propose de démontrer des inégalités du type (III.4) pour toutes les dérivées de x_n^k u.

L'opérateur P^{2m} étant elliptique dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, on peut supposer que $p^{2m}_{(o,\dots,o,2m)}$ est égal à 1 ; ce qui permet d'écrire l'identité :

$$D^{2m}_{x_n}\,(x_n^k\,u)(x) = Lu(x) - \sum_{h=o}^{\min(k,2m)}\ \sum_{\substack{|\lambda|\leq 2m-h\\ \lambda_n\neq 2m}} p_\lambda^{2m-h}(x)\,D_x^\lambda\,(x_n^{k-h}\,u(x)). \tag{IV.1}$$

Lemme IV.1. *Il existe deux constantes* M_1 *et* M_2 *positives telles que pour tout* α *appartenant à* $\mathbb{N}^n$ *de la forme* $\alpha=(\alpha',\alpha_n)$ *avec* α' *dans* $\mathbb{N}^{n-1}$ *et* α_n *dans* $\mathbb{N}$ *et pour tout* b *avec* $o < b < a$ *on ait :*

$$N_{a-b}\,(D_x^\alpha\,(x_n^k\,u)) \leq M_1^{|\alpha'|+1}\,M_2^{\alpha_n}\,(|\alpha|!)^s. \tag{IV.2}$$

Démonstration. D'après le lemme III.2, l'inégalité (IV.2) est vraie, pour tout α tel que $\alpha_n \leq 2m+r$ (avec par exemple $M_1 = M_2 = N$ cette constante dépendant de r).

On fixe un entier r_o avec $r_o \geq p$ de telle sorte que :

$$\left|1-\sum_{h=1}^{\min(k,2m)}\left((2m-h+r_o+\tfrac{1}{2})\dots(2m+r_o-\tfrac{1}{2})\right)^{-1}\,\|p^{2m-h}_{(o,\dots,o,2m-h)}\|_{L^\infty(\omega)}\right| \geq \frac{1}{2}. \tag{IV.3}$$

On applique l'opérateur $D_{x'}^{\alpha'} D_{x_n}^{r+1}$ aux deux membres de la relation (IV.1) :

$$D_{x'}^{\alpha'} D_{x_n}^{2m+r+1}(x_n^k u) = D_{x'}^{\alpha'} D_{x_n}^{r+1}(Lu) - \sum_{h=o}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{|\lambda|\leq 2m-h \\ \lambda_n\neq 2m}} \sum_{\beta\leq(\alpha',r+1)} \binom{(\alpha',r+1)}{\beta} D_x^\beta p_\lambda^{2m-h} D_{x'}^{\alpha'-\beta'} D_{x_n}^{r+1-\beta_n} D_x^\lambda(x_n^{k-h} u).$$

En isolant les termes de dérivation maximum en x_n, on obtient :

$$N_{a-b}(D_{x'}^{\alpha'} D_{x_n}^{2m+r+1}(x_n^k u)) \leq N_{a-b}(D_{x'}^{\alpha'} D_{x_n}^{r+1}(Lu)) + \sum_{h=1}^{\min(k,2m)} \|p_{(o,\dots,o,2m-h)}^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega_{a-b})} N_{a-b}(D_{x'}^{\alpha'} D_{x_n}^{r+1+2m-h}(x_n^{k-h} u))$$

$$+ \sum_{h=1}^{\min(k,2m)} \sum_{\beta\leq(\alpha',r+1)} \binom{(\alpha',r+1)}{\beta} \|D_x^\beta p_{(o,\dots,o,2m-h)}^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega_{a-b})} N_{a-b}(D_{x'}^{\alpha'-\beta'} D_{x_n}^{r+1-\beta_n+2m-h}(x_n^{k-h} u))$$

$$+ \sum_{h=o}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{|\lambda|\leq 2m-h \\ \lambda_n\neq 2m-h}} \sum_{\beta\leq(\alpha',r+1)} \binom{(\alpha',r+1)}{\beta} \|D_x^\beta p_\lambda^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega_{a-b})} N_{a-b}(D_{x'}^{\alpha'-\beta'} D_{x_n}^{r+1-\beta_n} D_x^\lambda (x_n^{k-h} u)).$$

On applique les inégalités de Hardy (I.1) à chacun des termes du deuxième membre ; ce qui donne pour $r \geq r_o$, compte-tenu de l'inégalité (IV.3) :

$$\text{(IV.4)} \quad \frac{1}{2} N_{a-b} (D_{x'}^{\alpha'} D_{x_n}^{2m+r+1} (x_n^k u)) \leq N_{a-b} (D_{x'}^{\alpha'} D_{x_n}^{r+1}(Lu)) +$$

$$+ \sum_{h=1}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{\beta\leq(\alpha',r+1) \\ |\beta|\neq o}} \binom{(\alpha',r+1)}{\beta} \|D_x^\beta p_{(o,\dots,o,2m-h)}^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega_{a-b})} ((r-\beta_n+2m-h+\tfrac{3}{2})\dots(r-\beta_n+2m+\tfrac{1}{2}))^{-1} N_{a-b}(D_{x'}^{\alpha'-\beta'} D_{x_n}^{r+1-\beta_n+2m}(x_n^k u))$$

$$+ \sum_{h=o}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{|\lambda|\leq 2m-h \\ \lambda_n\neq 2m-h}} \sum_{\beta\leq(\alpha',r+1)} \binom{(\alpha',r+1)}{\beta} \|D_x^\beta p_\lambda^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega_{a-b})} ((r-\beta_n+\lambda_n+\tfrac{3}{2})\dots(r-\beta_n+\lambda_n+h+\tfrac{1}{2}))^{-1} N_{a-b}(D_{x'}^{\alpha'-\beta'+\lambda'} D_{x_n}^{r+1-\beta_n+\lambda_n+h}(x_n^k u)).$$

A partir de cette inégalité, on démontre l'inégalité (IV.2) par une récurrence faite en deux étapes : dans une première étape, on suppose que (IV.2) est vrai quelque soit α avec $\alpha_n \leq 2m+r$ (avec $r \geq r_o$) ; on démontre qu'on peut choisir les constantes M_1 et M_2 indépendamment de r pour que l'inégalité (IV.2) reste valable pour $\alpha' = o$ et $\alpha_n = 2m+r+1$. Dans une deuxième étape, on suppose de plus que (IV.2) est vrai pour α avec $|\alpha'| \leq j$ et $\alpha_n \leq 2m+r+1$; on démontre qu'on peut choisir les constantes M_1 et M_2 indépendamment de j pour que l'inégalité (IV.2) reste valable pour $|\alpha'|=j+1$ et $\alpha_n \leq 2m+r+1$.

On fait d'abord la première étape de la récurrence. On écrit l'inégalité (IV.4) pour $\alpha' = o$ en tenant compte des hypothèses (II.1) et (III.1) :

$$\frac{1}{2} N_{a-b}\left(D_{x_n}^{2m+r+1}(x_n^k u)\right) \leq K^{r+2}((r+1)!)^s +$$

$$+ \sum_{h=1}^{\min(k,2m)} \sum_{1 \leq \beta_n \leq r+1} \binom{r+1}{\beta_n} K^{\beta_n+1} (\beta_n!)^s \left((r-\beta_n+2m-h+\tfrac{3}{2})\ldots(r-\beta_n+2m+\tfrac{1}{2})\right)^{-1} N_{a-b}\left(D_{x_n}^{r+1-\beta_n+2m}(x_n^k u)\right)$$

$$+ \sum_{h=o}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{|\lambda| \leq 2m-h \\ \lambda_n \neq 2m-h}} \sum_{\beta_n \leq r+1} \binom{r+1}{\beta_n} K^{\beta_n+1} (\beta_n!)^s \left((r-\beta_n+\lambda_n+\tfrac{3}{2})\ldots(r-\beta_n+\lambda_n+h+\tfrac{1}{2})\right)^{-1} N_{a-b}\left(D_{x'}^{\lambda'} D_{x_n}^{r+1-\beta_n+\lambda_n+h}(x_n^k u)\right).$$

On note A_1 , A_2 et A_3 les trois termes figurant au second membre de cette inégalité, et on les majore séparément. Tout d'abord :

$$A_1 M_1^{-1} M_2^{-2m-r-1} ((2m+r+1)!)^{-s} \leq (KM_1^{-1})(KM_2^{-1})^{r+1} M_2^{-2m} .$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour A_2 , ce qui donne :

$$A_2 M_1^{-1} M_2^{-2m-r-1} ((2m+r+1)!)^{-s} \leq \sum_{h=1}^{\min(k,2m)} \sum_{1 \leq \beta_n \leq r+1} \binom{r+1}{\beta_n} \binom{2m+r+1}{\beta_n}^{-s} K^{\beta_n+1} M_2^{-\beta_n} .$$

Si l'on suppose $KM_2^{-1} < 1$, alors :

$$A_2 M_1^{-1} M_2^{-2m-r-1} ((2m+r+1)!)^{-s} \leq C \frac{KM_2^{-1}}{1-KM_2^{-1}} ,$$

C étant indépendante de r.

On peut également appliquer l'hypothèse de récurrence pour A_3 , ce qui donne :

$$A_3 M_1^{-1} M_2^{-2m-r-1} ((2m+r+1)!)^{-s} \leq \sum_{h=o}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{|\lambda|\leq 2m-h \\ \lambda_n\neq 2m-h}} \sum_{\beta_n\leq r+1} K(KM_2^{-1})^{\beta_n} M_1^{|\lambda'|} M_2^{-2m+h+\lambda_n}.$$

Si l'on suppose que $M_1 > 1$, $M_2 > 1$ et $KM_2^{-1} < 1$, alors :

$$A_3 M_1^{-1} M_2^{-2m-r-1} ((2m+r+1)!)^{-s} \leq CM_1^{2m} M_2^{-1} (1-KM_2^{-1})^{-1},$$

C étant indépendante de r.

De ces trois majorations, on déduit :

$$N_{a-b}(D_{x_n}^{2m+r+1}(x_n^k u)) \leq M_1 M_2^{2m+r+1} ((2m+r+1)!)^s C\left\{(KM_1^{-1})(KM_2^{-1})^{r+1} M_2^{-2m} + \frac{KM_2^{-1} + M_1^{2m} M_2^{-1}}{1 - KM_2^{-1}}\right\}.$$

Cette inégalité montre que l'on peut choisir M_1 et M_2 indépendamment de r pour que l'on ait :

$$N_{a-b}(D_{x_n}^{2m+r+1} (x_n^k u)) \leq M_1 M_2^{2m+r+1} ((2m+r+1)!)^s .$$

C'est la conclusion de la première étape de la récurrence.

On fait maintenant la deuxième étape de la récurrence. On écrit l'inégalité (IV.4) pour $|\alpha'|=j+1$ en tenant compte des hypothèses (II.1) et (III.1) :

$$\frac{1}{2} N_{a-b} (D_{x'}^{\alpha'} D_{x_n}^{2m+r+1}) (x_n^k u)) \leq K^{j+r+3} ((j+r+2)!)^s$$

$$+ \sum_{h=1}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{\beta\leq(\alpha',r+1) \\ |\beta|\neq o}} \binom{(\alpha',r+1)}{\beta} K^{|\beta|+1} (|\beta|!)^s ((r-\beta_n+2m-h+\tfrac{3}{2})\dots(r-\beta_n+2m+\tfrac{1}{2}))^{-1}$$

$$N_{a-b}(D_{x'}^{\alpha'-\beta'} D_{x_n}^{r+1-\beta_n+2m} (x_n^k u))$$

$$+ \sum_{h=o}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{|\lambda|\leq 2m-h \\ \lambda_n\neq 2m-h}} \sum_{\beta\leq(\alpha',r+1)} \binom{(\alpha',r+1)}{\beta} K^{|\beta|+1} (|\beta|!)^s$$

$$((r-\beta_n+\lambda_n+\tfrac{3}{2})\dots(r-\beta_n+\lambda_n+h+\tfrac{1}{2}))^{-1}$$

$$N_{a-b}(D_{x'}^{\alpha'-\beta'+\lambda'} D_{x_n}^{r+1-\beta_n+\lambda_n+h}(x_n^k u)).$$

On note A_1 , A_2 et A_3 les trois termes figurant au second membre de cette inégalité et on les majore séparément. Tout d'abord :

$$A_1\, M_1^{-j-2}\, M_2^{-2m-r-1}\, ((j+2m+r+2)!)^{-s} \leq (KM_1^{-1})^{j+2}\, (KM_2^{-1})^{r+1}\, M_2^{-2m}\, .$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour A_2 ce qui donne :

$$A_2\, M_1^{-j-2}\, M_2^{-2m-r-1}\, ((j+2m+r+2)!)^{-s} \leq C. \sum_{\substack{\beta\leq(\alpha',r+1)\\ |\beta|\neq o}} (KM_1^{-1})^{|\beta'|}\, (KM_2^{-1})^{\beta_n}.$$

Si l'on suppose que $(n-1)\, KM_1^{-1} < 1$ et $KM_2^{-1} < 1$, alors :

$$A_2\, M_1^{-j-2}\, M_2^{-2m-r-1}\, ((j+2m+r+2)!)^{-s} \leq C. \left\{ \frac{1}{1-(n-1)KM_1^{-1}} \cdot \frac{KM_2^{-1}}{1-KM_2^{-1}} + \frac{1}{1-KM_2^{-1}} \cdot \frac{(n-1)KM_1^{-1}}{1-(n-1)KM_1^{-1}} \right\}.$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour A_3 ce qui donne :

$$A_3\, M_1^{-j-2}\, M_2^{-2m-r-1}\, ((j+2m+r+2)!)^{-s} \leq \sum_{h=o}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{|\lambda|\leq 2m-h\\ \lambda_n\neq 2m-h}} \sum_{\beta\leq(\alpha',r+1)}$$

$$K\, (KM_1^{-1})^{|\beta'|} (KM_2^{-1})^{\beta_n}\, M_1^{|\lambda'|}\, M_2^{-2m-\beta_n+\lambda_n+h}.$$

Si l'on suppose que $M_1 > 1$, $M_2 > 1$, $(n-1)\, KM_1^{-1} < 1$ et $KM_2^{-1} < 1$, alors :

$$A_3\, M_1^{-j-2}\, M_2^{-2m-r-1}\, ((j+2m+r+2)!)^{-s} \leq C.M_1^{2m}\, M_2^{-1}\, (1-(n-1)\, KM_1^{-1})^{-1}\, (1-KM_2^{-1})^{-1}.$$

De ces trois majorations, on déduit :

$$N_{a-b}\, (D_{x'}^{\alpha'}\, D_{x_n}^{2m+r+1}\, (x_n^k\, u)) \leq M_1^{j+2}\, M_2^{2m+r+1}\, ((j+2m+r+2)!)^{s}\, C \left\{ (KM_1^{-1})^{j+2} (KM_2^{-1})^{r+1}\, M_2^{-2m} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{1-(n-1)KM_1^{-1}} \cdot \frac{KM_2^{-1}}{1-KM_2^{-1}} + \frac{(n-1)KM_1^{-1}}{1-(n-1)KM_1^{-1}} \cdot \frac{1}{1-KM_2^{-1}} + \frac{M_1^{2m}}{1-(n-1)KM_1^{-1}} \cdot \frac{M_2^{-1}}{1-KM_2^{-1}} \right\}.$$

Cette inégalité montre que l'on peut choisir M_1 grand vis-à-vis de K, puis M_2 grand vis-à-vis de M_1, le choix étant indépendant de $|\alpha'|$ et de r pour que l'on ait :

$$N_{a-b}\, (D_{x'}^{\alpha'}\, D_{x_n}^{2m+r+1}\, (x_n^k\, u)) \leq M_1^{j+2}\, M_2^{2m+r+1}\, ((j+2m+r+2)!)^{s}.$$

C'est la conclusion de la deuxième étape de la récurrence et par là, la fin de la démonstration du lemme IV.1.

V. CONCLUSION LOCALE DANS LE DEMI-ESPACE $\mathbb{R}^n_+$.

On suppose que l'opérateur L donné par (I.4) et les opérateurs frontière B_j donnés par (I.5) vérifient les estimations a priori (I.6) pour toute fonction u de classe $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ à support contenu dans $\omega = \omega' \times [o,a[$. Sous ces hypothèses, on a le résultat suivant :

Théorème V.1. *Si les coefficients de l'opérateur* L *sont de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* ω, *si les coefficients des opérateurs* B_j *sont de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* ω', *si* u *est une fonction de classe* C^∞ *sur* ω *telle que* Lu *soit de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* ω *et si les* $B_j\,\gamma u$ *sont de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* ω' *pour* $j=1,\ldots,\chi_p$ *alors, la fonction* u *elle-même est de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* ω.

Démonstration. Soit K un compact contenu dans ω ; soit b tel que $o < b < a$ et tel que K soit contenu dans l'ouvert ω_{a-b}. D'après le lemme IV.1, il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout α appartenant à $\mathbb{N}^n$ on ait :

$$N_{a-b}(D_x^\alpha\,(x_n^k\,u)) \leq M^{|\alpha|+1}\,(|\alpha|!)^s ,$$

d'où l'on déduit que $x_n^k\,u$ est de classe de Gevrey d'ordre s dans l'ouvert ω.

En utilisant les inégalités de Hardy (I.1), on obtient que u est une fonction de Gevrey d'ordre s sur ω.

VI. CONCLUSIONS LOCALE ET GLOBALE DANS UN OUVERT Ω.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega}$ étant une variété à bord de classe de Gevrey d'ordre s, de bord Γ. Soit φ une fonction de classe de Gevrey d'ordre s de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ ;\ \varphi(x) > o\}, \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \ ;\ \varphi(x) = o\}, \\ \text{grad } \varphi(x) \neq o \quad \text{pour tout } x \text{ de } \Gamma, \end{cases}$$

Soit l'opérateur différentiel $L \equiv L(x\,;\,D_x)$ défini sur Ω par :

$$Lu(x) \equiv L(x\,;D_x)\,\{u(x)\} \equiv \sum_{h=o}^{\min(k,2m)} P^{2m-h}\,(x\,;D_x)\,\{\varphi(x)^{k-h}\,u(x)\},$$

où k et m sont deux entiers avec $k \geq o$ et $m \geq 1$, et où :

(i) $P^{2m-h}(x\,;D_x)$ est un opérateur différentiel d'ordre 2m-h au plus, à coefficients de classe de Gevrey d'ordre s sur $\overline{\Omega}$ pour h=o,...,min(k,2m) ;

(ii) $P^{2m}(x;\,D_x)$ est un opérateur différentiel d'ordre 2m, proprement elliptique sur $\overline{\Omega}$.

L'opérateur L est linéaire et continu de l'espace de Sobolev avec poids :

$$W_k^{2m+p}(\Omega) = \{u \in H^{2m+p-k}(\Omega)\ ;\ \varphi^k\ u \in H^{2m+p}(\Omega)\}$$

muni de la norme naturelle dans l'espace de Sobolev $H^p(\Omega)$ pour tout entier $p \geq o$.

Soit p un entier fixé pour toute la suite. On associe une famille de χ_p (χ_p étant $\geq o$) opérateurs $B_j\,\gamma \equiv B_j(x\,;D_x)\gamma$ pour $j=1,\ldots,\chi_p$ définis sur Γ par :

$$B_j\,\gamma u(x) \equiv B_j(x\,;D_x)\,\gamma u(x) \equiv \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{jq}\,(x\,;D_x)\,\gamma_q\,u(x),$$

où

(iii) $B_{jq}(x\,;D_x)$ est un opérateur différentiel sur Γ, à coefficients de classe de Gevrey d'ordre s sur Γ, d'ordre m_j-q au plus avec $-k \leq q \leq 2m+p-k-1$ et $-k \leq m_j \leq 2m+p-k-1$ (si $m_j-q < o$, B_{jq} est identiquement nul) ;

(iv) γ_q est l'opérateur trace généralisé (cf. [6]) défini par :

$$\gamma_q\,u(x) = \begin{cases} D_t^q\,u(\psi^{-1}(x,t))_{|t=o} & \text{pour } q \geq o, \\ (-1^{-q-1}\displaystyle\int_o^\infty t^{-q-1}\,\alpha(t)\,u(\psi^{-1}(x,t))\,dt & \text{pour } q < o, \end{cases}$$

où α est une fonction de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ égale à 1 dans un voisinage de 0 et à support suffisamment petit et ψ est l'isomorphisme de $\{x \in \overline{\Omega}\ ;\ d(x\ ;\ \Gamma) < \delta\}$ sur $\Gamma \times [o,\delta[$ défini par $\psi(x) = (x_\Gamma\ ,\ d(x,\Gamma))$, $d(x,\Gamma)$ désignant la distance de x à Γ, δ étant suffisamment petit et x_Γ étant la projection de x sur Γ.

L'opérateur $B_j\gamma$ est linéaire et continu de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

On suppose que l'opérateur L, les opérateurs $B_j\gamma$ pour $j=1,\dots,\chi_p$ et l'entier p sont tels que : pour tout entier $r \geq p$, il existe une constante $c_r > 0$ telle que pour tout u appartenant à $W_k^{2m+r}(\Omega)$, on ait :

$$\|u\|_{W_k^{2m+r}(\Omega)} \leq C_r \cdot \left\{ \|Lu\|_{H^r(\Omega)} + \sum_{j=1}^{\chi_p} \|B_j\gamma u\|_{H^{2m+r-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{W_k^{2m+r-1}(\Omega)} \right\}. \tag{IV.1}$$

Dans [2], on donne des conditions suffisantes sur l'opérateur L et les opérateurs $B_j\gamma$ pour que de telles estimations soient réalisées.

Par difféomorphisme, le problème sur Ω peut être transporté en un problème sur $\mathbb{R}^n_+$ du type étudié dans V. Du théorème V.1 (local dans le demi-espace $\mathbb{R}^n_+$), on déduit le théorème suivant (local dans l'ouvert Ω) :

Théorème VI.1. *Sous les hypothèses précédentes, pour tout ouvert* ω *de* $\mathbb{R}^n$, *si* u *est une fonction de classe* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *telle que* Lu *soit de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* $\omega \cap \overline{\Omega}$ *et* $B_j\gamma u$ *soit de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* $\omega \cap \Gamma$ *pour* $j=1,\dots,\chi_p$ *(si* χ_p *est* > 0*) alors,* u *est de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* $\omega \cap \overline{\Omega}$.

De ce résultat local, on obtient le résultat de régularité global suivant :

Corollaire VI.1. *Sous les hypothèses précédentes, si* u *est une fonction de classe* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *telle que* Lu *soit de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* $\overline{\Omega}$ *et* $B_j\gamma u$ *soit de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* Γ *pour* $j=1,\dots,\chi_p$ *(si* χ_p *est* > 0*) alors,* u *est de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* $\overline{\Omega}$.

Ces résultats s'appliquent en particulier aux opérateurs dégénérés étudiés dans [7]. On retrouve ainsi les résultats de [1] (pour un opérateur L avec m=k=1).

De plus, pour k=o, l'opérateur L est proprement elliptique dans $\overline{\Omega}$ et on retrouve les résultats de [4].

Remarque VI.1

Les résultats précédents sont en faits valables dès que l'on a l'estimation a priori (VI.1) pour un $r=r_o$ convenable (dépendant des coefficients de l'opérateur L).

Remarque VI.2.

Dans [2], on donne des conditions suffisantes sur les opérateurs L et $B_j\gamma$ pour $j=1,\ldots,\chi_p$ pour obtenir le résultat de régularité suivant : si u appartient à $W_k^{2m+p}(\Omega)$ et si Lu appartient à $C^\infty(\overline{\Omega})$ et $B_j\ \gamma u$ appartient à $C^\infty(\Gamma)$ pour $j=1,\ldots,\chi_p$ (si χ_p est > o) alors, u est de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$. Ce résultat complète donc, dans ce cas, ceux du théorème VI.1 et du corollaire VI.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC : Etude de l'analyticité et de la régularité Gevrey pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Ann. E.N.S. Paris (1971).

[2] P. BOLLEY - J. CAMUS : Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés à plusieurs variables. A paraitre aux mémoires de la Société Mathématique de France.

[3] P. BOLLEY - J. CAMUS - B. HANOUZET : Etude de l'analyticité et de la régularité Gevrey pour une classe de problèmes aux limites elliptiques et dégénérés. Note au C.R.A.S. t. 275 (27 novembre 1972).

[4] J.L. LIONS - E. MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes. Tomes 1 et 3. (Dunod) Paris 1968-1970.

[5] C.B. MORREY - L. NIRENBERG : On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations. C.P.A.M. 7, 271-290 (1957).

[6] N. SHIMAKURA : Problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré. Journal of Mathematics of Kyoto University. Vol. 9 n° 2 (1969).

[7] C. ZUILY : Etude de la régularité d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés du deuxième ordre. Thèse 3ème cycle Paris 1969.