Astérisque

RÉGINE DOUADY

Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires

Astérisque, tome 16 (1974), p. 7-32

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__16__7_0>

PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET ESPACES NUCLEAIRES

par Régine DOUADY

§ 1. Produits tensoriels topologiques.

1.0. Motivation.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\underline{\underline{C}}$, notons $P(E)$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de E dans $\underline{\underline{C}}$. On sait que, si E et F sont des espaces vectoriels complexes de dimension finie, on a

$$P(E \times F) = P(E) \otimes P(F) \quad .$$

Si U et V sont des ouverts de E et F respectivement, comment peut-on décrire l'espace $\underline{O}(U \times V)$ des fonctions $\underline{\underline{C}}$-analytiques de $U \times V$ dans $\underline{\underline{C}}$, connaissant $\underline{O}(U)$ et $\underline{O}(V)$. On verra que $\underline{O}(U \times V)$ est le complété de $\underline{O}(U) \otimes \underline{O}(V)$ pour une certaine topologie, ce qu'on écrira :

$$\underline{O}(U \times V) = \underline{O}(U) \hat{\otimes} \underline{O}(V) \quad .$$

Plus généralement, si X et Y sont des espaces $\underline{\underline{C}}$-analytiques, $\underline{F}$ et $\underline{G}$ des faisceaux analytiques cohérents sur X et Y respectivement, en notant $\underline{H}$ le faisceau sur $X \times Y$ produit tensoriel externe de $\underline{F}$ et $\underline{G}$, on a :

$$\underline{H}(X \times Y) = \underline{H}(X) \hat{\otimes} \underline{H}(Y) \quad .$$

1.1. Semi-normes $\otimes$-fonctorielles.

DEFINITION.- On appelle <u>semi-norme $\otimes$-fonctorielle</u> la donnée, pour tout couple (E,F) d'espaces vectoriels complexes, pour toute semi-norme p sur E et toute semi-norme q sur F, d'une semi-norme $\alpha(p,q)$ sur $E \otimes F$, de façon que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) Si (E,p), (E_1,p_1), (F,q), (F_1,q_1) sont des espaces semi-normés, et si $f : E \longrightarrow E_1$ et $g : F \longrightarrow F_1$ sont des applications linéaires continues, l'application linéaire $f \otimes g : E \otimes E_1 \longrightarrow F \otimes F_1$ est continue pour les semi-normes $\alpha(p,q)$ et $\alpha(p_1,q_1)$, et $\|f \otimes g\| \leq \|f\| \, \|g\|$.

(ii) En notant u la norme $z \longmapsto |z|$ sur $\underline{\underline{C}}$, on a $\alpha(u,u) = u$.

Soit α une semi-norme $\otimes$-fonctorielle. Si E et F sont des espaces semi-normés, on note $E \otimes_\alpha F$ l'espace vectoriel $E \otimes F$ muni de la semi-norme $\alpha(p,q)$, où p et q sont les semi-normes données sur E et F : pour tout $t \in E \otimes F$, on note $\|t\|_\alpha$ la semi-norme de t dans $E \otimes_\alpha F$. Si E et F sont des espaces localement convexes, soient $(p_i)_{i\in I}$ et $(q_j)_{j\in J}$ des familles de semi-normes définissant les topologies de E et F respectivement, on note $E \otimes_\alpha F$ l'espace vectoriel $E \otimes F$ muni de la topologie définie par la famille de semi-normes $(\alpha(p_i,q_j))_{(i,j)\in I\times J}$. On note $E \hat{\otimes}_\alpha F$ le séparé-complété de $E \otimes_\alpha F$. Si E et F sont des espaces de Banach (resp. de Fréchet), $E \hat{\otimes}_\alpha F$ est un espace de Banach (resp. de Fréchet).

Soient E et F des espaces semi-normés et $t \in E \otimes F$. Pour toute semi-norme $\otimes$-fonctorielle α, on a :

$$\sup_{\xi \in B_{E'},\, \eta \in B_{F'}} |(\xi \otimes \eta)(t)| \leq \|t\|_\alpha \leq \inf \Sigma \|x_i\| \, \|y_i\| ,$$

où $B_{E'}$ et $B_{F'}$ sont les boules unités des duaux E' et F' de E et F, et où "inf" est pris sur toutes les familles finies de couples $((x_i,y_i))_{i\in I}$ telles que $t = \Sigma\, x_i \circ y_i$. Ces inégalités sont immédiates.

DEFINITION.- Avec les notations ci-dessus, on pose

$$\|t\|_\varepsilon = \sup_{\xi \in B_{E'},\, \eta \in B_{F'}} |(\xi \otimes \eta)(t)| \quad ;$$

$$\|t\|_\pi = \inf \Sigma \|x_i\| \, \|y_i\| \quad .$$

On vérifie que l'on définit ainsi des semi-normes $\otimes$-fonctorielles π et ε. De toutes les semi-normes $\otimes$-fonctorielles, ε est la plus petite et π est la plus grande.

Soient α une semi-norme $\otimes$-fonctorielle, E et F des espaces semi-normés, $x \in E$ et $y \in F$. On a :

$$\|x \otimes y\|_\alpha = \|x\| \ \|y\| \ .$$

L'inégalité $\|x \otimes y\|_\alpha \leq \|x\| \ \|y\|$ est immédiate, et l'inégalité opposée résulte du théorème de Hahn-Banach.

Si p et q sont des normes, on verra que $\varepsilon(p,q)$ est une norme. On en déduit que pour toute semi-norme $\otimes$-fonctorielle, en particulier pour π, la semi-norme $\alpha(p,q)$ est une norme. Paradoxalement, c'est pour ε que la vérification est la plus facile.

1.2. <u>Le produit tensoriel</u> π <u>et son complété</u>.

Soient E, F, G des espaces localement convexes, on note $B(E,F;G)$ l'espace vectoriel des applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G. Si E, F, G sont des espaces semi-normés, $B(E,F;G)$ est muni de la semi-norme $\|f\| = \sup_{x \in B_{E'},\ y \in B_{F'}} \|f(x,y)\|$.

PROPRIETE UNIVERSELLE.- <u>Soient</u> E, F, G <u>des espaces localement convexes. Alors,</u>

1) <u>L'application canonique</u> $L(E \otimes_\pi F;G) \longrightarrow B(E,F;G)$ <u>est un isomorphisme algébrique. Si</u> E, F, G <u>sont des espaces semi-normés, cette application est une isométrie.</u>

2) <u>Si</u> G <u>est un espace complet, l'application canonique</u>

$$L(E \hat{\otimes}_\pi F;G) \longrightarrow B(E,F;G)$$

<u>est un isomorphisme algébrique.</u>

Démonstration de 1).– Supposons E, F, G semi-normés. La boule ouverte $\mathring{B}_{E \otimes_\pi F}$ est l'enveloppe convexe de $\mathring{B}_E \otimes \mathring{B}_F$. Soit f une application bi-linéaire de $E \times F$ dans G, notons $\tilde{f}$ l'application linéaire de $E \otimes_\pi F$ dans G déduite de f. On a

$$\|f\| \leq 1 \iff f(\mathring{B}_E \times \mathring{B}_F) \subset \mathring{B}_G \iff \tilde{f}(\mathring{B}_E \otimes \mathring{B}_F) \subset \mathring{B}_G \iff \tilde{f}(\mathring{B}_{E \otimes_\pi F}) \subset \mathring{B}_G \iff \|\tilde{f}\| \leq 1 ,$$

d'où la propriété 1) dans le cas semi-normé ; le cas général en découle.

2) L'application canonique $L(E \otimes_\pi F;G) \longrightarrow L(E \hat{\otimes}_\pi F;G)$ est un isomorphisme algébrique. La propriété 2) résulte alors du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
L(E \otimes_\pi F;G) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
L(E \hat{\otimes}_\pi F;G) \arrow[r] & B(E,F;G)
\end{tikzcd}$$

où les flèches sont les applications canoniques.

COROLLAIRE 1.– *Si* E *et* F *sont des espaces semi-normés, alors* $E \hat{\otimes}_\pi F = \hat{E} \hat{\otimes}_\pi \hat{F}$.

En effet, $E \hat{\otimes}_\pi F$ *et* $\hat{E} \hat{\otimes}_\pi \hat{F}$ *sont deux représentants du foncteur* $G \longmapsto B(E,F;G)$.

COROLLAIRE 2.– *Soit* (E_i) *un système projectif d'espaces localement convexes. Notons* E *la limite projective des* E_i *et supposons les applications* $E \longrightarrow E_i$ *d'image dense pour tout* i. *Alors, si* F *est un espace localement convexe, on a* $E \hat{\otimes}_\pi F = \varprojlim E_i \hat{\otimes}_\pi F$.

Ce corollaire résulte du précédent.

Exemple de produit tensoriel π complété.– Soient I et J deux ensembles. On a $\ell^1(I \times J) = \ell^1(I) \hat{\otimes}_\pi \ell^1(J)$. En effet, pour tout espace de Banach G,

$L(\ell^1(I \times J);G)$ et $B(\ell^1(I),\ell^1(J);G)$ s'identifient à l'ensemble des familles bornées, indexées par $I \times J$, d'éléments de G. On en déduit que $\ell^1(I \times J)$ et $\ell^1(I) \hat{\otimes}_\pi \ell^1(J)$ représentent le même foncteur.

Exactitude à droite.

PROPOSITION.- Soient $0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{u} E_2 \xrightarrow{v} E_3 \longrightarrow 0$ une suite exacte d'espaces de Fréchet et F un espace de Fréchet. Alors, dans le diagramme $E_1 \hat{\otimes}_\pi F \xrightarrow{u_*} E_2 \hat{\otimes}_\pi F \xrightarrow{v_*} E_3 \hat{\otimes}_\pi F$, le morphisme u_* est d'image dense dans $\operatorname{Ker} v_*$ et v_* est surjectif.

Démonstration.

Il résulte de la propriété universelle du produit $\hat{\otimes}_\pi$ que le foncteur $E \longmapsto E \hat{\otimes}_\pi F$ commute aux conoyaux séparés complétés. On en déduit que $\overline{\operatorname{Im} u_*} = \operatorname{Ker} v_*$. La surjectivité de v_* est immédiate.

Contre-exemple.

On ne sait rien sur l'injectivité de u_* (cf. problème d'approximation). Donnons un exemple où u est un monomorphisme strict et où u_* n'est pas strict : soient E un espace de Banach, H un sous-espace fermé de E non direct et réflexif (par exemple $E = \ell^\infty$ et $H \approx \ell^2$). Alors la topologie de $H' \hat{\otimes}_\pi H$ (où H' est le dual de H) n'est pas induite par celle de $H' \hat{\otimes}_\pi E$. En effet, si $H' \hat{O}_\pi H \to H' \hat{\otimes} E$ est un monomorphisme strict, son composé $B(H',E;C) \longrightarrow B(H',H;C)$ est surjectif. Or $B(H',E) = L(E;H'') = L(E;H)$, de même, $B(H',H) = L(H;H)$. L'identité de H peut se prolonger en une application linéaire de E dans H, ce qui est impossible car H est non direct dans E.

1.3. Le produit tensoriel ε et son complété.

Soient E et F deux espaces semi-normés. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E \otimes_\varepsilon F & \xrightarrow{\alpha} & L(F';E) \\ \beta \downarrow & & \downarrow \Psi \\ L(E';F) & \xrightarrow{\varphi} & B(E',F';\underline{\underline{C}}) \end{array}$$

défini par

$$\alpha(x \otimes y) = (\eta \longmapsto \eta(y)x) \quad ; \quad \beta(x \otimes y) = (\xi \longmapsto \xi(x)y)$$

$$\varphi(f) = ((\xi,\eta) \longmapsto \eta(f(\xi))) \quad ; \quad \varphi(g) = ((\xi,\eta) \longmapsto \xi(g(\eta))).$$

PROPOSITION 1.- Les applications α, β, φ et Ψ sont isométriques.

Démonstration.

Les applications φ et Ψ sont isométriques en vertu du théorème de Hahn-Banach, $\Psi \circ \alpha = \varphi \circ \beta$ est isométrique par définition de la norme ε ; il en résulte que α et β sont isométriques.

COROLLAIRE.- Si E et F sont des espaces normés, la semi-norme de $E \otimes_\varepsilon F$ est une norme.

Démonstration.

Comme $L(F';E)$ est normé, il suffit de montrer que α est injectif. Or α est composé de deux applications injectives $E \otimes F \xrightarrow{1 \otimes \delta} E \otimes F'^* \xrightarrow{K} L(F';E)$, où $\delta : F \longrightarrow F'^*$ est l'homomorphisme de bidualité et K est l'homomorphisme de Kronecker.

PROPOSITION 2.- Soit F un espace localement convexe.

a) Soient E_1 et E_2 deux espaces localement convexes et $u : E_1 \longrightarrow E_2$

un morphisme. Posons $u_* = u \hat{\otimes} 1_F : E_1 \hat{\otimes}_\varepsilon F \longrightarrow E_2 \hat{\otimes}_\varepsilon F$.

(i) Si u est un monomorphisme strict, il en est de même de u_* ;

(ii) si E_1 est complet et si u est injectif, u_* est injectif.

b) Soit (E_i) un système projectif d'espaces localement convexes, et posons $E = \varprojlim E_i$.

(i) L'application canonique $E \hat{\otimes}_\varepsilon F \longrightarrow \varprojlim (E_i \hat{\otimes}_\varepsilon F)$ est un monomorphisme strict ;

(ii) si la projection $E \longrightarrow E_i$ est d'image dense pour tout i , on a $E \hat{\otimes}_\varepsilon F = \varprojlim (E_i \hat{\otimes}_\varepsilon F)$.

Démonstration.

(a,i) : si p est une semi-norme sur E_2 et q une semi-norme sur F , on voit en appliquant $E_i \otimes_\varepsilon F$ dans $L(F';E_i)$ que les semi-normes $\varepsilon(u^*p,q)$ et $(u_*)^* \varepsilon(p,q)$ sur $E_1 \otimes F$ coïncident, d'où l'assertion.

(b,i) : soient p une semi-norme sur E_i , p' la semi-norme correspondante sur E , et q une semi-norme sur F . La semi-norme $\varepsilon(p',q)$ sur $E \otimes F$ est induite par la semi-norme sur $\varprojlim (E_i \hat{\otimes}_\varepsilon F)$ provenant de $\varepsilon(p,q)$, d'où l'assertion.

(b,ii): il suffit de montrer que $E \hat{\otimes}_\varepsilon F \longrightarrow \varprojlim (E_i \hat{\otimes}_\varepsilon F)$ est d'image dense ; pour cela il suffit de montrer que $E \hat{\otimes}_\varepsilon F \longrightarrow E_i \hat{\otimes}_\varepsilon F$ est d'image dense pour tout i . Or $E_i \otimes_\varepsilon F$ est engendré par les tenseurs simples, et tout tenseur simple $x \otimes y \in E_i \otimes_\varepsilon F$ peut être approché par $x' \otimes y$ avec x' appartenant à l'image de E .

(a,ii): si F est semi-normé, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E_1 \hat{\otimes}_\varepsilon F \arrow[r, "u_*"] \arrow[d] & E_2 \hat{\otimes}_\varepsilon F \arrow[d] \\ L(F';E_1) \arrow[r, "u_*"] & L(F';\hat{E}_2) \end{tikzcd}$$

montre que $u_* : E_1 \hat{\otimes}_\epsilon F \longrightarrow E_2 \hat{\otimes}_\epsilon F$ est injectif. Le cas général s'en déduit par passage à la limite projective.

THEOREME.- Soient X un compact, F un espace de Banach, $\underline{C}(X;F)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de X dans F. Posons $\underline{C}(X) = \underline{C}(X;\underline{\underline{C}})$.

On a
$$\underline{C}(X;F) = \underline{C}(X) \hat{\otimes}_\epsilon F \ .$$

La démonstration de ce théorème utilise les lemmes suivants :

LEMME 1.- Soient E et F des espaces normés, $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces normés, $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'applications $u_i : E \longrightarrow E_i$ linéaires continues telles que, pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sup_i \|u_i(x)\|$, alors $\forall t \in E \otimes F$, $\|t\|_\epsilon = \sup_i \|(u_i \otimes 1_F)(t)\|_\epsilon$.

En effet, $\|t\|_\epsilon = \|\alpha(t)\|$ où $\alpha(t)$ est l'image de t dans $L(F',E)$. Le lemme en résulte.

LEMME 2.- Toute application linéaire continue de X dans F peut être approchée dans $\underline{C}(X,F)$ par des applications dont l'image est contenue dans un sous-espace de dimension finie de F.

En effet, soit $f : X \longrightarrow F$ une application continue, on peut approcher f localement par des applications constantes, puis on fait une partition finie de l'unité.

Démonstration du théorème.

L'application canonique $\underline{C}(X) \otimes_\epsilon F \longrightarrow \underline{C}(X;F)$ est une isométrie d'après le lemme 1 appliqué aux mesures de Dirac sur X ; elle est d'image dense d'après le lemme 2. Le théorème en résulte en prolongeant au complété.

COROLLAIRE 1.- Soient X et Y des compacts, on a

$$\underline{C}(X \times Y) = \underline{C}(X) \hat{\otimes}_\varepsilon \underline{C}(Y) \quad .$$

COROLLAIRE 2.- Soient X un espace localement compact, F un espace localement convexe. Alors,

$$\underline{C}(X;F) = \underline{C}(X) \hat{\otimes}_\varepsilon F \quad .$$

Ce corollaire se déduit du précédent par passage à la limite projective.

1.4. Produits tensoriels complétés d'espaces de fonctions holomorphes.

Si K est un polydisque fermé, notons $B(K)$ l'espace des fonctions continues sur $\mathring{K}$ et holomorphes sur $\mathring{K}$, et $A(K)$ l'espace des séries entières normalement convergentes sur K, i.e.

$$A(K) = \left\{ f = \Sigma\, a_k z^k \mid \Sigma |a_k| r^k < \infty \right\} \quad .$$

PROPOSITION.- Soient K et L des polydisques fermés dans $\underline{\underline{C}}^n$ et $\underline{\underline{C}}^p$. On a

a) $A(K \times L) = A(K) \hat{\otimes}_\pi A(L)$.

b) $B(K \times L) = B(K) \hat{\otimes}_\varepsilon B(L)$.

Démonstration.

a) On peut supposer K et L de polyrayons 1. Alors $A(K) = \ell^1(\underline{\underline{N}}^n)$ et $A(L) = \ell^1(\underline{\underline{N}}^p)$, d'où $A(K) \hat{\otimes}_\pi A(L) = \ell^1(\underline{\underline{N}}^{n+p}) = A(K \times L)$.

b) lemme : les polynômes sont denses dans $B(K)$.

Démonstration du lemme.

Soit K_t l'homothétique de K dans le rapport $1 + t$. Pour toute fonction $f \in B(K)$, posons $f_t(x) = f(\frac{x}{1+t})$. Quand t tend vers 0 par valeurs > 0, f_t tend vers f uniformément sur K car f est uniformément continue, et pour tout $t > 0$, la série de Taylor de f_t converge uniformément sur K car f_t est holomorphe sur $\overset{\circ}{K}_t$ et K est compact dans $\overset{\circ}{K}_t$.

<u>Démonstration de</u> b).

La norme de $B(K) \hat{\otimes}_\varepsilon B(L)$ et celle de $B(K \times L)$ sont induites par celles de $\underline{C}(K \times L)$, et l'un et l'autre sont la fermeture de l'espace des polynômes.

THEOREME.- <u>Soient</u> U <u>et</u> V <u>des polydisques ouverts. On a</u>

$$\underline{O}(U \times V) = \underline{O}(U) \hat{\otimes}_\pi \underline{O}(V) = \underline{O}(U) \hat{\otimes}_\varepsilon \underline{O}(V) .$$

<u>Démonstration.</u>

Soient (K_n) et (L_p) deux suites strictement croissantes de polydisques fermés tels que, pour tout n, $K_n \subset U$ et, pour tout p, $L_p \subset V$. On a alors, $\underline{O}(U) = \varprojlim B(K_n) = \varprojlim A(K_n)$ et $\underline{O}(V) = \varprojlim B(L_p) = \varprojlim A(L_p)$. Il est clair que l'image de $\underline{O}(U)$ dans $A(K_n)$ est dense pour tout n, l'image de $\underline{O}(U)$ dans $B(K_n)$ est dense pour tout n d'après le lemme précédent. Le théorème se déduit de la proposition précédente par passage à la limite projective.

§ 2. <u>Applications nucléaires.</u>

2.1. <u>Applications nucléaires</u> : <u>définitions.</u>

Soient E et F deux espaces de Banach. L'homomorphisme de Kronecker $E' \otimes F \longrightarrow L(E;F)$ se prolonge en une application linéaire continue $\theta : E' \hat{\otimes}_\pi F \longrightarrow L(E;F)$.

DEFINITION.- Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. On dit que u est nucléaire si $u \in \operatorname{Im}\theta$.

Autrement dit, u est nucléaire s'il existe une famille $(\xi_i)_{i \in I}$ de formes linéaires sur E et une famille $(y_i)_{i \in I}$ d'éléments de F telles que $\Sigma \|\xi_i\| \, \|y_i\| < \infty$ et $(\forall x \in E) \quad u(x) = \Sigma \xi_i(x) y_i$. Soit $u : E \longrightarrow F$ une application nucléaire, on appelle norme nucléaire de u et nous noterons $\|u\|_\nu$ le nombre $\inf(\Sigma \|\xi_i\| \, \|y_i\|)$, la borne inférieure étant prise sur toutes les familles $((\xi_i, y_i))$ telles que $(\forall x \in E)$ $u(x) = \Sigma \xi_i(x) y_i$.

Toute application de rang fini est nucléaire. Toute application nucléaire est compacte. Dans le diagramme $E_1 \xrightarrow{f} E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{g} F_1$ d'espaces de Banach et applications linéaires continues, si u est nucléaire, $g \circ u \circ f$ est nucléaire et on a $\|g \circ u \circ f\|_\nu \leq \|g\| \, \|u\|_\nu \, \|f\|$.

Soient E et F des espaces localement convexes et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. On dit que u est nucléaire s'il existe une famille équicontinue $(\xi_i)_{i \in I}$ de formes linéaires sur E, une famille bornée (y_i) d'éléments de F et une famille λ_i de nombres complexes telles que $\Sigma |\lambda_i| < \infty$, et $(\forall x \in E)$ $u(x) = \Sigma \lambda_i \xi_i(x) y_i$. Si E et F sont des espaces de Banach, on retrouve la définition ci-dessus. Si F est complet, pour que $u : E \longrightarrow F$ soit nucléaire, il faut et il suffit que u se factorise en $E \xrightarrow{f} E_1 \xrightarrow{u_1} F_1 \xrightarrow{g} F$, où E_1 et F_1 sont des espaces de Banach et u_1 est nucléaire. Cette remarque permet de ramener l'étude des applications nucléaires entre espaces localement convexes au cas des espaces de Banach.

Exemples.

1) Si E est un espace vectoriel de dimension finie n, on a $\|1_E\|_\nu = n$.

En effet, on a $\|1_E\|_\nu \geq \mathrm{Tr}\, 1_E = n$; pour démontrer l'inégalité opposée, on peut utiliser le lemme suivant :

LEMME.- Il existe une base (e_i) de E telle que $(\forall i)$ $\|e_i\| \leq 1$ et $\|e'_i\| \leq 1$, où (e'_i) est la base duale.

Pour démontrer ce lemme, on peut prendre une base vérifiant $(\forall i)$ $\|e_i\| \leq 1$ de déterminant maximum.

2) Soit $p \in [1,\infty]$ et (u_n) une suite bornée. L'application $U : (x_n) \longmapsto (u_n x_n)$ est un morphisme de ℓ^p dans lui-même.

a) U est compact si et seulement si $(u_n) \in c_o$;

b) U est nucléaire si et seulement si $(u_n) \in \ell^1$.

Les implications $(u_n) \in c_o \Rightarrow U$ compact et $(u_n) \in \ell^1 \Rightarrow U$ nucléaire sont faciles. Si $(u_n) \notin c_o$, il existe $a > 0$ et une suite extraite (u_{n_k}) telle que $(\forall k)$ $u_{n_k} \geqslant a$; alors $\|U(e_{n_{k+1}}) - U(e_{n_k})\| \geqslant a\sqrt[p]{2}$, et on ne peut pas en extraire une suite de Cauchy, donc U n'est pas compact. Pour voir que U nucléaire $\Rightarrow (u_n) \in \ell^1$, on se ramène en composant avec $V : (x_n) \longmapsto (v_n x_n)$, où $v_n = \frac{|u_n|}{u_n}$, au cas où les u_n sont ≥ 0 . Alors, en notant $i_N : \ell^p[0,N] \longrightarrow \ell^p$ l'injection et p_N la projection, on a $\|U\|_\nu \geq \|U_N\|_\nu$, où $U_N = p_N \circ U \circ i_N$, et $\|U_N\|_\nu \geq \mathrm{Tr}\, U_N = \sum_0^N u_N$, donc les sommes partielles de Σu_n sont bornées par $\|U\|_\nu$, et $(U_n) \in \ell^1$.

3) Soient K et K' des polydisques dans $\underline{\underline{C}}^n$ de polyrayon r et r' , tels que $K' \subset \overset{\circ}{K}$, i.e. $\forall i$ $r'_i < r_i$. La restriction $\rho : B(K) \longrightarrow B(K')$ est nucléaire.

En effet, une fonction $f \in B(K)$ se développe en série $f(z) = \Sigma a_k(f) z^k$, où

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi^n r^k} \int \cdots \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-i\langle k,\theta\rangle} \, d\theta_1 \dots d\theta_n ,$$

cette série convergeant uniformément sur K' on peut donc écrire $\rho(f) = f|_{K'} = \Sigma a_k(f)\, z^k_{|K'}$. On a $|a_k(f)| \leq \frac{1}{r^k}\|f\|$ pour tout f, d'où $\|a_k\| \leqslant \frac{1}{r^k}$, et $\|z^k_{|K'}\| = r'^k$, d'où $\Sigma \|a_k\|\ \|z^k_{|K'}\| = \Sigma \frac{r'^k}{r^k} = \prod_i \frac{1}{1-\frac{r'_i}{r_i}} < \infty$.

4) Avec les notations de 3), la restriction $\rho : \underline{O}(\overset{\circ}{K}) \longrightarrow \underline{O}(\overset{\circ}{K'})$ est nucléaire. En effet, si $K' \subset \overset{\circ}{K}_1 \subset K_1 \subset \overset{\circ}{K}$, cette restriction se factorise en $\underline{O}(\overset{\circ}{K}) \longrightarrow B(K_1) \xrightarrow{\rho_1} B(K') \longrightarrow \underline{O}(\overset{\circ}{K'})$, où ρ_1 est nucléaire.

2.2. Applications nucléaires et monomorphismes.

Soient E et F ees espaces de Banach, $f : E \longrightarrow F$ une application nucléaire et F_1 un sous-espace vectoriel fermé de F. Supposons que $\operatorname{Im} f \subset F_1$. L'application $f_1 : x \longmapsto f(x)$ de E dans F_1 n'est pas nécessairement nucléaire. Il peut aussi arriver que f_1 soit nucléaire, mais que $\|f_1\|_\nu > \|f\|_\nu$.

De même, si N est un sous-espace fermé de E contenu dans $\operatorname{Ker} f$, l'application $f_2 : E/N \longrightarrow F$ déduite de f n'est pas nécessairement nucléaire.

Ces inconvénients ne se produisent pas si F_1 (resp. N) est un facteur direct de F (resp. E), en particulier si F (resp. E) est un espace de Hilbert. En effet, on a alors $f_1 = p \circ f$, où $p : F \longrightarrow F_1$ est une projection (resp. $f_2 = f \circ \sigma$, où σ est une section).

Contre-exemples.

1) Soit E un Banach et $H \subset E$ réfléxif non direct. On a vu que $H' \hat{\otimes}_\pi H \longrightarrow H' \hat{\otimes}_\pi E$ n'est pas strict. Soit f appartenant à la fermeture de l'image mais pas à l'image. Alors f est nucléaire de H dans E mais non de H dans H ; cependant $f(H) \subset H$.

2) Soient $F = \underline{\underline{R}}^3$ muni de la norme $x \longmapsto \sup|x_i|$ et H le plan d'équa-

tion $\Sigma x_i = 0$ (ce plan coupe le cube suivant un hexagone). Alors l'injection canonique $\iota : H \longrightarrow F$ est nucléaire, mais $\|1_H\| = 2$ et $\|\iota\|_\nu = \frac{3}{2}$.

2.3. Applications binucléaires.

DEFINITION.- Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. On dit que f est binucléaire (resp. k-nucléaire) si f est composée de 2 (resp. k) applications nucléaires.

PROPOSITION.- Soient E et F des espaces de Banach et $f : E \longrightarrow F$ une application binucléaire.

a) Si F_1 est un sous-espace fermé de F tel que $\operatorname{Im} f \subset F_1$, l'application $f_1 : x \longmapsto f(x)$ de E dans F_1 est nucléaire.

b) Si N est un sous-espace vectoriel fermé de E contenu dans $\operatorname{Ker} f$, l'application $f_2 : E/N \longrightarrow F$ déduite de f est nucléaire.

LEMME.- Toute application nucléaire se factorise à travers un espace de Hilbert.

Démonstration.

Soit $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \otimes y_i$ avec $\Sigma \|\alpha_i\| \, \|y_i\| < +\infty$. On peut supposer $\|\alpha_i\| = \|y_i\|$ pour tout i . Alors $x \longmapsto (\alpha_i(x))$ est une application continue de E dans $\ell^2(I)$ et $(\lambda_i) \longmapsto \Sigma \lambda_i y_i$ est une application continue de $\ell^2(I)$ dans F .

Démonstration de la proposition.

(a) factorisons f en $E \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} F$, où g et h sont nucléaires, et h en $G \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} F$, où H est un espace de Hilbert. Posons $H_1 = v^{-1}(F_1)$ et soit $v_1 : H_1 \longrightarrow F_1$ l'application induite par v . Soit $p : H \longrightarrow H_1$ la projection orthogonale. On a $f_1 = v_1 \circ p \circ u \circ g$, donc f_1 est nucléaire.

La démonstration de (b) est analogue.

2.4. Supercontinuité.

PROPOSITION.- <u>Soient</u> E_1 , E_2 ,<u>et</u> F <u>des espaces de Banach</u>, $f : E_1 \longrightarrow E_2$ <u>une application nucléaire. Alors</u> $f \otimes 1_F : E_1 \otimes_\varepsilon F \longrightarrow E_2 \otimes_\pi F$ <u>est continue de norme inférieure ou égale à</u> $\|f\|_\nu$.

<u>Démonstration.</u>

Soient $u \in E_1' \hat{\otimes}_\pi E_2$ et $t \in E_1 \otimes F$. Posons $\tilde{u} = \theta(u) \in L(E_1;E_2)$ et $\tilde{t} = \alpha(t) \in L(E_1';F)$. Notons $\sigma : F \hat{\otimes}_\pi E_2 \longrightarrow E_2 \hat{\otimes}_\pi F$ la symétrie.

LEMME.- <u>On a</u> $(\tilde{u} \otimes 1_F)(t) = \sigma(\tilde{t} \otimes 1_E)(u)$.

La démonstration de ce lemme est immédiate et la proposition en découle.

2.5. Produit tensoriel d'applications nucléaires.

PROPOSITION.- <u>Soient</u> E_1 , E_2 , F_1 , F_2 <u>des espaces de Banach</u>, $f : E_1 \longrightarrow E_2$ <u>et</u> $g : F_1 \longrightarrow F_2$ <u>des applications nucléaires. Alors</u> $f \otimes g$ <u>se prolonge en une application nucléaire de</u> $E_1 \hat{\otimes}_\varepsilon F_1$ <u>dans</u> $E_2 \hat{\otimes}_\pi F_2$.

<u>Démonstration.</u>

L'application f est de la forme $\theta(u)$ avec $u \in E_1' \hat{\otimes}_\pi E_2$ et g est de la forme $\theta(v)$ avec $v \in F_1' \hat{\otimes}_\pi F_2$. Alors $u \otimes v \in E_1' \hat{\otimes}_\pi E_2 \hat{\otimes}_\pi F_1' \hat{\otimes}_\pi F_2$. Soit $w_1 = \sigma(u \otimes v) \in E_1' \hat{\otimes}_\pi F_1' \hat{\otimes}_\pi E_2 \hat{\otimes}_\pi F_2$, où σ est la symétrie. Soit $\mu : E_1' \hat{\otimes}_\pi F_1' \longrightarrow (E_1 \hat{\otimes}_\varepsilon F_1)'$ l'application définie par $\mu(\xi,\eta) = \xi \hat{\otimes}_e \eta$, et posons $w = (\mu \otimes 1)(w_1) \in (E_1 \hat{\otimes}_\varepsilon F_1)' \hat{\otimes}_\pi (E_2 \hat{\otimes}_\pi F_2)$. On a $f \otimes g = \theta(w)$, c.q.f.d.

§ 3. Espaces nucléaires.

3.1. Espaces nucléaires - Définitions.

Soit E un espace localement convexe et soit (p_i) une famille filtrante croissante de semi-normes définissant la topologie de E. Pour tout i, notons $\hat{E}_i$ le séparé complété de E pour p_i ; pour $j \geq i$, l'identité de E donne une application, dite canonique, de $\hat{E}_j$ dans $\hat{E}_i$.

DEFINITION.- *On dit que E est nucléaire si, pour tout indice i, il existe un $j \geq i$ tel que l'application canonique $\hat{E}_j \longrightarrow \hat{E}_i$ soit nucléaire.*

PROPOSITION 1.- *Pour que E soit nucléaire, il faut et il suffit que toute application linéaire continue de E dans un espace de Banach soit nucléaire.*

Démonstration.

Supposons E nucléaire, et soit f une application linéaire continue de E dans un espace de Banach F. Il existe un i tel que f soit continue pour p_i, alors f est composée de l'application canonique $E \longrightarrow \hat{E}_i$, qui est nucléaire, et d'une application linéaire continue $\hat{E}_i \longrightarrow F$, donc f est nucléaire. Réciproquement, supposons la condition vérifiée, pour tout i l'application canonique $E \longrightarrow \hat{E}_i$ se factorise en $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{u} \hat{E}_i$ où F est un espace de Banach et u nucléaire, et f se factorise à travers l'un des $\hat{E}_j$, par suite E est nucléaire.

Remarques.

1) La propriété de nucléarité ne dépend que de la topologie de E, et non du choix de la famille de semi-normes.

2) Soient E un espace nucléaire et F un espace localement convexe complet. Pour qu'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ soit nucléaire, il

faut et il suffit qu'elle se factorise à travers un espace de Banach. Elle est alors k-nucléaire pour tout k. Si f est nucléaire et si F_1 est un sous-espace vectoriel fermé de F contenant $\operatorname{Im} f$, l'application $x \longmapsto f(x)$ de E dans F_1 est nucléaire.

PROPOSITION 2.- Soient I un ensemble ordonné filtrant sans plus grand élément et $((E_i),(f_i^j))$ un système projectif d'espaces de Banach tel que $f_i^j : E_j \longrightarrow E_i$ soit nucléaire pour $j > i$. Alors la limite projective $E = \varprojlim E_i$ est un espace nucléaire.

Notons γ_i la semi-norme sur E image réciproque de la norme de E_i. L'espace $\hat{E}_{\gamma_i}$ s'identifie à un sous-espace fermé de E_i. Pour tout $i \in I$, il existe un $j > i$ et un $k > j$; alors $E_k \longrightarrow E_i$ est binucléaire et $\hat{E}_{\gamma_k} \longrightarrow \hat{E}_{\gamma_j}$ est nucléaire.

Exemple.

Soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un polydisque ouvert. Alors $\mathcal{O}(U)$ est un espace de Fréchet nucléaire.

En effet, $\mathcal{O}(U) = \varprojlim B(K_n)$, où (K_n) est une suite de polydisques fermés telle que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ et $\bigcup K_n = U$, et $\rho : B(K_{n+1}) \longrightarrow B(K_n)$ est nucléaire (2.1, Ex. 3).

3.2. Propriétés des espaces nucléaires.

PROPOSITION.- a) Tout sous-espace d'un espace nucléaire est nucléaire.

b) Tout quotient d'un espace nucléaire est nucléaire.

c) Tout produit d'espaces nucléaires est nucléaire.

d) Toute limite projective d'espaces nucléaires est nucléaire.

Démonstration.

(a) et (b) : soient E un espace nucléaire et F un sous-espace de E. Soit (ρ_i) une famille de semi-normes sur E définissant la topologie de E. Pour tout i, notons ρ'_i la semi-norme induite par ρ_i sur F et ρ''_i la semi-norme quotient de ρ_i sur E/F. Les familles (ρ'_i) et (ρ''_i) définissent la topologie de F et E/F respectivement. Les espaces de Banach $\hat{F}_{\rho'_i}$ et $(\widehat{E/F})_{\rho''_i}$ s'identifient à un sous-espace et un espace quotient de $\hat{E}_{\rho_i}$ respectivement. Pour tout i, il existe un j tel que $\hat{E}_{\rho_j} \longrightarrow \hat{E}_{\rho_i}$ soit bi-nucléaire. Alors $\hat{F}_{\rho'_j} \longrightarrow \hat{F}_{\rho'_i}$ et $E/F_{\rho''_j} \longrightarrow E/F_{\rho''_i}$ sont nucléaires, d'après 2.3. prop.

(c) : soient E et F deux espaces nucléaires, (p_i) et (q_j) des familles de semi-normes définissant les topologies de E et F. La topologie de $E \times F$ est définie par la famille (r_{ij}), où $r_{ij}(x) = \sup(p_i(x), q_j(y))$. On a $(E \times F)^\wedge_{ij} = \hat{E}_i \times \hat{F}_j$. Pour tout couple (i,j), il existe (i',j') tel que les applications canoniques $u : \hat{E}_{i'} \longrightarrow \hat{E}_i$ et $v : \hat{E}_{j'} \longrightarrow \hat{F}_j$ soient nucléaires. Alors l'application canonique

$$w = u \times v = \iota_1 \circ u \circ pr_1 + \iota_2 \circ v \circ pr_2 : \hat{E}_{i'} \times \hat{F}_{j'} \longrightarrow \hat{E}_i \times \hat{F}_j$$

est nucléaire et $\|w\|_\nu \leq \|u\|_\nu + \|v\|_\nu$. Par suite $E \times F$ est nucléaire, d'où l'assertion dans le cas d'un produit fini.

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces nucléaires. Toute application linéaire continue de $\prod_{i \in I} E_i$ dans un espace de Banach se factorise à travers un produit fini, donc est nucléaire. Par suite $\prod_{i \in I} E_i$ est nucléaire.

(d) : résulte de (a) et (c).

3.3. Produit tensoriel avec un espace nucléaire.

THEOREME 1.- Soient E et F des espaces localement convexes. Si E ou F est nucléaire, les topologies ε et π sur $E \otimes F$ coïncident.

Démonstration.

L'application identique $E \otimes_{\pi} F \longrightarrow E \otimes_{\varepsilon} F$ est continue en vertu de la propriété universelle 1.2. La continuité dans l'autre sens résulte de 2.4.

Si E ou F est nucléaire, on écrit donc $E \hat{\otimes} F$ sans préciser pour quelle topologie.

COROLLAIRE 1.- Soient $0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_3 \longrightarrow 0$ une suite exacte d'espaces de Fréchet et F un espace de Fréchet. Si F ou E_2 est nucléaire, $0 \longrightarrow E_1 \hat{\otimes} F \longrightarrow E_2 \hat{\otimes} F \longrightarrow E_3 \hat{\otimes} F \longrightarrow 0$ est une suite exacte.

Ce corollaire résulte de l'exactitude à droite du produit $\hat{\otimes}_{\pi}$ et de 1.3., prop. 2, a), (i).

COROLLAIRE 2.- Soient E_1, E_2 et F des espaces de Fréchet et $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application linéaire continue (non nécessairement stricte). Si F est nucléaire, ou si E_1 et E_2 sont nucléaires, le noyau de $f \hat{\otimes} 1_F : E_1 \hat{\otimes} F \longrightarrow E_2 \hat{\otimes} F$ est $(\operatorname{Ker} f) \hat{\otimes} F$.

Ce corollaire résulte du corollaire 1 et de 1.3, prop. a), (ii), en considérant la suite exacte $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow E_1 \longrightarrow E/\operatorname{Ker} f \longrightarrow 0$ et l'injection $E/\operatorname{Ker} f \longrightarrow E_2$.

THEOREME 2.- Soient E et F deux espaces nucléaires. Alors $E \hat{\otimes} F$ est nucléaire.

Démonstration.

Ce théorème résulte de 2.5.

§ 4. Espaces des sections d'un faisceau analytique cohérent.

PROPOSITION 4.- Soient $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur un ouvert Ω de $\underline{\underline{C}}^n$ et U un polydisque ouvert relativement compact dans Ω. Alors l'espace $\underline{F}(U)$ peut être muni de façon naturelle d'une structure d'espace de Fréchet nucléaire.

Démonstration.

Soit V un polydisque ouvert de $\underline{\underline{C}}^n$ contenu dans Ω et tel que U soit relativement compact dans V. D'après le théorème A, il existe un entier r et un morphisme de faisceaux $\varphi : \underline{O}_V^r \longrightarrow \underline{F}_V$ tel que, pour tout $x \in \bar{U}$, $\varphi_x : \underline{O}_x^r \longrightarrow \underline{F}_x$ soit surjectif. On en déduit un morphisme surjectif de faisceaux $\varphi_U : \underline{O}_U^r \longrightarrow \underline{F}_{|U}$, lequel donne d'après le théorème B un morphisme surjectif $\varphi(U) : \underline{O}^r(U) \longrightarrow \underline{F}(U)$ sur les sections globales. L'espace $\underline{O}^r(U)$ est naturellement muni d'une topologie de Fréchet pour laquelle il est nucléaire, et $\underline{F}(U)$ apparait comme un quotient de $\underline{O}^r(U)$. Deux présentations $\mathcal{L}.$ et $\mathcal{L}'.$ de $\underline{F}(U)$ donnent par passage au quotient la même topologie sur $\underline{F}(U)$ car il existe un morphisme de $\mathcal{L}.$ dans $\mathcal{L}'.$ et vice-versa. Muni de la topologie quotient, $\underline{F}(U)$ est un espace nucléaire ; pour que $\underline{F}(U)$ soit un espace de Fréchet, il faut et il suffit qu'il soit séparé.

Montrons que $\underline{F}(U)$ est séparé. Pour tout $x \in U$, l'anneau $\underline{O}_x$ des germes en x des fonctions analytiques sur U est un anneau local ; notons $\underline{M}_x$ son idéal maximal. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \underline{O}^r(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\chi_{\underline{O}}"'] & \underline{F}(U) \arrow[d, "\chi_{\underline{F},x,k}"] \\ (\underline{O}_x/\underline{M}_x^k)^r \arrow[r, "\varphi_{x,k}"] & \underline{F}_x/\underline{M}_x^k\underline{F}_x \end{tikzcd}$$

où $x \in U$, $k \in \underline{\underline{N}}$, et où $\chi_{\underline{O}}$ et $\chi_{\underline{F},x,k}$ sont les applications qui, à une section, associe son jet en x à l'ordre k . Comme $\underline{O}_x/\underline{M}_x^k$ est un espace vectoriel complexe de dimension finie, il en est de même de $(\underline{O}_x/\underline{M}_x^k)^r$ et de $\underline{F}_x/\underline{M}_x^k\underline{F}_x$ qui est un quotient du précédent. Munissons ces deux derniers espaces de l'unique topologie séparée d'espace vectoriel de dimension finie.

LEMME 1.- <u>Pour tout</u> $x \in U$, <u>pour tout</u> $k \in \underline{\underline{N}}$, $\chi_{\underline{F},x,k}$ <u>est continue</u>.

<u>Démonstration</u>.

φ_U est évidemment continue. Pour $f \in \underline{O}(U)$, notons $j_{x,k}(f)$ le jet de f en x à l'ordre $k-1$. On a $j_{x,k}(f) = \sum_0^{k-1} a_n(f)(z-x)^n$ d'après le lemme de Schwarz, et $\|a_n(f)\| \leqslant \frac{\|f\|}{r^n} D_{x,r}$ où $D_{x,r}$ est un disque de centre x et de rayon r tel que $\bar{D}_{x,r} \subset U$. On en déduit que $\chi_{\underline{O}}$ est continue, par suite $\chi_{\underline{F},x,k} \circ \varphi_U = \varphi_{x,k} \circ \chi_{\underline{O}}$ est continue ; le lemme résulte alors de la propriété universelle de la topologie quotient.

LEMME 2.- $\bigcap\limits_{\substack{x \in U \\ k \in \underline{\underline{N}}}} \operatorname{Ker} \chi_{\underline{F},x,k} = 0$.

En effet, $\underline{O}_x$ est un anneau local noethérien, $\underline{F}_x$ est un $\underline{O}_x$-module de type fini ; d'après le théorème de Krull, $\bigcap\limits_{k \in \underline{\underline{N}}} M_x^k\underline{F}_x = 0$. Soit $f \in \underline{F}(U)$ tel que $\chi_{\underline{F},x,k}(f) = 0$ pour tout x et tout k , alors le germe x de f en x appartient à $\bigcap\limits_k M_x^k\underline{F}_x$ donc $f_x = 0$ pour tout x et par suite $f = 0$, ce qui démontre le lemme.

Soit f un élément de $\underline{F}(U)$ adhérent à 0. Alors, pour tout x et pour tout k, $\chi_{\underline{F},x,k}(f) = 0$ d'après le lemme 1 et $f = 0$ d'après le lemme 2. c.q.f.d.

PROPOSITION 2.- Soient X un espace analytique complexe, $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. Alors, l'espace $\underline{F}(X)$ des sections globales est un espace de Fréchet nucléaire.

Pour démontrer cette proposition, nous allons introduire la notion d'ouvert spécial.

DEFINITION.- On dit qu'un ouvert U de X est un ouvert spécial, s'il existe un plongement fermé φ d'un ouvert W de X dans un ouvert Ω de $\underline{C}^n$ et un polydisque P relativement compact dans Ω tel que $U = \varphi^{-1}(P)$.

LEMME(*).- Si U_1 et U_2 sont des ouverts spéciaux de X, alors $U_1 \cap U_2$ est un ouvert spécial de X.

En effet, reprenons les notations de la définition précédente affectées de l'indice 1 ou 2 suivant qu'elles se rapportent à U_1 ou à U_2, et considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
U_1 \cap U_2 \arrow[r, "i"] & W_1 \cap W_2 \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)"'] & W_1 \times W_2 \arrow[d, "\varphi_1 \times \varphi_2"] \\
& P_1 \times P_2 \arrow[r, "\iota"] & \Omega_1 \times \Omega_2
\end{tikzcd}$$

où ι est l'injection canonique, Δ l'application diagonale $x \longmapsto (x,x)$. Comme X est séparé, la diagonale Δ_X est fermée dans $X \times X$ et sa trace

(*) Ce lemme n'est pas indispensable pour démontrer la proposition dans $W_1 \times W_2$ est fermée dans $W_1 \times W_2$. Donc Δ est un plongement fermé. Comme φ_1 et φ_2 sont des plongements fermés, il en est de même de $\varphi_1 \times \varphi_2$ et par suite $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1 \times \varphi_2) \circ \Delta$ est un plongement fermé d'un ouvert $W_1 \cap W_2$ de X dans un ouvert $\Omega_1 \times \Omega_2$ de $\underline{\underline{C}}^{n_1+n_2}$, $P_1 \times P_2$ est un polydisque ouvert relativement compact dans $\Omega_1 \times \Omega_2$ et $\varphi^{-1}(P_1 \times P_2) = U_1 \cap U_2$. Ce qui démontre le lemme.

Démontrons la proposition. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement dénombrable de X par des ouverts spéciaux. Posons $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Le diagramme

$$0 \longrightarrow \underline{F}(X) \xrightarrow{\rho} \prod_i \underline{F}(U_i) \xrightarrow{\sigma} \prod_{i,j} \underline{F}(U_{i,j})$$

où ρ est l'application $s \longmapsto (s_{|U_i})$ et σ l'application $(s_i) \longmapsto (s_{j|U_{ij}} - s_{i|U_{ij}})$ est une suite exacte. Pour U ouvert spécial de X notons $\underline{F}_*$ le faisceau $\varphi_*(\underline{F}_{|U})$ prolongé par 0 à P ; on a $\underline{F}_*(P) = .\,(U)$. Alors, pour tout ouvert spécial U de X , $\underline{F}(U)$ est un espace de Fréchet nucléaire. Ainsi, $\underline{F}(X) = \operatorname{Ker} \sigma$ est le noyau d'un morphisme d'espaces de Fréchet nucléaire, et la proposition est démontrée (3.2, prop.).

4.1. Produit tensoriel externe.

Soient X et Y des espaces analytiques, $\varphi : Y \longrightarrow X$ un morphisme et $\underline{F}$ un faisceau analytique sur X . On définit un faisceau $\varphi^*\underline{F}$ sur Y caractérisé par la condition suivante :

1) $(\varphi^*\underline{F})_y = \underline{O}_{Y,y} \otimes_{\underline{O}_{X,x}} \underline{F}_x$ où $x = \varphi(y)$;

2) si U est un ouvert de X et $f \in \underline{F}(U)$, les $(1 \otimes f_{\varphi(y)})_{y \in \varphi^{-1}(U)}$ forment une section de $\varphi^*\underline{F}$ sur $\varphi^{-1}(U)$.

Si $\underline{F}$ est cohérent, alors $\varphi^*\underline{F}$ est cohérent.

DEFINITION.- Soient X et Y des espaces analytiques, $\underline{F}$ et $\underline{G}$ des faisceaux analytiques sur X et Y respectivement. Notons p_1 et p_2 les deux projections sur X et Y. On appelle produit tensoriel externe de $\underline{F}$ et $\underline{G}$ le faisceau $\underline{H}$ sur $X \times Y$ défini par $\underline{H} = p_1^*\underline{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} p_2^*\underline{G}$.

Si $\underline{F}$ et $\underline{G}$ sont cohérents, leur produit tensoriel externe est cohérent.

THEOREME.- Soient X et Y des espaces analytiques complexes, séparés, à base dénombrable, $\underline{F}$ et $\underline{G}$ des faisceaux analytiques cohérents sur X et Y respectivement. Notons $\underline{H}$ le faisceau sur $X \times Y$ produit tensoriel externe de $\underline{F}$ et $\underline{G}$. Alors,

$$\underline{H}(X \times Y) = \underline{F}(X) \hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}} \underline{G}(Y) .$$

Nous proposons ici une démonstration du théorème en cinq pas.

a) X est un polydisque ouvert de $\underline{\underline{C}}^p$, Y est un polydisque ouvert de $\underline{\underline{C}}^q$, $\underline{F}$ est le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ et $\underline{G} = \underline{\mathcal{O}}_Y$; alors $\underline{H} = \underline{\mathcal{O}}_{X \times Y}$ et le résultat déjà connu (1.4 théorème).

b) X, Y et $\underline{G}$ sont choisis comme dans 1) et $\underline{F}$ est de présentation finie. Alors, $\underline{H} = p_1^*\underline{F}$. Soit

$$(1) \qquad \mathcal{O}_X^r \longrightarrow \mathcal{O}_X^s \longrightarrow \underline{F} \longrightarrow 0$$

une présentation finie de $\underline{F}$; en tensorisant (1) avec $\mathcal{O}_{X \times Y}$ on obtient une suite exacte de faisceaux sur $X \times Y$ qui s'écrit

$$(2) \qquad \mathcal{O}_{X \times Y}^r \longrightarrow \mathcal{O}_{X \times Y}^s \longrightarrow p_1^*\underline{F} \longrightarrow 0 .$$

Comme $X \times Y$ est un polydisque, (2) donne une suite exacte sur les sections globales

$$(3) \qquad \underline{\mathcal{O}}^r(X \times Y) \longrightarrow \underline{\mathcal{O}}^s(X \times Y) \longrightarrow p_1^*\underline{F}(X \times Y) \longrightarrow 0$$

ou encore

$$(3') \qquad \underline{\mathcal{O}}^r(X) \hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}} \underline{\mathcal{O}}(Y) \longrightarrow \underline{\mathcal{O}}^s(X) \hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}} \underline{\mathcal{O}}(Y) \longrightarrow \underline{H}(X \times Y) \longrightarrow 0$$

d'après le cas a).

Comme Y est un polydisque, (1) donne une suite exacte d'espaces de Fréchet nucléaires

(4) $$\underline{O}^r(X) \longrightarrow \underline{O}^s(X) \longrightarrow \underline{F}(X) \longrightarrow 0 \ .$$

En tensorisant (4) avec $\underline{O}(Y)$ on obtient la suite exacte :

(5) $$\underline{O}^r(X) \hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}} \underline{O}(Y) \longrightarrow \underline{O}^s(X) \hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}} \underline{O}(Y) \longrightarrow \underline{F}(X) \hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}} \underline{O}(Y) \longrightarrow 0 \ .$$

En comparant (3') et (5) on trouve le résultat cherché.

c) X et Y sont des polydisques ouverts, $\underline{F}$ et $\underline{G}$ sont de présentation finie. Soit

(1) $$\underline{O}_Y^r \longrightarrow \underline{O}_Y^s \longrightarrow \underline{G} \longrightarrow 0$$

une présentation finie de $\underline{G}$, par changement de base on obtient :

(2) $$O^r_{X \times Y} \longrightarrow O^s_{X \times Y} \longrightarrow p_2^* G \longrightarrow 0$$

d'où, en tensorisant avec $p_1^* \underline{F}$,

(2') $$(p_1^* \underline{F})^r \longrightarrow (p_1^* \underline{F})^s \longrightarrow H \longrightarrow 0 \ .$$

Comme $X \times Y$ est un polydisque, on a une suite exacte :

(3) $$(p_1^* \underline{F})^r \ (X \times Y) \longrightarrow (p_1^* \underline{F})^s \ (X \times Y) \longrightarrow \underline{H}(X \times Y) \longrightarrow 0$$

i.e. d'après le cas b)

(3') $$\underline{F}(X) \hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}} O^r(Y) \longrightarrow \underline{F}(X) \hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}} \underline{O}^s(Y) \longrightarrow \underline{H}(X \times Y) \longrightarrow 0 \ .$$

Comme Y est un polydisque, (1) donne la suite exacte :

(4) $$\underline{O}^r(Y) \longrightarrow \underline{O}^s(Y) \longrightarrow \underline{G}(Y) \longrightarrow 0 \ .$$

En tensorisant (4) avec $\underline{F}(X)$ on obtient une autre suite exacte :

(5) $$\underline{F}(X) \hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}} \underline{O}^r(Y) \longrightarrow F(X) \hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}} O^s(Y) \longrightarrow \underline{H}(X \times Y) \longrightarrow 0$$

d'où le résultat en comparant (3') et (5) .

d) X est un espace analytique à base dénombrable, séparé, Y est un polydisque ouvert, $\underline{F}$ cohérent sur X et $\underline{G}$ de présentation finie sur Y .

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement dénombrable de X par des ouverts spéciaux. Avec les notations de la définition des ouverts spéciaux, notons, pour tout U_i , $\underline{F}_{i*}$ le faisceau $\varphi_{i*}(\underline{F}_{|U_i})$ prolongé par 0 à P_i . On a, pour tout $i \in I$, $\underline{F}(U_i) = \underline{F}_{i*}(P_i)$. Pour $i \in I$ le faisceau F_{i*} est de présentation finie d'après le théorème A, le faisceau G est de présentation finie par hypothèse, on peut alors appliquer les résultats du cas (c) au produit tensoriel externe $\underline{H}_i$ de $\underline{F}_{i*}$ et $\underline{G}$ et on a

$$\underline{F}_{i*}(P_i) \mathbin{\hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}}} \underline{G}(Y) = \underline{H}_i(P_i \times Y) \quad .$$

Mais le faisceau H_i n'est autre que le faisceau H_{i*} sur $P_i \times Y$ image directe de $\underline{H}_{|U_i \times Y}$. On en déduit

$$(1) \qquad \underline{H}(U_i \times Y) = \underline{H}_i(P_i \times Y) = \underline{F}(U_i) \mathbin{\hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}}} \underline{G}(Y) \quad .$$

En prenant le produit tensoriel $\hat{\otimes}_\epsilon$ de la suite exacte

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow \underline{F}(X) \longrightarrow \prod_i \underline{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j} \underline{F}(U_{ij}) \quad \text{avec} \quad \underline{G}(Y) \quad ,$$

on obtient la suite exacte

$$(3) \qquad 0 \longrightarrow \underline{F}(X) \mathbin{\hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}}} \underline{G}(Y) \longrightarrow \prod_i \underline{F}(U_i) \mathbin{\hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}}} G(Y) \longrightarrow \prod_{i,j} \underline{F}(U_{ij}) \mathbin{\hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}}} \underline{G}(Y) \quad .$$

En vertu de l'égalité (1) , la suite exacte (3) s'écrit :

$$(4) \qquad 0 \longrightarrow \underline{F}(X) \mathbin{\hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}}} \underline{G}(Y) \longrightarrow \prod_i \underline{H}(U_i \times Y) \longrightarrow \prod_{i,j} \underline{H}(U_{ij} \times Y)$$

alors, $\underline{H}(X \times Y)$ et $\underline{F}(X) \mathbin{\hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}}} \underline{G}(Y)$ apparaissent comme noyaux d'un même morphisme, ils sont donc égaux.

e) Cas général : soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement dénombrable de Y par des ouverts spéciaux. Il résulte du cas d) que, pour tout $i \in I$, $\underline{H}(X \times U_i) = \underline{F}(X) \mathbin{\hat{\otimes}_{\underline{\underline{C}}}} \underline{G}(U_i)$. D'où le théorème en comparant des suites exactes analogues à (3) et (4) .

c.q.f.d.