Astérisque

RENÉE ELKIK

Solution d’équations au-dessus d’anneaux henseliens

Astérisque, tome 16 (1974), p. 116-132
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__16__116_0>

SOLUTION D'EQUATIONS AU-DESSUS D'ANNEAUX HENSELIENS

par R. ELKIK

§ 1. Le théorème d'approximation

THEOREME 1.- *Soient* A *un anneau noethérien,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A *. On suppose* A *complet pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-adique. Soit* B *une* A*-algèbre de type fini, telle que* $\operatorname{Sp} B$ *soit lisse sur* $\operatorname{Sp} A$ *en dehors du fermé défini par* $\mathfrak{J}$ *. Alors il existe deux entiers* n_o *et* r *tels que pour tout* n *supérieur à* n_o *et toute section de* B *approchée modulo* $\mathfrak{J}^n$ *, il existe une* A *section de* B *congrue à la précédente modulo* $\mathfrak{J}^{n-r}$.

Donnons-nous une présentation de B

$$B = A[X_1 \dots X_N] | \mathcal{J} \qquad \mathcal{J} = (f_1 \dots f_q) \subset A[X_1 \dots X_N] \; .$$

On suppose pour simplifier l'écriture que la dimension relative de $\operatorname{Sp} B|_{\operatorname{Sp} A \,-\, V(\mathfrak{J})}$ sur $\operatorname{Sp} A - V(\mathfrak{J})$ est constante et égale à $N - p$.

Pour tout p tuple $(\alpha) = (\alpha_1 \dots \alpha_p)$ $1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_p \leqslant q$, $f_{(\alpha)}$ représente la famille d'équations $(f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_p})$, $M_\alpha(X)$ la matrice jacobienne du système $f_{(\alpha)}$, $\Delta_{(\alpha)}$ l'idéal engendré par les mineurs d'ordre p de $M_\alpha(X)$.

$M(X)$ désigne d'autre part la matrice jacobienne associée à l'ensemble des équations $f_1 \dots f_q$.

Désignons d'autre part par $K_{(\alpha)}$ le conducteur de $\mathcal{J}$ dans $f_{(\alpha)}$, c'est-à-dire

$$K_{(\alpha)} = \left\{ k \in A[X_1 \dots X_N] \,/\, k\mathcal{J} \quad f_{(\alpha)} \right\} \; .$$

Si on appelle H l'idéal de $A[X_1 \dots X_N]$ engendré par les produits $K_{(\alpha)} \Delta_{(\alpha)}$ pour les différents p triples (α) possibles on a dans $\mathrm{Sp}\, A[X_1 \dots X_N]$:

$$V(H) \cap \mathrm{Sp}\, B \subset V(\mathfrak{J}\, A[X_1 \dots X_N])$$

puisque le fermé défini par H dans $\mathrm{Sp}\, B$ est le complémentaire de l'ouvert de $\mathrm{Sp}\, B$ où $\mathrm{Sp}\, B$ est lisse de dimension relative q sur $\mathrm{Sp}\, A$. Il existe donc un entier h tel que

$$(1) \qquad H + \mathfrak{J} \supset \mathfrak{J}^h A[X_1 \dots X_N] \,.\,.$$

On pourra noter, sur la démonstration qui suit, que les entiers n_o et r ne dépendent de B que par h.

La partie essentielle de la démonstration est dans le lemme suivant :

LEMME.- Sous les hypothèses précédentes, on suppose de plus l'idéal $\mathfrak{J}$ de A principal, engendré par t.

Soient I un idéal quelconque de A, Λ l'idéal de A formé des éléments annulés par une puissance de t et k un entier tel que

$$\Lambda \cap (t^k) = (0) \quad .$$

On considère un morphisme

$$\varphi_a : A[X_1 \dots X_N] \longrightarrow A$$
$$X_i \longrightarrow a_i$$

définissant une section modulo $t^n I$ de B avec $n > 2h + k$. On montre alors qu'on peut trouver $a' = (a'_1 \dots a'_N) \in A^N$ vérifiant :

$$a'_i \equiv a_i \quad \mod t^{n-h} I$$

et définissant une section de B.

On procède par approximations successives en montrant qu'on peut trouver $y = (y_1 \dots y_N) \in A^N$ tel que

$$y \equiv 0 \qquad (t^{n-h} I)$$

et définissant une section modulo $t^{2n-2h} I$ de B. Le choix de n assurant $2n - 2h$ supérieur à n le résultat sera établi.

<u>Démonstration du lemme</u>.

On peut écrire un développement de Taylor

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} f_1(a-y) \\ - \\ - \\ f_q(a-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(a) \\ - \\ - \\ - \\ f_q(a) \end{bmatrix} - M(a) \begin{bmatrix} y_1 \\ \\ \\ y_N \end{bmatrix} + \sum_{i,j} y_i y_j \; Q_{ij}(y,a)$$

où $M(a)$ désigne la valeur de la jacobienne en (a) et où Q_{ij} est un q vecteur colonne dont les composantes sont des polynômes en y et a.

Il suffit de trouver $y = 0 \quad (t^{h-k} I)$ pour lequel

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \\ f_q(a) \end{bmatrix} \equiv M(a) \begin{bmatrix} y_1 \\ \\ y_N \end{bmatrix} \quad \text{mod} \quad t^{\alpha} I \quad \text{avec} \quad \alpha \geqslant 2n - 2h$$

Il est clair d'après (2) qu'on aura alors

$$\forall i \in [1,q], \; f_i(a - y) \in t^{2n-2h} I \; .$$

On a écrit en (1)

$$H + \mathcal{J} \supset t^h A[X_1 \dots X_N] \; .$$

Désignant par $H(a)$ et $\mathcal{J}(a)$ les images de ces idéaux par φ_a, on peut en déduire

$$(4) \qquad H(a) + \mathcal{J}(a) \supset t^h \; .$$

Mais d'autre part

$$\mathcal{J}(a) \subset t^n \; .$$

On peut écrire pour tout $i \in [1,q]$

$$f_i(a) = h_i(a) + \Sigma\lambda_{ij}\ t^{n-h}\ f_j(a)$$

où $h_i(a) \in H(a)$, $\lambda_{ij} \in A$.

Considéré comme système d'équation linéaire en les $f_i(a)$ ce système a un déterminant congru à 1 modulo t^{n-h} , donc inversible. On peut donc résoudre et exprimer les $f_i(a)$ en fonction d'éléments de $H(a)$.

Il résulte donc de (4) qu'on a

$$H(a) \supset t^h .$$

D'autre part H est engendré par des éléments de la forme $k_\alpha\,\delta_\alpha$ où δ_α est un mineur d'ordre $N - q$ de la matrice $M_{(\alpha)}$ et k_α un élément de $A[X]$ tel que

$$k_\alpha J \subset f_{(\alpha)} .$$

On va montrer que pour tout élément $k_\alpha\,\delta_\alpha$ du type précédent on peut trouver $(z) = (z_1 \dots z_N) \in A^N$ tel que

$$z_i \in t^n I$$

et

$$(5) \qquad k_\alpha(a)\,\delta_\alpha(a) \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \\ f_q(a) \end{bmatrix} \equiv M(a) \begin{bmatrix} z_1 \\ \\ z^N \end{bmatrix} \qquad (t^{2n} I) \quad .$$

On montre d'abord comment ceci implique le lemme. Puisque t^h appartient à l'idéal $H(a)$ on peut déduire de (5) qu'il existe $(v) = (v_1 \dots v_N) \in A^N$ où $v_i \in t^n I$ tel que

$$t^h \begin{bmatrix} f_1(a) \\ - \\ - \\ f_q(a) \end{bmatrix} \equiv M(a) \begin{bmatrix} v_1 \\ \\ v_N \end{bmatrix} \qquad (t^{2n} I)$$

et puisque n a été choisi suffisamment grand pour que

$$\Lambda \cap (t^{n-h}) = (0)$$

on en déduira

$$\begin{bmatrix} f_1(a) \\ - \\ - \\ f_q(a) \end{bmatrix} \equiv M(a) \begin{bmatrix} y_1 \\ \\ \\ y_N \end{bmatrix} \quad \bmod t^{2n-h} I$$

où y_i appartient à $t^{n-h} I$, $t^h y_i = v_i$ ceci est ce qu'on avait annoncé en (3) .

Il reste donc seulement à établir (5) .

Prenons pour fixer les idées $(\alpha) = (1 \dots p)$ et pour ∂_α le mineur d'ordre p de la matrice M correspondant aux p premières équations et aux premières variables.

On note seulement dans la suite ∂ pour ∂_α ; k pour k_α .

Par définition de k on peut trouver dans $A[X_1 \dots X_N]$ des polynômes λ_{ij} tels que

$$kf_j = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} f_i \ , \qquad \forall j \in [p+1, q]$$

ce qui, après dérivation par rapport à X_l , conduit à

$$k \frac{\partial f_j}{\partial X_l} \equiv \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial X_l} \quad (\bmod \mathfrak{J}) \quad \forall j \in [p+1, q] \ , \ \forall l \in [1, N] \ .$$

On a donc en (a) :

$$(5) \quad \begin{cases} k(a)\ f_j(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(a) f_i(a) \ , \\ \\ k(a) \dfrac{\partial f_j}{\partial X_l}(a) \equiv \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(a) \frac{\partial f_i}{\partial X_l}(a) \quad (t^n) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \forall j \in [p+1, q] \\ \forall l \in [1, N] \end{array}$$

Ce dernier système de relations implique que, pour tout vecteur $\begin{bmatrix} g_1 \\ g_q \end{bmatrix}$ dans l'image de $M(a)$ on a :

$$k(a)g_j \equiv \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(a)g_i \qquad (t^n I) \ , \qquad \forall j \in [p+1 \ , q]$$

et plus précisément si

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_q \end{pmatrix} = M(a) \begin{bmatrix} h_1 \\ h_N \end{bmatrix}$$

où les h_i appartiennent à un idéal P de A .

(7) $\quad \forall j > p \ , \quad k(a)g_j \equiv \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} g_j \qquad (t^n I)$.

Désignant par M_o la matrice $(p,p)(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(a))$ $i = 1 , p$; $j = 1 \dots p$
et par N_o la matrice (p , p) telle que

$$M_o N_o = N_o M_o = \partial(a) \, Id_p$$

où Id_p représente la matrice unité d'ordre p .

Soit N'_o la matrice (N,p) obtenue en prolongeant N_o par 0 .

Ecrivons

$$MN'_o \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \\ \\ f_p(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial(a)f_1(a) \\ \partial(a)f_p(a) \\ y_{p+1} \\ y_q \end{bmatrix}$$

ceci étant une définition des y_j , $j \in [p+1 \ , q]$.

On a d'après (7) :

$$\forall j > p \ , \quad k(a)y_j \equiv (a) \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(a)f_i(a) \qquad (t^{2n} I) \ .$$

Mais d'après (6) :

$$\forall j > p \;, \qquad k(a)f_j(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(a)f_i(a) \;.$$

Donc

$$k(a)y_j \equiv k(a)\partial(a)f_j(a) \qquad (t^{2n}I) \;.$$

Donc

$$MN'_o k(a) \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \\ f_p(a) \end{bmatrix} \equiv k(a)\partial(a) \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \\ f_q(a) \end{bmatrix} \qquad (t^{2n}I)$$

ce qu'on se proposait d'établir.

<u>Fin de la démonstration du théorème 1</u>.

On revient au cas où $\mathcal{J}$ est un idéal quelconque. On raisonne par récurrence sur le nombre minimal d'éléments engendrant un idéal de définition de la topologie $\mathcal{J}$-adique.

Soit l ce nombre. Pour $l = 0$, le résultat est trivial. Supposons l établi pour $l = l-1$ et soient $t_1 \dots t_l$ des éléments engendrant un idéal de définition.

Soit T l'idéal formé des éléments de A à support dans $V(t_1)$ et soit k un entier tel que

$$T \cap (t_1{}^k) = (0) \;.$$

Soit $A' = A|_{t_1} \; 2h + k + 1$.

Par hypothèse de récurrence, il existe n'_o et r' tels que pour tout n supérieur à n'_o et toute section

$$A[X_1 \dots X_N] \longrightarrow A$$
$$X_i \longrightarrow a_i$$

induisant une section modulo $\mathcal{J}^n$ de B on peut trouver

$$a' = (a'_1 \dots a'_N) \; ; \qquad a'_i \equiv a_i \quad (\mathcal{J}^{n-r'})$$

tel que

$$\mathcal{J}(a') \subset t_1^{2h+k+1} \; .$$

On a en réalité

$$\mathcal{J}(a') \subset t_1^{2h+k+1} \cap \mathcal{J}^{n-r'} \; .$$

Donc pour n assez grand

$$\mathcal{J}(a') \subset t_1^{2h+k+1} . \mathcal{J}^{n-r'-\lambda} \qquad \text{(Artin-Rees)} \; .$$

Le lemme précédent implique qu'on peut trouver

$$(b) = (b_i \dots b_N) \in A^N \; , \quad b_i \equiv a'_i \quad (t_1^{h+k} \mathcal{J}^{n-r'-\lambda})$$

et tel que

$$\mathcal{J}(b) = 0 \; .$$

Ce qui établit le théorème.

Remarque.

On a pu noter, en lisant la démonstration de ce théorème, que n_o et r ne dépendent de l'algèbre B que par la puissance de $\mathcal{J}$ contenue par H.

D'autre part pour étendre une section approchée donnée, on n'utilise pas la lissité de B sur tout l'ouvert $\operatorname{Sp} B - V(\mathcal{J} B)$, on utilise seulement le fait que l'image réciproque de H contient une puissance de $\mathcal{J}$.

On aurait donc pu dire plus précisément : étant donné un anneau noethérien A complet pour la topologie $\mathcal{J}$-adique pour tout entier h, il existe un couple d'entiers (n_o, r) ayant la propriété suivante : si $n \geqslant n_o$ et si ϵ_n est une section approchée modulo ^{n} d'une A-algèbre de type fini B, telle que $\epsilon_n^*(H) \supset \mathcal{J}^h$ (où H est défini dans B comme plus haut) alors il existe une section ϵ de B congrue à ϵ_n modulo $\mathcal{J}^{n-r}$, se factorisant au-dessus de $\operatorname{Sp} A - V(\mathcal{J})$ à travers l'ouvert de lissité de B.

§ 2. Cas des couples henséliens.

Définitions - Rappels.

Soient A un anneau, $S = \mathrm{Sp}\, A$, $\mathfrak{J}$ un idéal contenu dans le radical de A , et S_o le fermé défini par $\mathfrak{J}$ dans S .

On dit que le couple $(A, \mathfrak{J})$ est hensélien, ou que le schéma S est hensélien le long de S_o si la condition suivante est satisfaite : si B est une A-algèbre telle que le morphisme

$$\begin{array}{c} \mathrm{Sp}\, B = X \\ \downarrow \\ \mathrm{Sp}\, A = S \end{array}$$

soit étale, alors tout S-morphisme de S_o dans X se relève en une S-section de X .

On peut noter que cette propriété ne dépend que de la topologie définie par $\mathfrak{J}$, que, d'autre part, si $\mathfrak{J}'$ est un idéal contenu dans $\mathfrak{J}$, et si $(A, \mathfrak{J})$ est hensélien alors $(A, \mathfrak{J}')$ est hensélien.

D'autre part si A est un anneau complet pour la topologie $\mathfrak{J}$-adique, le couple $(A, \mathfrak{J})$ est hensélien.

A tout couple (A, I) consistant en la donnée d'un anneau A et d'un idéal I de A on peut associer un couple $(\tilde{A}, \tilde{I})$ hensélien muni d'un morphisme de couple

$$\varphi : (A, I) \longrightarrow (\tilde{A}, \tilde{I})$$

[par morphisme de couple, on entend un morphisme de A dans $\tilde{A}$ telle que $\varphi(I) \subset I^{\sim}$]

et possédant la propriété universelle suivante : pour tout morphisme Ψ de (A, I) dans un couple hensélien $(B, \mathfrak{J})$ il existe un unique morphisme

$$\Psi^{\sim} : (\tilde{A}, I^{\sim}) \longrightarrow (B, \mathfrak{J})$$

tel que $\Psi = \Psi^{\sim}\varphi$.

On dit que $\tilde{A}$ est le hensélisé de A le long de I ou que le schéma $\mathrm{Sp}\,\tilde{A}$ est le hensélisé de $\mathrm{Sp}\,A$ le long de $V(I)$.

Les anneaux A et $\tilde{A}$ ont des séparés complétés, pour la topologie I-adique, qui sont isomorphes.

Si I est contenu dans le radical de A , $\tilde{A}$ est fidèlement plat sur A .

Référence.- (cf. M. Raynaud - Anneaux locaux henséliens, Lecture notes).

On va établir pour les couples henséliens l'analogue du théorème 1.

THEOREME 2.- *Soit* $(A,\mathfrak{J})$ *un couple hensélien noethérien. Soit* B *une* A-*algèbre de type fini, lisse sur* A *en dehors du fermé défini par* . *Alors il existe deux entiers* n_o *et* r *tels que pour tout* $n \geqslant n_o$ *et toute section de* B *approchée* mod $\mathfrak{J}^n$ *il existe une* A-*section de* B *congrue à la précédente* modulo $\mathfrak{J}^{n-r}$.

Le théorème 2 implique le théorème 1. Mais la démonstration donnée ici ne fournit aucun renseignement sur les indices n_o et r et l'énoncé, donné en remarque après le théorème 1, ne peut pas se déduire de la démonstration qui va suivre.

Le théorème 2 admet comme corollaire immédiat : sous les hypothèses du théorème 2 et si $\hat{A}$ désigne le complété $\mathfrak{J}$-adique de A pour tout n et toute $\hat{A}$-section $\tilde{\varepsilon} : B \otimes_A \hat{A} \longrightarrow \hat{A}$, il existe une section $\varepsilon : B \longrightarrow A$ congrue à ε mod $\mathfrak{J}^n$.

On pourrait démontrer le résultat un peu plus général suivant :

si $(A,\mathcal{J})$ est un couple hensélien, $\hat{A}$ le complété $\mathcal{J}$-adique de A, B une A-algèbre de type fini, $\bar{B} = B \otimes_A \hat{A}$. Soit $\bar{\varepsilon}$ une $\hat{A}$-section de $\bar{B}$ dont la restriction au-dessus de l'ouvert $\mathrm{Sp}\,\hat{A} - V(\mathcal{J})$ se factorise à travers l'ouvert de lissité de B. Alors pour tout n, il existe une A-section de $\bar{B}$ congrue à ε modulo $\mathcal{J}^n$.

De ce résultat, qu'on ne démontre pas en détail ici, on peut alors déduire pour les couples henséliens un résultat analogue à celui donné en remarque après le théorème 1.

<u>Démonstration du théorème</u> 2.

LEMME 1.- Il s'agit de démontrer le théorème 2 dans le cas où B est une intersection complète au-dessus de A.

Soit ;
$$B = \frac{A[X_1 \dots X_N]}{(f_1 \dots f_p)} ,$$
on suppose $\mathrm{Sp}\,B$ lisse sur $\mathrm{Sp}\,A$ de dim rel. $N-p$ en dehors de $V(\mathcal{J}B)$.

Soit $\Delta = (\partial_1, \dots \partial_p)$ l'idéal engendré par les différents mineurs d'ordre p de la matrice jacobienne $(\partial f_i/\partial X_j)$ $i = 1 \dots p$, $j = 1 \dots N$.

Dans $\mathrm{Sp}\,A[X_1 \dots X_N]$
$$V(\Delta) \cap \mathrm{Sp}\,B \subset V(\mathcal{J}A[X_1 \dots X_N]) .$$
Donc il existe h tel que
$$(1) \qquad \Delta + (f_1 \dots f_p) \supset \mathcal{J}^h A[X_1 \dots X_N] .$$
Soit $a^\circ = (a_1^\circ, \dots a_N^\circ) \in A^N$ tel que :
$$\forall i \in [1;p] , \quad f_i(a^\circ) \in \mathcal{J}^{2h+1} P$$
où P est un idéal quelconque de A.

On va montrer qu'il existe $a = (a_1 \dots a_N) \in A^N$ vérifiant

$$\begin{cases} a_i \equiv a_i^\circ & (\mathfrak{J}^{h+1}P) \\ f_i(a) = 0 & \forall i \in [1,p] \end{cases} .$$

Notons d'abord qu'un raisonnement déjà fait permet de déduire de (1)

$$\Delta(a^\circ) \supset \mathfrak{J}^h .$$

Si on note M_o la valeur en a^a de la jacobienne, et ∂_i pour $\partial_i(a^\circ)$ ses mineurs d'ordre p, soient N_i les matrices (N,p) telles que

$$M_o N_i = \partial_i I$$

où I désigne la matrice unité d'ordre p.

On peut écrire

$$\begin{pmatrix} f_1(q^\circ) \\ - \\ - \\ - \\ f_p(a^\circ) \end{pmatrix} = \sum_{i,j} \partial i \, \partial j \begin{bmatrix} e_{ij}^1 \\ \\ \\ e_{ij}^p \end{bmatrix} \qquad \text{où } e_{ij}^k \in \mathfrak{J} .$$

où en notation vectorielle $f(a^\circ) = \sum_{i,j} \partial_i \, \partial_j \, E_{ij}$.

On cherche à résoudre

$$\begin{bmatrix} f_1(a^\circ + \Sigma \partial_i U_i) \\ \\ f_p(a_o + \Sigma \partial_i U_i) \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{où } U_i = (u_i^1, \ldots, u_i^N) \in A^N .$$

Un développement de Taylor en notation vectorielle fournit

(2) $$0 = f(a^\circ + \Sigma \partial_i U_i) = f(a^\circ) + M_o \cdot \Sigma \partial_i U_i + \Sigma \partial_i \, \partial_j \, Q_{ij}$$

où Q_{ij} est un p-vecteur colonne dont les composantes sont les polynômes en y et a de degré au moins 2.

(3) $\Leftrightarrow$
$$0 = \sum_i \partial_i \, M_o \, U_i + \sum_{i,j} \partial_i \, \partial_j \, (Q_{ij} + E_{ij}) .$$

Puisque

$$M_o N_j = \partial_j I$$

cette égalité peut se réecrire

$$0 = \Sigma\, \partial_i M_o \cdot U_i + \sum_i \partial_i M_o [\sum_j N_j (Q_{ij} + E_{ij})] \quad .$$

Il suffit alors de résoudre les différents systèmes d'équations

$$U_i + \Sigma\, N_j (Q_{ij} + E_{ij}) = 0$$

qui admet $U = 0$ comme solution modulo $\mathcal{J}^{n-2h}$ et dont la jacobienne en 0 est la matrice identité d'ordre N. On est donc ramené à résoudre des systèmes d'équations dont on a une solution approchée et définissant une algèbre étale sur A au voisinage de cette section.

Il existe donc une solution relevant cette solution approchée d'après la définition même de couple hensélien - soit $u_i = (u_i^1 \dots u_i^N)$ et $a^o + \Sigma\, \partial_i u_i$ est la solution cherchée du système d'équations f.

Le lemme 2 va permettre de réduire, en quelque sorte, le cas général au cas traité par le lemme 1.

LEMME 2.- <u>Soient</u> A <u>un anneau noethérien</u>, B <u>une</u> A-<u>algèbre de type fini, supposée lisse sur</u> A. <u>Soit</u> $B = A[X_1 \dots X_N] | \mathcal{J}$ <u>une présentation de</u> B, $\mathcal{J} = (f_1, \dots f_q) \subset A[X_1 \dots X_N]$. Alors le fibré vectoriel associé au B-module $\mathcal{J}|_{\mathcal{J}^2}$ est lisse sur $\mathrm{Sp}\, A$ de dimension relative N et est globalement une intersection complète au-dessus de A.

Soit C l'algèbre symétrique du B-module $\mathcal{J}|_{\mathcal{J}^2}$ et considérons

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sp}\, C \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \mathrm{Sp}\, B \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Sp}\, A \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Sp}\, C$ est lisse sur A et de dimension relative constante égale à N. En effet au voisinage d'un point de B où la dimension relative de B sur A

est d , $\mathcal{J}|_{\mathcal{J}^2}$ est libre de rang $N-d$ sur B. Donc la dimension relative de $\mathrm{Sp}\,C$ sur B au-dessus d'un tel point est $N-d$.

$\mathrm{Sp}\,C$ est plongé dans l'espace affine de dimension q sur B. Soit $I|_{I^2}$ le faisceau conormal de l'immersion : $\mathrm{Sp}\,C \hookrightarrow \mathrm{Sp}\,B[Y_1 \dots Y_q]$. On peut d'autre part considérer $\mathrm{Sp}\,C$ comme plongé dans l'espace affine de dimension $N+q$ sur A. Soit $K|_{K^2}$ le faisceau conormal de $\mathrm{Sp}\,C$ dans $\mathrm{Sp}\,A[X_1 \dots X_N, Y_1 \dots Y_q]$.

On peut écrire les suites exactes suivantes, qui sont des suites de modules localement libres sur des schémas affines donc scindées.

(1) $$0 \longrightarrow \mathcal{J}|_{\mathcal{J}^2} \longrightarrow \Omega_{A[X]|A}\big|^B \longrightarrow \Omega_{B|A} \longrightarrow 0$$

qui induit au-dessus de $\mathrm{Sp}\,C$

(2) $$0 \longrightarrow f^*(\mathcal{J}|_{\mathcal{J}^2}) \longrightarrow C^N \longrightarrow f^*(\Omega_{B|A}) \longrightarrow 0 \quad .$$

D'autre part

(3) $$0 \longrightarrow f^*(\Omega_{B|A}) \longrightarrow \Omega_{C|A} \longrightarrow \Omega_{C|B} \longrightarrow 0$$

$\mathrm{Sp}\,C$ étant le fibré vectoriel associé au B-module $\mathcal{J}|_{\mathcal{J}^2}$, $\Omega_{C|B}$ est égal au module $f^*(\mathcal{J}|_{\mathcal{J}^2})$.

Il résulte de cette identification et des suites (2) et (3) que $\Omega_{C|A}$ est globalement libre de rang N sur C :

$$\Omega_{C|A} \simeq f^*(\mathcal{J}|_{\mathcal{J}^2}) \oplus f^*(\Omega_{B|A}) \simeq C^N \quad .$$

Considérant donc $\mathrm{Sp}\,C$ comme plongé dans $\mathrm{Sp}\,A[X_1 \dots X_N , Y_1 \dots Y_q]$ on peut écrire

$$0 \longrightarrow K|_{K^2} \longrightarrow C^{N+q} \longrightarrow \Omega_{C|A} \longrightarrow 0$$

ou

$$0 \longrightarrow K|_{K^2} \longrightarrow C^{N+q} \longrightarrow C^N \longrightarrow 0 \quad .$$

Mais considérons alors $\mathrm{Sp}\, C$ comme plongé dans un espace affine sur A de dimension $2N + q$: $\mathrm{Sp}\, A[X_1 \dots X_N , Y_1 \dots Y_q , T_1 \dots T_N]$ et défini par les équations supplémentaires : $T_i = 0$, $i \in [1,N]$.

Soit $K'|_{K'^2}$ le faisceau conormal associé à cette nouvelle immersion. Il est globalement libre sur C , on a en effet :

$$K'|_{K'^2} \simeq K|_{K^2} \oplus C^N \simeq C^{N+q} .$$

Il existe donc $N + q$ éléments de $A[X_1 \dots X_N , Y_1 \dots Y_q , T_1 \dots T_N]$ engendrant l'idéal définissant C dans cette algèbre, sur un voisinage de $\mathrm{Sp}\, C$ dans $\mathrm{Sp}\, A[X_1 \dots X_N , Y_1 \dots Y_q , T_1 \dots T_N]$.

<u>Démonstration du théorème.</u>

Reprenons $B = A[X_1 \dots X_N]|_{\mathfrak{J}}$ avec $\mathrm{Sp}\, B$ lisse sur A en dehors du fermé défini par $\mathfrak{J}$.

Soit C l'algèbre symétrique du B-module $\mathfrak{J}|_{\mathfrak{J}^2}$ et considérons

$$\begin{array}{c} \mathrm{Sp}\, C \\ \downarrow f \\ \mathrm{Sp}\, B \\ \downarrow \pi \\ \mathrm{Sp}\, A \end{array}$$

une section approchée de B définit, grâce à la section unité du fibré vectoriel, une section approchée de C . Il suffit donc de démontrer le théorème pour C , puis de projeter par f la section obtenue sur $\mathrm{Sp}\, B$.

Cela revient à dire qu'on peut supposer qu'au-dessus de tout ouvert affine de la base contenu dans $\mathrm{Sp}\, A - V(\mathfrak{J})$ on peut supposer $\mathfrak{J}$ engendré dans un voisinage de $\mathrm{Sp}\, B$ par p éléments, la dimension relative de

$\mathrm{Sp}\,B - V(\mathfrak{J}B)$ sur $\mathrm{Sp}\,A - V(\mathfrak{J})$ étant $N - p$.

On va alors raisonner par récurrence sur le nombre d'ouverts affines (localisés de A) nécessaire pour recouvrir $\mathrm{Sp}\,A - V(\mathfrak{J})$. Soit l ce nombre et soient $(\alpha_1 \dots \alpha_l)$ des éléments de $\mathfrak{J}$ tels que les $\mathrm{Sp}\,A_{\alpha_i}$ recouvrent $\mathrm{Sp}\,A - V(\mathfrak{J})$.
Pour $l = 0$, le résultat est clair. On le suppose établi pour $l = l - 1$. Soient $(f_1, \dots f_{N-p})$ des éléments de $\mathfrak{J}$ engendrant cet idéal dans un voisinage de $\mathrm{Sp}\,B \otimes_A A_{\alpha_1}$. Soit Δ l'idéal de $A[X_1 \dots X_N]$ engendré par les mineurs d'ordre $N - p$ de la jacobienne $(\partial f_i/\partial X_j)$. On a dans $\mathrm{Sp}\,A[X_1 \dots X_N]$:

$$V(\Delta) \cap \mathrm{Sp}\,B \subset V(\alpha_1 A[X_1 \dots X_N]) .$$

Donc

$$(\gamma) \qquad \exists \gamma \mid \Delta + \mathfrak{J} \supset \alpha_1 A[X_1 \dots X_N] .$$

Si on désigne par Q l'idéal de $A[X_1 \dots X_N]$ conducteur de $\mathfrak{J}$ dans $(f_1 \dots f_{N-p})$, un argument du même type permet d'écrire

$$(\beta) \qquad \exists \beta \mid Q + \mathfrak{J} \supset \alpha_1^{\beta} A[X_1 \dots X_N] .$$

Soit enfin Λ l'idéal de A formé des éléments à support dans $V(\alpha_1)$

$$(\lambda) \qquad \exists \lambda \mid \Lambda \cap (\alpha_1^{\lambda}) = (0) \qquad \text{(Artin-Rees)} .$$

Soit t un entier vérifiant $t > \sup(2\gamma, \gamma + \beta, \gamma + \lambda)$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe deux entiers n'_o et r' tels que si on a un morphisme

$$\varphi : A[X_1 \dots X_N] \longrightarrow A$$
$$X_i \longrightarrow a_i$$

définissant une section modulo $\mathfrak{J}^n$ de B (avec $n > n'_o$) alors il existe $a' = (a'_1 \dots a'_N)$ vérifiant $a'_i \equiv a_i \quad (\mathfrak{J}^{n-r'})$, $\mathfrak{J}(a') \subset \alpha_1^t$.

On a en fait

$$\mathfrak{J}(a') \subset \alpha_1^t \cap \mathfrak{J}^{n-r'}$$

Donc pour n assez grand

(1) $\quad \mathcal{J}(a') \subset \alpha_1^t \cdot \mathcal{J}^{n-r'-k}$ (Artin-Rees)

Un raisonnement déjà fait montre qu'on a alors (cf. démonstration du théorème 1) :

(2) $\quad \Delta(a') \supset \alpha_1^{\gamma}$.

Il résulte alors du lemme 1 et des relations (1) et (2) qu'il existe $c = (c_1 \ldots c_N) \in A^N$ vérifiant

$$c_i = a'_i \quad (\mathcal{J}^{n-r-k} \alpha_1^{t-\gamma})$$

$$f_i(c) = 0 \quad \forall i \in [1, N-p] \; .$$

Il reste à montrer que c définit une section de B c'est-à-dire qu'on a

$$\mathcal{J}(c) = 0 \; .$$

Mais

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}(a') \subset \mathcal{J}^{n-r'-k} \alpha_1^t \\ c \equiv a' \; (\mathcal{J}^{n-r'-k} \alpha_1^{t-\gamma}) \end{array} \right. \Longrightarrow \mathcal{J}(c) \quad \mathcal{J}^{n-r'-k} \alpha_1^{t-\gamma} \; .$$

D'autre part on a

$$Q(c) \supset (\alpha_1^{\beta}) \; .$$

Donc

$$\alpha_1^{\beta} \mathcal{J}(c) \subset (f_i(c))$$

$$\alpha_1^{\beta} \mathcal{J}(c) = 0 \; .$$

Mais t a été choisi supérieur à $\gamma + \lambda$.

Donc (cf.(λ)) : $\quad \mathcal{J}(c) = 0$.