PIERRE BERTHELOT

# Classification topologique universelle des singularités, d'après F. Pham

*Astérisque*, tome 16 (1974), p. 174-214
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__16__174_0>

# CLASSIFICATION TOPOLOGIQUE UNIVERSELLE DES SINGULARITES, d'après F. PHAM,

par Pierre BERTHELOT

Nous reprenons ici, avec quelques développements, le contenu de deux exposés de F. Pham ([13], [14]) sur le problème de la classification des singularités. Pour préciser ce dont il s'agit, considérons par exemple un germe d'espace analytique à singularité isolée $X_o$, intersection complète, et soit $f : X \to S$ sa déformation semi-universelle. On va chercher une partition localement finie de $X$ et $S$ en sous-variétés localement fermées (strates) de telle sorte qu'au-dessus de chaque strate de $S$, le type d'isomorphisme de la fibre (en un sens qu'il nous faudra préciser) soit constant, le type d'isomorphisme (local) en un point de la fibre étant lui-même constant sur chaque strate de $X$. Dans un premier temps, nous montrerons l'existence d'une telle stratification, et étudierons la notion d'équivalence qu'elle définit, à l'aide de la théorie des morphismes stratifiés de Thom ([10], [19]). Dans un second temps, nous chercherons à associer aux singularités étudiées des invariants numériques, en termes desquels on souhaiterait obtenir une description explicite de la stratification de Thom.

## 1. Versalité et stabilité.

1.1. Soit $X_o$ un germe d'espace analytique. Une déformation de $X_o$ sera un germe de morphisme d'espaces analytiques pointés $f : (X,x) \longrightarrow (S,s)$, plat, muni d'un isomorphisme de la fibre $f^{-1}(s)$ avec $X_o$ ; on supposera ici que $(S,s)$ est un germe de variété analytique, i.e. on ne considérera que des déformations de base lisse.

Une déformation $f : X \longrightarrow S$ de $X_o$ sera dite <u>verselle</u> si pour toute déformation $f' : X' \longrightarrow S'$ de $X_o$ il existe un germe de morphisme $u : S' \longrightarrow S$ tel que $f'$ se déduise de $f$ par le changement de base $u$ ; $f$ sera dite <u>semi-universelle</u> si l'application tangente à $u$ est unique. Si $X_o$ possède une déformation semi-universelle $f$, alors toute déformation verselle de $X_o$ est le produit de $f$ par l'identité d'un germe de variété analytique : en effet, l'unicité de l'application tangente au morphisme de changement de base entraîne que la déformation verselle se déduit de la déformation universelle par un germe de submersion.

Pour tout morphisme $f : X \longrightarrow S$ d'espaces analytiques, nous noterons $\underline{T}^i_{X/S}$ les foncteurs cotangents de $X$ relativement à $S$ (cf. [8], [15]) ; lorsque $S$ est un point, nous noterons simplement $\underline{T}^i_X$. Si $x$ est un point de $X$, et $s = f(x)$, on peut choisir au voisinage de $x$ et $s$ des représentants $\underline{L}^\bullet_{X/S}$, $\underline{L}^\bullet_X$ et $\underline{L}^\bullet_S$ des complexes cotangents (au sens de [8]) de manière à obtenir une suite

$$0 \longrightarrow f^*(\underline{L}^\bullet_S) \longrightarrow \underline{L}^\bullet_X \longrightarrow \underline{L}^\bullet_{X/S} \longrightarrow 0 ,$$

exacte à cela près que l'homomorphisme $f^*(\underline{L}^{-2}_S) \longrightarrow \underline{L}^{-2}_X$ n'est pas nécéssairement injectif. En dualisant et en utilisant la suite de cohomologie associée à la suite de complexes alors obtenue, on obtient un homomorphisme canonique

$$f^*(\underline{T}^o_S) \longrightarrow \underline{T}^1_{X/S} \quad .$$

Supposons maintenant que $f$ soit une déformation (de base lisse) de sa fibre $X_o$ au-dessus de $s$. Prenant la fibre en $x$ de l'homomorphisme précédent, et utilisant la fonctorialité de $\underline{T}^1$, on obtient donc un homomorphisme canonique de $\underline{\underline{C}}$-vectoriels

$$(1.1.1) \qquad \Omega^{1\vee}_{S,s} \longrightarrow \underline{T}^1_{X_o,x} \quad .$$

Rappelons alors le théorème de Tjurina ([20] ; voir aussi [17], [4], ainsi que les exposés [15], [2], du présent séminaire) :

THEOREME 1.2.- <u>Soit</u> $X_o$ <u>un germe d'espace analytique, tel que</u> $\underline{T}^2_{X_o} = 0$ , <u>et</u> $\underline{T}^1_{X_o}$ <u>soit de dimension finie sur</u> $\underline{\underline{C}}$ . <u>Alors</u> :

i) $X_o$ <u>possède une déformation semi-universelle</u> ;

ii) <u>soit</u> $f : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ <u>une déformation de</u> $X_o$ ; <u>alors</u> $f$ <u>est une déformation verselle</u> (<u>resp. semi-universelle</u>) <u>de</u> $X_o$ <u>si et seulement si l'homomorphisme</u> (1.1.1) <u>est surjectif</u> (<u>resp. bijectif</u>).

Rappelons que lorsque $X_o$ est à singularité isolée, le $\underline{T}^1$ est de dimension finie, et lorsque $X_o$ est intersection complète, le $\underline{T}^2$ est nul.

Supposons plus particulièrement que $X_o$ soit une intersection complète ; la déformation semi-universelle de $X_o$ peut alors se calculer explicitement de la façon suivante (cf. [2]). Soit $A = \underline{\underline{C}}\{x_1,\dots,x_n\} / (f_1,\dots,f_p)$ l'algèbre analytique de $X_o$ , les $f_i$ formant une suite régulière. Alors

$$\underline{T}^1_{X_o} \xrightarrow{\sim} A^p / \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) ,$$

où $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ désigne l'élément de composantes $\frac{\partial f_1}{\partial x_i},\dots,\frac{\partial f_p}{\partial x_i}$ . Soient $g_j = (g_{j1},\dots,g_{jp})$ des éléments de $(\underline{\underline{C}}\{x_1,\dots,x_n\})^p$ relevant une base de $\underline{T}^1_{X_o}$ en tant que $\underline{\underline{C}}$-vectoriel, avec $1 \leqslant j \leqslant r = \dim_{\underline{\underline{C}}}(\underline{T}^1_{X_o})$ , et $F : \underline{\underline{C}}^{n+r} \longrightarrow C^{p+r}$ le germe d'application analytique défini par les fonctions

$$F_i(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_r) = f_i(x_1,\dots,x_n) + \sum_{j=1}^{r} t_j g_{ji}(x_1,\dots,x_n) \quad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant p ,$$

$$F_i(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_r) = t_{i-p} \quad \text{si } p < i \leqslant p + r .$$

Alors la déformation semi-universelle $f$ de $X_o$ se déduit de $F$ par le changement de base $\underline{\underline{C}}^r \hookrightarrow \underline{\underline{C}}^{p+r}$ défini par l'annulation des $p$ premières coordonnées de $\underline{\underline{C}}^{p+r}$ .

Il est alors facile de vérifier sur l'expression explicite de $F$ que $F$ est transversal à ce changement de base. On obtient donc

COROLLAIRE 1.3.- <u>Soient</u> $X_o$ <u>un germe d'espace analytique, tel que</u> $\underline{T}^1_{X_o}$ <u>soit de dimension finie sur</u> $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{T}^2_{X_o} = 0$ , <u>et</u> $f : X \to S$ <u>sa déformation semi-universelle. Alors</u> $X$ <u>est non singulier si et seulement si</u> $X_o$ <u>est intersection complète</u>.

Lorsque $X_o$ est intersection complète, ce corollaire va nous permettre de caractériser les déformations verselles de $X_o$ par une propriété de stabilité qui jouera un rôle essentiel par la suite. Donnons d'abord quelques définitions.

Soit $x$ un point de $\underline{\underline{C}}^m$ . On munit l'ensemble des germes d'applications analytiques de $\underline{\underline{C}}^m$ dans $\underline{\underline{C}}^q$ au voisinage de $x$ de la topologie pour laquelle un système fondamental de voisinages de $0$ est la famille d'ensembles $V_{\rho,\epsilon}$ , avec $\rho > 0$ et $\epsilon > 0$ , $V_{\rho,\epsilon}$ étant l'ensemble des germes d'applications définies et analytiques au voisinage de la boule fermée $B_\rho$ de centre $x$ et de rayon $\rho$ , bornées par $\epsilon$ sur $B$ . On notera $V_{\rho,\epsilon}(f)$ le voisinage $f + V_{\rho,\epsilon}$ de $f$ .

DEFINITION 1.4.- <u>Soit</u> $f : (\underline{\underline{C}}^m, x) \longrightarrow \underline{\underline{C}}^q$ <u>un germe d'application analytique au voisinage de</u> $x$ . <u>On dit que</u> $f$ <u>est</u> stable <u>si pour tout voisinage ouvert</u> $U$ <u>de</u> $x$ <u>il existe un voisinage</u> $V_{\rho,\epsilon}(f)$ <u>tel que pour toute application analytique</u> $g : U \longrightarrow \underline{\underline{C}}^q$ <u>dont le germe en</u> $x$ <u>appartienne à</u> $V_{\rho,\epsilon}(f)$ , <u>on puisse trouver des ouverts</u> $U'$ , $U''$ <u>de</u> $U$ , <u>avec</u> $x \in U'$ , <u>des ouverts</u> $V'$ , $V''$ <u>de</u> $\underline{\underline{C}}^q$ , <u>et des isomorphismes analytiques</u> $h : U' \xrightarrow{\sim} U''$ <u>et</u> $k : V' \xrightarrow{\sim} V''$ <u>rendant commutatif le diagramme</u>.

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{f} & V' \\ {\scriptstyle h}\downarrow\wr & & \wr\downarrow{\scriptstyle k} \\ U'' & \xrightarrow{g} & V'' \end{array} ,$$

h et k <u>pouvant être pris arbitrairement proches de l'identité</u> (<u>pour la topologie de l'espace des germes</u> $(\underline{\underline{C}}^m, x) \to \underline{\underline{C}}^m$ , <u>resp.</u> $(\underline{\underline{C}}^q, f(x)) \longrightarrow \underline{\underline{C}}^q$ ) <u>pourvu que</u> g <u>soit suffisamment proche de</u> f <u>dans l'espace des germes</u> $(\underline{\underline{C}}^m, x) \longrightarrow \underline{\underline{C}}^q$ .

La stabilité d'un germe d'application analytique peut se caractériser de façon infinitésimale. Posons $X = \underline{\underline{C}}^m$ , $Y = \underline{\underline{C}}^q$ , et notons $\underline{T}_X$ et $\underline{T}_Y$ les faisceaux des champs de vecteurs holomorphes sur X et Y . Soit $f : (X,x) \to Y$ un germe d'application analytique, et soit $y = f(x)$ . Il existe une application naturelle

$$\omega f : \underline{T}_{Y,y} \longrightarrow f^*(\underline{T}_Y)_x \qquad ,$$

et l'application tangente à f nous donne

$$tf : \underline{T}_{X,x} \longrightarrow f^*(\underline{T}_Y)_x \qquad .$$

THEOREME 1.5.- <u>Soit</u> $f : (\underline{\underline{C}}^m, x) \longrightarrow (\underline{\underline{C}}^q, y)$ <u>un germe d'application analytique</u>. <u>Pour que</u> f <u>soit stable</u>, <u>il faut et il suffit que</u>

$$f^*(\underline{T}_Y)_x = tf(\underline{T}_{X,x}) + \omega f(\underline{T}_{Y,y}) \quad .$$

Nous ne donnerons pas ici la démonstration de ce théorème (voir par exemple l'article d'Arnold [1] ; en géométrie différentielle, la variante globale de cet énoncé -pour les applications propres- est un résultat bien connu, dû à Mather ([9], II) ; la variante locale 1.5 est également annoncée par Mather dans [9], IV).

PROPOSITION 1.6.- <u>Soit</u> $f : (\underline{\underline{C}}^m, x) \longrightarrow (\underline{\underline{C}}^q, y)$ <u>un germe d'application analytique</u>

plate. Pour que $f$ soit stable, il faut et il suffit que sa fibre $X_y$ en $y$ soit une intersection complète à singularité isolée, et que $f$ en soit une déformation verselle.

Le fait que $X_y$ soit une intersection complète résulte simplement de la platitude de $f$.

Remarquons d'abord que la relation de 1.5 équivaut à la relation

$$f^*(\underline{T}_Y)_x = tf(\underline{T}_{X,x}) + \omega f(\underline{T}_{Y,y}) + \mathfrak{m}_y \cdot f^*(\underline{T}_Y)_x \quad ,$$

où $\mathfrak{m}_y$ est l'idéal maximal de l'anneau local de $Y = \underline{\underline{C}}^q$ en $y$. En effet, si cette relation est vérifiée, et si l'on pose $M = f^*(\underline{T}_Y)_x \,/\, tf(\underline{T}_{X,x})$, on obtient, en notant $\pi$ l'application de passage au quotient,

$$M = \pi\,(\omega f(\underline{T}_{Y,y})) + \mathfrak{m}_y \cdot M \quad .$$

Comme $\underline{T}_{Y,y}$ est un $\underline{O}_{Y,y}$-module de type fini, $M/\mathfrak{m}_y \cdot M$ est un $\underline{\underline{C}}$-vectoriel de dimension finie. D'après le théorème de préparation de Weierstrass, le $\underline{O}_{X,x}$-module de type fini $M$ est donc de type fini sur $\underline{O}_{Y,y}$. Le lemme de Nakayama montre alors que

$$M = \pi\,(\omega f(\underline{T}_{Y,y})) \quad ,$$

d'où la relation de 1.5.

La relation précédente équivaut encore à dire que l'homomorphisme canonique $\underline{T}_{Y,y} \longrightarrow M/\mathfrak{m}_y \cdot M$ est surjectif. Or il est facile de voir que $M/\mathfrak{m}_y \cdot M$ n'est autre que $\underline{T}^1_{X_y}$, l'homomorphisme précédent s'identifiant à (1.1.1). Si $X_y$ vérifie les hypothèses de l'énoncé, et si $f$ en est une déformation verselle, $f$ est donc stable d'après 1.2. Réciproquement, si $f$ est stable, et si l'on prouve que $X_y$ est à singularité isolée, $f$ en sera une déformation verselle d'après 1.2. Il suffit donc de vérifier le lemme plus général suivant :

LEMME 1.7.- *Soit* $f : (\underline{\underline{C}}^m, x) \longrightarrow (\underline{\underline{C}}^q, y)$ *un germe d'application analytique stable. Alors la fibre de* $f$ *en* $y$ *est un germe d'espace analytique à singularité isolée (éventuellement non singulier).*

Posons encore $X = \underline{\underline{C}}^m$ , $Y = \underline{\underline{C}}^q$ . Sur un voisinage convenable de $x$ dans $X$ , soit $\underline{T}^1_{X/Y} = \underline{M}$ le conoyau de l'homomorphisme canonique de faisceaux $\Omega^{1\vee}_X \longrightarrow f^*(\Omega^1_Y)^\vee$ . Si $j$ est l'immersion de la fibre $X_y$ dans $X$ , on a donc la suite exacte

$$j^*(\Omega^{1\vee}_X) \longrightarrow j^*(f^*(\Omega^1_Y)^\vee) \longrightarrow j^*(\underline{M}) \longrightarrow 0 \ .$$

Or $\underline{M}_x$ est le $\underline{O}_{X,x}$-module noté $M$ dans la démonstration précédente, donc $j^*(\underline{M})_x$ est de dimension finie comme $\underline{\underline{C}}$-vectoriel lorsque $f$ est stable. Quitte à restreindre le voisinage de $x$ , le support du $\underline{O}_{X_y}$-module $j^*(M)$ est alors contenu dans $\{ x \}$ , et d'après Nakayama, $\underline{M}_{x'}$ est nul pour tout $x' \in X_y$ , $x' \neq x$ . En un tel point, l'homomorphisme $\Omega^{1\vee}_X \longrightarrow f^*(\Omega^1_Y)^\vee$ est surjectif, donc admet une section, de sorte que l'homomorphisme $f^*(\Omega^1_Y) \longrightarrow \Omega^1_X$ admet une rétraction, ce qui montre que $f$ est une submersion en $x'$ .

En particulier, un germe d'intersection complète $(X,x)$ tel que $\underline{T}^1_{X,x}$ soit de dimension finie sur $\underline{\underline{C}}$ est à singularité isolée, ce qui se voit d'ailleurs immédiatement par un raisonnement du même type que le précédent.

## 2. Stratification de Thom d'un germe d'application analytique stable.

2.1. Reprenons le problème de la classification des singularités voisines d'une singularité donnée, tel qu'il a été esquissé en introduction, et cherchons à préciser la notion d'équivalence selon laquelle nous allons opérer la classification.

Il est d'abord facile de voir que si l'on souhaite obtenir une classification finie des différentes fibres dans la déformation semi-universelle, la notion d'équivalence à adopter ne peut être l'isomorphisme <u>analytique</u> de deux singularités : en effet, le type d'isomorphisme analytique peut varier continûment dans une déformation. Il suffit pour s'en convaincre de regarder le germe de courbe plane d'équation $x^4 + y^4$ , et, dans sa déformation semi-universelle, la sous-famille à un paramètre $t$ d'équation $x^4 + tx^2y^2 + y^4$ . On obtient ainsi une famille de 4 droites concourantes, dont le birapport varie avec $t$ ; comme le birapport est un invariant analytique, les deux singularités obtenues pour deux valeurs distinctes de $t$ ne peuvent être isomorphes analytiquement.

On va donc chercher à classifier les singularités du point de vue <u>topologique</u>. Pour cela, nous considérerons non plus des germes d'espaces analytiques "abstraits", mais des germes d'espaces analytiques munis d'un germe de plongement dans un espace $\mathbb{C}^n$ (la classification topologique des singularités abstraites étant trop grossière, puisque par exemple le paramétrage de la cubique à point de rebroussement donne un homéomorphisme du germe de celle-ci en son point singulier avec un germe de droite, alors que ces deux germes ne sont pas topologiquement équivalents en tant que germes de courbes planes). Deux germes d'espaces analytiques plongés $(X_o, \mathbb{C}^n)$ et $(Y_o, \mathbb{C}^n)$ seront <u>topologiquement équivalents</u> s'il existe des germes d'homéomorphismes $\varphi$ et $\psi$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_o & \hookrightarrow & \mathbb{C}^n \\ \sim\downarrow\varphi & & \psi\downarrow\sim \\ Y_o & \hookrightarrow & \mathbb{C}^n \end{array} \quad ;$$

on dira aussi que $(X_o, \mathbb{C}^n)$ et $(Y_o, \mathbb{C}^n)$ ont même type topologique. Une <u>déformation</u>

d'un germe plongé $(X_o, \underline{\underline{C}}^n)$ sera un triangle commutatif de germes de morphismes d'espaces pointés

$$\begin{tikzcd} (X,x) \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "f"'] & & (\underline{\underline{C}}^n \times S, x) \arrow[dl, "p"] \\ & (S,s) & \end{tikzcd}$$

où $S$ est un germe de variété analytique, $f$ un morphisme plat, et $p$ le morphisme de projection, muni d'un isomorphisme de la fibre au-dessus de $s$ avec le germe $(X_o, \underline{\underline{C}}^n)$. Si $(X_o, \underline{\underline{C}}^n)$ et $(Y_o, \underline{\underline{C}}^n)$ sont deux germes plongés, deux déformations $f : X \longrightarrow S$ et $g : Y \longrightarrow S$ de ces germes seront <u>topologiquement équivalentes</u> s'il existe des germes d'homéomorphismes $\varphi : X \xrightarrow{\sim} Y$ et $\psi : \underline{\underline{C}}^n \times S \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{C}}^n \times S$ commutant aux plongements, à $f$ et $g$, et aux projections. Remarquons enfin que si $X_o$ est un germe d'intersection complète à singularité isolée, et si l'on se donne un plongement de $X_o$ dans $\underline{\underline{C}}^n$, la description de la déformation semi-universelle $f : X \longrightarrow S$ de $X_o$ donnée en 1.2 montre qu'elle peut se plonger dans $\underline{\underline{C}}^n \times S$ de façon à induire sur la fibre le plongement donné.

La classification cherchée va alors résulter du théorème suivant de Thom (non publié).

THEOREME 2.2.- <u>L'ensemble des germes d'application analytique de</u> $(\underline{\underline{C}}^m, x)$ <u>dans</u> $\underline{\underline{C}}^q$ <u>qui peuvent être muni d'une structure de germe de morphisme stratifié est partout dense dans l'ensemble des germes d'applications analytiques de</u> $(\underline{\underline{C}}^m, x)$ <u>dans</u> $\underline{\underline{C}}^q$ .

Avant d'expliciter cet énoncé, indiquons le corollaire :

COROLLAIRE 2.3.- <u>Tout germe d'application analytique stable peut être muni d'une structure de germe de morphisme stratifié.</u>

En effet, le théorème de Thom montre qu'il existe des germes arbitrairement proches d'un germe donné $f : (\underline{\underline{C}}^m, x) \longrightarrow \underline{\underline{C}}^q$ et munis d'une structure de germe de morphisme stratifié. Si $f$ est stable, un tel germe suffisamment proche se déduit de $f$ par des germes d'isomorphismes à la source et au but, et la stratification de $f$ s'en déduit par transport de structures.

Si on se donne de plus une factorisation du germe stable $f$ en un plongement de $\underline{\underline{C}}^m$ dans $\underline{\underline{C}}^n \times \underline{\underline{C}}^q$, identifiant $\underline{\underline{C}}^m$ à un germe de sous-variété $X$ de $\underline{\underline{C}}^n \times \underline{\underline{C}}^q$, suivi de la projection $p$ de $\underline{\underline{C}}^n \times \underline{\underline{C}}^q$ sur $\underline{\underline{C}}^q$, on peut supposer que la stratification de $f$ est induite par une stratification de $p$ (cf. [10], §11).

2.4. Plaçons-nous dans la situation précédente. Dire que $p$ est stratifiée, et induit une stratification sur sa restriction $f$ à $X$, signifiera pratiquement qu'on a les données et les propriétés suivantes, qui n'explicitent que partiellement la notion de morphisme stratifié, mais suffiront aux besoins de cet exposé (cf. [10] pour un exposé plus détaillé) :

i) On se donne un ouvert $U$ de $\underline{\underline{C}}^{n+q}$ contenant $x$, tel que $f$ soit définie sur $U \cap X$, et un ouvert $V$ de $\underline{\underline{C}}^q$, tel que $p(U) \subset V$.

ii) On se donne dans $U$ et $V$ une famille finie de sous-variétés localement fermées, connexes, formant une partition de $U$ et $V$, qu'on appelle <u>strates</u> ; on suppose que $x$ est adhérent à toute strate de $U$, que $X$ est une réunion de strates ; il en est de même du lieu critique $C$ de $f$, et de son lieu discriminant $D = f(C)$.

iii) Si $Y$ , $Z$ sont deux strates telles que $Y \cap \overline{Z} \neq \emptyset$ , alors $Y \subset \overline{Z}$ ; par suite l'adhérence d'une strate est une réunion de strates.

iv) Pour toute strate $Y$ de $U$ (resp. $V$) , on se donne un voisinage tubulaire $T_Y$ de $Y$ dans $U$ (resp. $V$) ; on note $\pi_Y : T_Y \longrightarrow Y$ la rétraction associée à $T_Y$ . On suppose que pour tout couple de strates $Y$ , $Z$ , ou bien $T_Y \cap Z = \emptyset$ , ou bien $Y \subset \overline{Z}$ , $\dim(Z) > \dim(Y)$ , la restriction de $\pi_Y$ à $Z \cap T_Y$ est une submersion de $Z \cap T_Y$ sur $Y$ , et pour tout $z \in T_Z \cap T_Y$ tel que $\pi_Z(z) \in T_Y$ , on a $\pi_Y(\pi_Z(z)) = \pi_Y(z)$ .

v) Pour toute strate $Y$ de $U$ , $p(Y)$ est une strate de $V$ , et la restriction de $p$ à $Y$ est une submersion de $Y$ sur $p(Y)$ ; en particulier, l'image inverse d'une strate de $V$ est une réunion de strates de $U$ .

vi) Pour toute strate $Y$ de $U$ , d'image $Y'$ dans $V$ , et tout $z \in T_Y \cap p^{-1}(T_{Y'})$ , on a $p(\pi_Y(z)) = \pi_{Y'}(p(z))$ .

La classification topologique des singularités nous est alors fournie par le <u>premier théorème d'isotopie</u> de Thom, que nous énoncerons de la façon suivante dans le contexte local qui nous occupe :

THEOREME 2.5.- <u>Soit</u> $f : (\underline{\underline{C}}^m, x) \longrightarrow (\underline{\underline{C}}^q, s)$ <u>un germe d'application analytique stable, factorisé en une immersion</u> $\underline{\underline{C}}^m \hookrightarrow \underline{\underline{C}}^n \times \underline{\underline{C}}^q$ , <u>suivie de la projection</u> $p : \underline{\underline{C}}^n \times \underline{\underline{C}}^q \longrightarrow \underline{\underline{C}}^q$ , <u>et supposons</u> $p$ <u>stratifiée comme en</u> 2.4. <u>Soient</u> $C$ <u>le lieu critique de</u> $f$ , $D = f(C)$ <u>son lieu discriminant,</u> $Y$ <u>une strate contenue dans</u> $D$ . <u>Pour tout</u> $y \in Y$ <u>assez proche de</u> $s$ , <u>il existe un voisinage</u> $W$ <u>de</u> $y$ <u>dans</u> $Y$ , <u>un voisinage</u> $W'$ <u>de</u> $C \cap p^{-1}(W)$ <u>dans</u> $p^{-1}(Y)$ , <u>et un homéomorphisme</u>

$$W' \xrightarrow{\sim} W \times (W' \cap p^{-1}(y)) ,$$

<u>compatible aux structures naturelles d'ensembles stratifiés des deux membres,</u>

<u>et aux projections sur</u> $Y$ .

Il résulte donc de cet énoncé que deux fibres situées au-dessus de deux points d'une même strate sont topologiquement équivalentes au voisinage de leur lieu singulier.

Pour prouver cet énoncé, il suffit de reprendre la méthode employée par Mather dans [10] pour prouver le premier théorème d'isotopie dans le cas global. Nous emploierons les mêmes notations qu'en 2.4. Remarquons d'abord que le lieu critique $C$ de $f$ est fini sur $V$ au voisinage de $x$ . En effet, $f$ étant stable, le point $x$ est isolé dans la fibre de $C$ en $s$ , donc $C$ est fini sur $V$ au voisinage de $x$ d'après le théorème de préparation de Weierstrass. Nous supposerons donc $U$ et $V$ choisis de sorte que $C$ soit fini sur $V$ .

Comme le théorème est local en $y$ , on peut supposer que $Y$ est un ouvert de $\underline{\underline{C}}^k$ , et que $y$ en est l'origine. Nous identifierons $\underline{\underline{C}}^k$ à $\underline{\underline{R}}^{2k}$ , et nous oublierons la structure analytique de la stratification, pour travailler avec la structure $C^\infty$ sous-jacente. Tout champ de vecteurs sur $Y$ se relève alors en un "champ de vecteurs controlé" sur $E = p^{-1}(Y)$ , et un tel champ de vecteurs définit un groupe local à un paramètre sur $E$ , induisant un groupe local à un paramètre sur toute strate de $E$ (cf. [10], 9.1 et 10.1, ou [19]). Soient $\partial_1, \dots, \partial_{2k}$ les champs de vecteurs sur $Y$ correspondant aux coordonnées de $\underline{\underline{R}}^{2k}$ , et $\alpha_1, \dots, \alpha_{2k}$ les groupes locaux à un paramètre correspondants sur $E$ ; si $z \in E$ et $t \in \underline{\underline{R}}$ sont tels que $(z,t)$ appartienne à l'ouvert de définition de $\alpha_i$ , et si $p(z)$ a pour coordonnées $z_1, \dots, z_{2k}$ , alors $p(\alpha_i(z,t))$ a pour coordonnées $z_1, \dots, z_i + t, \dots, z_{2k}$ . Puisque la fibre de $C$ au-dessus de $y$ est finie, on peut en choisir un voisinage compact $K$ dans $p^{-1}(y)$ . Il existe alors un intervalle $[a_1,b_1]$ de $\underline{\underline{R}}$ , avec $a_1 < 0$, $b_1 > 0$ , tel que $K\times[a_1,b_1]$ soit contenu dans l'ouvert de définition $U_1$ de $\alpha_1$ ; l'image $K_1$ de $K\times[a_1,b_1]$ par $\alpha_1$ est un compact de $E$ , et il existe de même un intervalle $[a_2,b_2]$ tel que $K_1\times[a_2,b_2]$ soit contenu dans l'ouvert de définition $U_2$ de $\alpha_2$ ; on obtient ainsi par récurrence une suite de compacts $K_i$ et d'intervalles $[a_i,b_i]$ de $\underline{\underline{R}}$ , $i = 1,\dots,2k$ , tels que $K_{i-1}\times[a_i,b_i]$ soit contenu dans l'ouvert de définition de $\alpha_i$ , et $K_i = \alpha_i(K_{i-1}\times[a_i,b_i])$. On définit alors une application continue

$$\alpha : K \times [a_1,b_1] \times \dots \times [a_{2k}, b_{2k}] \longrightarrow K_{2k}$$

en posant

$$\alpha\,(x,t_1,\dots,t_{2k}) = \alpha_{2k}(\alpha_{2k-1}(\dots(\alpha_1(x,t_1),\dots t_{2k-1}),t_{2k}) \quad .$$

L'application $\alpha$ commute aux projections sur $Y$ par construction, et est compatible aux stratifications car chacun des $\alpha_i$ l'est. Il est d'autre part facile de vérifier que $\alpha$ est un homéomorphisme, et que l'image par $\alpha$ de $\mathring{K} \times ]a_1,b_1[ \times \dots \times ]a_{2k},b_{2k}[$ est un ouvert dans $E$ . On prend alors pour $W$ le produit $]a_1,b_1[ \times \dots \times ]a_{2k},b_{2k}[$ , et pour $W'$ l'image de $\mathring{K}\times W$ par $\alpha$. Pour achever la démonstration de 2.5, il suffit de vérifier que $W'$ contient $C \cap p^{-1}(W)$ . Or, au-dessus de $Y$ , $C$ est une réunion de strates d'image $Y$ par $p$ . D'après la condition v) de 2.4, la restriction de $p$ à chacune de ces strates est un isomorphisme local, puisque $C$ est fini sur $V$ ; en particulier, le nombre de points de $C$ au-dessus d'un point de $Y$ est constant sur $Y$ . Comme $\alpha$ est compatible aux stratifications, le nombre de points de $C$ au-dessus d'un point de $W$ appartenant à $W'$ est aussi constant, d'où le résultat puisque $W' \cap p^{-1}(y)$ contient $C \cap p^{-1}(y)$ .

<u>Remarque</u> 2.6.- Le premier théorème d'isotopie peut aussi s'appliquer pour chaque strate $Z$ de $U$ à la rétraction $\pi_Z : T_Z \longrightarrow Z$ , ce qui montre que le type topologique d'une fibre de $f$ au voisinage de l'un de ses points singuliers reste constant le long de la strate de celui-ci dans $U$ .

2.7. Comme l'a remarqué Pham ([13]), la classification que l'on obtient au moyen de la stratification de Thom est en fait plus fine que l'équivalence topologique. Pour le voir, nous admettrons un résultat plus précis de Thom sur les morphismes stratifiés : avec les notations précédentes, il existe en $y$ un germe de sous-variété $Z$ de $V$ , transverse à $Y$ en $y$ , un voisinage $V'$ de $y$ dans $V$ , un voisinage $W'$ de $C \cap p^{-1}(V')$ et des germes d'homéomorphismes rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (W' \cap p^{-1}(Z)) \times (Y \cap V') & \xrightarrow{\sim} & W' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z \times (Y \cap V') & \xrightarrow{\sim} & V' \end{array} .$$

Supposons maintenant que $X_o$ soit un germe d'intersection complète à singularité isolée plongé dans $\underline{\underline{C}}^n$ , et soit $f : (\underline{\underline{C}}^m, x) \longrightarrow (\underline{\underline{C}}^q, s)$ une déformation verselle de $X_o$ , qu'on suppose plongée dans $p : (\underline{\underline{C}}^{n+q}, x) \longrightarrow (C^q, s)$, et stratifiée comme précédemment. Si $y$ est un point de $\underline{\underline{C}}^q$ assez proche de $s$ , et $x'$ un point de $\underline{\underline{C}}^m$ au-dessus de $y$ , le germe de $f$ en $x'$ est encore une déformation verselle de la fibre de $f$ en $y$ au voisinage de $x'$ : céla résulte du critère 1.2 ii) (cf. [18] II, § 2 pour une démonstration en forme). Utilisant le diagramme précédent, on voit donc que si $y$ et $y'$ sont deux points d'une même strate $Y$ assez proches de $s$ , les fibres de $f$ en $y$ et $y'$ ont des déformations verselles topologiquement équivalentes (au voisinage de leur lieu critique), puisqu'homéomorphes au produit de la déformation $W' \cap p^{-1}(Z) \longrightarrow Z$ par le germe de variété $Y \cap V'$. On est ainsi amené à introduire la notion d'équivalence topologique universelle.

DEFINITION 2.8.- Soient $X_o$ et $Y_o$ deux germes d'intersection complète à singularité isolée, plongés dans $\underline{\underline{C}}^n$. On dira qu'ils ont même type topologique universel s'ils possèdent des déformations verselles topologiquement équivalentes.

La stratification de Thom classifie donc les déformations d'un germe d'intersection complète à singularité isolée selon l'équivalence topologique universelle.

THEOREME 2.9.-(Pham [13]).- L'équivalence topologique universelle est strictement plus fine que l'équivalence topologique.

Nous allons donner un exemple de germe de courbe plane $X_o$, de déformation semi-universelle $f : X \longrightarrow T$, telle qu'il existe un germe de sous-variété $T_1 \subset T$ au-dessus duquel $f$ est topologiquement une fibration, et des points $y$, $z \in T_1$ tels que la déformation verselle de la fibre $X_y$ de $f$ en $y$ (induite par $f$) contienne une fibre qui n'est topologiquement équivalente à aucune fibre de la déformation verselle de la fibre $X_z$ de $f$ en $z$ (induite par $f$). Comme toute déformation verselle de $X_y$ (resp. $X_z$) contient au moins une fibre isomorphe à la fibre considérée (resp. ne contient que des fibres isomorphes à celles de la déformation verselle considérée), les germes de courbes planes $X_y$ et $X_z$, bien que topologiquement équivalents, ne le sont pas universellement.

2.10. Avant de donner l'exemple de Pham, rappelons sommairement quelques invariants topologiques des germes de courbes planes. Soit $X_o \subset \underline{\underline{C}}^2$ un germe de courbe plane au voisinage de l'origine ; il est bien connu que son type topologique est entièrement déterminé par son intersection avec une petite sphère $S^3_\epsilon$ centrée à l'origine. Si $X_o$ est irréductible, cette intersection est un noeud, et il est décrit par une suite finie de nombres rationnels, les exposants caractéristiques de Puiseux (voir [6]).

i) Le nombre de composantes irréductibles de $X_o$ est un invariant topologique, car c'est le nombre de composantes connexes de $S^3_\epsilon \cap X_o$ .

ii) La multiplicité de $X_o$ à l'origine est également un invariant topologique. En effet, dans le cas où $X_o$ est irréductible, c'est le p.p.c.m. des dénominateurs des exposants de Puiseux du noeud correspondant ; dans le cas général, c'est la somme des multiplicités des composantes irréductibles de $X_o$ .

iii) Soit $m$ la multiplicité de $X_o$ , et supposons les coordonnées choisies de façon que l'équation de $X_o$ s'écrive

(2.10.1) $$y^m + a_2(x)y^{m-2} + \dots + a_m(x) = 0 \quad .$$

Soit $\eta_i$ l'ordre de la série $a_i(x)$ , et posons $\alpha_i = \operatorname{Inf}_i \eta_i/i$ ; le nombre rationnel $\alpha_i$ ne dépend pas du choix des coordonnées telles que l'équation de $X_o$ ait la forme (2.10.1), et est appelé <u>exposant de contact</u> de $X_o$ ; on peut encore montrer que c'est un invariant topologique de $X_o$ (cf. [22]).

2.11. Considérons maintenant le germe de courbe plane $X_o$ d'équation

(2.11.1) $$F_o(x,y) = y^3 + x^9 = 0 \quad .$$

D'après 1.2, sa déformation semi-universelle dépend de 16 paramètres $u_0,\ldots,u_7,v_0,\ldots,v_7$ , et est représentée par la projection $f$ de l'hypersurface $X$ de $\underline{\underline{C}}^{18}$ d'équation

$$F(x,y,u,v) = y^3 + \underline{u}(x)y + \underline{v}(x) \quad , \tag{2.11.2}$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{u}(x) &= u_0 + u_1 x + \ldots + u_7 x^7 \quad , \\ \underline{v}(x) &= v_0 + v_1 x + \ldots + v_7 x^7 + x^9 \quad , \end{aligned} \tag{2.11.3}$$

sur l'espace $T$ des coordonnées $u$ , $v$ .

Soit $X_1 \subset X$ l'ensemble des points $\xi = (x,y,u,v)$ qui sont de multiplicité $3$ dans leur fibre $f^{-1}(f(\xi))$ , et d'exposant de contact maximum. Pour qu'un point soit de multiplicité $3$ dans sa fibre, il est nécessaire que $y = 0$ . D'autre part, l'ordre en un point de $\underline{u}(x)$ (resp. $\underline{v}(x)$) est au plus $7$ (resp. $9$) , de sorte que l'exposant de contact d'une fibre de $f$ en un point de $X$ de multiplicité $3$ est toujours $\leqslant 3$ . Il est effectivement égal à $3$ en un point où $x$ est racine d'ordre $9$ de $\underline{v}(x)$ , et d'ordre au moins $6$ de $\underline{u}(x)$ . Comme la somme des racines de $\underline{v}(x)$ est nulle, cela implique que $x = 0$ , donc que $u_0 = \ldots = u_5 = 0$ , et $v_0 = \ldots = v_7 = 0$ . Inversement, tout point $\xi$ dont les coordonnées $x$, $y$, $u_0,\ldots,u_5$, $v_0,\ldots,v_7$ sont nulles appartient bien à $X_1$ . On notera $T_1$ la projection de $X_1$ sur $T$ ; c'est donc le plan de coordonnées $(u_6,u_7)$.

La déformation induite par $f$ au-dessus de $T_1$ a donc pour équation

$$y^3 + (u_6 x^6 + u_7 x^7)y + x^9 = 0 \quad . \tag{2.11.4}$$

Considérée comme polynôme en $y$ , cette équation a pour discriminant

$$4(u_6 x^6 + u_7 x^7)^3 + 27x^{18} = x^{18}(27 + 4(u_6 + u_7 x)^3) \quad .$$

Ce discriminant est donc le produit d'une puissance de $x$ par une série inversible en $x, u_6, u_7$ ; d'après un résultat de Zariski ([21], 7.4 et suite), ceci entraine que la déformation induite au-dessus de $T_1$ est localement topologiquement triviale.

Regardons maintenant le lieu $T_2$ des points de $T$ tels que la fibre de $f$ au-dessus d'un point de $T_2$ ait deux points singuliers distincts, de multiplicité $3$, et d'exposants de contact respectivement $\geqslant 4/3$ et $\geqslant 5/3$. En un tel point singulier, la coordonnée $y$ est nulle. Soient $\alpha$ et $\beta$ les valeurs de la coordonnée $x$ aux deux points singuliers. Pour que le point de coordonnées $(0,\alpha)$ soit d'exposant de contact $\geqslant 4/3$, il faut et suffit que $\alpha$ soit racine d'ordre $\geqslant 3$ de $\underline{u}(x)$, et d'ordre $\geqslant 4$ de $\underline{v}(x)$ ; de même $\beta$ doit être racine d'ordre $\geqslant 4$ de $\underline{u}(x)$ et d'ordre $\geqslant 5$ de $\underline{v}(x)$. Au-dessus d'un point de $T_2$, $\underline{u}(x)$ est donc de la forme $u_7(x-\alpha)^3\,(x-\beta)^4$, et $\underline{v}(x)$ de la forme $(x-\alpha)^4\,(x-\beta)^5$ ; comme la somme des racines de $\underline{v}(x)$ est nulle, $4\alpha + 5\beta = 0$, donc $T_2$ est l'image de $\underline{\underline{C}}\times(\underline{\underline{C}} - \{0\})$ par l'application algébrique qui associe à un élément $(a,b)$ le point dont la coordonnée $u_7$ est $a$, et les autres sont données en fonction de $b$ en posant $\alpha = 5b$, $\beta = -4b$.

Soit alors $\overline{T}_2$ l'adhérence de $T_2$ dans $T$, et calculons l'intersection $T_3 = \overline{T}_2 \cap T_1$. Si $t \in T_3$, c'est la limite d'une suite de points $t_i$ de $T_2$. La coordonnée $v_0$ des $t_i$ tend donc vers $0$ ; si $t_i$ est l'image de $(a_i, b_i)$, sa coordonnée $v_0$ est $-\alpha^4\beta^5 = -5^4 4^5 b_i^9$, donc la suite des $b_i$ tend vers $0$ ; il en est de même pour les racines de $\underline{u}(x)$ et $\underline{v}(x)$ au-dessus des $t_i$, et par suite la coordonnée $u_6$ des $t_i$ tend aussi vers $0$. Il en résulte que $T_3$ est défini dans $T_1$ par l'équation $u_6 = 0$, i.e. est l'axe des $u_7$.

Soient $y \in T_3$, et $z \in T_1$ tel que $z \notin T_3$ , $y$ et $z$ étant suffisamment proches de $0$ , et soient $X_y$ et $X_z$ les fibres au-dessus de $y$ et $z$. Comme $y$ est adhérent à $T_2$ , la déformation verselle de $X_y$ obtenue en restreignant $f$ à un voisinage convenable de $y$ contient des fibres ayant deux points singuliers de multiplicité $3$ et d'exposants de contact $4/3$ et $5/3$. Par contre, comme $z \in T_3$ , on obtient une déformation verselle de $X_z$ en restreignant $f$ à un petit voisinage de $z$ ne rencontrant pas $T_2$ , et il n'existe pas dans cette déformation verselle de fibres ayant deux points singuliers de multiplicité $3$ et d'exposants de contact $4/3$ et $5/3$ . D'après 2.10, il n'existe donc pas dans la déformation verselle de $X_z$ de fibre topologiquement équivalentes aux fibres de la déformation verselle de $X_y$ situées au-dessus de $T_2$ , ce qui achève la démonstration de 2.9.

## 3. Symbole de Boardman.

Le problème, que nous abordons maintenant, consiste à attacher à toute singularité des invariants numériques au moyen desquels on espère pouvoir décrire "la" stratification de Thom.

Le premier invariant qu'il est naturel d'introduire est le symbole de Boardman. L'idée, due à Thom, est la suivante : soit $f : U \longrightarrow V$ un morphisme de variétés analytiques (resp. différentiables) ; on regarde l'ensemble des points de $U$ où le noyau de l'application tangente à $f$ est de dimension donnée ; on obtient ainsi une partition de $U$ , et, pour "presque tout" $f$ , les sous-ensembles ainsi définis sont des sous-variétés (localement fermées) de $U$ ; on applique alors la même construction à la restriction de $f$ à chacune de ces sous-variétés, etc... ; tout point de $U$ appartient de la sorte à une suite décroissante de sous-variétés de $U$ , et en prenant la dimension du noyau de l'application tangente à la restriction de $f$ à chacune de ces sous-variétés, on associe au point considéré une suite décroissante d'entiers, le symbole de $f$ en ce point. La difficulté, lorsqu'on adopte cette présentation, est de prouver que l'on obtient bien à chaque pas des sous-variétés, pour presque tout $f$ . C'est ce qui a amené Boardman ([3]) à reformuler la définition du symbole en construisant les sous-variétés cherchées de façon "universelle" dans l'espace des jets (voir aussi la thèse de Morin [12]).

3.1. Fixons d'abord quelques notations. Si $M$ est une matrice $m \times n$ à coefficients dans un anneau $B$ , il sera commode de pouvoir parler des mineurs d'ordre $k$ de $M$ pour tout $k \in \underline{\underline{Z}}$ : si $k \leq 0$ , les mineurs d'ordre $k$ seront égaux à $1$ , et si $k > \inf(m,n)$ , ils seront égaux à $0$ .

Soient $A$ un anneau, $B$ une $A$-algèbre, $I$ un idéal de $B$, $D_1,\ldots,D_n$ une famille de $A$-dérivations de $B$ dans $B$ . Pour tout entier $k$ , nous noterons $\Delta^k(I)$ l'idéal de $B$ engendré par $I$ et par les déterminants d'ordre $n-k+1$ de la forme $\det(D_{i_\alpha}(x_\beta))$ , avec $\alpha$ , $\beta = 1,\ldots,n-k+1$ , et les $x_\beta$ étant des éléments de $I$ . Compte tenu des conventions précédentes, on obtient de la sorte une suite croissante d'idéaux telle que

$$I = \Delta^o(I) \subset \Delta^1(I) \subset \cdots \subset \Delta^n(I) \subset \Delta^{n+1}(I) = B \quad .$$

Il est clair que si $I$ est engendré par une famille $x_j$ d'éléments de $B$ , l'idéal $\Delta^k(I)$ est engendré par $I$ et par les déterminants d'ordre $n-k+1$ de la forme $\det(D_{i_\alpha}(x_{j_\beta}))$ . De même, $\Delta^k(I)$ ne dépend que du sous-module engendré dans le $B$-module des $A$-dérivations de $B$ par $D_1,\ldots,D_n$ , et de l'entier $n$ , et non du choix des générateurs $D_1,\ldots,D_n$ de ce sous-module.

3.2. Soient $U$ , $V$ deux variétés analytiques ; pour tout $k$ , nous noterons $J^k(U,V)$ la variété des jets d'ordre $k$ d'applications analytiques de $U$ dans $V$ , $p_k$ et $q_k$ ses projections sur $U$ et $V$ . Il sera commode de considérer également la "variété" des jets d'ordre infini

$$J^{\infty}(U,V) = \varprojlim_{k} J^k(U,V) \quad ,$$

munie de la topologie limite projective des topologies des $J^k(U,V)$ ; on notera $\pi_k$ la projection de $J^{\infty}(U,V)$ sur $J^k(U,V)$ , $p$ et $q$ les projections de $J^{\infty}(U,V)$ sur $U$ et $V$ ; on dira enfin qu'une fonction à valeurs complexes sur un ouvert de $J^{\infty}(U,V)$ est holomorphe si elle est localement de la forme $\varphi \circ \pi_k$ , où $\varphi$ est une fonction holomorphe sur un ouvert de $J^k(U,V)$ : on définit ainsi un faisceau de $\underline{\underline{C}}$-algèbres $\underline{O}_{J^{\infty}}$ sur $J^{\infty}(U,V)$ .

On sait que le faisceau $\underline{T}_U$ des champs de vecteurs holomorphes sur $U$ agit de façon naturelle sur $\underline{O}_{J^{\infty}}$ (c'est la "connexion canonique" de $J^{\infty}(U,V)$ - cf. [12]). Rappelons comment on peut définir cette action en termes de coordonnées locales. Soient $x$ un point de $U$ , $y$ un point de $V$ , $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ des coordonnées sur $U$ au voisinage de $x$ , et $(y_j)_{j=1,\dots,p}$ des coordonnées sur $V$ au voisinage de $y$ . On en déduit un système de coordonnées sur $J^{\infty}(U,V)$ au voisinage de $\pi_o^{-1}(x,y)$ , notées $X_i$, $Y_j$, $Z_{j,\sigma}$ , avec $1 \leqslant i \leqslant n$ , $1 \leqslant j \leqslant p$ , et $\sigma$ parcourant l'ensemble des multi-indices $(\sigma_1,\dots,\sigma_n) \neq (0,\dots,0)$, tel que

$$X_i = x_i \circ p \quad , \quad Y_j = y_j \circ q \quad , \quad Z_{j,\sigma} \circ Jf = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\sigma_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\sigma_n} (y_j \circ f) \quad ,$$

pour tout germe d'application analytique $f : U \longrightarrow V$ au point $x$ . L'action des champs de vecteurs holomorphes sur $U$ est alors définie en se donnant l'action des $\partial/\partial x_i$ sur ces coordonnées, et on pose

$$\partial/\partial x_i(X_k) = \delta_{i,k} \quad , \quad \partial/\partial x_i(Y_j) = Z_{j,\underline{\underline{1}}_i} \quad , \quad \partial/\partial x_i(Z_{j,\sigma}) = Z_{j,\sigma+\underline{\underline{1}}_i} \ ,$$

où $\underline{\underline{1}}_i = (0,\ldots,1,\ldots,0)$ , le $1$ étant à la $i$-ième place.

On peut considérer de la sorte $p^*(\underline{T}_U)$ comme un sous-faisceau du faisceau des $\underline{\underline{C}}$-dérivations de $\underline{O}_{J^\infty}$ dans lui-même. Soient $\xi$ un point de $J^\infty(U,V)$ , $x = p(\xi)$ , $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ un système de coordonnées sur $U$ au voisinage de $x$ , $E$ une partie de $\underline{O}_{J^\infty,\xi}$ ; on appellera <u>rang</u> de $E$ le maximum des rangs des matrices de la forme $(\partial\varphi_j/\partial x_i(\xi))$ , où les $\varphi_j$ appartiennent à $E$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ . Il est clair que l'entier ainsi obtenu ne dépend pas du choix des coordonnées sur $U$ , et que lorsque $E$ est un idéal propre de $\underline{O}_{J^\infty,\xi}$ on peut remplacer $E$ par un système de générateurs de $E$ . On posera

$$\mathrm{corang}(E) = n - \mathrm{rang}(E) \ .$$

3.3. Soient $\xi \in J^\infty(U,V)$ , $y = q(\xi)$ ; on notera $q^*(\mathfrak{m}_y)$ l'idéal de $\underline{O}_{J^\infty,\xi}$ engendré par $\mathfrak{m}_y$ .

Soit $I = (i_1,\ldots,i_k)$ une suite d'entiers positifs ou nuls. On lui associe un sous-ensemble $\Sigma^I \subset J^\infty(U,V)$ , défini par les conditions suivantes :

$$(3.3.1) \qquad \xi \in \Sigma^I \iff \begin{cases} \mathrm{corang}_\xi(q^*(\mathfrak{m}_y)) = i_1 \ , \\ \mathrm{corang}_\xi(\Delta^{i_1}(q^*(\mathfrak{m}_y))) = i_2 \ , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ , \\ \mathrm{corang}_\xi(\Delta^{i_{k-1}}(\ldots\Delta^{i_1}(q^*(\mathfrak{m}_y))\ldots)) = i_k \ , \end{cases}$$

où $y = q(\xi)$ , et les opérations $\Delta^i$ sont définies par 3.1, relativement aux dérivations $\partial/\partial x_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ où les $x_i$ sont des coordonnées de $U$ au voisinage de $x = p(\xi)$ (ou, si l'on préfère, relativement au sous-module $p^*(\underline{T}_U)_\xi$ du module des $\underline{\underline{C}}$-dérivations de $\underline{O}_{J^\infty,\xi}$ et à l'entier $n = \dim(U)$) .

De cette définition, on tire facilement les remarques suivantes :

i) $\Sigma^I = \bigcup_{j \in \underline{\underline{N}}} \Sigma^{(I,j)}$ , la réunion étant disjointe.

ii) Pour que $\Sigma^I$ soit non vide, il est nécessaire que les trois conditions suivantes soient vérifiées (avec $n = \dim(U)$ , $p = \dim(V)$) :

a) $i_1 \geqslant \ldots \geqslant i_k$ ;

b) $n - p \leqslant i_1 \leqslant n$ ;

c) si $i_1 = n - p$ , alors $i_1 = \ldots = i_k = n - p$ .

La condition a) est claire ; la condition b) vient de ce que $q^*(\mathfrak{M}_y)$ est engendré par $p$ éléments, et la condition c) aussi, compte tenu des conventions de 3.1.

iii) Si on prend des coordonnées locales au voisinage de $\xi$ comme en 3.2, on voit que les relations (3.3.1) ne font intervenir que les coordonnées $Z_{j,\sigma}$ telles que $|\sigma| \leqslant k$ . Par suite, $\Sigma^I = \pi_k^{-1}(\Sigma_k^I)$ , où $\Sigma_k^I$ est le sous-ensemble de $J^k(U,V)$ défini par les conditions (3.3.1).

iv) Supposons que $U = \underline{\underline{C}}^n$ , $V = \underline{\underline{C}}^p$ ; alors $\Sigma_k^I$ est localement fermé pour la topologie de Zariski de $J^k(U,V)$ . En effet, $\Sigma_1^{i_1}$ est par exemple le complémentaire, dans l'ensemble des zéros des déterminants d'ordre $n - i_1 + 1$ de la matrice $(\partial/\partial x_i(Y_j)) = (Z_{j,\underline{1}_i})$ , de l'ensemble des zéros des déterminants d'ordre $n - i_1$ de cette matrice ; le cas général se voit de même par récurrence. Sans hypothèse sur U et V , on en déduit que $\Sigma_k^I$ peut être muni d'une structure naturelle de sous-ensemble analytique localement fermé de $J^k(U,V)$ .

Soit $f : U \longrightarrow V$ une application analytique. On en déduit une section analytique $Jf : U \longrightarrow J^k(U,V)$ pour tout $k$ , et par passage à la limite, un morphisme d'espaces annelés $Jf : U \longrightarrow J^\infty(U,V)$ . On posera

$$\Sigma^I(f) = Jf^{-1}(\Sigma^I) \quad .$$

On a donc $\Sigma^I(f) = Jf^{-1}(\pi_k^{-1}(\Sigma_k^I)) = Jf^{-1}(\Sigma_k^I)$ , si bien que les $\Sigma^I(f)$ sont de façon naturelle des sous-ensembles analytiques de U . Pour $j$ variable, les $\Sigma^{i_1,\ldots,i_{k-1},j}(f)$ forment encore une partition de $\Sigma^{i_1,\ldots,i_{k-1}}(f)$ .

THEOREME 3.4. (Boardman [3]).- <u>Soient</u> U <u>et</u> V <u>deux variété analytiques de dimension</u> n <u>et</u> p .

i) <u>Les</u> $\Sigma^I$ <u>sont des sous-variétés de</u> $J^\infty(U,V)$ (<u>i.e. les</u> $\Sigma_k^I$ <u>des sous-variétés de</u> $J^k(U,V)$) , <u>non vides si et seulement si</u> I <u>vérifie les conditions</u> a), b) <u>et</u> c) <u>de</u> 3.3.

ii) <u>La codimension de</u> $\Sigma^I$ <u>dans</u> $J^\infty(U,V)$ (<u>i.e. de</u> $\Sigma_k^I$ <u>dans</u> $J^k(U,V)$) <u>est donnée par</u>

$$\nu_I = (p-n+i_1)\mu_{i_1,\ldots,i_n} - (i_1 - i_2)\mu_{i_2,\ldots,i_n} - \ldots - (i_{n-1} - i_n)\mu_{i_n} \quad ,$$

<u>avec</u> $I = (i_1,\ldots,i_n)$ , <u>et</u> $\mu_{i_1,\ldots,i_k}$ <u>étant le nombre de suites</u> $j_1,\ldots,j_k$ <u>décroissantes, telles que</u> $j_\alpha \leqslant i_\alpha$ <u>pour tout</u> $\alpha$ , <u>et</u> $j_1 \neq 0$ .

iii) <u>L'ensemble des applications analytiques</u> $f : U \longrightarrow V$ <u>telles que la section</u> Jf <u>soit transverse à toutes les variétés</u> $\Sigma^I$ <u>est partout dense dans l'ensemble des applications analytiques de</u> U <u>dans</u> V .

iv) <u>Si</u> $f : U \longrightarrow V$ <u>est telle que</u> Jf <u>soit transverse à</u> $\Sigma^I$ , <u>alors</u>

$\Sigma^I(f)$ <u>est une sous-variété de</u> $U$ , <u>et pour tout entier</u> $j$

$$\Sigma^{I,j}(f) = \left\{ x \in \Sigma^I(f) \,\middle|\, \dim \operatorname{Ker}(T_x(f|_{\Sigma^I(f)})) = j \right\} ,$$

$T_x$ <u>désignant l'application tangente en</u> $x$ .

Pour tout $k$ , les $\Sigma^I(f)$ où $I$ parcourt l'ensemble des suites de longueur $k$ forment une partition de $U$ . Si $x \in U$ , il existe donc une unique suite $i_1 \geqslant \dots \geqslant i_k \geqslant \dots$, illimitée (mais stationnaire !) telle que pour tout $k$ le point $x$ appartienne à la sous-variété $\Sigma^{i_1,\dots,i_k}(f)$ ; cette suite est appelée <u>symbole de</u> $f$ <u>au point</u> $x$ . Les $\Sigma^I$ seront appelées <u>variétés de Boardman</u>, ou <u>variétés de symbole</u>, de même que les $\Sigma^I(f)$ lorsque ce sont des variétés.

3.5. Le symbole de $f$ en un point peut se calculer à partir de l'anneau local de la fibre de $f$ en ce point. En effet, soient $x$ un point de $U$ , $y = f(x)$ , $J$ l'idéal de $\underline{O}_{U,x}$ engendré par l'image de $\mathfrak{m}_y$ . Considérons la suite croissante d'idéaux

$$J = \Delta^0(J) \subset \Delta^1(J) \subset \dots \subset \Delta^n(J) \subset \Delta^{n+1}(J) = \underline{O}_{U,x} ,$$

les opérations $\Delta^i$ étant définies à partir d'une base $\partial/\partial x_i$ de $\underline{T}_{U,x}$ , et soit $i_1$ le plus grand entier $i$ tel que $\Delta^i(J) \neq \underline{O}_{U,x}$ . Il revient au même de dire que $i_1$ est le plus grand entier $i$ tel que tous les déterminants d'ordre $n - i + 1$ de la forme $\det(\partial\varphi_j/\partial x_i)$ , avec $\varphi_j \in J$ , soient nuls au point $x$ , i.e. que le corang de $J$ est égal à $i_1$ . Il en résulte que l'entier $i_1$ ainsi défini n'est autre que le premier entier du symbole de $f$ en $x$ (car les relations (3.2.1) et (3.2.2) montrent que les sections $Jf$ commutent à l'action des champs de vecteurs sur $U$ , à la formation des $\Delta^i$ et au calcul des corangs). On peut de même définir par récurrence des entiers $i_k$, par la condition que $i_k$ soit le plus grand entier i tel que $\Delta^i(\Delta^{i_{k-1}}(\ldots \Delta^{i_1}(J)\ldots)) \neq \underline{O}_{U,x}$, et la suite d'entiers $i_1, \ldots, i_k, \ldots$ est le symbole de f en x.

Remarquons alors que l'entier $i_1$ ne dépend que de l'algèbre analytique quotient $A = \underline{O}_{U,x}/J$, et non de son écriture comme quotient d'une algèbre analytique régulière. En effet, si on écrit de deux façons différentes A comme quotient d'une algèbre analytique régulière

$$\begin{array}{ccc} \underline{\underline{C}}\{x_1, \ldots, x_n\} & \xrightarrow{\ \pi\ } & A \\ \lambda \Big\uparrow & & \Big\uparrow \sigma \\ \underline{\underline{C}}\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\} & \xrightarrow[\mu]{} & \underline{\underline{C}}\{y_1, \ldots, y_m\} \end{array} ,$$

on peut trouver des homomorphismes surjectifs $\lambda$ et $\mu$ de façon à ce que le diagramme soit commutatif. Il suffit de comparer les entiers $i_1$ obtenus pour $\pi$ et $\pi \circ \lambda$ ; par récurrence, on se ramène à la situation $\underline{\underline{C}}\{x_1, \ldots, x_n, y\} \xrightarrow{\lambda} \underline{\underline{C}}\{x_1, \ldots, x_n\} \xrightarrow{\pi} A$, et, par changement de variable, on peut supposer que y appartient au noyau de $\lambda$. On calcule alors les déterminants en jeu au moyen d'une famille $f_1, \ldots, f_p$ de générateurs de $\mathrm{Ker}(\pi)$ et des dérivations $\partial/\partial x_i$ en ce qui concerne $\mathrm{Ker}(\pi)$, et au moyen de la famille $f_1, \ldots, f_p$, y de générateurs de $\mathrm{Ker}(\pi \circ \lambda)$ et des dérivations $\partial/\partial x_i$ et $\partial/\partial y$ en ce qui concerne $\mathrm{Ker}(\pi \circ \lambda)$ ; l'invariance de $i_1$ en résulte immédiatement.

Le même argument montre que l'anneau quotient $\underline{O}_{U,x}/\Delta^{i_1}(J)$ ne dépend que de A, et non de sa présentation $\underline{O}_{U,x}/J$. Appliquant à $\underline{O}_{U,x}/\Delta^{i_1}(J)$ le résultat précédent, et raisonnant par récurrence, on en déduit donc que le symbole de $f$ en $x$ ne dépend que de l'algèbre quotient $\underline{O}_{U,x}/J$ , qui est l'anneau local en $x$ de la fibre de $f$ , et il en est de même pour les algèbres

$$\nabla^{i_1,\ldots,i_k}(A) = \nabla_x^{i_1,\ldots,i_k}(f) = \underline{O}_{U,x} / \Delta^{i_k}(\ldots(\Delta^{i_1}(J))\ldots) \quad ,$$

où $i_1,\ldots,i_k$ sont les $k$ premiers termes du symbole de $f$ en $x$. Ces algèbres analytiques s'interprètent du reste comme étant les anneaux locaux en $x$ des sous-ensembles analytiques $f^{-1}(f(x)) \cap \Sigma^{i_1,\ldots,i_k}(f)$ , grâce à la description esquissée en 3.3 iv) de la structure de sous-variété des $\Sigma^{i_1,\ldots,i_k}$ et à la définition des $\Delta^i$ . Pour toute algèbre analytique $A$ , l'algèbre $\nabla^{i_1,\ldots,i_k}(A)$ définie par la méthode précédente sera appelée k-ième quotient jacobien critique de $A$ .

Exemple 3.6.- La méthode exposée en 3.5 nous fournit un procédé pratique de calcul des variétés de symbole $\Sigma^I(f)$ . A titre d'exemple, regardons l'application $f : \underline{\underline{C}}^2 \longrightarrow C^2$ définie par $f(x,y) = (x^3 + xy , y)$ (déformation semi-universelle de la singularité $\underline{\underline{C}}\{x\}/(x^3))$ . Son lieu critique est le lieu des zéros du déterminant des dérivées partielles premières

$$\begin{vmatrix} 3x^2 + y & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} ,$$

i.e. la parabole $3x^2 + y = 0$ . Hors du lieu critique, $f$ est un isomorphisme local, donc son symbole est $(0,0,\ldots)$ . Un point $x$ de $U$ appartient à $\Sigma^i(f)$ si et seulement si les mineurs d'ordre $2 - i + 1$ du déterminant précédent s'annulent en $x$ , l'un au moins des déterminants d'ordre $2 - i$ ne s'y annulant pas ; il en résulte que les $\Sigma^i(f)$ pour $i \geqslant 2$ sont vides, et que $\Sigma^1(f)$ est égal au lieu critique. Pour calculer les variétés de symbole d'ordre 2, on forme la matrice des dérivées partielles premières des générateurs de $\Sigma^1$ en un point de $U$ :

$$\begin{vmatrix} 3x^2 + y & x \\ 0 & 1 \\ 6x & 1 \end{vmatrix} .$$

Comme précédemment, on voit que les $\Sigma^{1,i}(f)$ sont vides si $i \geqslant 2$, que $\Sigma^{1,1}(f)$ est réduite au point $(0,0)$, et que $\Sigma^{1,0}(f)$ est le complémentaire dans le lieu critique du point $(0,0)$. En un point de la parabole autre que l'origine, le symbole est donc $(1,0,\ldots)$, et à l'origine c'est $(1,1,0,\ldots)$ car l'algèbre $\nabla^{1,1}(f)$ y est égale à $\underline{\underline{C}}$.

3.7. Revenons à la situation étudiée au § 2 : soit $f : \underline{\underline{C}}^m \longrightarrow \underline{\underline{C}}^q$ un germe d'application analytique stable. Alors on peut représenter $f$ par une application analytique $U \longrightarrow V$, où $U$ et $V$ sont des ouverts de $\underline{\underline{C}}^m$ et $\underline{\underline{C}}^p$, de sorte que les $\Sigma^I(f)$ soient des <u>sous-variétés</u> de $U$ pour tout $I$. En effet, le théorème de Boardman montre qu'il existe des germes d'applications analytiques $g$ de $\underline{\underline{C}}^m$ dans $\underline{\underline{C}}^q$ arbitrairement proches de $f$, tels que les $\Sigma^I(g)$ soient des sous-variétés ; utilisant la définition 1.4, et le fait que les symboles sont invariants par isomorphisme analytique, il en est donc de même pour les $\Sigma^I(f)$ au voisinage de l'origine.

L'utilisation des symboles dans la classification des singularités repose alors sur la conjecture suivante :

CONJECTURE 3.8.- <u>Si deux germes d'applications analytiques stables $f$, $g : \underline{\underline{C}}^m \longrightarrow \underline{\underline{C}}^q$ sont topologiquement équivalents (i.e. diffèrent par des germes d'homéomorphismes à la source et au but), ils ont même symbole.</u>

Cette conjecture implique que si $f : \underline{\underline{C}}^m \longrightarrow \underline{\underline{C}}^q$ est un germe d'application stable, alors les $\Sigma^I(f)$ sont réunions de strates de Thom, pour la stratification obtenue en 2.3. C'est clair pour le complémentaire du lieu critique ; soit donc $X$ une strate de Thom contenue dans le lieu critique $C$. Comme la fibre de $f$ à l'origine est à singularité isolée, $C$ est fini sur $\underline{\underline{C}}^q$. Par suite, la restriction de $f$ à $X$ est une submersion de rang $0$, i.e. un isomorphisme local sur $f(X)$. Utilisant la trivialisation locale de $f$ donnée en 2.7, ainsi que l'invariance topologique du symbole, il en résulte que le symbole est localement constant sur $X$. Comme les strates de Thom sont connexes, le symbole est donc constant sur chaque strate, et toute variété de symbole est une union de strates.

3.9. Inversement, les sous-variétés de symbole ne permettent pas de reconstituer les strates de Thom : par exemple, dans les variétés de jets $J^k(U,V)$, les $\Sigma^I_k$ <u>ne forment pas en général une stratification de Thom</u>. L'exemple suivant, donné par Boardman, montre que les $\Sigma^I_k$ ne satisfont pas les conditions d'adhérence 2.4 iii) et iv). Prenons $U = V = \underline{\underline{C}}^2$, et considérons les variétés $\Sigma^{2,0}$ et $\Sigma^{1,1,1,1,1,0}$. Il résulte de la formule de Boardman 3.4 ii) que la codimension de $\Sigma^{2,0}$ est $4$, et celle de $\Sigma^{1,1,1,1,1,0}$ est $5$. Nous allons montrer qu'il existe un point de $\Sigma^{2,0}$ adhérent à $\Sigma^{1,1,1,1,1,0}$, ce qui serait impossible si les $\Sigma^I$ étaient les strates d'une stratification de Thom, puisqu'alors $\Sigma^{2,0}$ serait contenu dans l'adhérence de $\Sigma^{1,1,1,1,1,0}$, et serait de dimension strictement inférieure, ce qui n'est pas le cas. Considérons pour tout $b \in \underline{\underline{C}}$ l'application $f_b : \underline{\underline{C}}^2 \longrightarrow \underline{\underline{C}}^2$ définie par $f_b(x,y) = (x^6 + xy , by)$, et calculons le symbole de $f_b$ à l'origine. La matrice jacobienne correspondante est

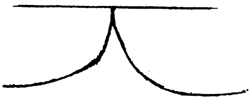
$$\begin{vmatrix} 6x^5 + y & x \\ 0 & b \end{vmatrix} .$$

Si $b = 0$ , l'idéal $\Delta^2$ est l'idéal $(x,y)$ , et le symbole de $0$ est $(2,0)$ . Si $b \neq 0$ , on vérifie immédiatement que le symbole de $0$ est $(1,1,1,1,1,0)$ ; si $b$ tend vers $0$ , le point $Jf_b(0)$ tend vers $Jf_o(0)$ , qui est donc un point de $\Sigma^{2,0}$ adhérent à $\Sigma^{1,1,1,1,1,0}$ .

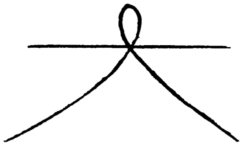
De même, la réciproque de la conjecture 3.8 est fausse : deux germes d'applications stables ayant même symbole ne sont pas en général topologiquement équivalents. Donnons un exemple dû à Pham ([14]). On considère le germe de courbe plane d'équation $y^4 + yx^2 = 0$ , et sa déformation semi-universelle, qui est le germe d'application $f : \underline{\underline{C}}^6 \longrightarrow \underline{\underline{C}}^5$ donné par

$$(x,y,u,v,w,t) \longmapsto (y^4 + uy^3 + vy^2 + (x^2 + w)\, y + tx,\ u,v,w,t) .$$

L'idéal $\Delta^2$ est engendré par $4y^3 + 3uy^2 + 2vy + x^2 + w$ , $2xy + t$ , et l'idéal $\Delta^2(\Delta^2)$ est engendré par les éléments précédents, et les éléments $12y^2 + 6uy + 2v$ , $2x$ , $2y$ ; il en résulte que la variété $\Sigma^{2,2}(f)$ est définie par $x = y = v = w = t = 0$ , le symbole en un point de $\Sigma^{2,2}(f)$ étant $(2,2,0)$ . Or la fibre au point $u = 0$ de $\Sigma^{2,2}(f)$ n'est pas topologiquement équivalente à la fibre en un point $u \neq 0$ , car ces deux fibres sont des germes de courbes planes n'ayant pas le même nombre de composantes irréductibles analytiques :



$u = 0$



$u \neq 0$

## 4. Multiplicités jacobiennes.

Les exemples de 3.9 amènent à chercher de nouveaux invariants des singularités, fournissant une décomposition des variétés de symbole satisfaisant les axiomes d'adhérence des stratifications. C'est dans ce but que Pham introduit les multiplicités jacobiennes.

LEMME 4.1.- Soit $I$ un idéal de l'algèbre analytique $\underline{\underline{C}}\{x_1,\ldots,x_n\}$, tel que l'algèbre quotient $A = \underline{\underline{C}}\{x_1,\ldots,x_n\}/I$ soit artinienne. Alors la multiplicité de $I$ ne dépend que de $A$.

On se ramène comme en 3.5 à vérifier que la multiplicité de $I$ est celle de l'idéal $\underline{J}$ engendré par $\underline{I}$ et $y$ dans $\underline{\underline{C}}\{x_1,\ldots,x_n,y\}$. Or il est facile de voir que si les éléments $z_i^{(k)}$ de $\underline{\underline{C}}\{x_1,\ldots,x_n\}$ donnent une base de $\underline{I}^k/\underline{I}^{k+1}$, les éléments $y^{k-h}z_i^{(h)}$ avec $h \leq k$ donnent une base de $\underline{J}^k/\underline{J}^{k+1}$, d'où la relation

$$\dim_{\underline{\underline{C}}}(\underline{J}^k/\underline{J}^{k+1}) = \sum_{h=o}^{k} \dim_{\underline{\underline{C}}}(\underline{I}^h/\underline{I}^{h+1}) \quad .$$

Si $e(I)$ et $e(J)$ désignent les multiplicités de $\underline{I}$ et $\underline{J}$, $\dim_{\underline{\underline{C}}}(\underline{I}^h/\underline{I}^{h+1})$ est équivalent pour $h$ tendant vers l'infini à $e(\underline{I})h^n/n!$, et $\dim_{\underline{\underline{C}}}(\underline{J}^k/\underline{J}^{k+1})$ à $e(\underline{J})k^{n+1}/(n+1)!$ ; le lemme résulte alors de l'égalité précédente.

Sous les hypothèses de 4.1, la multiplicité de $I$ sera appelée multiplicité ambiante de $A$, et notée $\varepsilon(A)$.

4.2. Soit $f : (\underline{\underline{C}}^m, x) \longrightarrow \underline{\underline{C}}^q$ un germe d'application analytique stable. Puisque $f$ est stable, le lieu critique $C$ de $f$ est fini sur $\underline{\underline{C}}^q$ au voisinage de $x$, et il en est donc de même des variétés de symbole $\Sigma^I(f)$

contenues dans $C$. Par suite, en tout point $x'$ de $C$ assez voisin de $x$, l'algèbre $\nabla^{I}_{x'}(f)$ définie en 3.5, avec $x' \in \Sigma^{I}(f)$, est une algèbre artinienne. En lui appliquant 4.1, on peut donc définir sa multiplicité ambiante. Si le symbole de $f$ en $x'$ est $(i_1,\ldots,i_k,\ldots)$, la multiplicité ambiante de $\nabla^{i_1,\ldots,i_k}(f)$ sera appelée la k-<u>ième multiplicité jacobienne critique de</u> $f$ en $x'$.

Les multiplicités jacobiennes critiques s'interprètent de la façon suivante :

THEOREME 4.3. (Pham [14]).- <u>Soit</u> $f : (\underline{\underline{C}}^m,x) \longrightarrow (\underline{\underline{C}}^q,s)$ <u>un germe d'application analytique stable non lisse</u>, $(i_1,\ldots,i_k,\ldots)$ <u>son symbole à l'origine. Pour tout</u> $k$,

$$e(\nabla_x^{i_1,\ldots,i_k}(f)) = \nu_s(f(\Sigma^{i_1,\ldots,i_k}(f))) ,$$

<u>où</u> $\nu_s$ <u>est la multiplicité en</u> $s$ <u>du germe d'espace analytique (réduit)</u> $f(\Sigma^{i_1,\ldots,i_k}(f))$.

On notera que, $C$ étant fini sur $\underline{\underline{C}}^q$, la restriction de $f$ à $\Sigma^{i_1,\ldots,i_k}(f)$ est un morphisme propre, de sorte que $f(\Sigma^{i_1,\ldots,i_k}(f))$ est un germe d'espace analytique d'après le théorème de Remmert, ce qui donne un sens à l'énoncé.

Nous donnerons seulement l'idée générale de la démonstration, telle qu'elle nous a été indiquée par Pham. Le lemme clé est le suivant :

LEMME 4.4.- <u>Soient</u> $f : (\underline{\underline{C}}^m,x) \longrightarrow (\underline{\underline{C}}^q,s)$ <u>un germe d'application analytique stable</u>, $B \subset \underline{\underline{C}}^m$ <u>un polydisque fermé au voisinage duquel</u> $f$ <u>est défini et est analytique</u>, $x'$ <u>un point critique de</u> $f$ <u>dans</u> $B$, $I = (i_1,\ldots,i_k)$

<u>une suite d'entiers telle que</u> $x' \in \Sigma^I(f)$ . <u>Pour tout</u> $\epsilon > 0$ , <u>il existe</u> <u>une application analytique</u> $\delta f$ <u>définie au voisinage de</u> $B$ , <u>à valeurs</u> <u>dans</u> $\underline{\underline{C}}^q$ , <u>bornée par</u> $\epsilon$ <u>sur</u> $B$ , <u>et telle que</u> :

i) $\delta f(x') = 0$ ;

ii) $x' \in \Sigma^I(f + \delta f)$ ;

iii) <u>le seul point singulier dans</u> $B$ <u>de la fibre</u> $(f + \delta f)^{-1}(s')$ , <u>avec</u> $s' = f(x')$ , <u>est le point</u> $x'$ .

Pour construire $\delta f$ , on commence par choisir une fonction analytique $u$ définie sur $\underline{\underline{C}}^m$ possédant les propriétés suivantes :

a) au point $x'$ , la fonction $u$ est nulle, ainsi que toutes ses dérivées d'ordre $\leqslant N$ pour $N$ assez grand ;

b) si $x_1,\ldots,x_r$ sont les points singuliers de la fibre de $f$ en $x'$ autres que $x'$ , $u(x_i) = 1$ pour tout $i$ , et les dérivées d'ordre $\leqslant N$ de $u$ sont nulles aux points $x_i$ . Il est facile de voir qu'il existe des fonctions possédant ces propriétés, car on peut même imposer à $u$ d'être une fonction polynômiale.

On choisit alors un vecteur $a$ de $\underline{\underline{C}}^q$ , tel que la droite de direction $a$ passant par $s'$ ne soit pas contenue dans le discriminant $f(C)$ , et on pose

$$\delta f = \lambda u . a \quad ,$$

où $\lambda \in \underline{\underline{C}}$ est tel que $\delta f$ soit bornée par $\epsilon$ sur $B$ .

Il est clair que la condition i) est vérifiée. La condition ii) l'est également si l'on prend $N$ assez grand, car la condition d'appartenir à $\Sigma^I$ ne fait intervenir que les dérivées jusqu'à un certain ordre.

Pour vérifier la condition iii), le principe est le suivant. Pour chacun des points $x_i$ et $x'$ , on choisit un voisinage ouvert $V_i$ , $V'$ , dans $B$ , de sorte que ces voisinages soient deux à deux disjoints. On choisit ensuite un voisinage ouvert $W$ dans $B$ de la partie de la fibre $f^{-1}(s') \cap B$ non contenue dans les voisinages des points critiques de $f$ , tel que $W$ ne rencontre pas le lieu critique $C$ . On obtient ainsi un voisinage de la fibre $f^{-1}(s') \cap B$ dans $B$ . Pourvu que $\epsilon$ soit assez petit, la fibre déformée $(f + \delta f)^{-1}(s') \cap B$ est alors contenue dans ce voisinage. Elle n'a pas de points singuliers dans $W$ , car $f$ est une submersion dans $W$ , et si $\delta f$ est assez petite, $f + \delta f$ est encore une submersion. Au voisinage de $x'$ , la condition d'annulation des dérivées montre que la fonction $u$ varie très lentement, de sorte que si $N$ est assez grand l'application $f + \delta f$ ne peut avoir dans $V'$ de point critique autre que $x'$ . De même, au voisinage des $x_i$ , l'application $\delta f$ diffère très peu de la translation de vecteur $\lambda a$ , de sorte que pour $y \in V_i \cap (f + \delta f)^{-1}(s')$ le point $f(y)$ n'appartient pas au discriminant, et $y$ n'est pas point critique de $f$ ; les dérivées de $u$ variant très lentement au voisinage de $x_i$ , $y$ ne pourra pas non plus être point critique de $f + \delta f$ .

LEMME 4.5.- Soient $f : (\underline{\underline{C}}^m, x) \longrightarrow (\underline{\underline{C}}^q, s)$ un germe d'application analytique stable, et $\Sigma^I(f)$ une variété de Boardman contenue dans le lieu critique de $f$ . Pour tout point $y \in f(\Sigma^I(f))$ assez proche de $s$ , il existe des points $y'$ de $f(\Sigma^I(f))$ arbitrairement proches de $y$ tels que la fibre $f^{-1}(y')$ n'ait qu'un seul point singulier.

Soit $B$ un polydisque fermé au voisinage duquel $f$ est définie et est analytique, et supposons que $y$ appartienne à l'image du polydisque ouvert $\mathring{B}$. Choisissant un point singulier $x'$ dans $f^{-1}(y) \cap \Sigma^I(f)$, on peut considérer pour tout $\epsilon > 0$ une déformation $\delta f$ de $f$ possédant les propriétés de 4.4. Si l'on choisit $\epsilon$ assez petit, la définition 1.4 de la stabilité montre que $f + \delta t$ se déduit de $f$ par des germes $h$ et $k$ d'isomorphismes de $(\underline{\underline{C}}^m, x)$ dans $\underline{\underline{C}}^m$ et de $(\underline{\underline{C}}^q, s)$ dans $\underline{\underline{C}}^q$. Si $\epsilon$ est assez petit, on peut de plus supposer que $k$ est aussi proche que l'on veut de l'identité pour la topologie de1.3On en déduit un isomorphisme entre les fibres

$$(f + \delta f)^{-1}(y) \xrightarrow{\sim} f^{-1}(k^{-1}(y)) \quad ,$$

le point $y' = k^{-1}(y)$ étant arbitrairement voisin de $y$. Comme par construction la fibre $(f + \delta f)^{-1}(y)$ n'a pour point singulier que le point $x'$, la fibre de $f$ en $y'$ n'a qu'un point singulier, et comme $x' \in \Sigma^I(f + \delta f)$, le point $y'$ est bien dans $f(\Sigma^I(f))$, d'où le lemme.

4.6. Achevons la démonstration de 4.3. Pour cela, on observe que la restriction $f_I$ de $f$ à $\Sigma^I(f)$ est une application biméromorphe de $\Sigma^I(f)$ sur son image, lorsqu'on représente $f$ par une application analytique sur un voisinage ouvert suffisamment petit de $x$. En effet, $\Sigma^I(f) = \bigcup_j \Sigma^{I,j}(f)$ ; or il est facile de voir (par exemple sur la formule 3.4 ii)) que pour $j < j'$, $\dim(\Sigma^{I,j}(f)) > \dim(\Sigma^{I,j'}(f))$, et que $\dim(\Sigma^I(f)) = \dim(\Sigma^{I,0}(f))$. Donc $\Sigma^{I,0}(f)$ est un ouvert partout dense de $\Sigma^I(f)$, dont le complémentaire est un ensemble analytique de dimension strictement inférieure. Comme $f_I$ est un morphisme fini, donc propre $E = f_I(\Sigma^I(f) - \bigcup_{j>0} \Sigma^{I,j}(f))$ est un sous-ensemble analytique de $f(\Sigma^I(f))$, de dimension strictement inférieure à celle de l'ensemble analytique $f(\Sigma^I(f))$ , et l'ouvert $V = f(\Sigma^I(f))$ est partout dense dans $f(\Sigma^I(f))$ ; $f^{-1}(V)$ est également partout dense dans $\Sigma^I(f)$ . Mais d'après 3.4 iv), $f_I$ est une immersion locale sur $\Sigma^{I,0}(f)$ , donc sur $f_I^{-1}(V)$ . Il en résulte que le nombre de points dans la fibre de $f_I$ est une fonction semi-continue supérieurement sur $V$ ; comme d'après 4.5 il existe un ensemble partout dense dans $V$ au-dessus duquel la fibre de $f_I$ n'a qu'un point, $f_I$ est injective au-dessus de $V$ , donc est un isomorphisme sur son image, d'où la biméromorphie de $f_I$ .

Soit alors $\mathfrak{M}_s$ l'idéal maximal de $\Sigma' = f(\Sigma^I(f))$ . Un résultat de Samuel ([16], II.5.f) montre que la multiplicité de l'idéal $\mathfrak{M}_s$ est égale à celle de l'idéal $\mathfrak{M}_s \cdot \underline{O}_{\Sigma,x}$ , où $\Sigma = \Sigma^I(f)$ . Or $\underline{O}_{\Sigma,x}$ est une algèbre de séries convergentes puisque $\Sigma$ est une variété, et l'idéal $\mathfrak{M}_s \cdot \underline{O}_{\Sigma,x}$ est l'idéal de $f^{-1}(s) \cap \Sigma^I(f)$ , si bien que le quotient $\underline{O}_{\Sigma,x}/\mathfrak{M}_s \cdot \underline{O}_{\Sigma,x}$ n'est autre que $\nabla_x^I(f)$ d'après 3.5 ; la multiplicité de l'idéal $\mathfrak{M}_s \cdot \underline{O}_{\Sigma,x}$ est donc la multiplicité jacobienne critique de $f$ en $x$ correspondant à la suite $I$ , d'où le théorème.

COROLLAIRE 4.7.- <u>Avec les hypothèses et les notations de</u> 4.3, <u>mais</u> $I = (i_1,\dots,i_k)$ <u>étant une suite finie quelconque</u>, <u>soit</u> $s'$ <u>un point de</u> $\underline{\underline{C}}^q$, <u>suffisamment voisin de</u> $s$ . <u>Alors</u>

$$\sum_{x' \in f^{-1}(s') \cap \Sigma^I(f)} e(\nabla^I_{x'}(f)) = \nu_{s'}(f(\Sigma^I(f))) \quad .$$

A chacun des points $x'$ au-dessus de $s'$ correspond une composante irréductible du germe d'ensemble analytique $f(\Sigma^I(f))$ en $s'$ , image d'un voisinage assez petit de $x'$ dans $\Sigma^I(f)$ , et on applique 4.3 sur ce voisinage.

COROLLAIRE 4.8.- *Soit* $f : (\underline{\underline{C}}^m, x) \longrightarrow (\underline{\underline{C}}^q, s)$ *un germe d'application analytique stable. Si la conjecture* 3.8 *est vraie, les multiplicités jacobiennes critiques sont constantes sur toute strate de la stratification de* $\underline{\underline{C}}^m$ *obtenue en* 2.3.

Soit $X$ une strate de $\underline{\underline{C}}^m$. La conjecture de 3.8 montre que le symbole de $f$ est constant le long de $X$. Soit $(i_1, \ldots, i_k, \ldots)$ ce symbole, et posons $I = (i_1, \ldots, i_k)$. Les strates étant connexes, l'assertion est locale sur $\underline{\underline{C}}^m$, de sorte qu'en se restreignant au besoin à un voisinage d'un point $z$ de $X$, on peut supposer que $f^{-1}(f(z))$ n'a pas d'autre point singulier que $z$. Comme le nombre de points singuliers de la fibre est un invariant topologique, il en sera de même pour les fibres de $f$ au-dessus de $f(X)$. Puisque le symbole est constant sur toute strate, $\Sigma^I(f)$ est une réunion de strates, et il en est de même pour $f(\Sigma^I(f))$. Comme ces strates vérifient les conditions de régularité de Whitney, un résultat d'Hironaka ([5]) montre que la multiplicité de $f(\Sigma^I(f))$ est constante le long de toute strate, d'où le résultat d'après 4.3.

4.9. Le corollaire 4.8 montre que les multiplicités jacobiennes critiques jouent certainement un rôle dans la classification topologique des singularités. Le problème qui se pose alors (et qui reste largement ouvert) est de savoir si les strates de Thom peuvent entièrement se reconstruire à partir du symbole et des multiplicités jacobiennes en chaque point ; on notera qu'il y a lieu également d'utiliser le nombre de points singuliers dans la fibre, qui est invariant le long de toute strate du but, mais ne peut être caractérisé à partir du symbole et des multiplicités jacobiennes en un point singulier de la fibre, comme le montre aisément l'étude des points doubles ordinaires dans la déformation semi-universelle de la singularité $xy(x - y) = 0$. Une première question à résoudre serait de savoir si les sous-ensembles d'équimultiplicité jacobienne des variétés de Boardman sont eux-mêmes des sous-variétés.

A titre d'exemple montrant que les multiplicités jacobiennes peuvent effectivement distinguer des singularités non topologiquement équivalentes, mais ayant le même symbole, reprenons la déformation semi-universelle de $y^4 + yx^2 = 0$ étudiée en 3.9. Nous avons vu que $\Sigma^{2,2}(f)$ est l'axe des $u$, et que la singularité correspondant à $u = 0$ n'est pas topologiquement équivalente à celles qu'on obtient pour $u \neq 0$. Calculons alors la multiplicité ambiante de $\nabla^2_z(f)$ en un point $z$ de l'axe des $u$ ; c'est la multiplicité de l'idéal $\Delta^2$, qui est l'idéal engendré par les éléments $4y^3 + 3uy^2 + x^2$ et $xy$ dans $\underline{\underline{C}}\{x,y\}$. Puisque cet idéal est engendré par 2 éléments, sa multiplicité est $\dim_{\underline{\underline{C}}}(\underline{\underline{C}}\{x,y\} / (4y^3 + 3uy^2 + x^2 , xy))$. Si $u = 0$, cette multiplicité est 5, et si $u \neq 0$, c'est 4, donc la multiplicité jacobienne permet bien de distinguer l'origine.

4.10. Considérons pour finir le cas de la déformation semi-universelle $f$ d'un germe d'hypersurface à singularité isolée d'algèbre $\underline{\underline{C}}\{x_1,\dots,x_n\}/(g)$. Alors le premier quotient jacobien critique de $f$ en un point du lieu critique est $\nabla^n$, et la variété $\Sigma^n(f)$ est l'ensemble des points où l'application tangente à $f$ n'est pas surjective, i.e. est le lieu critique de $f$. Par suite, $f(\Sigma^n(f))$ est le lieu discriminant de $f$.

D'après 4.3, la première multiplicité jacobienne critique en un point du lieu critique est donc la multiplicité du discriminant de $f$, soit encore le nombre noté $\mu$ par Milnor dans [11].

Si on considère plus particulièrement une famille de germes de courbes planes à singularité isolée, analytiquement irréductibles, alors Lê a montré ([7]) que la constance de $\mu$ entraine l'équivalence topologique des fibres, ce qui va donc dans le sens des considérations de 4.9.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. ARNOLD - Singularities of smooth mappings, Russ. Math. Surveys, vol. 23 (1968), p. 1-43.

[2] A. BEAUVILLE - Foncteurs sur les anneaux artiniens ; applications aux déformations verselles, Séminaire Douady-Verdier E.N.S. 1971-72.

[3] J. M. BOARDMAN - Singularities of differentiables maps, Publ. Math. I.H.E.S., n° 33 (1967), p. 21-57.

[4] H. GRAUERT - Uber die Deformation isolierter Singularitäten analytischer Mengen, Inventiones math., vol. 15, fasc. 3 (1972), p. 171-198.

[5] H. HIRONAKA - Normal cones in analytic Whitney stratifications, Publ. Math. I.H.E.S., n° 36 (1969), p. 127-138.

[6] LE DUNG TRANG - Sur les noeuds algébriques, Centre de Math. Ecole Polytechnique Paris, 1971.

[7] LE DUNG TRANG - Sur un critère d'équisingularité, Centre de Math. Ecole Polytechnique Paris, 1971.

[8] S. LICHTENBAUM, M. SCHLESSINGER - The cotangent complex of a morphism, Trans. Amer. Math. Soc. 128 (1967), p. 41-70.

[9] J. MATHER - Stability of $C^{\infty}$ mappings II : Infinitesimal stability implies stability, Ann. Math., vol. 89, n° 2 (1969), p. 254-291.
Stability of $C^{\infty}$ mappings III : Finitely determined map-germs, Publ. Math. I.H.E.S., n° 35 (1968), p. 127-156.
Stability of $C^{\infty}$ mappings IV : Classification of stable germs by $\underline{\underline{R}}$-algebras, Publ. Math. I.H.E.S., n° 37 (1969), p. 223-248.

[10] J. MATHER - Notes on topological stability, preprint de l'Université de Harvard, 1970.

[11] J. MILNOR - Singular points on complex hypersurfaces, Ann. of Math. Studies, n° 61, Princeton University Press.

[12] B. MORIN - Calcul jacobien, Thèse, Université d'Orsay, 1972.

[13] F. PHAM - Remarque sur l'équisingularité universelle, Université de Nice, 1970.

[14] F. PHAM - Classification des singularités, 12ème R.C.P., Strasbourg (1971), preprint de l'Université de Nice.

[15] G. RUGET - Déformations des germes d'espaces analytiques Séminaire Douady-Verdier E.N.S. 1971-72.

[16] P. SAMUEL - Algèbre locale, Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. CXXIII, Gauthier-Villars, 1953.

[17] M. SCHLESSINGER - Functors of Artin rings, Trans. Amer. Math. Soc., 130 (1968), p. 208-222.

[18] B. TEISSIER - Déformations à type topologique constant I et II, Séminaire Douady-Verdier E.N.S. 1971-72.

[19] R. THOM - Ensembles et morphismes stratifiés, Bull. Am. Math. Soc., 75, vol. 1 (1969), p. 240-284.

[20] G. N. TJURINA - Locally semi-universal flat deformations of isolated singularities of complex spaces, Math. U.S.S.R. Izvestija, vol. 3, n° 5 (1970), p. 967-999.

[21] O.ZARISKI - Studies in equisingularity III, Am. Journ. Math. , 90 (1968), p. 961-1023.