GABRIEL RUGET

Le problème des modules pour les fibres vectoriels holomorphes sur un espace analytique complexe compact donné. I - Le cas d'une base lisse

Astérisque, tome 16 (1974), p. 250-254

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__16__250_0>

LE PROBLEME DES MODULES POUR LES FIBRES VECTORIELS HOLOMORPHES SUR UN ESPACE ANALYTIQUE COMPLEXE COMPACT DONNE

I - LE CAS D'UNE BASE LISSE

par Gabriel RUGET

Soient X une variété (resp., pour l'exposé suivant, un espace) analytique complexe compact, et V un fibré vectoriel holomorphe de base X. On étudie les fibrés vectoriels $\mathcal{V}$ sur le produit de X par un germe (d'origine 0) d'espace analytique S, munis d'un isomorphisme de V sur la restriction de $\mathcal{V}$ à $X \times \{0\}$; précisément, on cherche un objet "versel" parmi les objets décrits, c'est-à-dire donnant naissance à tous ces objets grâce à des changements de base (non nécessairement uniquement déterminés). La méthode, décrite dans les exposés précédents, qui permet de résoudre le problème des modules pour les singularités isolées, c'est-à-dire étude du problème formel à la base, suivie de l'application d'un théorème de convergence, semble pour l'instant difficile à reproduire ici : ce nouveau problème, un peu trop global, se laisse malaisément décrire par des équations. Dans le cas où X est lisse, on pense immédiatement à un autre espace de modules vedette, celui de Kuranishi, pour les déformations propres et lisses d'une variété analytique compacte donnée [6]. De fait, toute démonstration du théorème de Kuranishi (par exemple [1]) s'adapte aussitôt à notre problème (§1) ; on pourrait même [2] classifier les G-fibrés principaux, ou G est un groupe de Lie complexe, sur les déformations propres et lisses de la base X. Au paragraphe 2, pour les personnes que rebuterait l'usage explicite d'outils aussi sales que des formes différentielles à coefficients de classe C^r , r non entier, le théorème des fonctions implicites,..., nous indiquons une méthode, que Deligne attribue à Mike Artin, pour passer de l'énoncé de Kuranishi à notre problème (X toujours lisse) ; les ingrédients supplémentaires sont alors le théorème de Douady relatif [7], et le Picard relatif analytique décrit par Grothendieck à la fin de [3].

Dans l'exposé suivant, on ramènera, suivant l'idée de Deligne, le cas X quelconque au cas X lisse (seulement pour les fibrés vectoriels). Puis, dans un autre exposé, Houzel indiquera sa méthode (avec des recouvrements) pour traiter directement le cas X quelconque ; on peut aussi consulter [4].

§1 . Structures complexes sur un fibré vectoriel

Soient $V_o \longrightarrow X$ un fibré vectoriel holomorphe de base la variété X, et $V \longrightarrow X$ le fibré vectoriel complexe différentiable sous-jacent. Cette structure différentiable restera constante dans toute déformation holomorphe de V_o ; nous allons donc chercher comment paramétrer les structures holomorphes sur V voisines de V_o. Si $x \in X$, et si $v \in V$ se projette en x , on a une suite exacte d'espaces vectoriels réels :

$$0 \longrightarrow V_x \xrightarrow{\gamma} T_v V \xrightarrow{\pi} T_x X \longrightarrow 0 \quad .$$

En fait, V_x et $T_x X$ sont munis de structures d'espace vectoriel complexe fixées, et $T_v V$ d'une extension de la seconde par la première, variable avec la structure holomorphe sur V , que l'on repère par rapport à la structure de référence o comme suit : soit $w \in T_x X$, relevé en $w' \in T_v V$

arbitraire ; appelons I_o la multiplication par i de référence, et I celle à repérer ; $Iw' - I_o w'$ appartient à V_x , et ne dépend que de w ; pour chaque $v \in V_x$, nous avons donc construit une application λ_v de $T_x X$ dans V_x , qui est $\mathbb{C}$-antilinéaire, puisque

$$-w' = I^2 w' = I(I_o w' + \lambda_v w) = I_o^2 w' + \lambda_v(iw) + i\lambda_v w \ .$$

On vérifie facilement que λ_v dépend $\mathbb{C}$-linéairement de v ; ainsi, nous avons obtenu une forme différentielle de type $(0,1)$ sur X , à valeurs dans $\operatorname{End} V_o$, que nous baptisons $-2i\omega$: pour nous raccrocher à [1], § 1, si l'application identité de $T_v V_o$ dans $T_v V$ s'écrit $f' + f''$, avec f' $\mathbb{C}$-linéaire et f'' $\mathbb{C}$-antilinéaire, $f'^{-1} \circ f''(\tau)$ n'est autre que $\gamma(\omega_x(\pi(\tau)).v)$. L'examen de la définition du crochet des formes à valeurs vectorielles [5] montre que la condition d'intégrabilité [1], § 2 de la structure presque complexe sur l'espace total de V ainsi repérée se traduit par

$$(1) \qquad d''\omega - [\omega, \omega] = 0 \ ,$$

où $[\ ,\ ]$ désigne le crochet ordinaire des matrices. Il n'y a plus maintenant qu'à recopier [1].

§ 2 . Existence du module

On peut voir un espace vectoriel E comme l'espace des sections globales du fibré canonique sur le projectif de E^* . L'idée de Mike Artin est de retenir de même d'un fibré vectoriel $V_o \longrightarrow X$.

1°) P_o , projectif de V_o^* , qui est une variété compacte ;

2°) la projection $\pi_o : P_o \longrightarrow X$;

3°) le fibré canonique L_o de P_o .

A partir de là, on peut reconstruire V_o : c'est le fibré associé au faisceau localement libre $R^o \pi_{o*} L_o$.

Le programme pour trouver une déformation verselle de V_o est donc

1°) déformer versellement la variété compacte P_o : appelons $P_1 \longrightarrow S_1$ la solution de Kuranishi à ce problème.

2°) repérer les points de S_1 au-dessus desquels la fibre de P_1 veut bien se projeter d'une (ou plusieurs) façons sur X : on considère le produit $P_1 \times X$ paramétré par S_1 , et le module de Douady pour les sous-espaces de $P_1 \times X \times_{S_1} T$ plats sur T ($T \longrightarrow S_1$ est un changement de base variable) que l'on regarde au voisinage du graphe de π_o (T étant alors le point de base de S_1). Appelons S_2 la base correspondante ; on a maintenant une projection

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \pi : P_1 \times_{S_1} S_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & X \times S_2 \arrow[dl] \\ & S_2 & \end{tikzcd}$$

qui, au-dessus du point-base de S_2 , n'est autre que π_o .

3°) $P_2 = P_1 \times_{S_1} S_2 \longrightarrow S_2$ admet un module de Picard relatif, car il est localement trivial du point de vue topologique, et car O_{P_2} est cohomologiquement plat sur S_2 (l'espace projectif étant rigide, toutes les fibres de P_2 sont des fibrés sur X fixé à fibres projectives). On regarde ce module de Picard au voisinage de L_o (pour le changement de base : inclusion du point-base de S_2), on appelle sa base S , et L le fibré universel sur $P_1 \times_{S_1} S$. Pour des raisons de rigidité, $R^o \pi_* L$ est localement libre : on a finalement trouvé un fibré vectoriel V sur $X \times S$, dont la restriction à $X \times 0$ est V_o , et dont on vérifie facilement qu'il est versel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. DOUADY - Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes, Séminaire Bourbaki 1964/65, exposé n° 277.

[2] P.A. GRIFFITHS - The extension problem for compact submanifolds of complex manifolds I, pp. 113-142 in Proceedings of the conference on complex analysis, Minneapolis 1964, edited by Aeppli, Calabi, Röhrl; Springer-Verlag 1965.

[3] A. GROTHENDIECK - Techniques de construction en géométrie analytique. IX. Quelques problèmes de modules, Séminaire Cartan 1960/61, exposé n° 16 .

[4] R.C. GUNNING - Local moduli for complex analytic vector bundles, Math. Ann. 195, pp. 51-78 (1971).

[5] K. KODAIRA, L. NIRENBERG et D.C. SPENCER - On the existence of deformations of complex analytic structures, Annals of Math., vol. 68, pp. 450-459 (1958).

[6] M. KURANISHI - On the locally complete families of complex analytic structures, Annals of Math., vol. 75, pp. 536-577 (1962).

[7] G. POURCIN - Théorème de Douady au-dessus de S , Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, s.III, vol. 23, pp. 451-459 (1969).