JOSEPH LE POTIER

Problèmes d’extension de classes de cohomologie

Astérisque, tome 17 (1974), p. 79-109
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__17__79_0>

PROBLEMES D'EXTENSION DE CLASSES DE COHOMOLOGIE

par J. LE POTIER

NOTATIONS

Soient M une variété analytique complexe, E un fibré vectoriel holomorphe au-dessus de M, $\mathcal{O}(E)$ son faisceau de sections holomorphes. On désigne par $T(M)$ le fibré tangent à M, muni de sa structure naturelle de fibré vectoriel holomorphe . On note

$$H^{p,q}(E) = H^q(M, \mathcal{O}(\Lambda^p T^*(M) \otimes E))$$

le groupe de cohomologie de type (p,q) de M à valeurs dans E; c'est encore le q-ième groupe de cohomologie du complexe de Dolbeault $A^{p,\cdot}(E)$ des (p,.) formes différentielles sur M à valeurs dans E :

$$H^{p,q}(E) = H^q(A^{p,\cdot}(E))$$

Dans le cas où E est le fibré trivial $M \times \mathbb{C}$, on notera simplement $H^{p,q}(M)$ pour $H^{p,q}(E)$.

INTRODUCTION

Soit M une variété analytique complexe compacte de dimension n, plongée dans une variété analytique complexe X de dimension n+r . On envisage les problèmes suivants :

(1) Etant donnée une classe de cohomologie $\alpha \in H^{p,q}(M)$, existe-t-il un voisinage ouvert V de M sur lequel α se prolonge ?

(II) Etant donnée une classe de cohomologie $\beta \in H^{p,q}(X)$ telle que $\beta | M = 0$, existe-t-il un voisinage ouvert V de M tel que $\beta | V = 0$?

Les problèmes (I)et (II) n'ont pas en général de solution ; au § 1, nous donnons un exemple, dû à P.A. Griffiths, de formes différentielles holomorphes sur M qui ne se prolongent à aucun voisinage de M . La solution du problème (I) est très liée à celle du problème suivant :

(I') Existe-t-il un voisinage ouvert V de M, et une application holomorphe $\rho : V \mapsto M$ vérifiant $\rho | M = 1_M$?

Ceci est un problème d'extension d'applications holomorphes ; il est clair que si (I') a une solution, alors le problème (I) a une solution pour n'importe quelle classe de cohomologie α , et, de plus, on peut choisir le même voisinage V pour toutes les classes de cohomologie α . Par contre, on peut construire des exemples pour lesquels le problème (I) ait une solution, bien que le problème (I') n'en ait pas. Dans cet exposé, nous envisagerons seulement les problèmes (I) et (II).

Afin d'énoncer le théorème principal, nous rappelons ce qu'est la classe de courbure d'un fibré vectoriel holomorphe E sur M : si Θ est la forme de courbure d'une structure hermitienne sur E, c'est une forme différentielle de type (1,1) à valeurs dans le fibré Hom(E,E) des endomorphismes de E qui vérifie

$$d''\Theta = 0$$

elle définit donc une classe $\widehat{\Theta}(E)$ dans $H^{1,1}(\mathrm{Hom}(E,E))$, qui est indépendante du choix de la métrique hermitienne, et que l'on appellera classe de courbure de E. Le principal résultat de cet exposé est alors le théorème suivant :

THEOREME 1 Soit M une variété analytique complexe compacte de dimension n plongée dans une variété X de dimension n+r. On suppose que le fibré normal N de M dans X est positif, et que la classe de cohomologie définie par l'image de la classe de courbure $\hat{\Theta}(N)$ dans

$$H^{1,1}(\operatorname{Hom}(N,N)_{/C})$$

est nulle. Alors, il existe un voisinage V de M tel que le morphisme de restriction

$$H^{p,q}(V) \longrightarrow H^{p,q}(M)$$

soit un isomorphisme pour $p+q < n-r$, et un monomorphisme pour $p+q = n-r$.

Lorsque $r = 1$, la seconde hypothèse est toujours vérifiée ; nous obtenons par exemple le corollaire suivant :

COROLLAIRE Soit M une hypersurface dans $P_{n+1}(C)$; il existe un voisinage ouvert V de M tel que le morphisme de restriction

$$H^{p,q}(V) \longrightarrow H^{p,q}(M)$$

soit un isomorphisme pour $p+q < n-1$, et un monomorphisme pour $p+q = n-1$.

Dans le cas où r est quelconque, les hypothèses du théorème 1 seront vérifiées dans le cas où le fibré normal pourra s'écrire sous la forme $N = L \otimes P$, où L est un fibré vectoriel positif de rang 1, et P un fibré vectoriel plat de rang r .

1. EXEMPLE DE CLASSES DE COHOMOLOGIE NON PROLONGEABLES (3)

L'exemple qui suit, dû à P.A. Griffiths, fait appel à la théorie des déformations de variétés complexes compactes, dont nous rappelons les rudiments.

Soit M une variété complexe compacte . A toute application holomorphe

$$\omega : \mathbb{C} \longrightarrow A^{0,1}(T(M))$$

vérifiant $\omega(0) = 0$ et $d''(\omega(s)) - \frac{1}{2}[\omega(s), \omega(s)] = 0$ pour tout $s \in \mathbb{C}$ est associée sur le produit $M \times \mathbb{C}$ une structure de variété complexe X telle que la projection naturelle

$$X = M \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

soit holomorphe ; sur les fibres $X_s = M \times \{s\}$ nous avons alors aussi une structure de variété complexe , et les formes différentielles holomorphes de degré p sur X_s sont en correspondance avec les formes $\psi \in A^{p,0}(M)$ sur M vérifiant l'équation

$$d''\psi - \omega(s) . \psi = 0$$

où l'opération "." désigne le prolongement de la dérivée de Lie suivant les champs de vecteurs . De plus, la variété X_0 s'identifie à M .

Soit $\varphi \in H^{p,0}(M)$ une forme différentielle holomorphe sur M, de degré p . S'il existe un prolongement holomorphe $\tilde{\varphi}$ de φ à un voisinage $M \times V$ de X_0 $\tilde{\varphi}_s = \varphi | X_s$ sera une forme holomorphe sur X_s , et définit donc une forme différentielle $\psi(s) \in A^{p,0}(M)$, dépendant analytiquement de s, et vérifiant

$$\psi(o) = \varphi$$

$$d''(\psi(s)) - \omega(s) . \psi(s) = 0$$

Le premier membre de cette dernière égalité admet pour développement limité à l'ordre 1

$$s \left\{ d''(\psi'(o)) - \omega'(o) . \psi(o) \right\} + s\, \varepsilon(s)$$

où $\lim\limits_{s \to o} \varepsilon(s) = 0$. Il en résulte que l'on doit avoir

$$d''(\varphi'(o)) = \omega'(o) . \varphi$$

Soit θ la classe de $\omega'(o)$ dans $H^{o,1}(T(M))$: c'est par définition la déformation infinitésimale de Kodaira et Spencer de M , au point $s = o$, définie par X . On voit donc qu'une condition nécessaire pour que φ se prolonge est que dans $H^{p,1}(M)$, la classe $\theta . \varphi$ soit nulle . Ainsi, la classe $\theta . \varphi$ apparaît donc comme une première obstruction au problème du prolongement de φ. On peut démontrer que lorsque M est une variété kählérienne, cette obstruction est toujours nulle , ce qui restreint le choix de l'exemple .

Soit $M = {}^{G}/_{D}$ la variété d'Iwasawa : c'est le quotient (ensemble des classes à droite) du groupe multiplicatif G des matrices de la forme

$$z = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

par le sous-groupe discret D de ces matrices où les z_i sont des entiers de Gauss . Les formes différentielles holomorphes sur G , de degré 1 , invariantes à droite, forment un espace vectoriel de dimension 3 ayant pour base

$$dz_1 \quad , \quad dz_2 \quad , \quad dz_3 - z_2\, dz_1 \quad .$$

Ces formes différentielles induisent , par passage au quotient , des formes sur M , dont il est connu qu'elles engendrent $H^{1,0}(M)$; de plus, on a dans $H^{1,1}(M)$, $dz_1 \wedge d\bar{z}_2 \neq 0$.

Considérons la forme différentielle sur M, de type (0,1), à valeurs dans T(M) définie par $\omega(s) = s\, d\bar{z}_2 \otimes \frac{\partial}{\partial z_2}$. Elle vérifie, pour tout s,

$$d''(\omega(s)) = 0 \quad ; \quad [\omega(s), \omega(s)] = 0$$

ce qui nous définit une structure de variété complexe X sur $M \times \mathbb{C}$; de plus on a

$$d\bar{z}_2 \otimes \frac{\partial}{\partial z_2} \cdot dz_3 - z_2\, dz_1 = dz_1 \wedge d\bar{z}_2$$

ce qui montre que la forme différentielle holomorphe $\varphi = dz_3 - z_2\, dz_1$ sur $M = X_0$ n'admet pas de prolongement holomorphe sur un voisinage de X_0.

2. LES OBSTRUCTIONS

Soit, avec les notations de l'introduction, V un voisinage de M, et I le faisceau d'idéaux des fonctions holomorphes s'annulant sur M. Considérons la "tour" suivante :

$$
\begin{array}{l}
H^{p,q}(V) \;=\; H^q(\,\mathcal{O}_V(\wedge^p T^*(V)\,)) \\
\qquad\qquad\downarrow \\
H^q(\,\mathcal{O}_V(\wedge^p T^*(V)) \otimes \mathcal{O}_V/_{I^{\mu+1}}\,) \\
\qquad\qquad\downarrow \\
H^q(\,\mathcal{O}_V(\wedge^p T^*(V)) \otimes \mathcal{O}_V/_{I^{\mu}}\,) \\
\qquad\qquad\downarrow \\
\qquad\qquad\vdots \\
\qquad\qquad\downarrow \\
H^q(\,\mathcal{O}_M(\wedge^p T^*(V)\,|\,M\,)\,) \\
\qquad\qquad\downarrow \\
H^q(\mathcal{O}_M(\wedge^p T^*(M)\,)) \;\simeq\; H^{p,q}(M)
\end{array}
$$

Pour prolonger une classe de cohomologie $\alpha \in H^{p,q}(M)$ au voisinage V, nous devons remonter successivement tous les "étages" de cette tour, en commençant par le "rez-de-chaussée" , ce qui fera apparaître un certain nombre d'obstructions successives.

2.1. LE REZ-DE-CHAUSSEE . Considérons la suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes sur M :

$$0 \longrightarrow N^* \longrightarrow T^*(V)\,|\,M \longrightarrow T^*(M) \longrightarrow 0$$

A cette suite exacte est associée sur le fibré $\Lambda^p T^*(V)\,|\,M$ une filtration décroissante , dite filtration de Koszul , dont le gradué associé est en degré i

$$gr^i(\Lambda^p T^*(V)\,|\,M) = \Lambda^i N^* \otimes \Lambda^{p-i} T^*(M)$$

Il existe alors une suite spectrale ayant pour aboutissement , en degré q $H^q(\mathcal{O}_M(\Lambda^p T^*(V)|\,M))$, et dont le terme E_1 est donné par

$$E_1^{i,j} = H^{i+j}(\Lambda^i N^* \otimes \Lambda^{p-i} T^*(M))$$

$$= H^{p-i,i+j}(\Lambda^i N^*)$$

Le morphisme naturel du rez-de-chaussée se factorise suivant le diagramme

$$\begin{tikzcd} H^q(\mathcal{O}_M(\Lambda^p T^*(V)\,|\,M)) \arrow[rr] \arrow[dr] & & E_1^{0,q} = H^{p,q}(M) \\ & E_\infty^{0,q} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

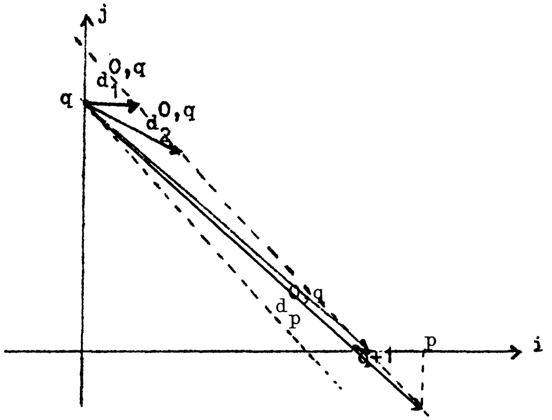
Comme la flèche $H^q(\mathcal{O}_M(\Lambda^p T^*(V)|\,M)) \longrightarrow E_\infty^{0,q}$ est surjective, la classe $\alpha \in H^{p,q}(M)$ pourra se remonter au premier étage si et seulement si α appartient à l'image de $E_\infty^{0,q}$ dans $E_1^{0,q}$. Ceci fait apparaître des obstructions successives dans

$$E_1^{1,q} = H^{p-1,q+1}(N^*)$$

$E_2^{2,q-1}$, qui se plonge dans un quotient de $H^{p-2,q+1}(\Lambda^2 N^*)$

$E_{q+1}^{p,q-p+1}$, qui se plonge dans un quotient de $H^{0,q+1}$ $(\Lambda^p \; N^*)$

Ces obstructions s'obtiennent en examinant le diagramme



et en remarquant que $E_2^{0,q} = \operatorname{Ker} d_1^{0,q}$, $E_3^{0,q} = \operatorname{Ker} d_2^{0,q}$, ... ,
$E_{p+1}^{0,q} = E_\infty^{0,q} = \operatorname{Ker} d_p^{0,q}$.

2.2. ETAGES INTERMEDIAIRES . On considère la suite exacte de faisceaux sur V :

$$0 \longrightarrow I^\nu / I^{\nu+1} \longrightarrow \mathcal{O}_V / I^{\nu+1} \longrightarrow \mathcal{O}_V / I^\nu \longrightarrow 0$$

Le faisceau $I^\nu / I^{\nu+1}$ est porté par M, et l'on a un isomorphisme de faisceaux :

$$I^\nu / I^{\nu+1} \,|\, M \;\simeq\; \mathcal{O}_M(N^{(-\nu)})$$

où $N^{(-\nu)}$ est le dual du fibré $N^{(\nu)}$, ν-ième puissance tensorielle symétrique de N . Ainsi, pour remonter le ν-ième étage,

$$H^q(\mathcal{O}_V(\Lambda^p T^*(V)) \otimes \mathcal{O}_V/_{I^{\nu+1}}) \longrightarrow H^q(\mathcal{O}_V(\Lambda^p T^*(V) \otimes \mathcal{O}_V/_{I^\nu})$$

on obtient une obstruction dans

$$H^{q+1}(\mathcal{O}_M(\Lambda^p T^*(V) \mid M \otimes N^{(-\nu)})$$

Si l'on utilise à nouveau la filtration de Koszul du § 2.1. et la suite analogue appliquée au fibré $\Lambda^p T^*(V) \mid M \otimes N^{(-\nu)}$, on voit que cette obstruction peut se remplacer par un nombre fini d'obstructions successives appartenant à des quotients des espaces de cohomologie

$$H^{p-i,q+1}(\Lambda^i N^* \otimes N^{(-\nu)}) \quad , \quad i \geqslant 0$$

2.3. DERNIER ETAGE. Pour remonter le dernier étage, nous avons comme obstruction un élément de

$$H^{q+1}(I^{\mu+1} \mathcal{O}_V(\Lambda^p T^*(V)))$$

Remarquons que cette obstruction est de nature différente de celle des § 2.1. et 2.2, puisqu'elle fait intervenir le plongement de M dans V ; nous la garderons sous cette forme.

Considérons maintenant le problème (II) : si $\beta \in H^{p,q}(X)$ est une classe de cohomologie telle que $\beta \mid M = 0$, on voit, par un raisonnement tout à fait analogue au précédent, que pour que V soit solution du problème (II) il est nécessaire et suffisant que s'annulent un nombre fini d'obstructions construites successivement et dépendant de β, et appartenant à des quotients des groupes de cohomologie

$$H^{p-i,q}(\Lambda^i N^* \otimes N^{(-\nu)}) \quad , \quad i+\nu>0$$

et une dernière obstruction dans un quotient du groupe

$$H^q (I^{\mu+1} \mathcal{O}_V(\Lambda^p T^*(V))$$

Ainsi, le théorème 1 est une conséquence du calcul d'obstructions que nous venons de faire, et des théorèmes d'annulation suivants :

THEOREME 2 (P.A. Griffiths(4)) Soient M une variété complexe compacte de dimension n plongée dans une variété X de dimension n+r , N le fibré normal de M dans X , I le faisceau d'idéaux sur X des fonctions holomorphes qui s'annulent sur M , et F un fibré vectoriel holomorphe sur X . Alors si N est positif, il existe un voisinage ouvert V de M, ne dépendant pas de F et un entier μ_0 (pouvant dépendre de F) tel que

$$H^q(V , I^\mu \mathcal{O}_V(F)) = 0$$

dès que $\mu \geq \mu_0$ et $q < n$.

THEOREME 3 .(Théorème d'annulation précis) Soient M une variété analytique complexe compacte de dimension n , E un fibré vectoriel holomorphe positif de rang r au-dessus de M et tel que l'image de la classe de courbure $\hat{\Theta}(E)$ dans

$$H^{1,1}(\operatorname{Hom}(E,E)/_{\mathbb{C}})$$

soit nulle . Alors

$$H^{p,q}(\Lambda^i E \otimes E^{(\nu)}) = 0$$

dès que $p+q \geqslant n+r-i+1$ lorsque $i > 0$, et dès que $p+q \geqslant n+r$ lorsque $i = 0$ et $\nu > 0$.

REMARQUE . Pour certaines valeurs particulières de i et ν, les derniers résultats sont vrais, sous la seule hypothèse " E positif " : c'est le cas lorsque $i = 0$, $\nu = 1$; c'est encore le cas lorsque $i = r$, $\nu = 0$. ((7),(8))

Vu le théorème de dualité de Serre, le théorème 3 implique que l'on a sous les ~~mêmes~~ hypothèses du théorème 1 et si $i + \nu > 0$:

$$H^{p,q}(\Lambda^i N^* \otimes N^{(-\nu)}) = 0$$

dès que $p+q \leqslant n-r$. Compte-tenu du théorème 2 , ceci donne le théorème 1.

3. DEMONSTRATION DU THEOREME 2.

La démonstration comporte essentiellement deux parties.

(1) Dans le cas où r est supérieur à 1, la principale difficulté est que I n'est pas un faisceau localement libre ; afin de nous ramener à un théorème d'annulation à valeurs dans un fibré , nous allons éclater M , ce qui nous placera dans le cas d'une hypersurface . Le passage se fera en appliquant la suite spectrale de Leray ; malheureusement , le nouveau fibré normal ne sera plus positif.

(2) Sous les nouvelles hypothèses ainsi obtenues , la principale difficulté sera alors le fait que l'on désire un théorème d'annulation sur une variété non compacte . La méthode utilisée diffère de celle de Griffiths, et consistera à se ramener aux théorèmes de finitude d' Andreotti et Grauert .

3.1. REDUCTION AU CAS D'UNE HYPERSURFACE ((4), p. 416)

Soient , avec les notations du théorème 2 , π: X' $\to$ X la transformation monoidale centrée le long de M , $M' = \pi^{-1}(M)$ l'image réciproque de M , I' le faisceau d'idéaux des fonctions holomorphes qui s'annulent sur l'hypersurface M' , $F' = \pi^{-1}(F)$ le fibré image réciproque de F par la projection π. Ainsi, M' s'identifie au fibré en espaces projectifs P(N) au-dessus de M , associé de manière naturelle à N .

Considérons les faisceaux images directes par la projection π:

$$R^q\pi_* \left(I'^{\mu}\mathcal{O}_{X'}(F') \right) = \mathcal{O}_X(F)\otimes_{\mathcal{O}_X} R^q\pi_* \left(I'^{\mu}\right)$$

Mais on peut voir facilement (en remarquant que la question est locale sur X , en se ramenant au cas M = $\{0\}$ plongé dans $\mathbb{C}^r$, et en utilisant un résultat de Bott (2)) que

$$R^q\pi_*\,(I'^{\mu}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q > 0 \\ I^{\mu} & \text{si} \quad q = 0 \end{cases}$$

d'où il résulte immédiatement que

$$R^q\pi_*\,(I'^{\mu}\,\mathcal{O}_{X'}(F')) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q > 0 \\ I^{\mu}\,\mathcal{O}_X(F) & \text{si} \quad q = 0 \end{cases}$$

Soit V un voisinage ouvert de M , $V' = \pi^{-1}(V)$. Comme la suite spectrale de Leray appliquée au faisceau $I'^{\mu}\,\mathcal{O}_{X'}(F')$ dégénère , on obtient un isomorphisme

$$H^q(V',\ I'^{\mu}\,\mathcal{O}_{X'}(F')\ ) = H^q(V\ ,\ I^{\mu}\,\mathcal{O}_X(F)\ )$$

On est donc ramené à démontrer que sur un voisinage convenable V' de M' , indépendant de F , on a

$$H^q(V',\ I'^{\mu}\,\mathcal{O}_{X'}(F')\ ) = 0 \qquad \text{pour} \quad q < n \quad \text{et} \quad \mu \geqslant \mu_o(F)\ .$$

Examinons maintenant le fibré normal N' de M' dans X' . Soit $\pi^{-1}(N)$ le fibré vectoriel au-dessus de M', image réciproque de N ; sur $M' = P(N)$ est défini canoniquement un sous-fibré vectoriel de rang 1 , S , du fibré $\pi^{-1}(N)$ et il est clair que N' et S coïncident . S n'est pas un fibré positif ; cependant , lorsque N est positif , il est facile de construire sur S une structure hermitienne $\langle\ ,\ \rangle$ dont la forme quadratique de courbure $K(S, \langle\ ,\ \rangle)$, définie par

$$K\,(S, \langle\ ,\ \rangle\ )(t) = \frac{i}{2\pi}\,\Theta\,(S, \langle\ ,\ \rangle)\ (t \wedge it)$$

pour $t \in T(P(N))$ ($\Theta(S, \langle\ ,\ \rangle)$ désigne la forme de courbure de la structure hermitienne $\langle\, ,\, \rangle$) soit de signature $(n,\ r-1)$. Dans une telle situation , nous dirons simplement que la structure hermitienne est de signature ($n,r-1$) ((4),prop. 6.5. , p. 427)

Le théorème 2 sera donc une conséquence du lemme suivant

3.2. LEMME Soient M une hypersurface de dimension n , compacte, dans une variété X, I le faisceau d'idéaux des fonctions holomorphes sur X qui s'annulent sur M, N le fibré normal de M dans X . On suppose qu'il existe sur N une structure hermitienne de signature (s,t) , avec $s+t = n$.

Alors il existe un voisinage ouvert V de M tel que pour tout fibré vectoriel holomorphe F sur X

$$H^q(V\ ,\ I^{\mu}\mathcal{O}(F)\ ) = 0$$

dès que $\mu \geqslant \mu_0(F)$ et $q < s$.

DEMONSTRATION : Soit L le fibré vectoriel de rang 1 au-dessus de X associé à l'hypersurface M . On a donc $L\,|\,M = N$, et L possède une section holomorphe f transversale à la section nulle, dont le lieu des zéros est exactement M . Alors $I^{\mu} = \mathcal{O}(L^{(-\mu)})$, et l'on a donc, pour tout voisinage V de M

$$H^q(V\ ,\ I^{\mu}\mathcal{O}(F)\ ) = H^q(V\ ,\ \mathcal{O}(\ L^{(-\mu)}\otimes F\ ))$$

Soit , sur le fibré normal N , une structure hermitienne de signature (s,t) , avec $s+t = n$; on peut toujours la prolonger , sur un voisinage de M , en une structure hermitienne sur L de signature ($s+1,\ t$) . En effet, prolongeons d'abord de façon arbitraire la structure donnée en une structure hermitienne notée $\langle\, ,\, \rangle$. Pour tout réel $\lambda \geqslant 0$, la nouvelle structure $\langle\ ,\ \rangle_\lambda = e^{-\lambda\langle f,f\rangle}\langle\ ,\ \rangle$ vérifie, pour tout vecteur tangent $t \in T_x(X)$ d'origine $x \in M$

$$K(L,\langle\ ,\ \rangle_\lambda)(t) = K(L,\langle\ ,\ \rangle)(t) + \frac{\lambda}{2\pi}\langle D'f(t),D'f(t)\rangle$$

où D' désigne la connexion holomorphe associée à la structure hermitienne $\langle\ ,\ \rangle$. Or, pour $x\in M$, on a $\ker D'f = T_x(M)$; d'autre part, pour tout $t \in T_x(M)$, on a

$$K(L,\langle\ ,\ \rangle)(t) = K(N,\langle\ ,\ \rangle)(t)$$

Ainsi, on constate que si l'on prend λ assez grand, la forme quadratique $\langle\ ,\ \rangle_\lambda$ sera de signature $(s+1,\ t)$ sur M, et donc aussi au voisinage de M.

Supposons donc choisie une telle structure hermitienne $\langle\ ,\ \rangle$ au voisinage V de M ; on notera $|\ |^2$ la forme quadratique associée . On peut toujours supposer, quitte à restreindre peut-être V , que les ouverts

$$V_c = \left\{ x \in V\ ,\quad |f(x)| < c \right\}$$

sont, pour c assez petit, relativement compacts dans V . Nous allons montrer que pour un tel c,

$$H^q(\ V_c\ ,\ \mathcal{O}(L^{(-\mu)} \otimes F)\ ) = 0 \quad \text{pour } \mu \geqslant \mu_0(F) \quad \text{et } q < s$$

Soit $\pi : L \to X$ la projection canonique ; considérons le morphisme naturel de $\mathcal{O}_X$ - modules

$$\bigoplus_{\mu \leqslant \ell} \mathcal{O}_X(\mathrm{Hom}(L^{(\mu)},\ F)) \longrightarrow \pi_*(\mathcal{O}_L\ (\pi^{-1}(F)\ ))$$

En utilisant un développement en série entière, on voit que ce morphisme admet un inverse à gauche . Il en résulte que le groupe de cohomologie

$$H^q(V_c\ ,\ \pi_*(\mathcal{O}_L(\pi^{-1}(F))))$$

peut être muni d'une filtration dont le gradué associé est, en degré μ, $H^q(V_c\ ,\ \mathcal{O}\,(L^{(-\mu)}\otimes F)\ )$. D'autre part, on a évidemment

$$R^i\pi_*(\mathcal{O}_L(\pi^{-1}(F))) \quad = \quad 0$$

pour $i > 0$; ainsi, la suite spectrale de Leray montre que l'on a un isomorphisme

$$H^q(\ V_c,\pi_*(\mathcal{O}_L(\pi^{-1}(F)))) \quad = \quad H^q(\pi^{-1}(V_c),\ \mathcal{O}_L(\pi^{-1}(F)\ ))$$

Pour démontrer le lemme , il suffira donc de démontrer que pour $q < s$, on a

$$\dim \quad H^q(\pi^{-1}(V_c),\ \mathcal{O}_L(\pi^{-1}(F)\ )) \quad < \quad \infty$$

Ceci résultera du lemme qui suit, qui montre que $\pi^{-1}(V_c)$ est fortement n-s+1 concave (au sens d' Andreotti et Grauert) et du théorème de finitude de (1) .

3.3. LEMME. Soient, avec les notations du § 3.2. , V et c tels que V_c soit relativement compact dans X ; considérons, pour λ réel positif, la fonction $\varphi : \pi^{-1}(V_c) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\varphi(\xi) \;=\; e^{-\lambda\left(|\xi|^2 + \frac{c^2}{c^2 - |f|^2}\right)}$$

pour $\xi \in L_x$ et $x \in V_c$. Alors :

(i) pour tout m réel positif, les ensembles $\{\varphi > m\}$ sont relativement compacts dans $\pi^{-1}(V_c)$;

(ii) la forme de Levi de φ a au moins s+1 valeurs propres positives sur le complémentaire , dans $\pi^{-1}(V_c)$, du compact

$$|f| \leq \tfrac{1}{2}c \quad , \quad |\xi| \leq 1$$

pourvu que λ soit supérieur à 4 .

(La forme de Levi de φ au point $\xi \in L$ est par définition la forme quadratique $L_\xi(\varphi) : T_\xi(L) \to \mathbb{R}$ définie par

$$L_\xi(\varphi)(u) = i\, d'd''\varphi(\, u \wedge iu\,)$$

pour $u \in T_\xi(L)$)

DEMONSTRATION . L'assertion (i) est évidente ; démontrons la seconde . Soit D' la connection holomorphe sur L associée à la structure hermitienne; nous désignerons encore par D' la connection image réciproque de D' sur le fibré $\pi^{-1}(L)$ (image réciproque de L par π); enfin, soit σ la section canonique du fibré $\pi^{-1}(L)$, au-dessus de $\pi^{-1}(V_c)$, définie par $\sigma(\xi) = (\xi,\xi)$. Par dérivation , nous obtenons successivement

$$d'\varphi = -\lambda\, e^{-\lambda\left(|\xi|^2 + \frac{c^2}{c^2-|f|^2}\right)} \left[\langle D'\sigma, \sigma\rangle + \frac{c^2}{(c^2-|f|^2)^2}\langle D'f\,,\, f\rangle\right]$$

$$d''d'\varphi = -\lambda\, e^{-\lambda\left(|\xi|^2 + \frac{c^2}{c^2-|f|^2}\right)} \left[\langle d''D'\sigma, \sigma\rangle + \frac{c^2}{(c^2-|f|^2)^2}\langle d''D'f,\ f\rangle\right.$$

$$-\langle D'\sigma, D'\sigma\rangle - \frac{c^2}{(c^2 - f^2)^2}\langle D'f, D'f\rangle - \frac{2c^2}{(c^2-|f|^2)^3}\langle D'f, f\rangle\langle f, D'f\rangle + \lambda\theta\bar{\theta}\Bigg]$$

$$\text{avec}\quad \theta = \langle D'\sigma, \sigma\rangle + \frac{c^2}{(c^2-|f|^2)^2}\langle D'f, f\rangle$$

Soit $\xi \in L_x$, avec $x \in V_c$; il résulte de la définition de la forme quadratique de courbure $K = K(L, \langle\,,\rangle)$ du fibré L (cf. § 3.1.) que l'on a pour tout vecteur $u \in T_\xi(L)$ de projection $\pi(u)$ dans $T_x(X)$:

$$L_\xi(\varphi)(u) = \lambda e^{-\lambda\left(|\xi|^2 + \frac{c^2}{c^2-|f|^2}\right)}\Bigg[2\pi\left(|\xi|^2 + \frac{c^2 f^2}{(c^2-|f|^2)^2}\right)K(\pi(u))$$

$$-\langle D'\sigma(u), D'\sigma(u)\rangle - \frac{c^2}{(c^2-|f|^2)^2}\langle D'f(u), D'f(u)\rangle$$

$$-\frac{2c^2}{(c^2-|f|^2)^3}\langle D'f(u), f\rangle\langle f, D'f(u)\rangle + \lambda\theta(u)\bar{\theta}(u)\Bigg]$$

Supposons d'abord $|f(x)| > \frac{1}{2}c$, et écrivons, au point x, $D'f = f\omega$, avec $\omega \in T_x^*(X)$. Alors, pour $u \in \operatorname{Ker} D'\sigma$:

$$L_\xi(\varphi)(u) = C\lambda K(\pi(u)) + D\lambda\left[\frac{\lambda c^2|f|^2}{(c^2-|f|^2)^2} - \frac{2|f|^2}{c^2-|f|^2} - 1\right]\omega(\pi(u))\bar{\omega}(\pi(u))$$

où C et D sont des quantités strictement positives dépendant du point ξ.

Mais

$$\frac{|f|^2}{c^2-|f|^2} > \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{c^2}{c^2-|f|^2} > \frac{4}{3}$$

et donc, pour $u \in \operatorname{Ker} D'\sigma$:

$$L_\xi(\varphi)(u) \geqslant C\lambda K(\pi(u)) + D\lambda\left(\frac{4}{9}\lambda - \frac{5}{3}\right)\omega(\pi(u))\overline{\omega}(\pi(u))$$

$$\geqslant C\lambda K(\pi(u))$$

dès que $\lambda \geqslant 4$. Or, il est facile de voir que $D'\sigma : T(L) \to \pi^{-1}(L)$ réalise un scindage de la suite exacte de fibrés vectoriels sur $\pi^{-1}(V_c)$:

$$0 \longrightarrow \pi^{-1}(L) \longrightarrow T(L) \xrightarrow{\pi} \pi^{-1}(T(X)) \longrightarrow 0$$

et donc, induit un isomorphisme de $(\operatorname{Ker} D'\sigma)_\xi$ sur $T_x(X)$. Il en résulte, vu l'hypothèse sur $\langle\,,\rangle$ (cf § 3.2.) que l'on peut trouver un sous-espace de dimension s+1 de $(\operatorname{Ker} D'\sigma)_\xi$ sur lequel $L_\xi(\varphi)$ sera positive non dégénérée, et donc que $L_\xi(\varphi)$ a au moins s+1 valeurs propres positives.

Supposons maintenant $|\xi|>1$ et écrivons, au point ξ, $D'\sigma = \sigma\eta$, avec $\eta \in T^*_\xi(L)$. Si $u \in \pi^{-1}(\operatorname{Ker}(D'f))$, on a

$$L_\xi(\varphi)(u) = C_1\lambda K(\pi(u)) + D_1\lambda(\lambda|\xi|^2 - 1)\,\eta(u)\overline{\eta}(u)$$

où C_1 et D_1 sont des quantités positives ; ceci donne l'inégalité

$$L_\xi(\varphi)(u) \geqslant C_1\lambda K(\pi(u)) + D_1\lambda(\lambda - 1)\,\eta(u)\overline{\eta}(u)$$

Or, en restriction à $(\text{Ker } D'f)_x$, K a au moins s valeurs propres positives. On peut donc trouver un sous-espace P de dimension s de $(\text{Ker} D'f)_x$ tel que $K|P$ soit positive non dégénérée . Il résulte de l'inégalité ci-dessus que sur $\pi^{-1}(P)$, $L_\xi(\varphi)$ est positive non dégénérée ; comme $\pi^{-1}(P)$ est de dimension s+1, on a le résultat voulu .

3.4. REMARQUE. On pourrait montrer de même qu'avec les hypothèses du lemme 3.2., et V et c étant convenablement choisis, la forme de Levi de la fonction $\psi : \pi^{-1}(V_c) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\psi(\xi) = |\xi|^2 + \frac{c^2}{c^2 - |f|^2}$$

pour $\xi \in L_x$ et $x \in V_c$, a au moins t+1 valeurs propres positives en dehors du compact $\left\{ |f| \leqslant \frac{1}{2}c \, , |\xi| \leqslant 1 \right\}$. Ainsi , $\pi^{-1}(V_c)$ est fortement s+2 -convexe (au sens de (1)) . Le théorème de finitude d' Andreotti et Grauert et le raisonnement déjà fait dans le § 3.2. montre qu'alors

$$H^q(V_c \, , \mathcal{O}(L^{(-\mu)} \otimes F)) = 0$$

pour μ assez grand et $q > s+1$. Ce résultat et le lemme 3.2. constituent essentiellement le théorème III, p. 379 de (4) ; Griffiths l'obtient par un théorème de Kohn de représentation des classes de cohomologie par des formes harmoniques sur des variétés à bord .

4. DEMONSTRATION DU THEOREME 3 .

Le théorème 3 sera une conséquence du " precise vanishing theorem " de Kodaira et Nakano (8) , valable pour les fibrés vectoriels holomorphes positifs de rang 1 . La démonstration utilise la généralisation de la suite spectrale de Borel décrite dans (6) .

4.1. Considérons un diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & X \\ & & \downarrow \pi \\ & & S \end{array}$$

où $X \to S$ est un fibré analytique complexe en variétés compactes, et G un fibré vectoriel holomorphe au dessus de X ; soit $T(X/_S)$ le fibré vectoriel holomorphe sur X des vecteurs tangents le long des fibres de π. Considérons les faisceaux analytiques cohérents sur S

$$\mathbb{H}^{p,q}(G) = R^q\pi_*\,(\mathcal{O}_X(\Lambda^p T(X/_S) \otimes G\,))$$

Alors il existe (6) , pour tout entier p , une suite spectrale notée ${}^pE\,(G)$ dont le terme ${}^pE_2(G)$ est donné par

$${}^pE_2^{k,\ell}(G) = \bigoplus_i H^{i,k-i}(\,S,\,\mathbb{H}^{p-i,\ell+i}(G)\,)$$

et qui a pour aboutissement , en degré q , $H^{p,q}(G)$. Cette suite est associée à la filtration décroissante $F^kA^{p,\bullet}(G)$ du complexe $A^{p,\bullet}(E)$ définie de la manière suivante : $F^kA^{p,q}(G)$ est le sous-espace de $A^{p,q}(G)$ engendré par les formes différentielles s'écrivant $\pi^*(\alpha_i)\wedge\beta_i$, où $\alpha_i \in A^{i,k-i}(S)$ et $\beta_i \in A^{p-i,q-k+i}(G)$.

Si nous prenons $G = T(X/_S)$, nous avons une section holomorphe évidente du faisceau $\mathbb{H}^{1,0}(T(X/_S))$ définie par le morphisme "identité" de $T(X/_S)$; elle sera notée θ . La suite spectrale précédente nous permet de la considérer comme un élément de ${}^1E_2^{0,0}(T(X/_S))$, ce qui nous définit un élément $d_2\theta \in {}^1E_2^{2,-1}(T(X/_S)) = H^{1,1}(S, \mathbb{H}^{0,0}(T(X/_S)))$.

Le lemme qui suit est un critère de dégénérescence de la suite spectrale ${}^pE\ (G)$.

LEMME <u>Supposons, avec les notations ci-dessus , que</u>

(i) <u>pour tout</u> $q > 0$, $H^{p,q}(G) = 0$

(ii) <u>la classe de cohomologie</u> $d_2\theta \in H^{1,1}(S, \mathbb{H}^{0,0}(T(X/_S)))$ <u>soit nulle</u> .

<u>Alors, dans la suite spectrale</u> ${}^pE\ (G)$, <u>on a</u>

$$d_2 = d_3 = \dots = 0$$

<u>Il en résulte en particulier qu'il existe une filtration décroissante de</u> $H^{p,q}(G)$ <u>dont le gradué associé est</u> , <u>en degré</u> i ,

$$gr^i\ H^{p,q}(G) = H^{i,q}(S, \mathbb{H}^{p-i,0}(G))$$

DEMONSTRATION : Elle utilise une propriété multiplicative de de la suite spectrale ci-dessus . Soit $v \in A^{p,q}(T(X))$ et désignons par $i'(v)$ la dérivation de $A^{\bullet,\bullet}(G)$ de bidegré $(p-1,q)$ qui prolonge le produit intérieur par les champs de vecteurs : $i'(v)$ est défini de manière que l'application

$$v \mapsto i'(v)$$

soit linéaire sur l'anneau des formes différentielles $A^{\bullet,\bullet}(X)$, et n'est autre, lorsque $v \in A^{0,0}(T(X))$ que la partie de type $(-1,0)$ de la dérivation $i(v)$ du module gradué $A^{\bullet}(G)$, produit intérieur par le champ de vecteur v , où $A^k(G) = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(G)$ est l'espace des formes différentielles de degré k à valeurs dans G .

Compte-tenu de l'inclusion $T(X/_S) \subset T(X)$, ceci nous permet de définir un accouplement

$$A^{p',q'}(T(X/_S)) \times A^{p'',q''}(G) \longrightarrow A^{p'+p''-1,q'+q''}(G)$$

compatible avec les filtrations définissant les suites spectrales associées aux fibrés $T(X/_S)$ et G . De plus, pour $v \in A^{p',q'}(T(X/_S))$ et $\omega \in A^{p'',q''}(G)$

$$d''\, i'(v)\omega = i'(d''v)\omega + (-1)^{p'+q'-1}\, i'(v)\, d''\omega$$

On en déduit également un accouplement sur les suites spectrales associées:

$${}^{p'}E\,(T(X/_S)) \times {}^{p''}E\,(G) \longrightarrow {}^{p'+p''}E\,(G)$$

Ainsi, pour $\omega \in {}^{p}E_2^{k,\ell}(G)$,

$$d_2\, i'(\theta)\omega = i'(d_2\theta)\omega + i'(\theta)\, d_2\omega$$

Or, sous l'hypothèse (i) du lemme, ${}^{p}E_2^{k,\ell}(G) = H^{\ell,k+\ell}(S, H^{p+\ell,0}(G))$, d'où il résulte que $i'(\theta)\omega = (p+\ell)\omega$; comme $d_2\omega \in {}^{p}E_2^{k+2,\ell-1}(G)$, on en déduit que $i'(\theta)d_2\omega = (p+\ell-1)\, d_2\omega$, et donc $d_2\omega = i'(d_2\theta)\omega$. L'hypothèse (ii) implique donc $d_2 = 0$.

D'autre part, on a trivialement $d_3\theta = d_4\theta = \dots = 0$. En refaisant le raisonnement ci-dessus au cran i , on obtient, dans ${}^{p}E_i(G)$, $d_i = 0$ pour $i \geqslant 3$ ce qui démontre le lemme .

REMARQUE. On peut en fait démontrer que la classe de cohomologie $d_2\theta$ s'identifie à l'obstruction au scindage holomorphe de la suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes au-dessus de X

$$0 \longrightarrow T(X/_S) \longrightarrow T(X) \longrightarrow \pi^{-1}(T(S)) \longrightarrow 0$$

Si cette obstruction est nulle, on peut choisir un scindage holomorphe de cette suite exacte , d'où l'on déduit la décomposition en somme directe

$$\wedge^p T^*(X) \otimes G = \bigoplus_i \pi^{-1}(\wedge^i T^*(S)) \otimes \wedge^{p-i} T^*(X/_S) \otimes G$$

Sous l'hypothèse (i) du lemme , la suite spectrale de Leray, appliquée au second membre, dégénère , ce qui permet aussi d'obtenir une somme directe

$$H^{p,q}(G) = \bigoplus_i H^{i,q}(S, \mathbb{H}^{p-i,0}(G))$$

mais bien entendu subordonnée au choix du scindage . (Ceci n'aura pas d'importance dans la suite.)

4.2. Soit V un espace vectoriel de dimension r , et considérons l'espace projectif $P(V^*)$ des hyperplans de V . Soit S le sous-fibré du fibré trivial $P(V^*) \times V$ défini par

$$S = \bigcup_{[h] \in P(V^*)} \operatorname{Ker} h$$

où $[h]$ est la classe de la forme linéaire h dans $P(V^*)$; enfin, soit Q le fibré vectoriel de rang 1 quotient de $P(V^*) \times V$ par S .

LEMME 4.2.1. <u>Pour tout entier</u> $\mu > 0$, <u>on a</u>

$$H^{p,q}(Q^{(\mu)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } q > 0, \text{ ou } p \geqslant \mu \\ Z^p_\mu & \text{si } p < \mu \end{cases}$$

<u>où</u> Z^p_μ <u>est le noyau de l'application linéaire</u>

$$\Lambda^p V \otimes V^{(\mu-p)} \longrightarrow \Lambda^{p-1} V \otimes V^{(\mu-p+1)}$$

défini pour $x_1,\dots,x_p,x_{p+1},\dots,x_\mu \in V$ par

$$x_1\wedge\dots\wedge x_p \otimes x_{p+1}\circ\dots\circ x_\mu \longmapsto \sum_{i=1}^{p} (-1)^i x_1\wedge\dots\wedge\widehat{x_i}\wedge\dots\wedge x_p \otimes x_i \circ x_{p+1}\circ\dots\circ x_\mu$$

(" $\circ$ " désigne l'opération " produit tensoriel symétrique " et $\widehat{x_i}$ signifie que l'on enlève x_i .)

Ce dernier résultat précise un théorème de Bott(2). Il signifie que les formes différentielles holomorphes de degré p sur $P(V^*)$ à valeurs dans $Q^{(\mu)}$ ne sont autres que les formes différentielles holomorphes de degré p sur V^*, homogènes de degré μ, dont le produit intérieur par le champ de vecteurs v défini par $v(h) = h$ pour $h \in V^*$, est nul .

LEMME 4.2.2. Soit $T = T(P(V^*))$ le fibré tangent à $P(V^*)$. Les groupes de cohomologie $H^{p,q}(T)$ sont tous nuls , sauf

$$\begin{cases} H^{0,0}(T) = \mathrm{Hom}(V,V)/_{\mathbb{C}} \\ H^{p,p-1}(T) = \mathbb{C} \qquad \text{pour } 1 \leq p \leq r \end{cases}$$

Ce lemme résulte du fait que $T(P(V^*)) = \mathrm{Hom}(S,Q)$, de la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de fibrés

$$0 \longrightarrow P(V^*)\times C \longrightarrow \mathrm{Hom}(P(V^*)\times V,\ Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S,Q) \longrightarrow 0$$

et du lemme précédent appliqué pour $\mu = 1$.

4.3. Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang r au-dessus d'une variété analytique complexe M . Désignons par $X = P(E^*)$ le fibré en espaces projectifs associé à E^*, π : $P(E^*) \to M$ la projection canonique , $\pi^{-1}(E)$ le fibré image réciproque de E par π. En procédant fibre par fibre, la construction que l'on vient de décrire permet de définir un sous-fibré vectoriel holomorphe de rang r-1, noté encore S, de $\pi^{-1}(E)$, et un fibré vectoriel quotient de rang 1, noté encore Q .

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Q^{(\mu)} & \longrightarrow & P(E^*) = X \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ & & M \end{array}$$

et soit Z^p_μ le noyau du morphisme de fibrés vectoriels

$$\Lambda^p\, E \otimes E^{(\mu-p)} \longrightarrow \Lambda^{p-1}\, E \otimes E^{(\mu-p+1)}$$

défini de manière naturelle à partir de la formule du lemme 4.2.1. Avec les notations du § 4.1., et toujours d'après le lemme 4.2.1., nous avons

$$\mathbb{H}^{p,q}(Q^{(\mu)}) = \begin{cases} 0 \text{ si } q > 0 \text{ ou } p \geqslant \mu \\ Z^p_\mu \quad \text{si } p < \mu \end{cases}$$

Ainsi, l'hypothèse (i) du lemme 4.1. est satisfaite ; le lemme suivant donne la condition pour que la condition (ii) soit elle aussi satisfaite. Remarquons tout d'abord que, d'après le lemme 4.2.2., $\mathbb{H}^{0,0}(T(X/_M)$ s'identifie au faisceau des sections du fibré $\mathrm{Hom}(E,E)/_{\mathbb{C}}$.

LEMME <u>La classe de cohomologie</u> $d_2\theta$, <u>définie au</u> § 4.1., <u>coïncide</u> , <u>dans la situation que l'on vient de décrire</u> , <u>avec l'image de la classe de courbure</u> $\hat{\Theta}(E)$ <u>dans</u> $H^{1,1}(M, \mathrm{Hom}(E,E)/_{\mathbb{C}})$.

DEMONSTRATION . Il faut revenir à la définition du morphisme d_2 de la suite spectrale, et de la courbure . Soit $\langle\, ,\rangle$ une structure hermitienne sur E, et D' la connexion holomorphe compatible avec $\langle\,,\,\rangle$. On notera encore D' la connexion image réciproque de D' sur le fibré $\pi^{-1}(E)$. La suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes sur X :

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow \pi^{-1}(E) \xrightarrow{j} Q \longrightarrow 0$$

donne naissance à une forme différentielle $\gamma \in A^{1,0}(\mathrm{Hom}(S,Q))$, c'est-à-dire un morphisme de fibrés vectoriels de classe C^∞ : $T(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S,Q)$; ce morphisme induit un isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes

$$T(X/_M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(S,Q)$$

Ainsi, si l'on identifie ces deux fibrés, γ peut être considérée comme une forme différentielle à valeurs dans $T(X/_M)$ qui prolonge l'identité de $T(X/_M)$ c'est-à-dire la forme θ du § 4.1.

Par définition de γ, et de la forme de courbure $\Theta = \Theta(E, \langle\,,\,\rangle)$, on a, si s est une section locale holomorphe de S au-dessus d'un ouvert U

$$j(\pi^* \Theta(s)) = d''(\gamma(s))$$

dans $\Gamma(U, \mathcal{O}(Q))$. Il en résulte que, dans le language de la filtration définie au § 4.1. :

(1) $d''\gamma \in F^2A^{1,1}(T(X/_M))$; $d_2\theta$ est donc la classe dans ${}^1E_2^{2,-1}(T(X/_M)) = H^{1,1}(M, \mathrm{Hom}(E,E)/_C)$ de $d''\gamma$.

(2) $d''\gamma$ est l'image de Θ par le morphisme composé

$$\begin{array}{ccc} F^2A^{1,1}(\mathrm{Hom}(\pi^{-1}(E), \pi^{-1}(E))) & \longrightarrow & F^2A^{1,1}(\mathrm{Hom}(S,Q)) \\ \uparrow & & \\ A^{1,1}(\mathrm{Hom}(E,E)) & & \end{array}$$

Considérons le morphisme de fibrés au-dessus de X :

$$\mathrm{Hom}(\pi^{-1}(E),\pi^{-1}(E)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S,Q)$$

Il induit un morphisme sur les suites spectrales associées du § 4.1. Le lemme 4 de (6) permet alors d'obtenir par fonctorialité un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1(F^2A^{1,\bullet}(\mathrm{Hom}(\pi^{-1}(E),\pi^{-1}(E))) & \longrightarrow & H^1(F^2A^{1,\bullet}(\mathrm{Hom}(S,Q))) \\ \wr\Big\uparrow & & \wr\Big\uparrow \\ A^{1,1}(\mathrm{Hom}(E,E)) & \longrightarrow & A^{1,1}(\mathrm{Hom}(E,E)/_{\mathbb{C}}) \end{array}$$

Il en résulte que l'image de $\hat{\Theta}(E)$ dans $H^{1,1}(\mathrm{Hom}(E,E)/_{\mathbb{C}})$ est exactement la classe $d_2\theta$.

4.4. Avec les hypothèses du théorème 3, nous pouvons maintenant appliquer le lemme 4.1. dans la situation décrite au § 4.3.: il existe une filtration croissante de $H^{p,q}(Q^{(\mu)})$ dont le gradué associé est en dimension i

$$gr_i H^{p,q}(Q^{(\mu)}) = H^{p-i,q}(Z^i_\mu)$$

Or, E étant positif, il en est de même de Q , donc de $Q^{(\mu)}$. Le théorème de Kodaïra-Nakano montre que

$$H^{p,q}(Q^{(\mu)}) = 0$$

dès que $\mu > 0$ et $p+q \geqslant n+r$; il en résulte que pour $i<\mu$, $H^{p,q}(Z^i_\mu) = 0$ dès que $p+q \geqslant n+r-i$. De là et de la suite exacte

$$0 \longrightarrow Z^{i}_{i+\nu} \longrightarrow \wedge^{i} E \otimes E^{(\nu)} \longrightarrow Z^{i-1}_{i+\nu} \longrightarrow 0$$

on déduit que pour $\nu > 0$ et $i > 0$, $H^{p,q}(\wedge^{i} E \otimes E^{(\nu)}) = 0$ dès que $p+q \geqslant n+r-i+1$. De même , des isomorphismes $Z^{0}_{\nu} = E^{(\nu)}$, on tire que $H^{p,q}(E^{(\nu)}) = 0$ dès que $p+q \geqslant n+r$, ce qui termine la démonstration du théorème 3 .