CHRISTIAN HOUZEL

Déformation de fibrés principaux (d'après P. Deligne)

Astérisque, tome 16 (1974), p. 255-276

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__16__255_0>

DEFORMATION DE FIBRES PRINCIPAUX

(d'après P. DELIGNE)

par Christian HOUZEL

1. Position du problème.

On considère un espace analytique compact X et un groupe de Lie G (ou même un groupe analytique au-dessus de X). On appelle fibré principal de base X et de groupe G un espace analytique au-dessus de X, soit $\pi : P \longrightarrow X$, muni d'une loi d'opération de G au-dessus de X : $P \times G \longrightarrow P$ (à droite) et tel qu'il existe un recouvrement de X par des ouverts X' au-dessus desquels P est isomorphe à $X \times G$ où G opère sur lui-même par translations à droite. Pour tout morphisme $Y \xrightarrow{f} X$ d'espaces analytiques, le produit fibré $Y \times_X P$ a une structure évidente de fibré principal de base Y ; on le note $f^*(P)$.

Soit S un espace analytique ; on appelle famille de fibrés principaux de base X et de groupe G paramétrée par S un fibré principal $Q \longrightarrow S \times X$ de groupe G. Un morphisme d'une famille Q' paramétrée par S' dans la famille Q paramétrée par S est par définition un couple (f,g) de morphismes d'espaces analytiques, $f : S' \longrightarrow S$ et $g : Q' \longrightarrow Q$, tel que le carré :

$$\begin{array}{ccc} Q' & \xrightarrow{g} & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' \times X & \xrightarrow[f \times 1_X]{} & S \times X \end{array}$$

soit commutatif et identifie Q' au produit fibré $(f \times 1_X)^*(Q) = (S' \times X) \times_{S \times X} Q$ (en tant que fibré principal). La catégorie des familles de fibrés principaux est ainsi définie comme fibrée au-dessus de celle des espaces analytiques.

Une <u>déformation</u> du fibré P est une famille $Q \longrightarrow S \times X$ munie d'un morphisme $(f,g) : P \longrightarrow Q$, où P désigne la famille $P \longrightarrow X \simeq e \times X$ paramétrée par l'espace ponctuel e (avec C comme faisceau structural) ; ainsi $f : e \longrightarrow S$ définit un point s_o de S et g est un isomorphisme de P sur le fibré $Q_{s_o} = Q|_{\{s_o\} \times X}$ (on identifie $\{s_o\} \times X$ à X) ; une déformation est donc paramétrée par un espace analytique ponctué (S,s_o) . La définition des morphismes de déformations est évidente ; on obtient une catégorie fibrée au-dessus de celle des espaces analytiques ponctués. On obtient enfin la catégorie des <u>germes de déformations</u> de P en rendant inversibles les morphismes (f,g) de déformations pour lesquels f est une immersion ouverte ; c'est une catégorie fibrée au-dessus de celle des germes d'espaces analytiques.

On dit qu'un germe de déformation Q est <u>semi-universel</u> (ou versel) si pour tout germe de déformation Q' il existe au moins un morphisme de Q' dans Q . On dit que Q est <u>quasi-universel</u> s'il est semi-universel et si pour tout couple de morphismes (f,g) et (f',g') d'un germe Q' dans Q les morphismes f et f' ont même application linéaire tangente au point-base s'_o du germe d'espace analytique paramétrant Q' . On se propose de démontrer l'existence d'un germe de déformation quasi-universel. Lorsque X est une <u>variété</u> analytique compacte, on peut faire cette démonstration à l'aide des méthodes de Kuranishi, c'est-à-dire en utilisant les formes différentielles sur X et la théorie du potentiel ; on renvoie à un exposé de G. Ruget dans ce séminaire. Nous admettrons ici le résultat établi dans le cas où X est une variété, et nous en déduirons que le problème a encore une solution dans le cas où X a des singularités quelconques, en supposant que le groupe structural G est le <u>groupe linéaire</u> $GL(n,\underline{\underline{C}})$.

2. Déformations de fibrés avec donnée de descente.

D'après la résolution des singularités de Hironaka, on sait qu'il existe une variété analytique X_o et un morphisme $\varepsilon_o : X_o \longrightarrow X$ projectif, surjectif et isomorphique en dehors du lieu singulier de X. Posons $X_1 = X_o \times_X X_o$ et $X_2 = X_o \times_X X_o \times_X X_o$, et désignons par ∂_o, ∂_1 les deux projections de X_1 dans X_o et par d_o, d_1, d_2 les trois projections de X_2 dans X_1 ; on a $\partial_o d_o = \partial_o d_1$, $\partial_1 d_o = \partial_o d_2$ et $\partial_1 d_1 = \partial_1 d_2$; $\varepsilon_o \partial_o = \varepsilon_o \partial_1 = \varepsilon_1$ et $\varepsilon_1 d_o = \varepsilon_1 d_1 = \varepsilon_1 d_2 = \varepsilon_2$. Si P est un fibré principal sur X, on désigne par P_i son image réciproque par ε_i $(i = 0,1,2)$; c'est un fibré principal sur X_i. On a un isomorphisme canonique entre P_1 et chacun des fibrés $\partial_o^* P_o$ et $\partial_1^* P_o$, d'où un isomorphisme $\mu : \partial_o^* P_o \xrightarrow{\sim} \partial_1^* P_o$; les images réciproques de μ par d_o, d_1 et d_2 vérifient une condition de compatibilité qu'on écrira (avec abus) $d_2^* \mu \circ d_o^* \mu = d_1^* \mu$. Si maintenant P_o est un fibré de base X_o, on appelle <u>donnée de descente</u> sur P_o un isomorphisme μ de $\partial_o^* P_o$ sur $\partial_1^* P_o$ tel que $d_2^* \mu \circ d_o^* \mu = d_1^* \mu$; on dit qu'un morphisme $h : P_o \longrightarrow P'_o$ de fibrés avec données de descentes μ et μ' est compatible avec les données de descente si $\mu' \circ \partial_o^* h = \partial_1^* h \circ \mu$. Il est clair que si P_o et P'_o sont les images inverses de fibrés P et P' sur X, avec les données de descente canoniques introduites plus haut, pour tout morphisme $g : P \longrightarrow P'$ le morphisme $\varepsilon_o^* g$ de P_o dans P'_o est compatible avec les données de descente ; dans ce cas, on voit que l'ensemble $\mathrm{Hom}_{desc}(P_o, P'_o)$ des morphismes compatibles avec les données de descente n'est autre que le noyau du couple de flèches défini par $(\partial_o^*, \partial_1^*) : \mathrm{Hom}(P_o, P'_o) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(P_1, P'_1)$.

On définit de la même manière une donnée de descente sur une famille $Q_o \longrightarrow S \times X_o$ de fibrés ; c'est un isomorphisme $\mu : (1_S \times \partial_o)^* Q_o \xrightarrow{\sim} (1_S \times \partial_1)^* Q_o$ satisfaisant à une condition de transitivité (que nous n'écrirons pas) sur

$S \times X_2$. Une <u>déformation avec donnée de descente</u> d'un fibré P_o avec donnée de descente est une famille Q_o avec donnée de descente munie d'un morphisme $P_o \longrightarrow Q_o$ compatible avec les données de descente. Enfin la notion de germe de déformation avec donnée de descente est claire.

Si $Q \longrightarrow S \times X$ est un germe de déformation du fibré P de base X , son image inverse $(1_S \times \varepsilon_o)^*Q = Q_o$ est munie d'une donnée de descente canonique ; c'est un germe de déformation avec donnée de descente du fibré avec donnée de descente $P_o = \varepsilon_o^* P$. La construction est fonctorielle, c'est-à-dire que l'image réciproque par ε_o d'un morphisme de germes de déformations de P est compatible avec les données de descente ; on obtient ainsi un foncteur ε_o^* de la catégorie $\mathrm{Def}(P)$ des germes de déformation de P dans celle $\mathrm{Def}_{desc}(P_o)$ des germes de déformations avec donnée de descente de P_o .

PROPOSITION 1.- <u>Considérons un fibré principal</u> P <u>de base</u> X , <u>une résolution des singularités</u> $\varepsilon_o : X_o \longrightarrow X$ <u>de</u> X <u>et le fibré avec donnée de descente</u> $P_o = \varepsilon_o^* P$ <u>sur</u> X_o . Si X <u>est normal</u>, <u>le foncteur</u> $\varepsilon_o^* : \mathrm{Def}(P) \longrightarrow \mathrm{Def}_{desc}(P_o)$ <u>est pleinement fidèle</u>.

Cela signifie que si Q et Q' sont des germes de déformations de P paramétrés par un même germe (S,s_o) d'espace analytique, on a un diagramme <u>exact</u> $\mathrm{Hom}(Q,Q') \longrightarrow \mathrm{Hom}(Q_o,Q'_o) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(Q_1,Q'_1)$. Or ces ensembles de morphismes s'interprètent comme ensembles de germes de $(S \times X)$-morphismes à valeurs dans le fibré <u>Hom</u>(Q,Q'), le long de $\{s_o\} \times X$, $\{s_o\} \times X_o$ et $\{s_o\} \times X_1$ respectivement. On se ramène ainsi au lemme suivant :

LEMME.- <u>Soit</u> $\varepsilon_o : X_o \longrightarrow X$ <u>un morphisme propre et surjectif d'espaces analytiques, avec</u> X <u>normal et</u> X_o <u>réduit</u> ; <u>soient</u> X'_1 <u>le réduit associé au pro-</u>

<u>duit fibré</u> $X_o \times_X X_o$, et $\varepsilon_1 : X_1' \longrightarrow X$ <u>le morphisme canonique</u>. <u>On a une suite exacte de faisceaux sur</u> X : $\mathcal{O}_X \longrightarrow \varepsilon_{o*}(\mathcal{O}_{X_o}) \rightrightarrows \varepsilon_{1*}(\mathcal{O}_{X_1'})$ (<u>où la double flèche provient de deux projections de</u> X_1' <u>dans</u> X_o).

Ce lemme exprime simplement que X est quotient de X_o dans la catégorie des espaces analytiques.

Montrons maintenant qu'un fibré avec donnée de descente P_o sur une variété analytique compacte X_o admet un germe de déformation avec donnée de descente quasi-universel. Soit d'abord $Q \longrightarrow S \times X_o$ un germe de déformation quasi-universel de P_o (sans donnée de descente) ; si $R \longrightarrow T \times X_o$ est un germe de déformation avec donnée de descente, il existe donc un morphisme de germes $\varphi : T \longrightarrow S$ (dont l'application linéaire tangente est bien déterminée) tel que $R \simeq (\varphi \times 1_{X_o})^*Q = Q_T$. La donnée de descente de R s'identifie à un isomorphisme de fibrés sur $T \times X_1$:

$$(1_T \times \partial_o)^*Q_T = (\varphi \times \partial_o)^*Q \xrightarrow{\sim} (\varphi \times \partial_1)^*Q = (1_T \times \partial_1)^*Q_T$$

c'est-à-dire un $(S \times X_1)$-morphisme de $T \times X_1$ dans le fibré de morphismes $H = \underline{\mathrm{Hom}}((1_S \times \partial_o)^*Q , (1_S \times \partial_1)^*Q)$ (de base $S \times X_1$) . D'après le théorème de Douady relatif (cf. [ ]), il existe un espace analytique S' au-dessus de S et un $(S \times X_1)$-morphisme α de $S' \times X_1$ dans H tels que pour tout espace analytique T au-dessus de S l'application : $\varphi' \longmapsto \alpha \circ (\varphi' \times 1_{X_1})$ de $\mathrm{Hom}_S(T,S')$ dans $\mathrm{Hom}_{S \times X_1}(T \times X_1, H)$ soit bijective. En appliquant cela à $T = \{s_o\}$ et au morphisme de $\{s_o\} \times X_1$ correspondant à la donnée de descente de $P_o \simeq Q_{s_o}$, on définit un point-base s_o' de S' au-dessus de s_o . On voit alors que la donnée de descente de R est équivalente à une factorisation de φ à travers le morphisme de germes $(S',s_o') \longrightarrow (S,s_o)$; de plus α définit un isomorphisme

$\mu' : (1_{S'} \times \partial_0)^*Q' \xrightarrow{\sim} (1_{S'} \times \partial_1)^*Q'$ où Q' est l'image réciproque de Q sur $S' \times X_0$, et la donnée de descente de R provient de μ' par le changement de base $\varphi' : T \longrightarrow S'$.

Le problème n'est pas encore résolu, car μ' n'est pas une donnée de descente sur Q', la condition de transitivité $d_2(\mu') \circ d_0(\mu') = d_1(\mu')$ n'étant pas vérifiée. Les deux membres de cette condition sont des morphismes entre des fibrés M et N sur $S' \times X_2$, c'est-à-dire des sections du fibré de morphismes $K = \underline{\mathrm{Hom}}(M,N)$, et il existe un espace analytique U au-dessus de S' et un $(S' \times X_2)$-morphisme β de $U \times X_2$ dans K tels que pour tout espace analytique T au-dessus de S' l'application : $\psi \longmapsto \beta \circ (\varphi \times 1_{X_2})$ de $\mathrm{Hom}_{S'}(T,U)$ dans $\mathrm{Hom}_{S' \times X_2}(T \times X_2, K)$ soit bijective. Les deux membres de la condition de transitivité définissent alors deux sections σ_0 et σ_1 de U sur S' et le morphisme $\varphi' : T \longrightarrow S'$ correspondant au germe de déformation avec donnée de descente $R \longrightarrow T \times X_0$ vérifie $\sigma_0 \circ \varphi' = \sigma_1 \circ \varphi'$, donc se factorise à travers $S'' = \mathrm{Ker}(\sigma_0, \sigma_1)$ qui est un sous-germe de S'. Il est clair que μ' induit sur $Q'' = Q'_{S''}$ une donnée de descente μ'' et que le germe de déformation avec donnée de descente (Q'', μ'') ainsi obtenu possède la propriété quasi-universelle requise. On a établi le résultat suivant :

PROPOSITION 2.- Soient X_0 une variété analytique compacte et P_0 un fibré principal avec donnée de descente, de base X_0. Il existe un germe quasi-universel dans la catégorie $\mathrm{Def}_{desc}(P_0)$ des germes de déformations de P_0 avec donnée de descente.

3. Déformations d'un fibré vectoriel sur un espace normal.

La proposition 2 ne donne pas un germe quasi-universel pour les déformations du fibré P de base X , car le germe avec donnée de descente Q" n'est pas en général isomorphe à un objet de l'image du foncteur ε_o^* de la proposition 1 ; autrement dit la donnée de descente μ'' n'est pas effective. On va voir comment on peut procéder, en supposant X normal, lorsque le groupe structural G est le groupe linéaire $GL(n,\underline{\underline{C}})$. A tout fibré principal est alors associé un fibré vectoriel, et un faisceau localement libre des sections de ce fibré vectoriel.

LEMME.- Soit $R \longrightarrow T \times X_o$ un germe de déformationsde P_o avec donnée de descente ν . Désignons par $\mathcal{W}_o$ le faisceau des sections du fibré vectoriel associé à R et par $\mathcal{W}_1$ son image réciproque par $1_T \times \partial_o$, isomorphe par ν à $(1_T \times \partial_1)^* \mathcal{W}_o$. Pour que ν soit effective il faut et il suffit que le noyau de la double flèche $(1_T \times \varepsilon_o)_* \mathcal{W}_o \rightrightarrows (1_T \times \varepsilon_1)_* \mathcal{W}_1$ (image par $1_T \times \varepsilon_o$ du morphisme canonique $\mathcal{W}_o \longrightarrow (1_T \times \partial_o)_* (1_T \times \partial_o)^* \mathcal{W}_o$ et son composé avec $(1_T \times \varepsilon_1)_* \nu)$ soit un faisceau localement libre sur $T \times X$, c'est-à-dire plat sur T .

Si la donnée de descente est effective, R provient d'un germe de déformation de P paramétré par T et le faisceau des sections du fibré vectoriel associé à ce germe de déformation est visiblement isomorphe au noyau de l'énoncé (cf. le lemme n°2) ; or il est localement libre. Inversement, si le noyau $\mathcal{W}$ est localement libre il définit un (germe de) fibré vectoriel W sur $T \times X$ auquel correspond un germe de déformation Q de P ; pour voir que Q donne R par ε_o^* il suffit de montrer que $(1_T \times \varepsilon_o)^* \mathcal{W} \longrightarrow (1_T \times \varepsilon_o)^* (1_T \times \varepsilon_o)_* \mathcal{W}_o \rightarrow \mathcal{W}_o$ est un isomorphisme, ce qui est facile.

Considérons maintenant un germe de déformation $R \longrightarrow T \times X$ du fibré P , paramétré par T. Soit $R_o = \varepsilon_o^*(R)$ le germe de déformation avec donnée de descente de P_o qui lui correspond ; il existe un morphisme $\varphi'' : T \longrightarrow S''$ tel que $R_o \simeq (\varphi'' \times 1_{X_o})^* Q''$, où $Q'' \longrightarrow S'' \times X_o$ est le germe de déformation avec donnée de descente quasi-universel de la proposition 2. Soient $\mathcal{V}_o$ le faisceau des sections du fibré vectoriel associé à Q'', $\mathcal{V}_1 = (1_{S''} \times \partial_o)^* \mathcal{V}_o$ et $\mathcal{V} = \mathrm{Ker}((1_{S''} \times \varepsilon_o)_* \mathcal{V}_o \rightrightarrows (1_{S''} \times \varepsilon_1)_* \mathcal{V}_1)$ comme dans le lemme. Comme ε_o et ε_1 sont propres et $\mathcal{V}_o$ et $\mathcal{V}_1$ cohérents, on voit grâce au théorème de finitude de Grauert que $\mathcal{V}$ est un faisceau cohérent sur $S'' \times X$; il résulte alors d'un théorème de J. Frisch qu'il existe un espace analytique S''' au-dessus de S'' tel que $\mathcal{V}_{S'''}$ soit plat sur S''' et que pour tout espace analytique $T \xrightarrow{\varphi''} S''$ au-dessus de S'' sur lequel $\mathcal{V}_T$ est plat, φ'' se factorise d'une manière unique à travers $S''' \longrightarrow S''$; de plus $S''' \longrightarrow S''$ est bijective. Ainsi la donnée de descente du fibré $Q_o''' = Q''_{S'''}$ est effective d'après le lemme, de sorte que Q_o''' provient d'un germe de déformation $Q''' \longrightarrow S''' \times X$ de P ; enfin on voit que ce germe de déformation est quasi-universel par les remarques précédentes. On a donc établi le résultat suivant :

PROPOSITION 3.- <u>Soient</u> X <u>un espace analytique normal compact et</u> P <u>un fibré principal de groupe</u> $GL(n,\underline{\underline{C}})$ <u>et de base</u> X. <u>Il existe un germe quasi-universel dans la catégorie</u> $\mathrm{Def}(P)$ <u>des germes de déformation de</u> P.

4. <u>Cas d'un espace de base</u> X <u>réduit</u>.

On sait qu'il existe alors un espace normal X' et un morphisme fini $\varepsilon : X' \longrightarrow X$ qui est surjectif et isomorphique en dehors d'un fermé rare de X. L'image réciproque P' sur X' du fibré principal $P \longrightarrow X$ (de groupe $GL(n,\underline{\underline{C}})$) admet un germe de déformation quasi-universel $Q \longrightarrow S \times X'$ d'après la proposition 3. Soit $\mathcal{V}'$ le faisceau des sections du fibré vectoriel associé à Q. Si $R \longrightarrow T \times X$ est un germe de déformation de P, $R' = (1_T \times \varepsilon)^*R$ est un germe de déformation de P', donc il existe un morphisme $\varphi : T \longrightarrow S$ tel que $R' \simeq (\varphi \times 1_{X'})^*Q$. Désignons par $\mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{W}'$) le faisceau des sections du fibré vectoriel associé à R (resp. R') ; $\mathcal{W}$ est un sous-faisceau cohérent de $(1_T \times \varepsilon)_* \mathcal{W}' \simeq (1_T \times \varepsilon)_*(\varphi \times 1_{X'})^* \mathcal{V}' \simeq (\varphi \times 1_X)^*(1_S \times \varepsilon)_* \mathcal{V}'$ (ε est fini), et on a $\mathcal{W} \otimes_{\mathcal{O}_{T \times X}} (1_T \times \varepsilon)_*(\mathcal{O}_{T \times X'}) \xrightarrow{\sim} (1_T \times \varepsilon)_* \mathcal{W}'$; le quotient $(1_T \times \varepsilon)_* \mathcal{W}'/\mathcal{W}$ a donc son support propre sur T. D'après le théorème de Douady relatif, il existe un espace analytique S' au-dessus de S muni d'un sous-faisceau cohérent $\mathcal{V}$ de $(1_S \times \varepsilon)_*(\mathcal{V}')_{S'}$, tel que $(1_S \times \varepsilon)_*(\mathcal{V}')_{S'}/\mathcal{V}$ ait un support propre sur S' et que $(S', \mathcal{V})$ soit universel pour ces propriétés. Ainsi il existe une unique factorisation de φ à travers $S' \longrightarrow S$ telle que $\mathcal{W} \simeq (\varphi' \times 1_X)^* \mathcal{V}$ où $\varphi' : T \longrightarrow S'$ est le morphisme factorisant φ. En appliquant ce qui précède à $T = e$ espace ponctuel, on obtient un point base s'_o dans S' au-dessus de s_o.

Le morphisme canonique $\mathcal{V} \otimes_{\mathcal{O}_{S' \times X}} (1_{S'} \times \varepsilon)_*(\mathcal{O}_{S' \times X'}) \longrightarrow (1_S \times \varepsilon)_*(\mathcal{V}')_{S'}$ n'est pas un isomorphisme, mais il existe un plus grand sous-espace analytique ouvert S'' de S' sur lequel ce morphisme devient un isomorphisme ; il est clair que φ' se factorise à travers S''. Enfin le faisceau $\mathcal{V}$ est cohérent, mais non localement libre, tandis que $\mathcal{W}$ est localement libre. On applique une nouvelle fois le théorème de Frisch pour trouver un espace analytique S''' au-dessus de S'' tel que $\mathcal{V}_{S'''}$ soit localement libre (c'est-à-dire plat sur S''') et qui soit universel pour cette propriété, de sorte que φ' se factorise d'une manière unique à travers $S''' \longrightarrow S'$. Le faisceau localement libre $\mathcal{V}_{S'''}$ définit un fibré vectoriel sur $S''' \times X$, d'où un fibré principal de groupe

$GL(n,\underline{\underline{C}})$ et de base $S''' \times X$; le germe de ce fibré est un germe de déformation quasi-universel dans $\mathrm{Def}(P)$.

PROPOSITION 4.- <u>Soient</u> X <u>un espace analytique réduit compact et</u> P <u>un fibré principal de groupe</u> $GL(n,\underline{\underline{C}})$ <u>et de base</u> X . <u>Il existe un germe quasi-universel dans la catégorie</u> $\mathrm{Def}(P)$ <u>des germes de déformation de</u> P .

5. <u>Cas général</u>.

On prend maintenant un espace de base X compact avec des singularités arbitraires. Le nilradical de $\mathcal{O}_X$ est nilpotent, donc il existe une suite décroissante de sous-espaces fermés : $X \supset X_1 \supset \dots \supset X_r$ tels que X_r soit réduit et que X_{k+1} soit défini par un idéal de carré nul dans X_k , pour $0 \leq k \leq r-1$ On va montrer l'existence d'un germe de déformation quasi-universel pour tout fibré principal P de base X (et de groupe $GL(n,\underline{\underline{C}})$) par récurrence sur l'exposant de nilpotence r .

Pour $r = 1$, le résultat est établi dans la proposition 4. Supposons $r \geq 2$ et le résultat établi pour les espaces dont l'exposant de nilpotence est $r-1$. Il existe un Idéal cohérent de carré nul $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ tel que le sous-espace analytique fermé X_1 qu'il définit ait $r-1$ comme exposant de nilpotence ; le fibré $P_1 = P_{X_1}$ admet un germe de déformation quasi-universel $Q_1 \longrightarrow S_1 \times X_1$, en vertu de l'hypothèse de récurrence. Si $R \longrightarrow T \times X$ est un germe de déformation de P , son image réciproque R_1 sur $T \times X_1$ est un germe de déformation de P_1 et il existe un morphisme $\varphi_1 : T \longrightarrow S_1$ tel que $R_1 \simeq (\varphi_1 \times 1_{X_1})^* Q_1$.

LEMME.- <u>Soient</u> Y <u>un espace analytique</u>, Y_1 <u>un sous-espace analytique fermé</u>

défini par un Idéal $\mathcal{J}$ de carré nul et Q_1 un fibré principal de base Y_1 et de groupe G (groupe de Lie quelconque). Il existe une obstruction associée à Q_1 dans $H^2(Y_1, \mathcal{J} \otimes {}^{Q_1}\mathfrak{g})$ dont la nullité est équivalente à l'existence d'un prolongement de Q_1 en un fibré principal Q sur Y ; si cette obstruction est nulle, l'ensemble des prolongements Q de Q_1 sur Y est principal homogène sous le groupe $H^1(Y_1, \mathcal{J} \otimes {}^{Q_1}\mathfrak{g})$ (on a désigné par ${}^{Q_1}\mathfrak{g}$) le fibré associé à Q_1 de fibre l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G où G opère par la représentation adjointe, et aussi le faisceau des sections holomorphes de ce fibré).

Ce lemme provient, par des arguments classiques de cohomologie non abélienne de la suite exacte de faisceaux de groupes sur l'espace topologique sous-jacent à Y et Y_1 : $0 \longrightarrow \mathcal{J} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \underline{G} \longrightarrow \underline{G}_1 \longrightarrow 1$, où $\underline{G}$ (resp. $\underline{G}_1$) est le faisceau des morphismes d'ouverts de Y (resp. Y_1) dans G .

Appliquons le lemme à $Y = S_1 \times X$ et $Y_1 = S_1 \times X_1$. On peut supposer que S_1 est un espace de Stein, de sorte que

$$H^i(S_1 \times X_1, \mathcal{J} \otimes {}^{Q_1}\mathfrak{g}) = H^0(S_1, R^i pr_{1*}(\mathcal{J} \otimes {}^{Q_1}\mathfrak{g})) \quad \text{pour tout } i .$$

La projection $pr_1 : S_1 \times X_1 \longrightarrow S_1$ est propre et le faisceau $\mathcal{J} \otimes {}^{Q_1}\mathfrak{g}$ est plat sur S_1 ; le théorème de finitude de Grauert et le théorème de changement de base montrent alors qu'il existe un complexe $\mathcal{K}^{\bullet}$ de $\mathcal{O}_{S_1}$-Modules localement libres de type fini tel que $R^i pr_{1*}((\mathcal{J} \otimes {}^{Q_1}\mathfrak{g})_T) \simeq \mathcal{H}^i((\mathcal{K}^{\cdot})_T)$ pour tout i et tout espace analytique T au-dessus de S_1 . L'obstruction associée à Q_1 est une section de $R^2 pr_{1*}(\mathcal{J} \otimes {}^{Q_1}\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{H}^2(\mathcal{K}^{\cdot})$ et se relève, quitte à rétrécir S_1 , en une section de $\mathcal{K}^2$, c'est-à-dire une section σ du fibré vectoriel K^2 sur S_1 correspondant à $\mathcal{K}^2$. Soit $S = S_1 \times_{K^2} K^1$ où S_1 est considéré comme un espace au-dessus de K^2 au moyen de σ et où K^1 est le fibré vectoriel sur S_1 dont $\mathcal{K}^1$ est le faisceau des sections, considéré comme espace au-dessus de K^2 au moyen de l'opérateur cobord d . L'obstruction associée au fibré $(Q_1)_S$ est représentée par la section : $(s,k) \longrightarrow (\sigma s,k) = d(k,k)$ du fibré vectoriel $K^2_S \simeq K^1_{\sigma(S_1)}$, ce qui montre que $(Q_1)_S$ se prolonge en un fibré sur $S \times X$; d'ailleurs la section $(s,k) \longrightarrow (k,k)$ du fibré vectoriel K^1_S définit un tel prolongement $Q \longrightarrow S \times X$.

Revenant au germe de déformation $R \longrightarrow T \times X$ de P , et au morphisme $\varphi_1 : T \longrightarrow S_1$ qu'on lui a associé, on voit que le prolongement R de $R_1 \to T \times X_1$ peut s'obtenir comme image réciproque de Q par un morphisme $\varphi : T \longrightarrow S$ qui factorise φ_1 . Autrement dit, Q est un germe de déformation semi-universel pour P ; le choix de φ n'est pas unique, car deux sections de K^1 qui diffèrent par un cobord de section de K^0 définissent le même prolongement, de sorte que la connaissance de R ne détermine pas un S_1-morphisme de T dans K^1 d'une manière unique. Cependant si on prend soin de choisir le complexe $\mathcal{K}^\cdot$ minimal on peut vérifier que l'application linéaire tangente à φ reste déterminée d'une manière unique, de sorte que Q est quasi-universel.

THEOREME.- Soient X un espace analytique compact et P un fibré principal de groupe $GL(n,\underline{\underline{C}})$ et de base X . Il existe un germe quasi-universel dans la catégorie $Def(P)$ des germes de déformation de P .

APPENDICE

Nous allons indiquer comment on peut aborder le problème des déformations d'un fibré principal sur un espace analytique compact X avec singularités en s'inspirant de la méthode de Kuranishi (cf. exposé de Ruget), mais en utilisant la cohomologie de Čech au lieu de la d"-cohomologie des formes différentielles. Malheureusement la cohomologie de Čech ne donne pas un complexe d'espaces de Banach, mais d'espaces de Fréchet, et on ne dispose plus du théorème des fonctions implicites, qui est l'ingrédient essentiel de la méthode de Kuranishi. On peut essayer de remédier à cet inconvénient en travaillant avec des compacts privilégiés au sens de Douady (cf. [ ]) et des espaces de Banach de sections de faisceaux ; mais le complexe d'espaces de Banach ainsi obtenu est assez loin de donner la cohomologie. Cependant il peut servir à démontrer le théorème de rigidité suivant :

THEOREME.- <u>Soit</u> P <u>un fibré principal de base</u> X <u>espace analytique compact et de groupe</u> G <u>groupe de Lie quelconque</u>. <u>Si</u> $H^1(X, {}^P\mathfrak{g}) = 0$ <u>tout germe de déformation de</u> P <u>est trivial</u> (<u>on note</u> ${}^P\mathfrak{g}$ <u>le fibré associé à</u> P <u>de fibre l'algèbre de Lie</u> $\mathfrak{g}$ <u>de</u> G <u>où</u> G <u>opère par la représentation adjointe, ainsi que le faisceau des sections holomorphes de ce fibré</u>).

Commençons par remarquer qu'on a une équivalence de catégories : $P' \longmapsto P' \times_X^G P^* = (P' \times_X P)/G$ entre la catégorie des fibrés de groupe G et celle des fibrés de groupe $\underline{\mathrm{Aut}}(P) \simeq {}^PG$ fibré en groupe des automorphismes de P , ou encore fibré associé à P de fibre G opérant sur lui-même par automorphismes intérieurs. Dans cette équivalence, au fibré P correspond le ${}^PG$-fibré "trivial" ${}^PG$ (opérant sur lui-même par translations à droite). De même, si (S,s_o) est un germe d'espace analytique, $Q \longmapsto Q \times_X^G P^*$ est une équivalence de la catégorie des germes de déformations du G-fibré P paramétrés par (S,s_o) sur celle des germes de déformations du ${}^PG$-fibré ${}^PG$ paramétrés par (S,s_o). On en déduit immédiatement que l'ensemble des classes à isomorphisme près de déformations de P paramétrées par l'espace V réduit à un point avec l'algèbre des nombres duaux $\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{C}}\varepsilon$ $(\varepsilon^2 = 0)$ comme faisceau structural s'identifie à $H^1(X, {}^P\mathfrak{g})$.

A 1.- Représentation des déformations par des cocycles de Čech.

PROPOSITION 1.- Soient X un espace analytique, G un groupe analytique localement trivial au-dessus de X, (T,t_o) un espace analytique (éventuellement banachique) pointé, $Q \longrightarrow T \times X$ un fibré G-principal et $K \subset X$ un compact de Stein. Si Q est topologiquement trivial au voisinage de $T \times K \subset T \times X$ alors il est analytiquement trivial au voisinage de $\{t_o\} \times K$ dans $T \times X$.

Démonstration.

On montre que pour toute section continue $\underline{s}_o$ de Q au voisinage de $T \times K$ il existe une homotopie $(\underline{s}_u)_{o \leq u \leq 1}$, avec $\underline{s}_u$ section continue au voisinage de $\{t_o\} \times K$, telle que $\underline{s}_1$ soit sous-jacente à une section analytique s_1 de Q. Pour cela on considère le faisceau $\mathcal{H}$ sur $T \times X$ dont les sections dans un ouvert $U \subset T \times X$ sont les couples $(\underline{s}, s_1)$ où $\underline{s}$ est une $(T \times X)$- application continue de $U \times [0,1]$ dans Q et s_1 un $(T \times X)$-morphisme analytique de U dans Q dont l'application continue sous-jacente est $\underline{s}_1 = \underline{s}|_{U \times \{1\}}$; c'est un faisceau principal homogène sous le faisceau de groupes $\mathcal{L}$ dont les sections dans un ouvert U sont les couples $(\underline{g}, g_1)$ où $\underline{g}$ est une X-application continue de $U \times [0,1]$ dans G et g_1 un X-morphisme de U dans G dont l'application continue sous-jacente est $\underline{g}_1$.

Par suite le faisceau $\mathcal{H}$ définit une classe dans $H^1(T \times X, \mathcal{L})$. Soit $\mathcal{L}_o$ le noyau de l'homomorphisme de $\mathcal{L}$ dans le faisceau des sections locales continues de $T \times G$ sur $T \times X$ qui transforme la section $(\underline{g}, g_1)$ de $\mathcal{L}$ en $\underline{g}_o = \underline{g}_{|U \times \{0\}}$; la suite exacte

$$H^1(T \times K, \mathcal{L}_o) \longrightarrow H^1(T \times K, \mathcal{L}) \longrightarrow H^1(T \times K, \mathcal{L}/\mathcal{L}_o)$$

montre que, si Q est topologiquement trivial au voisinage de $T \times K$, la classe de $\mathcal{H}$ dans $H^1(T \times K, \mathcal{L})$ provient d'une classe dans $H^1(T \times K, \mathcal{L}_o)$; cette dernière peut s'interpréter comme la classe d'un faisceau principal homogène $\mathcal{H}_o$ sous $\mathcal{L}_o$, sous-faisceau de $\mathcal{H}$ dont les sections sont les couples $(\underline{s}, s_1)$ avec $\underline{s}_o$ donné = restriction d'une section continue fixée de Q au voisinage de $T \times K$.

Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver qu'il existe un voisinage T' de t_o dans T tel que la restriction dans $H^1(T' \times K, \mathcal{L}_o)$ de la classe de $\mathcal{H}_o$ soit nulle. On démontre que

$$\varinjlim_{T'} H^1(T' \times K, \mathcal{L}_o) = H^1(\{t_o\} \times K, \mathcal{L}_o) = 0 \quad .$$

Ceci se fait par récurrence sur la dimension (réelle) de K de la même façon que pour établir le théorème de Grauert sur les fibrés principaux (cas où T est ponctuel ; cf. [ ]) ; dans la récurrence, on doit faire intervenir des faisceaux de groupes un peu plus compliqués que $\mathcal{L}_o$, où l'intervalle $I = [0,1]$ est remplacé par un cube I^n . On considère un espace topologique compact C (par exemple I^n), un fermé H de C et un fermé N de H qui est un rétracté par déformation de C ; on désigne par $\mathcal{M}$ le faisceau de groupes sur $T \times X$ dont les sections dans un ouvert U sont les couples $(\underline{g}, g_1)$ où $\underline{g}$ est une X-application continue de $U \times C$ dans G dont la restriction à $U \times N$ est neutre et g_1 est un "X-morphisme" de $U \times H$ dans G dont l'application continue sous-jacente est la restriction de $\underline{g}$ à $U \times H$. Comme dans le cas classique on établit que $H^1(\{t_o\} \times K, \mathcal{M}) = 0$ en s'appuyant sur le lemme suivant :

LEMME.- a) $H^o(\{t_o\} \times K, \mathcal{M})$ <u>est connexe</u>.

b) $H^o(\{t_o\} \times K, \mathcal{M}) \longrightarrow H^o(\{t_o\} \times K', \mathcal{M})$ <u>a une image dense si</u> K' <u>est un compact de Stein contenu dans l'intérieur de</u> K.

c) $H^o(\{t_o\} \times K', \mathcal{M}) \times H^o(\{t_o\} \times K'', \mathcal{M}) \longrightarrow H^o(\{t_o\} \times K' \cap K'', \mathcal{M})$ <u>application transformant</u> (f', f'') <u>en</u> $f'f''^{-1}$ <u>est surjective si</u> (K', K'') <u>est une "configuration spéciale", c'est-à-dire si</u> $K', K'', K' \cap K''$ <u>et</u> $K' \cup K''$ <u>sont les images réciproques de cubes compacts</u> $L', L'', L' \cap L''$ <u>et</u> $L' \cup L''$ <u>par une carte locale de</u> X (<u>immersion fermée d'un ouvert de</u> X <u>dans un ouvert de</u> $\underline{\underline{C}}^n$).

En désignant par (a_k), (b_k) et (c_k) les assertions du lemme en dimension k on voit que $(a_k) \Rightarrow (b_k) \Rightarrow (c_k)$ et que (a_k) et $(c_k) \Rightarrow (a_{k+1})$ (par un raisonnement analogue à celui qu'on utilise dans la démonstration du lemme des matrices holomorphes inversibles de Cartan). L'assertion (a_o) se démontre comme dans le cas classique (c'est là qu'on a besoin de passer de C à $C \times [0,1]$), et $(b_k) \Rightarrow (c_k)$ résulte du lemme suivant :

LEMME.- <u>Si</u> (K', K'') <u>est une configuration spéciale, l'application</u> $(f', f'') \longrightarrow f'f''^{-1}$ <u>de</u> $H^o(\{t_o\} \times K', \mathcal{M}) \times H^o(\{t_o\} \times K'', \mathcal{M})$ <u>dans</u> $H^o(\{t_o\} \times K' \cap K'', \mathcal{M})$ <u>est surjective au voisinage de l'élément neutre</u>.

Considérons maintenant un recouvrement fini $\mathcal{U}$ de X par des ouverts U_i tels que $\bar{U}_i$ soit compact de Stein et contenu dans un ouvert contractile de X. Si $Q \longrightarrow T \times X$ est un germe de déformation de $G \longrightarrow X$ (considéré comme G-fibré), $Q_{U_i} \longmapsto T \times U_i$ est trivial pour tout i en vertu de la proposition 1, donc il existe un cocycle $\xi \in Z^1(T \times \mathcal{U}, \underline{G}_T)$ représentant Q ; ce cocycle est défini aux opérations de $C^0(T \times \mathcal{U}, \underline{G}_T)$ près.

A 2.- Passage à la cohomologie banachique.

Soit $U \overset{j}{\hookrightarrow} D$ une carte locale de X , c'est-à-dire une immersion fermée d'un ouvert U de X dans un ouvert D de $\underline{\underline{C}}^n$. Si L est un compact de D privilégié pour le faisceau $j_*(\mathcal{O}_X)$, on sait définir l'algèbre de Lie-Banach $B(K, \mathfrak{g})$ où $K = j^{-1}(L)$ et où $\mathfrak{g}$ est le faisceau des sections holomorphes du fibré en algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ de G ; c'est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie banachique $B(K,G)$, sous-groupe du groupe des sections holomorphes de G au-dessus de $\mathring{K}$. Pour tout espace analytique (éventuellement banachique) T et tout X-morphisme η de $T \times U$ dans G , on sait définir un morphisme analytique $\tilde{\eta}$ de T dans $B(K,G)$; à tout morphisme analytique θ de T dans $B(K,G)$ on associe un X-morphisme θ' de $T \times \mathring{K}$ dans G .

DEFINITION.- On appelle <u>cuirasse</u> d'ordre k un triplet $\mathcal{K} = (K_*, K'_*, M_*)$ d'espaces topologiques simpliciaux tronqués à l'ordre k et augmentés vers X , où pour tout n , K_n est somme disjointe d'une famille finie de compacts de Stein $(K_{ni})_{i \in I_n}$ induits par des polydisques compacts L_{ni} dans des cartes locales φ_{ni} , et où $K'_n = \coprod \varphi^{-1}_{ni}(L'_{ni})$, L'_{ni} polydisque compact contenu dans $\mathring{L}_{ni}$. On suppose de plus que, pour tout n , M_n est somme disjointe d'une famille finie de compacts induits par des polydisques dans des cartes locales et qu'on a donné un couple de X-morphismes $M_* \rightrightarrows \mathring{K}_*$ et que $K'_* \times_X K'_* \longrightarrow X$ se factorise à travers $\mathring{M}_* \longrightarrow X$ (on note $\mathring{K}_*$ l'espace simplicial obtenu en remplaçant chaque K_{ni} par son intérieur, et de même pour $\mathring{M}_*$) .

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X , on dit que $\mathfrak{K}$ est privilégiée pour $\mathcal{F}$ si les polydisques L_{ni} , L'_{ni} sont privilégiés pour $\varphi_{ni*}(\mathcal{F})$ et si de même les polydisques intervenant dans la définition de M_* sont privilégiés pour les faisceaux images directes de $\mathcal{F}$ dans les cartes correspondantes. On peut alors définir un complexe d'espaces de Banach $C^\bullet(\mathfrak{K},\mathcal{F})$ où pour tout n , $C^n(\mathfrak{K},\mathcal{F})$ est le noyau de la double flèche $B(K_n,\mathcal{F}) \rightrightarrows B(M_n,\mathcal{F})$ définie de manière évidente ; l'opérateur cobord est défini par :

$$(dc)_{K_{n+1}} = \Sigma(-1)^j c_{K_n} \circ d_j$$

où les d_j sont les opérateurs de faces de l'objet simplicial.

Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert fini de X et si $\mathcal{U}'$ est un rétrécissement de X , on dit qu'une cuirasse $\mathfrak{K}$ est intermédiaire entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ si $K_* \longrightarrow X$ se factorise à travers $\mathcal{U}_* \longrightarrow X$ et si $\mathcal{U}'_* \longrightarrow X$ se factorise à travers $\mathring{K}'_* \longrightarrow X$ (où $\mathcal{U}_*$ et $\mathcal{U}'_*$ désigne les espaces simpliciaux égaux en dimension n aux sommes disjointes des intersections n-uples d'ouverts de $\mathcal{U}$ et de $\mathcal{U}'$ respectivement). On peut montrer que pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X , il existe une cuirasse privilégiée pour $\mathcal{F}$ intermédiaire entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$. Pour une telle cuirasse $\mathfrak{K}$ la restriction $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U}',\mathcal{F})$ se factorise à travers le complexe $C^\bullet(\mathfrak{K},\mathcal{F})$. Prenons maintenant pour $\mathcal{F}$ le faisceau $\mathcal{G}$ des sections analytiques de l'algèbre de Lie d'un groupe analytique G au-dessus de X ; pour tout n on définit un groupe de Lie banachique $C^n(\mathfrak{K},\underline{G})$ d'algèbre de Lie $C^n(\mathfrak{K},\mathcal{G})$. Le groupe $C^0(\mathfrak{K},\underline{G})$ opère sur $C^1(\mathfrak{K},\underline{G})$ par :

$$\alpha.\xi = (\alpha \circ d_1)\xi\,(\alpha \circ d_0)^{-1} \qquad (\alpha \in C^0 \text{ , } \xi \in C^1) \text{ ,}$$

et on définit un sous-espace analytique banachique $Z^1(\mathfrak{K},\underline{G})$ stable par les opérations de $C^0(\mathfrak{K},\underline{G})$ dans $C^1(\mathfrak{K},\underline{G})$ par l'équation : $(\xi \circ d_2)(\xi \circ d_0) = \xi \circ d_1$ à valeurs dans $C^2(\mathfrak{K},\underline{G})$. Lorsque $\mathfrak{K}$ est intermédiaire entre des recouvrements ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$, la restriction $C^\bullet(\mathcal{U},\underline{G}) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U}',\underline{G})$ se factorise à travers $C^\bullet(\mathfrak{K},\underline{G})$.

Considérons un germe de déformation $Q \longrightarrow T \times X$ du fibré G-principal G, représenté par un cocycle $\xi \in C^1(T \times \mathcal{U},\underline{G}_T)$ tel que $\xi(t_o)$ soit le cocycle trivial. On en déduit un germe de morphisme $\tilde{\xi} : T \longrightarrow C^1(\mathfrak{K},\underline{G})$; inversement tout germe de morphisme $\theta : T \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{K},\underline{G})$ définit un élément de $C^\bullet(T \times \mathcal{U}',\underline{G}_T)$ ($\mathfrak{K}$ cuirasse intermédiaire entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$). Comme ξ est un cocycle, on voit que $\tilde{\xi}$ se factorise en un morphisme : $T \longrightarrow Z^1(\mathfrak{K},\underline{G})$. Lorsque les ouverts de $\mathcal{U}$ ont des adhérences compactes de Stein et contenues dans des ouverrts contractiles de X, à tout germe de déformation Q paramétré par T on peut donc associer un germe de morphisme de T dans l'espace $S = Z^1(\mathfrak{K},\underline{G})$; on dispose d'un germe de déformation semi-universel paramétré par le germe de S en le cocycle trivial : il est défini par le cocycle $\eta \in Z^1(S \times \mathcal{U}',\underline{G})$ provenant de l'application identique $S \longrightarrow Z^1(\mathfrak{K},\underline{G})$; mais l'espace des paramètres S est de dimension **infinie**, et le problème est encore loin d'être résolu.

A 3.- Démonstration du théorème de rigidité.

PROPOSITION 2.- Considérons un recouvrement fini $\mathcal{U}$ de X par des ouverts dont les adhérences sont des compacts de Stein contenus dans des ouverts contractiles, un rétrécissement $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$ et un rétrécissement $\mathcal{U}''$ de $\mathcal{U}'$. Soient de plus des cuirasses $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ et $\mathfrak{K}''$ privilégiées pour $\mathcal{G}$ et telles que $\mathfrak{K}$ soit intermédiaire entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$, $\mathfrak{K}'$ intermédiaire entre $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}''$ et que $\mathfrak{K}''$ "domine" $\mathcal{U}''$. Posons $S' = Z^1(\mathfrak{K}',\underline{G})$; il existe des germes de morphismes (en le cocycle trivial) $f : S' \longrightarrow Z^1(\mathfrak{K},\underline{G})$ et $g : S' \longrightarrow C^0(\mathfrak{K}'',\underline{G})$ tels que $f(s)_{\mathfrak{K}''} = g(s)\, s_{\mathfrak{K}''}$. pour $s \in S'$ (voisin du cocycle trivial).

Démonstration.

Le germe de déformation semi-universel $Q' \longrightarrow S' \times X$ défini plus haut est trivial sur les ouverts $S' \times U_i$ (en rétrécissant S') d'après la proposition 1 (avec $\mathcal{U} = (U_i)$). On en déduit un germe de morphisme (non unique) $f : S' \longrightarrow Z^1(\mathcal{R}, \underline{G})$ par un raisonnement fait plus haut. En écrivant que $1_{S'}$ et f définissent le même fibré Q' , on trouve $\alpha \in C^0(S' \times \mathcal{U}'', \underline{G})$ transformant l'un des cocycles en l'autre ; cet élément α définit g .

PROPOSITION 3.- Considérons un recouvrement fini $\mathcal{U}$ de X par des ouverts de Stein et un rétrécissement de Stein $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$; soit $k^\bullet : H^\bullet(X, \mathcal{G}) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U}', \mathcal{G})$ un relèvement de la cohomologie dans $C^\bullet(\mathcal{U}', \mathcal{G})$ (il en existe d'après le théorème de Cartan-Serre). Il existe une homotopie $h : C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U}', \mathcal{G})[-1]$ continue et nucléaire en chaque degré et un morphisme $\pi^\bullet : C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \longrightarrow H^\bullet(X, \mathcal{G})$ continu tel que : $\rho - k \circ \pi = hd + dh$, où ρ désigne la restriction de $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ à $C^\bullet(\mathcal{U}', \mathcal{G})$.

Démonstration.

On construit h_m et π_m par récurrence descendante sur m tels que $\rho - k \circ \pi_m = h_m d + dh_m$ en degré $\geq m$. Pour m assez grand on prend h_m et π_m nuls. Si h'_{m+1} et π'_{m+1} sont construits sur $C^\bullet(\mathcal{U}'', \mathcal{G})$ où $\mathcal{U}''$ est un rétrécissement de $\mathcal{U}$ qui admet $\mathcal{U}'$ comme rétrécissement, tels que

$$\rho'' = \rho' - h'_{m+1} d - dh'_{m+1} = k \circ \pi'_{m+1} \quad \text{en degré} \geq m + 1$$

(avec ρ' = restriction de $\mathcal{U}''$ à $\mathcal{U}'$) , on voit que

$$d^m \rho''^m = \rho''^{m+1} d^m = k^{m+1} \pi'^{m+1}_{m+1} d^m = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire que ρ''^m se factorise à travers $Z^m(\mathcal{U}', \mathcal{G})$; en le composant d'un côté avec la restriction $C^m(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \longrightarrow C^m(\mathcal{U}'', \mathcal{G})$ et de l'autre avec la projection de $Z^m(\mathcal{U}',\mathcal{G})$ sur $B^m(\mathcal{U}',\mathcal{G})$ parallèlement à $k^m(H^m(X,\mathcal{G}))$, on trouve une application nucléaire ρ''' de $C^m(\mathcal{U}',\mathcal{G})$ dans $B^m(\mathcal{U}',\mathcal{G})$, qui peut se relever en $\sigma : C^m(\mathcal{U},\mathcal{G}) \longrightarrow C^{m-1}(\mathcal{U}',\mathcal{G})$ encore continue et nucléaire. On vérifie alors qu'on peut prendre $h^n_m = h'^n_{m+1} \circ \rho^n_{\mathcal{U}''\mathcal{U}}$ pour $n \neq m$, $h^m_m = h'^m_{m+1}\ \rho^m_{\mathcal{U}''\mathcal{U}} + \sigma$ ($\rho_{\mathcal{U}''\mathcal{U}}$ restriction de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{U}''$).

Nous sommes maintenant à même de démontrer le théorème de rigidité. On considère un germe de déformation $Q \longrightarrow T\times X$ du G-fibré G . Soient $\mathcal{U}$ un recouvrement fini de X par des ouverts dont les adhérences sont des compacts de Stein contenus dans des ouverts contractiles, $\mathcal{U}'$ un rétrécissement de Stein de $\mathcal{U}$ et $\mathfrak{K}$ une cuirasse intermédiaire privilégiée pour $\mathcal{G}$. Le germe Q définit un germe de morphisme $\xi : T \longrightarrow Z^1(\mathfrak{K},\underline{G})$, et il existe un germe de morphisme $x : T \longrightarrow C^1(\mathfrak{K},\mathcal{G})$ tel que $\xi = \exp\circ x$.

La condition de cocycle s'écrit : $(\exp\circ x\circ d^2)(\exp\circ x\circ d^0) = \exp\circ x\circ d^1$ et le premier membre a comme développement limité : $xd^2 + xd^0 + \frac{1}{2}[xd^2, xd^0] + O(\|x\|^3)$, ce qui donne : $dx = \frac{1}{2}[x \cup x] + O(\|x\|^3)$. Considérons alors un rétrécissement de Stein $\mathcal{U}''$ de $\mathcal{U}'$ et une cuirasse privilégiée intermédiaire $\mathfrak{K}'$. D'après la proposition 3, la restriction $\rho : C^\bullet(\mathfrak{K},\mathcal{G}) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{K}',\mathcal{G})$ se factorise à homotopie près à travers $H^\bullet(X,\mathcal{G})$: $\rho - k\pi = hd + dh$, donc

$$x - dhx = k\pi x + hdx = k\pi x - \frac{1}{2}\, h[x \cup x] + O(\|x\|^3) \quad .$$

Si $\alpha = \exp hx : T \longrightarrow C^0(\mathcal{U},\mathcal{G})$, on a $\alpha.\rho(\xi) = (\alpha\, d^1)\rho(\xi)(\alpha\, d^0)^{-1} =$

$$(\exp hx\, d^1)(\exp \rho x)(\exp(-hx\, d^0)) = \exp(\rho x + hxd^1 - hxd^0 - \tfrac{1}{2}[hxd^1, hxd^0] - \tfrac{1}{2}[\rho x, hxd^0 + hxd^1] + O(\|x\|^3))$$

$$= \exp(\rho x - dhx + \tfrac{1}{2}[hx \cup (\rho x - dhx) + O(\|x\|^3))$$

$$= \exp(k\pi x + \tfrac{1}{2}[hx \cup k\pi x] - \tfrac{1}{2}\, h[x \cup x] + O(\|x\|^3)) \quad .$$

Supposons maintenant que $H^1(X,\mathcal{G}) = 0$; alors on a simplement :

$$\alpha.\rho(\xi) = \exp(-\tfrac{1}{2}\, h[x \cup x] + O(\|x\|^3)) \quad .$$

On pose $\xi_1 = f\,\alpha.\rho(\xi)$ et $\beta_1 = g\,\alpha.\rho(\xi)$ où f et g sont définis comme dans la proposition 2 (avec une troisième cuirasse $\mathfrak{K}''$) ; on a $\xi_{1\mathfrak{K}''} = \beta_1.\alpha.\rho(\xi)_{\mathfrak{K}''}$ et on peut poser $\xi_1 = \exp x_1$, $\beta_1 = \exp b_1$ avec $\|x_1\| \leq N\|x\|^2$ et $\|b_1\| \leq N\|x^2\|$ (N constante). Par récurrence sur n on construit

$$\xi_n : T \longrightarrow Z^1(\mathfrak{K},\underline{G}) \quad , \quad \alpha_n : T \longrightarrow C^0(\mathfrak{K},\underline{G}) \quad \text{et} \quad \beta_n : T \longrightarrow C^0(\mathfrak{K}'',\underline{G})$$

tels que :

$$\xi_n = \exp x_n \quad , \quad \alpha_n = \exp hx_n \quad , \quad \beta_n = \exp b_n$$

avec des majorations

$$\|x_n\| \leq N^{2^n-1}\|x\|^{2^n} \quad , \quad \|b_n\| \leq N^{2^n-1}\|x\|^{2^n}$$

et les conditions :

$$\xi_{n\mathfrak{K}''} = \beta_n(\alpha_{n-1}.\xi_{n-1})_{\mathfrak{K}''} = \gamma_n . \xi_{\mathfrak{K}''} \text{ si } \gamma_n = \beta_n\alpha_{n-1\mathfrak{K}''} \ldots \beta_2\alpha_1 \quad \beta_1\alpha_{\mathfrak{K}''} .$$

Si $\|x\| < 1/N$ on voit que ξ_n converge vers le cocycle trivial et que γ_n converge vers une limite γ telle que $\gamma.\xi_{\mathfrak{K}''}$ soit trivial ; ceci termine la démonstration.