

Astérisque

J. L. VERDIER

Le théorème de Le Potier

Astérisque, tome 17 (1974), p. 68-78

http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__17__68_0

© Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE THEOREME DE LE POTIER

par J.L. VERDIER

1. Cohomologie des espaces projectifs.

Soient k un corps, E un espace vectoriel sur k de dimension $r + 1$, $r \leq 1$. Notons P l'espace projectif construit sur E : le schéma P est le spectre homogène de l'algèbre symétrique de E^* dual de E ou encore P est la grassmannienne des droites de E . Notons Ω^q le faisceau des différentielles de degré q sur P . On a une suite exacte

$$1.1. \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(1) \otimes \Omega^1 \longrightarrow J^1(\mathcal{O}(1)) \longrightarrow \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0$$

où $J^1(\mathcal{O}(1))$ est le faisceau des jets de sections à l'ordre 1 de $\mathcal{O}(1)$.

La suite exacte 1.1 fournit un élément $c(P) \in \text{Ext}^1(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(1) \otimes \Omega^1) = H^1(P, \Omega^1)$.

Soient $0 < q \leq n$ deux entiers. Notons

$$1.2. \quad \Phi_{q,n}(E) : S^{n-q}(E) \otimes \Lambda^q(E) \longrightarrow S^{n-q+1}(E) \otimes \Lambda^{q-1}(E)$$

l'unique application linéaire telle que

$$1.3. \quad \Phi_{q,n}(E)(s \otimes e_1 \wedge \dots \wedge e_q) = \sum_{i=1}^q (-1)^{i+1} s \cdot e_i \otimes e_1 \wedge \dots \wedge \check{e}_i \wedge \dots \wedge e_q,$$

pour tout $s \in S^{n-q}(E)$ et toute suite e_1, \dots, e_q d'éléments de E . On étend de la manière évidente la définition de $\Phi_{q,n}(E)$ à tous les couples d'entiers n, q en convenant que les puissances extérieures et symétriques négatives sont nulles.

THEOREME 1. -a) On a $H^p(P, \Omega^q) = 0$ pour $p \neq q$. Pour $0 \leq q \leq r$, $H^q(P, \Omega^q)$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur k engendré par $c(P)^q$.

b) Pour $n \neq 0$ et $q \leq n+r$, on a $H^p(P, \Omega^q(n)) = 0$ pour $p \neq 0$ et un isomorphisme canonique, commutant aux automorphismes de E :

$$H^0(P, \Omega^q(n)) \simeq \ker \Phi_{q,n}(E^*).$$

c) Le cup-produit $H^p(P, \Omega^q(n)) \times H^{r-q}(P, \Omega^{r-q}(-n)) \longrightarrow H^r(P, \Omega^r)$ et

l'identification canonique $H^r(P, \Omega^r) \simeq k$ définie par la base $c(P)^r$ four-
nissent des isomorphismes canoniques

$$H^p(P, \Omega^q(n)) \simeq H^{r-p}(P, \Omega^{r-q}(-n))^* .$$

PROPOSITION 1.- Pour $q \neq 0$ et $n \neq 0$, on a $\ker \phi_{q,n}(E) = \text{Im } \phi_{q+1,n}(E)$.

COROLLAIRE.- Posons $h^{0,q}(n) = \dim_k H^0(P, \Omega^q(n))$. Pour $0 \leq q \leq r$ et $q \leq n$,
on a $h^{0,q}(n) = \sum_{s=0}^q (-1)^{q-s} \binom{r+1}{s} \binom{n-s+r}{r}$. Pour $q \notin [0, r]$ ou bien pour
 $q > n$ on a $h^{0,q}(n) = 0$.

La démonstration du théorème et de la proposition est indiquée au numéro suivant. Le corollaire en résulte par un calcul de caractéristique d'Euler-Poincaré.

2. Faisceaux des jets de sections à l'ordre 1.

Soient X un S -schéma, L un faisceau sur X , localement libre de rang $r+1$. Posons $\Xi = \text{Spec}(\bigoplus_0^\infty S^n(L))$. Le schéma Ξ est lisse sur X . Notons $\Xi - \{0\}$ l'ouvert complémentaire de la section nulle de Ξ et $\pi : \Xi - \{0\} \rightarrow X$ la projection.

On a sur $\Xi - \{0\}$ une suite exacte

$$2.1. \quad 0 \rightarrow \pi^* \Omega_{X/S}^1 \rightarrow \Omega_{\Xi/S}^1 \rightarrow \Omega_{\Xi/X}^1 \rightarrow 0 ,$$

et le faisceau $\Omega_{\Xi/X}^1$ s'identifie à $\pi^* L$.

Le groupe multiplicatif agit sur $\Xi - \{0\}$ et les termes de 2.1 en y respectant les homomorphismes. Il agit donc sur $R^i \pi_* \Omega_{\Xi/S}^1$ et $R^i \pi_* \Omega_{\Xi}^1$. Les éléments homogènes et de degré n ($n \geq 0$) de $\pi_* \Omega_{\Xi}^1$ pour cette action sont égaux à $S^n(L)$. Il résulte de la formule de Kunneth et du calcul de la cohomologie des espaces affines privés de l'origine que $R^i \pi_* \Omega_{\Xi}^1 = 0$ pour $i \neq 0$ et $i \neq r$ et que $R^r \pi_* \Omega_{\Xi}^1$ ne comporte lorsque $r \neq 0$ que des éléments de degré $\leq -r-1$.

D'après la formule de projection, on a $R^i \pi_* \pi^* \Omega_{X/S}^1 \simeq R^i \pi_* \Omega_{\Xi} \otimes \Omega_{X/S}^1$ et par suite, pour $n \geq 0$, les éléments homogènes et de degré n de $\pi_* \pi^* \Omega_{X/S}^1$ sont $\Omega_{X/S}^1 \otimes S^n(L)$. Le faisceau $R^r \pi_* \pi^* \Omega_{X/S}^1$ ne comporte que des éléments de degré $\leq -r-1$ lorsque $r \neq 0$.

En transportant à π^*L l'action du groupe multiplicatif sur $\Omega_{\Xi/X}^1$, on obtient l'action naturelle de ce groupe déduite de l'action par homothétie sur $\Xi - \{0\}$ et L . Les éléments homogènes et de degré n de $\pi_* \Omega_{\Xi/X}^1$ sont donc $L \otimes S^{n-1}(L)$ pour $n \geq 1$, et le faisceau $R^r \pi_* \Omega_{\Xi/X}^1$ ne comporte que des éléments de degré $\leq -r$ lorsque $r \neq 0$.

En prenant les éléments homogènes et de degré n ($n \geq 1$) dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_* \pi^* \Omega_{X/S}^1 \longrightarrow \pi_* \Omega_{\Xi/S}^1 \longrightarrow \pi_* \Omega_{\Xi/X}^1 \longrightarrow R^1 \pi_* \pi^* \Omega_{X/S}^1 \longrightarrow \dots,$$

on obtient les suites exactes

$$2.2. \quad 0 \longrightarrow \Omega_{X/S}^1 \otimes S^n(L) \longrightarrow \Omega_{\Xi/S}^{1,n} \longrightarrow L \otimes S^{n-1}(L) \longrightarrow 0,$$

où on a noté $\Omega_{\Xi/S}^{1,n}$ le sous-faisceau homogène et de degré n de $\pi_* \Omega_{\Xi/S}^1$.

En particulier pour $n = 1$, on a une suite exacte

$$2.3. \quad 0 \longrightarrow \Omega_{X/S}^1 \otimes L \xrightarrow{i} \Omega_{\Xi/S}^{1,1} \xrightarrow{j} L \longrightarrow 0.$$

On constate que se donner un scindage de 2.3 revient à se donner un scindage de 2.1 qui varie linéairement en fonction du point considéré dans la fibre $\Xi \rightarrow X$. Un tel scindage est une connection linéaire sur L . La trivialité de la suite exacte 2.3 et donc la nullité de l'élément $\text{At}(L) \in \text{Ext}^1(L, \Omega_{X/S}^1 \otimes L) = H^1(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes \text{End}(L))$ correspondant, est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une connection linéaire sur L .

On a un opérateur différentiel d'ordre 1

$$2.4. \quad \nabla : L \longrightarrow \Omega_{\Xi/S}^{1,1},$$

défini comme suit : une section σ de L sur un ouvert U de X définit une section $[\sigma]$ de degré 1 de Ω_{Ξ} sur $\pi^{-1}(U)$ dont la différentielle $d[\sigma]$ est de degré 1 sur $\pi^{-1}(U)$ et est par suite une section sur U de

$\Omega_{\mathbb{E}/\mathbb{S}}^{1,1} \setminus X$ notée $\nabla(\sigma)$.

Rappelons que le faisceau $J_{X/\mathbb{S}}^1(L)$ des jets de sections à l'ordre 1 de L est muni d'un opérateur différentiel d'ordre 1, $\nabla' : L \rightarrow J_{X/\mathbb{S}}^1(L)$ et que cet opérateur est universel. On a donc un morphisme \mathcal{O}_X -linéaire α de faisceaux sur X rendant le diagramme ci-après commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & & J_{X/\mathbb{S}}^1(L) \\
 & \nearrow \nabla' & \downarrow \alpha \\
 L & & \Omega_{\mathbb{E}/\mathbb{S}}^{1,1} \setminus X \\
 & \searrow \nabla &
 \end{array}
 \quad .$$

Il résulte immédiatement de la définition de ∇ que pour tout ouvert U de X toute section σ de L sur U et toute section λ de \mathcal{O}_X sur U , on a

$$2.5. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla(\lambda\sigma) - \lambda\nabla(\sigma) = i(d\lambda \otimes \sigma) \\ j\nabla(\sigma) = \sigma \end{array} \right. \quad .$$

Il en résulte que α est un isomorphisme permettant d'identifier $\Omega_{\mathbb{E}/\mathbb{S}}^{1,1} \setminus X$ à $J_{X/\mathbb{S}}^1(L)$. Les morphismes i et j ne sont alors autres que les morphismes canoniques.

3. Démonstration du théorème 1.

On reprend les notations du numéro 2. Soit E un fibré de rang $r + 1$ sur S , $r \geq 1$. Prenons pour X l'espace projectif P de E (spectre homogène de $S^n(E^*)$) , pour L le faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$. Notons $\rho : P \rightarrow S$ le morphisme canonique.

PROPOSITION 2.- Il existe un isomorphisme naturel

$$\nu : J_{P/S}^1(\mathcal{O}(1)) \simeq \rho^*E^*$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 J_{P/S}^1(\mathcal{O}(1)) & \xrightarrow{c'} & \mathcal{O}(1) \\
 \nu \Big| \nu & \nearrow c & \\
 \rho^*E^* & &
 \end{array}$$

où c et c' sont les surjections canoniques, soit commutatif.

On a $\Xi - \{0\} = \text{spec} \left(\bigoplus_0^{\infty} S^n(E^*) \right) - \{0\}$. Par suite $\Omega_{\Xi/S}^1 \simeq \pi^* \rho^* E^*$.
Le groupe multiplicatif agit sur l'espace $\Xi - 0$ et sur E^* par homothétie.
On a donc

$$\Omega_{\Xi/S}^{1,n} \simeq \rho^* E^*(n-1).$$

La proposition résulte alors de l'identification faite au numéro 2.

COROLLAIRE 1. - Notons $\varphi_q : \rho^* \Lambda^q E^*(-q) \rightarrow \rho^* \Lambda^{q-1} E^*(-q+1)$ le q -ème homomorphisme du complexe de Koszul construit sur $c(-1) : E^*(-1) \rightarrow 0_P$, de sorte qu'on a un complexe

$$3.1. \quad 0 \rightarrow \rho^* \Lambda^{r+1} E^*(-r-1) \xrightarrow{\varphi_{r+1}} \dots \xrightarrow{\varphi_2} \rho^* E^*(-1) \xrightarrow{c(-1)} 0_P \rightarrow 0.$$

Le complexe 3.1 est acyclique. Pour tout q , on a

$$3.2. \quad \Omega_{P/S}^q \simeq \ker \varphi_q.$$

La suite exacte 2.3 s'écrit, compte tenu des identifications faites au numéro 2 et à la proposition 2,

$$0 \rightarrow \Omega_{P/S}^1(1) \xrightarrow{i} \rho^* E^* \xrightarrow{c} 0(1) \rightarrow 0,$$

ce qui donne, en tensorisant par $0(-1)$, la suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega_{P/S}^1 \xrightarrow{i(-1)} \rho^* E^*(-1) \xrightarrow{c(-1)} 0_P \rightarrow 0.$$

Comme $c(-1)$ est surjectif, le complexe de Koszul construit sur $c(-1)$ est acyclique et $\Lambda^q i(-q) : \Omega_{P/S}^q \rightarrow \rho^* \Lambda^q E^*(-q)$ est un isomorphisme sur $\ker \varphi_q$.

COROLLAIRE 2. - Pour tout q et tout entier n , on a une suite exacte

$$3.3. \quad 0 \rightarrow \Omega_{P/S}^q \xrightarrow{\Lambda^q i(-q)} \rho^* \Lambda^q E^*(n-q) \xrightarrow{c_q} \Omega_{P/S}^{q-1} \rightarrow 0.$$

On a

$$3.4. \quad \Lambda^{q-1} i(-q+1) c_q = \varphi_q.$$

Résulte immédiatement du corollaire 1.

Montrons comment ces résultats permettent de démontrer le théorème 1.

Supposons S affine. On a alors $H^0(P, \rho^* \wedge^q E^*(n-q)) = H^0(S, \wedge^q E^* \otimes S^{n-q}(E^*))$,
 $H^p(P, \rho^* \wedge^q E^*(n-q)) = 0$ si $p \neq 0$ et $p \neq r$, $H^r(P, \rho^* \wedge^q E^*(n-q)) = 0$ si
 $q \leq n+r$, d'après la formule de projection et le calcul de la cohomologie
des $O(n-q)$. On vérifie de plus que $H^0(S, \varphi_q(n)) = \Phi_{q,n}(E^*)$ (1.3). Les
corollaires 1 et 2 à la proposition 2 permettent alors de démontrer les asser-
tions a) et b) du théorème 1, par récurrence sur q , en écrivant les
suites exactes de cohomologie associées aux suites exactes 3.3. La proposition 1
résulte de la proposition 2 et l'assertion c) du théorème 1 résulte du théo-
rème de dualité de Serre que nous ne démontrons pas ici.

4. Cohomologie relative des fibrés projectifs.

Soient X un espace \mathbb{C} -analytique, E un fibré holomorphe de rang $r+1$,
 $r \geq 1$. Notons $P(E)$ ou encore P la grassmannienne des droites de E et
 $\rho : P \rightarrow X$ le morphisme canonique.

THEOREME 2.- a) Pour tout entier q on a des isomorphismes canoniques

$$R^q \rho_* \Omega_P^q \simeq \Omega_X^{q-p} \quad \text{pour } 0 \leq p \leq r$$

et on a $R^p \rho_* \Omega_P^q = 0$ pour $p > r$.

b) Pour $\inf(q,r) \leq n+r$ et $n \neq 0$, on a $R^p \rho_* \Omega_P^q(n) = 0$ pour $p \neq 0$.

c) Pour $\inf(q,r) \geq n$ et $n \neq 0$, on a $R^p \rho_* \Omega_P^q(n) = 0$ pour $p \neq r$.

Lorsque X est réduit à un point, le théorème 2 résulte du théorème 1
et du théorème de comparaison entre cohomologie algébrique et analytique.
Notons $\Omega_{P/X}^q$ le faisceau des différentielles relatives de degré q sur P .
Il résulte du théorème de KÜNNETH et de ce qui précède que $R^p \rho_* \Omega_{P/X}^q = 0$ si
 $p \neq q$ et qu'on a des isomorphismes canoniques $R^q \rho_* \Omega_{P/X}^q \simeq \Omega_X$. On a de même
 $R^p \rho_* \Omega_{P/X}^q(n) = 0$ si $p \neq 0$, $n \neq 0$, $q \leq n+r$ et $R^p \rho_* \Omega_{P/X}^q(n) = 0$ pour
 $p \neq r$, $n \neq 0$, $n \leq q$. De la suite exacte

$$0 \rightarrow \rho^* \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_P^1 \rightarrow \Omega_{P/X}^1 \rightarrow 0,$$

on déduit pour tout entier q , une filtration $\text{Filt}^s \Omega_P^q$, $0 \leq s \leq \inf(q, r)$, de Ω_P^q et des suites exactes

$$4.1. \quad 0 \longrightarrow \text{Filt}^{s-1} \Omega_P^q \longrightarrow \text{Filt}^s \Omega_P^q \longrightarrow \rho_* \Omega_X^{q-s} \otimes \Omega_{P/X}^s \longrightarrow 0.$$

D'après la formule de projection, on a $R^p \rho_* (\rho_* \Omega_X^{q-s} \otimes \Omega_{P/X}^s (n))$, $\Omega_X^{q-s} \otimes R^p \rho_* \Omega_{P/X}^s (n)$. On obtient alors le théorème en déroulant les longues suites exactes d'images directes déduites des suites exactes 4.1. En utilisant de plus les descriptions des H^0 et H^r données dans le théorème 1, b) et c) on obtient

THEOREME 3.- a) Lorsque $n < 0$, on a $\rho_* \Omega_P^q(n) = 0$. Lorsque $n > 0$, $\rho_* \Omega_P^q(n)$ admet une filtration $\text{Filt}^s \rho_* \Omega_P^q(n)$, $0 \leq s \leq \inf(q, r, n)$ et on a des suites exactes (cf. 1.2)

$$4.2. \quad 0 \longrightarrow \text{Filt}^{s-1} \rho_* \Omega_P^q(n) \longrightarrow \text{Filt}^s \rho_* \Omega_P^q(n) \longrightarrow \Omega_X^{q-s} \otimes \ker \phi_{s,n}(E^*) \longrightarrow 0$$

b) Pour $n > 0$, $R^r \rho_* \Omega_P^q(n) = 0$. Pour $n < 0$, $R^r \rho_* \Omega_P^q(n)$ admet une filtration $\text{Filt}^{s-r} \rho_* \Omega_P^q(n)$, $n+r < s \leq \inf(q, r)$ et on a des suites exactes

$$4.3. \quad 0 \longrightarrow \text{Filt}^{s-1} R^r \rho_* \Omega_P^q(n) \longrightarrow \text{Filt}^s R^r \rho_* \Omega_P^q(n) \longrightarrow \Omega_X^{q-s} \otimes (\ker \phi_{r-s,n}(E^*))^{*-0}$$

Lorsque X est lisse, le théorème de dualité relative fournit un isomorphisme canonique

$$R^p \rho_* \Omega_P^q(n) \simeq (R^{r-p} \rho_* \Omega_P^{\dim P - q}(-n))^* \otimes \Omega_X^{\dim X}$$

COROLLAIRE 1.- On a $R^p \rho_* \Omega_P^q(1) = 0$ pour $p \neq 0$. Le morphisme canonique $\Omega_X^q \otimes E^* \longrightarrow \rho_* \Omega_P^q(1)$ est un isomorphisme.

Résulte du théorème 2 et du théorème 3 a), compte tenu de ce que $\ker \phi_{n,n}(E^*) = 0$.

COROLLAIRE 2.- Le morphisme canonique $H^p(X, \Omega_X^q \otimes E^*) \longrightarrow H^p(P, \Omega_P^q(1))$ est un isomorphisme pour tout p et tout q .

En effet la suite spectrale de Leray dégénère en vertu du corollaire 1.

THEOREME 4 (Le Potier).- Soient X une variété \mathbb{C} -analytique compacte,
 E un fibré holomorphe de rang > 0 sur X tel que le faisceau $\mathcal{O}(1)$ sur
 $P(E^*)$ soit ample (ou positif ce qui revient au même pour les fibrés de rang 1).
 On a $H^p(X, \Omega_X^q \otimes E) = 0$ pour $p + q \geq \dim X + \text{rg} E$.

Résulte du théorème 3, cor. 2 et du théorème de Kodaira Nakano (exp.5).

Nous verrons au numéro suivant que les fibrés positifs (exp. 5) de rang > 0 satisfont aux hypothèses du théorème 4.

5. Fibrés positifs.

Soient X une variété \mathbb{C} -analytique et $E \rightarrow X$ un fibré holomorphe muni d'une forme hermitienne Φ (de classe C^∞). A (E, Φ) on associe une connexion $\nabla : E_\infty \rightarrow \Omega_{X, \infty}^1 \otimes E_\infty$ (exp. 5). Le morphisme C^∞ -linéaire $\nabla^2 : E_\infty \rightarrow \Omega_{X, \infty}^2 \otimes E_\infty$ est une section $c_{E, \Phi}$ de $\Omega_{X, \infty}^2 \otimes \text{End}(E)_\infty$. Posons $\text{cl}(E, \Phi) = 1/2i\pi c_{E, \Phi}$. On sait (loc. cit.) que $\text{cl}(E, \Phi)$ est une section du sous-fibré réel $\Omega_{X, \mathbb{R}}^{1,1} \otimes \text{Herm}(E)$. On dit que (E, Φ) est positif si pour tout vecteur tangent $t \neq 0$ en tout point de X , $\text{cl}(E, \Phi)(it \wedge t)$ est un opérateur hermitien positif inversible. On dit que E est positif s'il possède une structure hermitienne telle que (E, Φ) soit positif.

Il résulte immédiatement des définitions que (E, Φ) est positif si et seulement si pour tout point $x \in X$, toute section \mathcal{A} de E définie au voisinage de x et non nulle en x , tout vecteur tangent $t \neq 0$ en x on a

$$5.1. \quad i\Phi(\nabla^2 \mathcal{A}, \mathcal{A})(t \wedge it) > 0 .$$

En fait, comme ∇^2 est C^∞ -linéaire, il suffit, pour vérifier la positivité, de vérifier 5.1 en tout point x , pour une famille de sections \mathcal{A} telles que les $\mathcal{A}(x)$ parcourent l'espace $E(x) - \{0\}$.

THEOREME 5.- Soient X une variété \mathbb{C} -analytique, (E, Φ) un fibré holomorphe sur X muni d'une forme hermitienne, (E^*, Φ^*) le fibré dual muni de la forme duale. Le fibré (E^*, Φ^*) est positif si et seulement si la fonction $y \mapsto \Phi(y, y)$ définie sur E est fortement plurisous-harmonique sur $E - \{0\}$ (exp. 4).

Pour toute section s de E notons s^* la section de E^* telle que $\Phi^*(\sigma, s^*) = \sigma(s)$ pour toute section σ de E^* . Si s est holomorphe on a $\nabla' s^* = 0$. En effet, pour toute section holomorphe σ de E^* , la fonction $\sigma(s)$ est holomorphe et par suite $0 = d''\sigma(s) = d''\Phi^*(\sigma, s^*) = \Phi^*(\sigma, \nabla' s^*)$.

Soient $x_0 \in X$, e_0, \dots, e_r un repère holomorphe de E au voisinage de x_0 . On a donc au-dessus d'un voisinage U de x_0 , une carte $U \times \mathbb{C}^{r+1} \rightarrow E$ donnée par

$$5.2. \quad (x, a_0, \dots, a_r) \mapsto y = \sum a_j e_j(x) .$$

Soit $y_0 = \sum b_j e_j(x_0)$ un point de $E - \{0\}$ au-dessus de x_0 et posons

$$5.3. \quad s(x) = \sum b_j e_j(x) ,$$

de sorte que $x \mapsto s(x)$ est une section holomorphe de E sur U non nulle en x_0 . Soient $t \neq 0$ un vecteur tangent en y_0 à E et t' l'image de t dans l'espace tangent à X en x_0 .

LEMME 1.- On a

$$5.4. \quad \text{id}' d'' \Phi(t \wedge it) = 2 \Phi(\sum da_j(t) e_j, \sum da_j(t) e_j) + 2 \Phi^*(\nabla'' s^*(t'), \nabla'' s^*(t')) \\ + i \Phi^*(\nabla'^2 s^*, s^*)(t' \wedge it') .$$

On a tout d'abord

$$5.5. \quad \Phi(y, y) = \sum_{j,k} a_j \bar{a}_k \Phi(e_j, e_k) ,$$

de sorte que

$$5.6. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{id}' d'' \Phi(t \wedge it) = i \sum_{j,k} da_j \wedge d\bar{a}_k (t \wedge it) \Phi(e_j, e_k) + A , \\ \text{avec } A = \text{id}' d''_{X \times X} \Phi(s, s)(t' \wedge it') . \end{array} \right.$$

Un calcul immédiat donne

$$5.7. \quad \text{id}_{a_i \wedge \bar{a}_k} d_{a_i}(t \wedge it) = 2 da_i(t) \overline{da_k(t)} \quad .$$

Calculons A . Par définition $\bar{\Phi}(s, s) = \bar{\Phi}^*(s^*, s^*)$ compte tenu de $\nabla' s^* = 0$, il vient $d'_x d''_x \bar{\Phi}(s, s) = \bar{\Phi}^*(\nabla' \nabla'' s^*, s^*) - \bar{\Phi}^*(\nabla'' s^*, \nabla' s^*)$. Utilisant encore $\nabla' s^* = 0$, on obtient $\bar{\Phi}^*(\nabla'^2 s^*, s^*) = d''^2 \bar{\Phi}^*(s^*, s^*) = 0$ d'où, en utilisant à nouveau $\nabla' s^* = 0$, on tire

$$5.8. \quad d'_x d''_x \bar{\Phi}(s, s) = \bar{\Phi}^*(\nabla'^2 s^*, s^*) - \bar{\Phi}^*(\nabla'' s^*, \nabla' s^*) \quad .$$

Un calcul immédiat donne $-i \bar{\Phi}^*(\nabla'' s^*, \nabla' s^*)(t' \wedge it') = x$, $2 \bar{\Phi}^*(\nabla' s^*, \nabla' s^*)$ d'où

$$5.9. \quad A = i \bar{\Phi}^*(\nabla'^2 s^*, s^*)(t' \wedge it') + 2 \bar{\Phi}^*(\nabla'' s^*(t), \nabla' s^*(t)) \quad .$$

L'égalité 5.4 résulte alors de 5.6, 5.7 et 5.9.

Supposons que $(E^*, \bar{\Phi}^*)$ soit positif. Si $t' \neq 0$, il résulte de 5.1 et du lemme 1 que $\text{id}' d'' \bar{\Phi}(t \wedge it) > 0$. Si $t' = 0$, le vecteur t est vertical et par suite $\sum da_j(t) e_j \neq 0$, donc $\text{id}' d'' \bar{\Phi}(t, it) > 0$. Par suite $y \mapsto \bar{\Phi}(y, y)$ est fortement plurisous-harmonique sur $E - \{0\}$.

Supposons que $y \mapsto \bar{\Phi}(y, y)$ soit fortement plurisous-harmonique sur $E - \{0\}$. On déduit alors du lemme 1 que pour toute section s de E définie au voisinage de x_0 , holomorphe et non nulle en x_0 et pour tout vecteur tangent $t' \neq 0$ en x à X , on a

$$5.10. \quad 2 \bar{\Phi}^*(\nabla' s^*(t'), \nabla' s^*(t')) + i \bar{\Phi}^*(\nabla'^2 s^*, s^*)(t' \wedge it') > 0 \quad .$$

Comme ∇'^2 est C^∞ -linéaire, le théorème 5 résulte du lemme suivant :

LEMME 2.- Pour tout $v \in E^*(x_0)$, il existe une section holomorphe s de E au voisinage de x_0 telle que $s^*(x_0) = v$ et $\nabla''_{x_0} s^* = 0$.

Soient e_0, \dots, e_r un repère holomorphe de E au voisinage de x_0 . Cherchons une section du type $s(x) = \sum a_j(x) e_j$. Comme s doit être holomorphe, les a_j doivent être holomorphes. La première condition détermine uniquement les $a_j(x_0)$. On a $s^*(x) = \sum \overline{a_j(x)} e_j^*$ et $\nabla'' s^* = \sum \overline{da_j} e_j^* + \sum \bar{a}_j \nabla'' e_j^*$. La seconde condition sur s est donc équivalente à

$$5.11. \quad \sum \overline{d_{x_0} a_j} e_j^*(x_0) + \sum \overline{a_i(x_0)} \nabla_{x_0}'' e_j^* = 0 .$$

Comme les $e_j^*(x_0)$ sont linéairement indépendants, 5.11 détermine uniquement les formes \mathbb{C} -linéaires $d_{x_0} a_j$ d'où l'existence de la section s .

Notons :

$P(E)$ la grassmannienne des droites de E et

$\rho : P(E) \rightarrow X$ le morphisme canonique, $O(1)$ le quotient canonique de

$\rho^*(E^*)$, Φ_1^* la forme hermitienne sur $O(1)$ quotient de $\rho^*(\Phi^*)$.

COROLLAIRE 1.- Si (E^*, Φ^*) est positif, $(O(1), \Phi_1^*)$ est positif.

Notons L le dual de $O(1)$ et Φ_1 la forme hermitienne dual de Φ_1^* . L'espace $L - \{0\}$ s'identifie à $E - \{0\}$ et la fonction $y \mapsto \Phi_1(y, y)$ est alors égale à la fonction $y \mapsto \Phi(y, y)$, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 2.- Soit (E, Φ) un fibré holomorphe positif. Tout fibré quotient de E muni de la forme hermitienne quotient de E est positif.

Conséquence immédiate du théorème.