Astérisque

JEAN-FRANCOIS BOUTOT

Théorème de Hodge

Astérisque, tome 17 (1974), p. 3-26
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__17__3_0>

THEOREME DE HODGE

par Jean-François BOUTOT

0. Introduction.

Le théorème "d'existence, sur une variété riemannienne compacte, d'une forme harmonique ayant des périodes données relativement à des cycles homologiquement indépendants donnés" fut démontré par W.V.D. Hodge [2], [3] en 1932-33. La démonstration de Hodge consiste à calculer une solution fondamentale approchée ou paramétrix du laplacien ; voir aussi de Rham [8].

On exposera ici une démonstration différente à partir d'une inégalité a priori de la théorie des opérateurs différentiels elliptiques due à Friedrichs [1], 1953. Pour être tout à fait moderne, on aurait pu utiliser les opérateurs pseudo-différentiels [4]. On remarquera que la démonstration est indépendante du théorème de finitude de la cohomologie de de Rham, c'est donc l'une des façons de démontrer cette finitude.

On trouvera au paragraphe 1 la définition du laplacien et des formes harmoniques ainsi que l'énoncé précis du théorème de Hodge. Au paragraphe 2, on montre que le laplacien est un opérateur différentiel elliptique. Au paragraphe 3, on introduit certains espaces fonctionnels : les espaces de Sobolev, pour plus de détails le lecteur consultera [7], [10]. Le paragraphe 4 démontre l'inégalité de Friedrichs et le paragraphe 5 des théorèmes de régularité et de finitude pour les opérateurs elliptiques, ainsi qu'une généralisation du théorème de Hodge.

Le rédacteur s'est inspiré sans vergogne de la littérature existante, en particulier de [5], [6], [9].

1. Définition du laplacien et énoncé du théorème.

(1.1.) Commençons par quelques "rappels" d'algèbre linéaire. Soit E un espace vectoriel réel euclidien orienté de dimension finie n. Soit $e_1,\dots,e_n$ une base orthonormale directe de E. Alors l'élément $\tau = e_1\wedge\dots\wedge e_n$ de $\Lambda^n E$ ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle élément de volume.

Il définit un isomorphisme canonique $\Lambda^n E \simeq \mathbb{R}$. D'où une dualité :

$$\Lambda^p E \times \Lambda^{n-p} E \longrightarrow \Lambda^n E \simeq \mathbb{R}$$
$$(\omega, \omega') \longmapsto \omega\wedge\omega'$$

et par conséquent un isomorphisme canonique

$$\Lambda^p E \longrightarrow (\Lambda^{n-p} E)^* .$$

Par ailleurs la structure euclidienne donnée sur E s'étend à l'algèbre extérieure ΛE de telle sorte que :

(i) $\Lambda^p E$ est orthogonal à $\Lambda^q E$ pour $p \neq q$,

(ii) $\{e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_p} \ ; \ i_1 < \dots < i_p\}$ est une base orthonormale de $\Lambda^p E$.

Ceci définit un isomorphisme canonique

$$(\Lambda^{n-p} E)^* \xrightarrow{\sim} \Lambda^{n-p} E ,$$

d'où finalement un isomorphisme canonique :

$$* : \Lambda^p E \xrightarrow{\sim} \Lambda^{n-p} E .$$

(1.2.) On vérifie facilement que

$$*(e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_p}) = \varepsilon(\sigma)\, e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_{n-p}}$$

où $(i_1,\dots,i_p\ ,\ j_1,\dots,j_{n-p})$ est une permutation σ de $(1,\dots,n)$ de signature $\varepsilon(\sigma)$.

(1.3.) En particulier, on a $\tau = *1$. De plus le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ vérifie la formule :

$$\langle \alpha , \beta \rangle \tau = \alpha \wedge * \beta = \beta \wedge * \alpha \qquad \text{pour} \quad \alpha , \beta \in \Lambda^p E \ .$$

Enfin l'application $** : \Lambda^p E \longrightarrow \Lambda^p E$ est telle que

$$** \alpha = (-1)^{p(n-p)} \alpha \qquad \text{pour} \quad \alpha \in \Lambda^p E \ .$$

(1.4.) Soit maintenant V une <u>variété riemannienne</u> C^∞ <u>compacte orientée</u> de dimension réelle n. Soient T^*V le fibré cotangent, $\Omega^p = C^\infty(V, \Lambda^p T^*V)$ et $\Omega = \bigoplus_{p=0}^{n} \Omega^p$. En tout point x de V, l'espace cotangent $T^*_x(V)$ est un espace euclidien orienté de dimension n. La structure euclidienne variant de façon C^∞ avec x, les constructions précédentes fournissent une forme différentielle de degré maximum $\tau \in \Omega^n$ qui ne s'annule en aucun point de V, on l'appelle encore élément de volume, et un isomorphisme $* : \Omega^p \xrightarrow{\sim} \Omega^{n-p}$.

(1.5.) On définit sur Ω une forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée en intégrant le produit scalaire donné sur l'espace cotangent par rapport à l'élément de volume

$$(\alpha , \beta) = \int_V \langle \alpha , \beta \rangle \tau = \int_V \alpha \wedge * \beta \qquad \text{pour} \quad \alpha , \beta \in \Omega \ .$$

(1.6.) PROPOSITION.- <u>L'application</u> $\delta : \Omega^{p+1} \longrightarrow \Omega^p$ <u>définie par</u>

$$\delta = (-1)^{np+1} * d *$$

<u>est adjoint de la différentielle extérieure</u> $d : \Omega^p \longrightarrow \Omega^{p+1}$. <u>Autrement dit, on a</u>

$$(\delta \beta , \alpha) = (\beta , d\alpha) \qquad \text{pour} \quad \beta \in \Omega^{p+1} , \alpha \in \Omega^p \ .$$

<u>Démonstration.</u>

On a d'après le théorème de Stokes

$$(\beta , d\alpha) = \int (d\alpha) \wedge * \beta = (-1)^{p+1} \int \alpha \wedge d(*\beta) \ .$$

De plus $** (d * \beta) = (-1)^{(n-p)p} \, d * \beta$, car $d * \beta \in \Omega^{n-p}$;

d'où $$(\beta, d\alpha) = (-1)^{np+1}(\alpha, *d*\beta) \ .$$

(1.7.) Remarque.- Dans le cas où la dimension n de V est paire, on a $\delta = -*d*$.

(1.8.) DEFINITION.- On appelle laplacien ou opérateur de Laplace-Beltrami l'application $\Delta : \Omega^p \longrightarrow \Omega^p$ définie par

$$\Delta = d\delta + \delta d \ .$$

D'après ce qui précède Δ est auto-adjoint ; plus précisément

$$(\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta\beta) = (d\alpha, d\beta) + (\delta\alpha, \delta\beta) \ .$$

On appelle forme harmonique une forme $\alpha \in \Omega$ telle que $\Delta\alpha = 0$.

(1.9.) PROPOSITION.- $\Delta\alpha = 0$ si et seulement si $d\alpha = 0$ et $\delta\alpha = 0$.

Démonstration.

Il est clair que $\Delta\alpha = 0$ dès que $d\alpha = 0$ et $\delta\alpha = 0$. Réciproquement soit α une forme harmonique, alors $(\Delta\alpha, \alpha) = (d\alpha, d\alpha) + (\delta\alpha, \delta\alpha) = 0$. D'où $d\alpha = 0$ et $\delta\alpha = 0$, puisque $(\ , \ )$ est positive non dégénérée.

(1.10.) COROLLAIRE.- Sur une variété riemannienne compacte connexe et orientée, les seules fonctions harmoniques sont les constantes.

(1.11.) THEOREME de HODGE.- Soient V une variété riemannienne C^∞ compacte orientée et $\Omega = C^\infty(V, T^*V)$. Alors

(i) l'espace $\mathcal{H} = \{\alpha \in \Omega \ ; \Delta\alpha = 0\}$ est de dimension finie,

(ii) l'espace Ω est somme directe orthogonale de $\Delta(\Omega)$ et de $\mathcal{H}$.

On notera H le projecteur orthogonal de Ω sur $\mathcal{H}$.

Nous démontrerons ce théorème dans les paragraphes 2 à 5, cependant nous terminerons le paragraphe 1 en indiquant quelques conséquences du théorème.

(1.12.) COROLLAIRE.- <u>L'opérateur</u> $\Delta|_{\mathcal{H}^\perp} : \mathcal{H}^\perp \longrightarrow \mathcal{H}^\perp$ <u>est inversible</u>.

(1.13.) DEFINITION.- On appelle <u>opérateur de Green</u> $G : \Omega^p \longrightarrow \Omega^p$ le composé $G = J \circ (\Delta|_{\mathcal{H}^\perp})^{-1} \circ (1 - H)$, où J désigne l'inclusion canonique de $\mathcal{H}^\perp$ dans Ω et 1 l'identité de Ω . Autrement dit $G(\alpha)$ est l'unique solution ω de $\Delta\omega = \alpha - H\alpha$ qui soit dans $\mathcal{H}^\perp$.

(1.14.) PROPOSITION.- <u>Les opérateurs</u> H <u>et</u> G <u>sont permutables avec toute application linéaire</u> $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ <u>qui est permutable avec</u> Δ . <u>En particulier,</u> H <u>et</u> G <u>sont permutables avec</u> d, δ, Δ .

<u>Démonstration</u>.- Si $T\Delta = \Delta T$, on a $T(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ et aussi $T(\mathcal{H}^\perp) \subset \mathcal{H}^\perp$, car $\mathcal{H}^\perp = \Delta(\Omega)$. D'où $TH = HT$. De plus $T|_{\mathcal{H}^\perp}$ est permutable avec $\Delta|_{\mathcal{H}^\perp}$, donc avec $(\Delta|_{\mathcal{H}^\perp})^{-1}$. Par suite T est permutable avec G .

(1.15.) COROLLAIRE.- <u>Les opérateurs</u> Δ, H <u>et</u> G <u>satisfont aux relations</u> :

$$H\Delta = \Delta H = 0 \quad , \quad GH = HG = 0$$

$$1 = H + \Delta G = H + G\Delta \quad .$$

(1.16.) PROPOSITION.- <u>L'opérateur</u> $G : \Omega \longrightarrow \Omega$ <u>est continu</u> [<u>pour la topologie naturelle d'espace de Fréchet sur</u> Ω , cf. (3.11.)].

<u>Démonstration</u>.- Le produit scalaire $(\, , \,)$ défini sur Ω est continu, donc H , projecteur sur un sous-espace de dimension finie, est continu. De plus $\Delta|_{\mathcal{H}^\perp} : \mathcal{H}^\perp \longrightarrow \mathcal{H}^\perp$ est continu et inversible ; d'après le théorème du graphe fermé $(\Delta|_{\mathcal{H}^\perp})^{-1}$ est continu, donc G est continu.

(1.17.) PROPOSITION.- <u>Soit</u> $\mathcal{H}^p = \mathcal{H} \cap \Omega^p$, <u>pour</u> $0 \leq p \leq n$. <u>Alors</u> Ω^p <u>se décompose en somme directe orthogonale</u> :

$$\Omega^p = d(\Omega^{p-1}) \oplus \delta(\Omega^{p+1}) \oplus \mathcal{H}^p \quad .$$

Démonstration.- Montrons tout d'abord que ces trois sous-espaces de Ω^p sont orthogonaux. Soient $\eta \in \mathcal{H}^p$, $\varphi \in \Omega^{p-1}$, $\Psi \in \Omega^{p+1}$.

$$(\eta , d\varphi) = (\delta\eta , \varphi) = 0 \qquad \text{car} \quad \delta\eta = 0 ,$$

$$(\eta , \delta\Psi) = (d\eta , \Psi) = 0 \qquad \text{car} \quad d\eta = 0 ,$$

$$(d\varphi, \delta\Psi) = (d^2\varphi, \Psi) = 0 .$$

De plus d'après le théorème de Hodge :

$$\Omega^p = \mathcal{H}^p \oplus \Delta(\Omega^p) = \mathcal{H}^p \oplus d\delta(\Omega^p) \oplus \delta d(\Omega^p)$$

d'où la proposition.

(1.18.) THEOREME.- Dans toute classe de cohomologie de de Rham il y a une forme harmonique et une seule. Plus précisément l'application $H : \Omega \longrightarrow \mathcal{H}$ induit des isomorphismes $H^p(\Omega^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^p$.

Démonstration.- D'après (1.17.) tout $\alpha \in \Omega^p$ s'écrit

$$\alpha = d\varphi + \delta\Psi + H\alpha .$$

Alors $d\alpha = d\delta\Psi = 0$ si α est une forme fermée ; d'où $(d\delta\Psi,\Psi) = (\delta\Psi,\delta\Psi) = 0$ et par suite $\delta\Psi = 0$. Ainsi α est cohomologue à $H\alpha$. De plus $\mathcal{H}^p$ et $d(\Omega^{p-1})$ sont orthogonaux, donc $H\alpha$ est l'unique forme harmonique cohomologue à α .

2. Les opérateurs différentiels et leurs symboles.

(2.1.) DEFINITION.- Soit V une variété différentiable C^∞ de dimension n . Soient F et F' des fibrés vectoriels C^∞ de rang respectifs r et r' sur V . Soient $\underline{C}^\infty(V,F)$ et $\underline{C}^\infty(V,F')$ les faisceaux de leurs sections C^∞ . On appellera opérateur différentiel (sous-entendu linéaire à coefficients C^∞) , et on notera $P : F \longrightarrow F'$, un homomorphisme $P : \underline{C}^\infty(V,F) \longrightarrow \underline{C}^\infty(V,F')$ tel que pour tout système de coordonnées locales $(U,x_1,\ldots,x_n)$ sur lequel F et F' sont triviaux, l'application $C^\infty(U,\mathbb{R}^r) \longrightarrow C^\infty(U,\mathbb{R}^{r'})$ induite par P

soit de la forme

$$\sum_{|\alpha|\leq p} a_\alpha(x) D^\alpha ,$$

où $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$

et les $a_\alpha(x)$ sont des matrices $r' \times r$ à coefficients C^∞ .

(2.2.) Pour tout point x de V , on appelle <u>ordre de</u> P en x le plus petit entier p vérifiant la formule ci-dessus dans un voisinage de x . Soit $\underline{m}_x$ l'anneau des germes de fonctions C^∞ sur V qui s'annulent en x . Alors l'ordre de P en x est le plus grand entier p tel qu'il existe $f \in \underline{m}_x$ et $s \in C^\infty(V,F)$ avec $P(f^p s)(x) \neq 0$. L'ordre de P est l'entier $\max \{\text{ordre de } P \text{ en } x ,\ x \in V\}$.

(2.3.) <u>Exemple</u>.- Si V est une variété riemannienne orientée, les applications d, δ et $\Delta : \Omega \longrightarrow \Omega$ sont des opérateurs différentiels ; d et δ sont d'ordre 1 , Δ est d'ordre 2 .

(2.4.) <u>Symbole d'un opérateur différentiel</u>.- Soient $T'(V)$ l'ouvert du fibré cotangent complémentaire de la section nulle et $L(F,F')$ le fibré des applications linéaires de F dans F' . On appelle symbole de P une application

$$\sigma_P : T'(V) \longrightarrow L(F,F')$$

définie comme suit. Soient $x \in V$, $\xi \in T_x^*(V) - \{0\}$ et $\eta \in F_x$. Soient $f \in \underline{m}_x$ tel que $df(x) = \xi$ et $s \in C^\infty(V,F)$ tel que $s(x) = \eta$. Si P est d'ordre p en x , on pose

$$\sigma_P(x,\xi)\eta = \frac{1}{p!} P(f^p s)(x) .$$

On vérifie facilement que la définition est indépendante des choix qui ont été faits.

Si P s'écrit localement $\sum_{|\alpha|\leq p} a_\alpha(x) D^\alpha$, on a

$$\sigma_P(x,\xi) = \sum_{|\alpha| = p} a_\alpha(x)\xi^\alpha \quad ,$$

où $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ et $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$.

Ainsi la connaissance du symbole équivaut à la connaissance de la partie homogène d'ordre maximum de P .

Si P et Q sont des opérateurs différentiels non nuls d'ordres constants p et q respectivement, leur composé est un opérateur différentiel d'ordre $p+q$ et

$$\sigma_{Q\circ P}(x,\xi) = \sigma_Q(x,\xi)\circ\sigma_P(x,\xi) \quad .$$

(2.5.) <u>Symbole de la différentielle extérieure</u> $d : \Omega^p \longrightarrow \Omega^{p+1}$.

Soient $E = T_x^*(V)$ et $\xi \in E - \{0\}$. On cherche à déterminer

$$\sigma_d(x,\xi) : \Lambda^p E \longrightarrow \Lambda^{p+1} E \quad .$$

Soient $\eta \in \Lambda^p E$, $f \in \underline{m}_x$ tel que $df(x) = \xi$ et $s \in \Omega^p$ tel que $s(x) = \eta$.

Par définition de σ_d , on a :

$$\sigma_d(x,\xi) = d(fs)(x) = df(x)\wedge s(x) + f(x)\wedge ds(x) = \xi\wedge\eta \quad .$$

En notant e_ξ le produit extérieur à gauche par ξ , on a donc $\sigma_d(x,\xi) = e_\xi$.

(2.6.) <u>Symbole de la codifférentielle</u> $\delta : \Omega^{p+1} \longrightarrow \Omega^p$.

Rappelons que $\delta = (-1)^{np+1} * d *$. L'application $*$ est un opérateur différentiel de degré 0 , d'où $\sigma_*(x,\xi) = *$, et par suite

$$\sigma_\delta(x,\xi) : \Lambda^{p+1} E \longrightarrow \Lambda^p E$$

est donné par $\sigma_\delta(x,\xi) = (-1)^{np+1} * e_\xi *$.

(2.7.) LEMME.- <u>L'application</u> $i_\xi = (-1)^{np} * e_\xi * : \Lambda^{p+1} E \longrightarrow \Lambda^p E$ <u>est le produit intérieur à gauche par</u> ξ <u>adjoint de</u> e_ξ :

$$\langle e_\xi(\alpha),\beta\rangle = \langle\alpha, i_\xi(\beta)\rangle \quad \alpha\in\Lambda^p E \ , \ \beta\in\Lambda^{p+1} E \quad .$$

<u>Démonstration</u>.- $\langle e_\xi(\alpha),\beta\rangle = *((\xi\wedge\alpha)\wedge *\beta)$

$$= (-1)^p * (\alpha \wedge \xi \wedge * \beta) \quad .$$

De plus $**(\xi \wedge * \beta) = (-1)^{(n-p)p}\, \xi \wedge * \beta$, car $\xi \wedge * \beta \in \Lambda^{n-p} E$;

d'où $\quad \langle e_\xi(\alpha), \beta \rangle = (-1)^{np} \langle \alpha, *(\xi \wedge * \beta) \rangle$.

(2.8.) COROLLAIRE. $\quad \sigma_\delta(x,\xi) = - i_\xi$.

(2.9.) <u>Formules</u>.- On vérifierait facilement que

$$i_\xi(e_1 \wedge \dots \wedge e_{p+1}) = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} \langle \xi, e_j \rangle \; e_1 \wedge \dots \wedge \hat{e}_j \wedge \dots \wedge e_p \quad ,$$

et que $\quad e_\xi \circ i_\xi + i_\xi \circ e_\xi = \langle \xi, \xi \rangle . \mathrm{id}_{\Lambda E} = |\xi|^2 \, \mathrm{id}_{\Lambda E}$.

(2.10.) <u>Symbole du laplacien</u> $\Delta : \Omega \longrightarrow \Omega$.

Rappelons que $\Delta = d\delta + \delta d$; d'où d'après ce qui précède

$$\sigma_\Delta(x,\xi) = - |\xi|^2 . \, \mathrm{id}_{\Lambda E} : \Lambda E \longrightarrow \Lambda E \quad .$$

Autrement dit si $x_1, \dots, x_n$ est un système de coordonnées locales tel que $\langle dx_i, dx_j \rangle = g_{ij}(x)$, on a

$$\Delta = - \sum_{i,j} g_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} I + \text{op. diff. du 1er ordre,}$$

où I est la matrice identité de rang $\dim \Lambda E$.

(2.11.) On dit qu'un opérateur différentiel $P : F \longrightarrow F'$ est <u>elliptique</u>, si pour tout $x \in V$ et $\xi \in T_x^*(V) - \{0\}$, l'application $\sigma_P(x,\xi) : F_x \longrightarrow F'_x$ est injective. Il résulte des calculs précédents que $\Delta : \Omega \longrightarrow \Omega$ est un opérateur différentiel elliptique.

(2.12.) Soient V une variété riemannienne C^∞ compacte orientée et F un fibré vectoriel euclidien C^∞ sur V . Soient τ l'élément de volume de V et $\langle \, , \rangle$ le produit scalaire sur les fibres de F . On munit $\mathcal{D}(F) = C^\infty(V,F)$ du produit scalaire $(\alpha,\beta) = \int_V \langle \alpha, \beta \rangle . \tau$ pour $\alpha, \beta \in \mathcal{D}(F)$. On dit qu'un opérateur différentiel $P : F \longrightarrow F$ est <u>auto-adjoint</u> si $(P\alpha, \beta) = (\alpha, P\beta)$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathcal{D}(F)$. On a vu plus haut (1.8.) que Δ est auto-adjoint.

(2.13.) Le théorème de Hodge (1.11.) est un cas particulier du théorème suivant que nous démontrerons en (5.10.) :

THEOREME.- Sous les hypothèses de (2.12.), soit $P : F \longrightarrow F$ un opérateur différentiel elliptique auto-adjoint. Alors :

(i) l'espace $\mathcal{H}_P = \{\alpha \in \mathcal{D}(F) \; ; \; P\alpha = 0\}$ est de dimension finie,

(ii) l'espace $\mathcal{D}(F)$ est somme directe orthogonale de $P(\mathcal{D}(F))$ et de $\mathcal{H}_P$.

3. Quelques espaces fonctionnels.

(3.1.) Fonctions à décroissance rapide.- On notera $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées. Autrement dit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si pour tout entier $N \geqslant 0$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a avec les notations de (2.1.) :

$$|f|_{N,\alpha} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N D^\alpha f(x) < +\infty \; .$$

On munit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de la topologie d'espace de Fréchet définie par les semi-normes $|f|_{N,\alpha}$.

(3.2.) Transformation de Fourier.- Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, e^{-i \langle x, \xi \rangle} \, dx \; ,$$

avec $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et $\langle x, \xi \rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$.

On a alors $\widehat{D^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$,

et la formule d'inversion $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$.

De plus pour tout $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\hat{\varphi}(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t)\hat{f}(t)dt \quad .$$

(3.3.) Distributions tempérées.- On appelle espace des distributions tempérées, et on note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On plonge $L^2(\mathbb{R}^n)$, et en particulier $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en posant pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$(f,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi(t)dt \quad , \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad .$$

On étend la transformation de Fourier à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en posant pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$(\hat{T},\varphi) = (T,\hat{\varphi}) \quad , \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad .$$

D'après la formule d'inversion, l'application $T \longrightarrow \hat{T}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on définit $D^\alpha T$ par $\widehat{D^\alpha T}(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\hat{T}(\xi)$. D'après (3.2.) toutes ces définitions sont compatibles avec le plongement de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(3.4.) Théorème de Plancherel.- Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$.

(3.5.) Espaces de Sobolev ($m \geq 0$).- Soit $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$. On définit pour tout entier $m \geq 0$ un produit scalaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$(f,g)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int D^\alpha f(x)\, \overline{D^\alpha g(x)}dx \quad , \quad f \text{ et } g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad .$$

On note $\| \; \|'_m$ la norme correspondante et on appelle espace de Sobolev $S^m(\mathbb{R}^n)$ le complété de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pour cette norme. Par définition on a des injections continues $S^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S^{m-1}(\mathbb{R}^n)$, de plus $S^0(\mathbb{R}^n)$ s'identifie à $L^2(\mathbb{R}^n)$; par suite la transformée de Fourier des éléments de $S^m(\mathbb{R}^n)$ est définie.

(3.6.) PROPOSITION.- Pour tout $m \geq 0$, la norme $\|f\|'_m$ est équivalente à la norme $\|f\|_m = \|(1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{f}(\xi)\|_{L^2}$.

Démonstration.- Pour $f \in S^m(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\|f\|'^2_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^2}$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq m} \|\xi^\alpha \hat{f}(\xi)\|_{L^2} \quad \text{(d'après le théorème de Plancherel)}$$

$$= \int |\hat{f}(\xi)|^2 \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2\Big) d\xi \ .$$

Il suffit alors de vérifier qu'il existe des constantes c_1, $c_2 > 0$ telles que

$$c_1(1+|\xi|^2)^m \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2 \leq c_2(1+|\xi|^2)^m \ .$$

(3.7.) Espaces de Sobolev ($m \in \mathbb{Z}$) .- Vu la proposition précédente, on appellera espace de Sobolev $S^m(\mathbb{R}^n)$, pour $m \in \mathbb{Z}$, le complété de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|f\|_m = \|(1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{f}(\xi)\|_{L^2}$. On peut montrer (cf. [5]) que $S^m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$(1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \ .$$

(3.8.) Propriétés élémentaires des espaces $S^m(\mathbb{R}^n)$:

a) $S^m(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert dans lequel $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense ;

b) pour $m < m'$, il y a une injection continue $S^{m'}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S^m(\mathbb{R}^n)$;

c) pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, la multiplication par φ est une application continue de $S^m(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même ;

d) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, D^α induit une application continue $S^{m+|\alpha|} \longrightarrow S^m$.

(3.9.) Lemme de Sobolev.- Quels que soient $k \in \mathbb{N}$ et $m > \frac{n}{2} + k$, les éléments de $S^m(\mathbb{R}^n)$ sont de classe C^k .

Démonstration.- Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice tel que $|\alpha| \leq k$ et soit

$f \in S^m(\mathbb{R}^n)$. Pour prouver que $D^\alpha f$ est continu, il suffit de montrer que $i^{-|\alpha|}\widehat{D^\alpha f}(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$ est sommable. Or on a

$$\int |\xi^\alpha| \ |\hat{f}(\xi)| d\xi = \int |\hat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^2)^{m/2} \ \frac{|\xi^\alpha|}{(1 + |\xi|^2)^{m/2}} \ d\xi \ ,$$

d'où en utilisant l'inégalité de Schwarz :

$$\left(\int |\xi^\alpha| \ |\hat{f}(\xi)| d\xi\right)^2 \leq \|f\|_m^2 \int \frac{|\xi^\alpha|^2}{(1 + |\xi|^2)^m} \ d\xi \ .$$

L'intégrale du second membre est convergente dès que $2(m - |\alpha|) > n$, d'où le lemme.

(3.10.) <u>Lemme de Rellich</u>.- <u>Soient</u> K <u>un compact de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>et</u> $S^m_K(\mathbb{R}^n)$ <u>l'espace des distributions appartenant à</u> $S^m(\mathbb{R}^n)$ <u>et à support dans</u> K , <u>muni de la topologie induite par celle de</u> $S^m(\mathbb{R}^n)$. <u>Alors l'injection</u> $S^m_K(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ <u>est compacte quel que soit</u> m .

<u>Démonstration</u>.- Nous ne l'indiquerons que dans le cas $m \geq 0$, le seul qui serve dans la démonstration du théorème de Hodge ; pour le cas général voir [10].

Puisque $S^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ est complet, il suffit de montrer que, de toute suite $f_\lambda \in S^m_K(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f_\lambda\|_m \leq 1$, on peut extraire une suite de Cauchy en norme $\| \ \|_{m-1}$. Considérons pour $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{C}^n$ les fonctions

$$\hat{f}_\lambda(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_K f_\lambda(x) \ e^{-i(x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n)} \ dx \ .$$

D'après l'inégalité de Schwarz, on a pour ξ restant dans un compact fixe de $\mathbb{C}^n$:

$$|\hat{f}_\lambda(\xi)| \leq \text{constante} \ \|f_\lambda\|_0 \ .$$

De plus pour $m \geq 0$, on a $\|f_\lambda\|_0 \leq \|f_\lambda\|_m$. Ainsi les fonctions $\hat{f}_\lambda$ sont uniformément bornées sur tout compact de $\mathbb{C}^n$ et sont par ailleurs holomorphes. D'après le théorème de Montel, il existe donc une sous-suite $\hat{f}_{\lambda r}$ uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{C}^n$.

Montrons que la suite f_{λ_r} est une suite de Cauchy en norme $\| \; \|_{m-1}$. Soient $\epsilon > 0$ et $M > 0$ tel que $1 + |\xi|^2 > \frac{1}{\epsilon}$ pour $|\xi| > M$. On a

$$\|f_{\lambda_r} - f_{\lambda_s}\|^2_{m-1} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{m-1} |\hat{f}_{\lambda_r} - \hat{f}_{\lambda_s}|^2 \, d\xi$$

$$\leq \epsilon \int_{|\xi|>M} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}_{\lambda_r} - \hat{f}_{\lambda_s}|^2 \, d\xi + A(\epsilon) \int_{|\xi|\leq M} |\hat{f}_{\lambda_r} - \hat{f}_{\lambda_s}|^2 \, d\xi \ ,$$

où $A(\epsilon)$ est une constante dépendant de ϵ . Puisque la suite $\hat{f}_{\lambda_r}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^n$, a fortiori de $\mathbb{R}^n$, la deuxième intégrale du second membre tend vers 0 quand $r , s \longrightarrow \infty$. Par hypothèse la première intégrale est bornée, d'où le lemme.

(3.11.) Soient maintenant V une variété C^∞ compacte orientée de dimension n et F un espace fibré C^∞ sur V à fibre vectorielle de dimension finie r . Soient U_i un recouvrement fini de V par des ouverts de coordonnées qui trivialisent le fibré F et φ_i une partition C^∞ de l'unité subordonnée à U_i . On munit l'<u>espace</u> $\mathcal{D}(F) = C^\infty(V,F)$ <u>des sections</u> C^∞ de F de la topologie de la convergence uniforme des composantes des $\varphi_i f$, pour $f \in \mathcal{D}(F)$, ainsi que de toutes leurs dérivées dans les systèmes de coordonnées U_i . Cette topologie ne dépend pas du choix de U_i et φ_i et fait de $\mathcal{D}(F)$ un espace de Fréchet.

Soient F^* le fibré dual de F et $F^t = F^* \otimes \Lambda^n T^* V$. On appelle <u>espace des sections distributions</u> de F , et on note $\mathcal{D}'(F)$, le dual topologique de $\mathcal{D}(F^t)$. On plonge $\mathcal{D}(F)$ dans $\mathcal{D}'(F)$ de la façon suivante : si $\alpha \in \mathcal{D}(F)$ et $\beta \in \mathcal{D}(F^t)$, on a $\langle\alpha,\beta\rangle \in \mathcal{D}(\Lambda^n T^* V)$ et la distribution associée à α est $\beta \longmapsto (\alpha,\beta) = \int_V \langle\alpha,\beta\rangle$.

(3.12.) Soit $T \in \mathcal{D}'(F)$, alors les composantes de $\varphi_i T$ prolongées par zéro en dehors de U_i à $\mathbb{R}^n$ tout entier s'identifient à des éléments $\varphi_i T_j$ $(j = 1,\dots,r)$ de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On dit que T appartient à l'<u>espace de Sobolev</u>

$S^m(F)$ si $\varphi_i T_j$ appartient à $S^m(\mathbb{R}^n)$ quels que soient i et j. On munit $S^m(F)$ de la topologie définie par la norme $\|T\|_m$ telle que

$$\|T\|_m^2 = \sum_{i,j} \|\varphi_i T_j\|_m^2 \quad .$$

Muni de cette norme c'est un espace de Hilbert dans lequel $\mathcal{D}(F)$ est dense. On peut montrer que l'espace topologique sous-jacent ne dépend pas du choix de U_i et φ_i (cf. [7] ou [10]).

(3.13.) Soient toujours V une variété C^∞ compacte orientée et F un fibré vectoriel C^∞ sur V. Alors il résulte des lemmes (3.9.) et (3.10.) que :

(i) <u>lemme de Sobolev</u> : $\mathcal{D}(F) = \bigcap S^m(F)$ et par dualité $\mathcal{D}'(F) = \bigcup S^m(F)$;

(ii) <u>lemme de Rellich</u> : l'injection canonique $S^m(F) \hookrightarrow S^{m-1}(F)$ est compacte quel que soit m.

(3.14.) Soient F, F' deux fibrés vectoriels C^∞ sur V et $P : F \longrightarrow F'$ un opérateur différentiel. Alors (cf. [6], 3.3.18) il existe un unique opérateur différentiel $P^t : F'^t \longrightarrow F^t$, dit transposé de P tel que pour tout $\alpha \in \mathcal{D}(F)$, $\beta \in \mathcal{D}(F'^t)$, on ait

$$(P\alpha,\beta) = (\alpha,P^t\beta) \quad .$$

Pour $T \in \mathcal{D}'(F)$, on définira donc $PT \in \mathcal{D}'(F')$ par

$$(PT,\beta) = (T,P^t\beta) \quad , \quad \beta \in \mathcal{D}(F'^t) \quad .$$

Lue dans une carte locale, cette définition est en accord avec celle donnée en (3.3.) pour la dérivation des distributions tempérées. Par suite, si P est un opérateur différentiel d'ordre p, il induit pour tout $m \in \mathbb{Z}$ une application continue $S^{m+p}(F) \longrightarrow S^m(F)$.

(3.15.) Supposons que V soit munie d'une structure riemannienne C^∞ et que F soit un fibré vectoriel euclidien C^∞ sur V. Soient τ l'élément de volume de V et $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire sur les fibres de F. Alors l'application $\alpha \longmapsto \langle \alpha, \ \rangle \otimes \tau$ est un isomorphisme canonique de $\mathcal{D}(F)$ sur $\mathcal{D}(F^t)$; par suite $\mathcal{D}'(F)$ s'identifie au dual topologique de $\mathcal{D}(F)$. De plus l'espace de Sobolev $S^o(F)$ s'identifie au complété de $\mathcal{D}(F)$ pour la norme définie par le produit scalaire $(\alpha,\beta) = \int_V \langle \alpha,\beta \rangle \tau$ pour $\alpha,\beta \in \mathcal{D}(F)$.

4. Inégalité de Friedrichs.

(4.1.) LEMME.- *Soit* ω *une fonction* C^∞ *à support compact sur* $\mathbb{R}^n$ *et soit* $\|\omega\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\omega(x)|$. *Alors pour tout* $m \in \mathbb{Z}$, *il existe des constantes* A *et* B *positives,* A *dépendant seulement de* m *et* n, B *dépendant de* m, n *et* ω *telles que*

$$\|\omega\varphi\|_m \leq A\,\|\omega\|_\infty\,\|\varphi\|_m + B\,\|\varphi\|_{m-1} \quad ,$$

quel que soit $\varphi \in S^m(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration.- Supposons d'abord $m \geq 0$. Alors on a

$$\|\omega\varphi\|_m \leq A \sum_{|\alpha|=o}^{m} \|D^\alpha(\omega\varphi)\|_o$$

$$\leq A \sum_{|\alpha|=o}^{m} \|\omega D^\alpha\varphi\|_o + A \sum_{|\alpha|=o}^{m} \|D^\alpha(\omega\varphi) - \omega D^\alpha\varphi\|_o \quad .$$

Le dernier terme ne fait intervenir que des dérivées d'ordre $\leq m-1$ de φ, il existe donc une constante $B > 0$ dépendant de ω telle que

$$\sum_{|\alpha|=o}^{m} \|D^\alpha(\omega\varphi) - \omega D^\alpha\varphi\|_o \leq B\,\|\varphi\|_{m-1} \quad .$$

Par ailleurs, il est clair que $\|\omega D^\alpha\varphi\|_o \leq \|\omega\|_\infty\,\|D^\alpha\varphi\|_o$, d'où l'inégalité voulue pour $m \geq 0$.

Soit Δ_o l'opérateur différentiel du second ordre défini par $\widehat{\Delta_o\varphi}(\xi) = (1 + |\xi|)^2\hat{\varphi}(\xi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Il est clair que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, Δ_o induit une isométrie $S^m(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S^{m-2}(\mathbb{R}^n)$.

Supposons maintenant $m < 0$ et considérons l'application

$$\gamma : S^m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\Delta_o^m} S^{-m}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\times\,\omega} S^{-m}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\Delta_o^{-m}} S^m(\mathbb{R}^n) \quad .$$

D'après ce qui précède, on a pour tout $\varphi \in S^m(\mathbb{R}^n)$:

$$\|\gamma\varphi\|_m = \|\omega\Delta_o^m \varphi\|_{-m} \leq A\,\|\omega\|_\infty \|\varphi\|_m + B\,\|\varphi\|_{m-1} \quad .$$

Mais $\omega\varphi - \gamma\varphi = \omega\Delta_o^{-m}\,\Delta_o^m\,\varphi - \Delta_o^{-m}(\omega\Delta_o^m\,\varphi)$

ne fait intervenir que des dérivées d'ordre $\leq -2m-1$ de $\Delta_o^m\varphi$, il existe donc une constante $B' > 0$ dépendant de ω telle que

$$\|\omega\varphi - \gamma\varphi\|_m \leq B'\,\|\Delta_o^m\,\varphi\|_{-m-1} = B'\,\|\varphi\|_{m-1} \quad ,$$

d'où le lemme.

(4.2.) COROLLAIRE.- <u>Soit</u> U <u>un voisinage de l'origine dans</u> $\mathbb{R}^n$. <u>Soit</u> $P : U\times\mathbb{R}^r \longrightarrow U\times\mathbb{R}^{r'}$ <u>un opérateur différentiel d'ordre</u> p <u>dont la partie homogène d'ordre</u> p <u>s'annule à l'origine.</u> <u>Alors pour tout</u> $m \in \mathbb{Z}$ <u>et pour tout</u> $\epsilon > 0$, <u>il existe un voisinage de l'origine</u> $U_\epsilon \subset U$ <u>et une constante</u> $C_\epsilon > 0$ <u>telle que</u>

$$\|P\varphi\|_{m-p} \leq \epsilon\,\|\varphi\|_m + C_\epsilon\,\|\varphi\|_{m-1} \quad ,$$

<u>pour tout</u> $\varphi \in [S^m(\mathbb{R}^n)]^r$ <u>à support dans</u> U_ϵ .

(4.3.) LEMME.- <u>Soient</u> U <u>un voisinage de l'origine dans</u> $\mathbb{R}^n$ <u>et</u> $P : U\times\mathbb{R}^r \longrightarrow U\times\mathbb{R}^{r'}$ <u>un opérateur différentiel elliptique d'ordre</u> p . <u>Alors pour tout</u> $m \in \mathbb{Z}$, <u>il existe un voisinage de l'origine</u> $U' \subset U$ <u>et une constante</u> $C > 0$ <u>tels que</u>

$$\|\varphi\|_m \leq C(\,\|P\varphi\|_{m-p} + \|\varphi\|_{m-1}\,)$$

<u>pour tout</u> $\varphi \in [S^m(\mathbb{R}^n)]^r$ <u>à support dans</u> U' .

<u>Démonstration</u>.- Soit P_o l'opérateur différentiel à coefficients constants égal à la partie homogène d'ordre p de P à l'origine ; autrement dit $\widehat{P_o\varphi}(\xi) = i^p\sigma_p(0,\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ pour tout $\varphi \in [\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)]^r$. Puisque P est elliptique, on a

$$\sigma_p(0,\xi)u \neq 0 \quad \text{pour} \quad \xi \in \mathbb{R}^n\ ,\ \xi \neq 0 \quad \text{et} \quad u \in \mathbb{C}^r\ ,\ u \neq 0 \quad .$$

La boule unité étant compacte, il existe une constante $A > 0$ telle que

$$|\sigma_p(0,\xi)u|^2 \geq A \quad \text{pour} \quad |\xi| = |u| = 1 \quad ;$$

l'expression $\sigma_p(0,\xi)u$ étant homogène de degré p en ξ et linéaire en u, il en résulte

$$|\sigma_p(0,\xi)u|^2 \geq A|\xi|^{2p}\,|u|^2 \quad \text{pour} \quad \xi \in \mathbb{R}^n\,,\ u \in \mathbb{C}^r \;.$$

D'où

$$\|P_o\varphi\|^2_{m-p} = \int |\sigma_p(0,\xi)\hat{\varphi}(\xi)|^2\,(1+|\xi|^2)^{m-p}\,d\xi$$

$$\geq A\int |\hat{\varphi}(\xi)|^2\,|\xi|^{2p}\,(1+|\xi|^2)^{m-p}\,d\xi \;,$$

$$\|P_o\varphi\|^2_{m-p} + \|\varphi\|^2_{m-p} \geq \int |\hat{\varphi}(\xi)|^2\,(1+A|\xi|^{2p})\,(1+|\xi|^2)^{m-p}\,d\xi \;.$$

Mais il existe une constante $B > 0$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$(1+|\xi|^2)^m \leq B[(1+A|\xi|^{2p})(1+|\xi|^2)^{m-p}] \;,$$

et par une suite constante $B' > 0$ telle que

$$\|\varphi\|_m \leq B'(\,\|P_o\varphi\|_{m-p} + \|\varphi\|_{m-1}) \;.$$

De plus on a :

$$\|P_o\varphi\|_{m-p} \leq \|P\varphi\|_{m-p} + \|(P-P_o)\varphi\|_{m-p}$$

et $P - P_o$ est un opérateur différentiel d'ordre p dont la partie homogène d'ordre p s'annule à l'origine. On conclut alors grâce à (4.2.) .

(4.4.) THEOREME (inégalité de Friedrichs).- <u>Soient</u> V <u>une variété</u> C^∞ <u>compacte orientée</u>, F <u>et</u> F' <u>deux fibrés vectoriels</u> C^∞ <u>sur</u> V <u>et</u> $P : F \longrightarrow F'$ <u>un opérateur différentiel elliptique d'ordre</u> p . <u>Alors pour tout</u> $m \in \mathbb{Z}$, <u>il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que</u>

$$\|\varphi\|_m \leq C(\,\|P\varphi\|_{m-p} + \|\varphi\|_{m-1})$$

<u>pour tout</u> $\varphi \in S^m(F)$.

<u>Démonstration</u>.- Il résulte du lemme précédent et de la compacité de V qu'il existe un recouvrement fini de V par des ouverts U_i tels que

l'inégalité (4.4.) soit vérifiée pour les $\varphi \in S^m(F)$ à support dans U_i .
Soit ω_i une partition de l'unité subordonnée à U_i ; on a pour tout
$\varphi \in S^m(F)$

$$\|\varphi\|_m \leq \text{constante} \sum_i \|\omega_i\varphi\|_m$$

$$\leq \text{constante} \sum_i \left(\|P(\omega_i\varphi)\|_{m-p} + \|\omega_i\varphi\|_{m-1}\right) .$$

Mais $P(\omega_i\varphi) = \omega_i(P\varphi) + P_i\varphi$, où P_i est un opérateur différentiel d'ordre $\leq p-1$, donc

$$\|P(\omega_i\varphi)\|_{m-p} \leq \|\omega_i(P\varphi)\|_{m-p} + \text{constante}\,\|\varphi\|_{m-1} ,$$

d'où le théorème.

5. <u>Théorèmes de régularité et de finitude.</u>

(5.1.) Soient $\varphi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n$. On posera

$$\varphi^h(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{|h|} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n ,$$

autrement dit, après transformation de Fourier :

$$\widehat{\varphi^h}(\xi) = \frac{e^{i\langle h,\xi\rangle} - 1}{|h|}\,\hat{\varphi}(\xi) \quad \text{pour } \xi \in \mathbb{R}^n .$$

(5.2.) LEMME.- <u>Soit</u> $\varphi \in S^m(\mathbb{R}^n)$. <u>Alors</u> $\varphi \in S^{m+1}(\mathbb{R}^n)$ <u>si et seulement si</u> $\|\varphi^h\|_m$ <u>reste borné quand</u> $h \to 0$.

<u>Démonstration</u>.- De l'inégalité $|e^{iy} - 1|^2 \leq y^2$ pour $y \in \mathbb{R}$, il résulte

$$\left| \frac{e^{i\langle h,\xi\rangle} - 1}{h} \right|^2 \leq \frac{\langle h,\xi\rangle^2}{|h|^2} \leq 1 + |\xi|^2$$

et par suite $\|\varphi^h\|_m \leq \|\varphi\|_{m+1}$ pour $\varphi \in S^{m+1}(\mathbb{R}^n)$.

Réciproquement supposons que $\|\varphi^h\|_m$ reste borné quand $h \to 0$.
Soient $\xi = (\xi_j)_{j=1,\ldots,n}$ et $t \in \mathbb{R}$. Les fonctions

$$\left(\frac{e^{it\xi_j}-1}{t}\right)(1+|\xi|^2)^{m/2}\,\hat{\varphi}(\xi)$$

restent bornées dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ quand $t \to 0$. Donc en passant à la limite

$$i\xi_j(1+|\xi|^2)^{m/2}\,\hat{\varphi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

quel que soit $j = 1,\dots,n$. Par suite $\varphi \in S^{m+1}(\mathbb{R}^n)$.

(5.3.) LEMME.- Soient U un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ et $P : U \times \mathbb{R}^r \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{r'}$ un opérateur différentiel elliptique d'ordre p . Alors pour tout $m \in \mathbb{Z}$, il existe un voisinage de l'origine $U' \subset U$ tel que, si $\varphi \in [S^m(\mathbb{R}^n)]^r$ est à support dans U' et si $P\varphi \in [S^{m-p+1}(\mathbb{R}^n)]^{r'}$, on ait $\varphi \in [S^{m+1}(\mathbb{R}^n)]^r$.

Démonstration.- D'après (5.2.), il suffira de montrer que $\|\varphi^h\|_m$ reste borné quand $h \to 0$. D'après l'inégalité de Friedrichs (4.3.), il existe un voisinage relativement compact de l'origine $U' \subset U$ et une constante C indépendante de h tels que

$$\|\varphi^h\|_m \leq C(\|P(\varphi^h)\|_{m-p} + \|\varphi^h\|_{m-1})$$

pour tout $\varphi \in [S^m(\mathbb{R}^n)]^r$ à support dans U' . Soient $\tau_h\varphi(x) = \varphi(x+h)$ et $P^h = \sum_\alpha a_\alpha^h D^\alpha$ si $P = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$. Alors on a

$$P(\varphi^h) = (P\varphi)^h - P^h(\tau_h\varphi) \quad ,$$

d'où $$\|\varphi^h\|_m \leq C(\|(P\varphi)^h\|_{m-p} + \|P^h(\tau_h\varphi)\|_{m-p} + \|\varphi^h\|_{m-1}) \quad .$$

D'après (5.2.) on a

$$\|(P\varphi)^h\|_{m-p} \leq \|P\varphi\|_{m-p+1} \quad ,$$

$$\|\varphi^h\|_{m-1} \leq \|\varphi\|_m \quad .$$

De plus les coefficients de P sont des fonctions C^∞ , donc les coefficients des P^h sont uniformément bornés sur U' ainsi que toutes leurs dérivées. Il existe donc une constante C' indépendante de h telle que

$$\|P^h(\tau_h\varphi)\|_{m-p} \leq C'\|\tau_h\varphi\|_{m-p} = C'\|\varphi\|_{m-p} \quad ,$$

d'où le lemme.

(5.4.) Théorème de régularité.- Soient V une variété C^{∞} compacte et orientée, F et F' deux fibrés vectoriels C^{∞} sur V et $P : F \longrightarrow F'$ un opérateur différentiel elliptique d'ordre p. Soit $\varphi \in \mathcal{D}'(F)$ tel que $P\varphi \in S^{m}(F')$, alors $\varphi \in S^{m+p}(F)$.

Démonstration.- D'après (3.13.) il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi \in S^{k}(F)$. Par récurrence sur k on voit qu'il suffit de montrer que $\varphi \in S^{k+1}(F)$ si $P\varphi \in S^{k-p+1}(F')$. D'après le lemme précédent et la compacité de V, il existe un recouvrement fini de V par des ouverts U_i tels que cette propriété soit vérifiée pour $\varphi \in S^{k}(F)$ à support dans U_i. Soit ω_i une partition C^{∞} de l'unité subordonnée à U_i. On a

$$P(\omega_i\varphi) = \omega_i(P\varphi) + P_i\varphi ,$$

où P_i est un opérateur différentiel d'ordre $\leq p - 1$. Dans l'égalité ci-dessus le deuxième membre appartient à $S^{k-p+1}(F')$; donc $\omega_i\varphi \in S^{k+1}(F)$ quel que soit i, et par suite $\varphi = \Sigma\omega_i \varphi \in S^{k+1}(F)$, d'où le théorème.

(5.5.) COROLLAIRE.- Sous les mêmes hypothèses, on a $\varphi \in \mathcal{D}(F)$ si $P\varphi \in \mathcal{D}(F')$.

Démonstration.- Immédiat d'après le lemme de Sobolev (3.13.)

(5.6.) Remarque.- Il est clair que (5.4.) et (5.5.) sont en fait des résultats locaux pour lesquels l'hypothèse de compacité de V n'est pas nécessaire. Nous laissons au lecteur le soin de les énoncer dans le cas général.

(5.7.) DEFINITION.- Soient E_1, E_2 des espaces de Fréchet et $u : E_1 \longrightarrow E_2$ une application linéaire continue. On dit que u est un quasi-monomorphisme si $u(E_1)$ est fermé dans E_2 et si $\operatorname{Ker} u$ est de dimension finie.

(5.8.) Lemme de perturbation.- Soient E_1, E_2 des espaces de Fréchet et $u , v : E_1 \longrightarrow E_2$ deux applications linéaires continues. Alors, si u est un quasi-monomorphisme et si v est compact, $u + v$ est un quasi-monomorphisme.

Pour la démonstration voir [11] ou bien, dans le cas où E_1 , E_2 sont des espaces de Hilbert et où u est injectif, [6] 3.9.7.

(5.9.) Théorème de finitude.- Soient V une variété C^∞ compacte orientée, F et F' deux fibrés vectoriels C^∞ sur V et $P : F \longrightarrow F'$ un opérateur différentiel elliptique d'ordre p . Alors pour tout $m \in \mathbb{Z}$, l'application $P : S^{m+p}(F) \longrightarrow S^m(F')$ est un quasi-monomorphisme.

Démonstration.- Soit $i : S^{m+p}(F) \longrightarrow S^{m+p-1}(F)$ l'injection canonique. Considérons les applications

$$E_1 = S^{m+p}(F) \underset{v = 0 \oplus -i}{\overset{u = P \oplus i}{\rightrightarrows}} E_2 = S^m(F') \oplus S^{m+p-1}(F) \quad .$$

Il est clair que u est injectif. D'après le lemme de Rellich (3.13.), v est compact. De plus, d'après l'inégalité de Friedrichs (4.4.), il existe une constante C telle que

$$\|\varphi\|_{E_1} \leq C \|u(\varphi)\|_{E_2} \quad ,$$

quel que soit $\varphi \in E_1$. Par suite $u(E_1)$ est fermé dans E_2 et, d'après le lemme de perturbation, $P = u + v$ est un quasi-monomorphisme.

Nous pouvons maintenant démontrer la généralisation du théorème de Hodge annoncée en (2.13.) :

(5.10.) THEOREME.- Soient V une variété riemannienne C^∞ compacte orientée, F un fibré vectoriel euclidien C^∞ sur V et $P : F \longrightarrow F$ un opérateur différentiel elliptique auto-adjoint. Alors

(i) l'espace $\mathcal{H}_P = \{\alpha \in \mathcal{D}(F) \ ; \ P\alpha = 0\}$ est de dimension finie,

(ii) l'espace $\mathcal{D}(F)$, muni du produit scalaire canonique, est somme directe orthogonale de $P(\mathcal{D}(F))$ et de $\mathcal{H}_P$.

Démonstration.- Soit p l'ordre de P . Posons

$$\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker}\{P : S^{o}(F) \longrightarrow S^{-p}(F)\}$$

$$\operatorname{Im} P = \operatorname{Im}\{P : S^{p}(F) \longrightarrow S^{o}(F)\}$$

et montrons que $S^{o}(F)$, muni du produit scalaire canonique est somme directe orthogonale de $\operatorname{Ker} P$ et $\operatorname{Im} P$. D'après le théorème (5.9.), $\operatorname{Im} P$ est fermé dans $S^{o}(F)$; il suffit donc de montrer que $(\operatorname{Im} P)^{\perp} = \operatorname{Ker} P$.

Soit $\alpha \in S^{o}(F)$. Alors $\alpha \in (\operatorname{Im} P)^{\perp}$ si et seulement si $(\alpha, P\beta) = 0$ pour tout $\beta \in S^{p}(F)$, ou même pour tout $\beta \in \mathcal{D}(F)$, car $\mathcal{D}(F)$ est dense dans $S^{p}(F)$. Puisque P est auto-adjoint, cela équivaut à $(P\alpha, \beta) = 0$ pour tout $\beta \in \mathcal{D}(F)$, autrement dit $P\alpha = 0$.

Par ailleurs d'après le théorème de régularité (5.5.), on a $\mathcal{H}_P = \operatorname{Ker} P$ et la décomposition de $S^{o}(F)$ induit la décomposition cherchée de $\mathcal{D}(F)$. Enfin le théorème de finitude (5.9.) montre que $\mathcal{H}_P$ est de dimension finie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FRIEDRICHS, K.O. - On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 6 (1953), p. 299-325.

[2] HODGE, W.V.D. - The existence theorem for harmonic integrals, Proc. London Math. Soc., 41 (1936), p. 483-496.

[3] HODGE, W.V.D. - The theory and applications of harmonic integrals, 2nd edition, Cambridge Univ. Press, 1952.

[4] HORMANDER, L. - Pseudo differential operators, Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965), p. 501-517.

[5] MALGRANGE, B. - Introduction à la théorie des équations elliptiques, Cours à l'E.N.S., Paris 1961.

[6] NARASIMHAN, R. - Analysis on real and complex manifolds, North-Holland Publ. Co., 1968.

[7] PALAIS, R.S. - Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1965.

[8] DE RHAM, G. - Variétés différentiables, Hermann, Paris, 1955.

[9] WARNER, F.W. - Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott Foresman and Co., Glenview, Illinois 1971.

[10] Séminaire CARTAN-SCHWARTZ 63/64 - Théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur différentiel elliptique, 2e édition, Secrétariat Mathématique, Paris 1965.

[11] Séminaire DOUADY-KREE 65/66 - Espaces vectoriels topologiques et distributions, Université de Nice 1966.