

# *Astérisque*

JOHN HUBBARD

**Le théorème de M. Artin sur les solutions  
d'équations analytiques**

*Astérisque*, tome 16 (1974), p. 105-115

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1974\\_\\_16\\_\\_105\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__16__105_0)

© Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE THEOREME DE M. ARTIN SUR LES SOLUTIONS  
D'EQUATIONS ANALYTIQUES

par John HUBBARD

§ 1. Germes d'espaces analytiques et espaces formels.

La catégorie  $\text{GAN}$  des germes d'espaces analytiques a pour objets les espaces analytiques pointés et pour morphismes les germes de morphismes d'espaces analytiques. Si  $X = (E, x)$  est un germe d'espace analytique, on pose  $O_X = O_{E, x}$ . Le foncteur  $X \longrightarrow O_X$  est une équivalence de  $\text{GAN}$  sur la catégorie opposée à celle des algèbres analytiques.

Un espace formel est un espace réduit à un point, muni d'une  $\mathbb{C}$ -algèbre isomorphe à un quotient d'une algèbre de la forme  $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ . Les morphismes sont les morphismes d'espaces  $\mathbb{C}$ -annelés. La catégorie  $\text{For}$  des espaces formels est donc équivalente à la catégorie opposée celle des  $\mathbb{C}$ -algèbres formelles.

Pour tout objet  $X = (E, x)$  de  $\text{GAN}$ , on pose  $\hat{X} = (x, \hat{O}_X)$ . On définit ainsi un foncteur de  $\text{GAN}$  dans  $\text{For}$ , et l'inclusion  $O_X \hookrightarrow \hat{O}_X$  donne un morphisme d'espace annelé de  $\hat{X}$  dans  $X$ , fonctoriel en  $X$ . Le foncteur  $X \longmapsto \hat{X}$  commute aux produits fibrés dans  $\text{GAN}$  et  $\text{For}$ .

Soit  $\pi : X \longrightarrow S$  un morphisme de  $\text{GAN}$  (resp. dans  $\text{For}$ ). On pose  $\Omega_{X/S} = \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ , considéré comme  $O_X$ -module, où  $\mathcal{J}$  est l'idéal définissant la diagonale dans  $X \times_S X$ . Si  $X$  est un germe d'espace analytique au-dessus de  $S$ , on a  $\Omega_{\hat{X}/S} = O_{\hat{X}} \otimes \Omega_{X/S} = \hat{\Omega}_{X/S}$ .

Soient  $f, g : X \longrightarrow Y$  deux morphismes dans  $\text{GAN}$  (resp. dans  $\text{For}$ ). On

dit que  $f$  et  $g$  sont tangents à l'ordre  $C$  s'ils coïncident sur le voisinage infinitésimal d'ordre  $C$  du point de base de  $X$ , i.e. s'ils donnent le même homomorphisme  $O_Y \longrightarrow O_X/m^{C+1}$ .

Soient  $X$  un germe d'espace analytique et soit  $T$  un sous espace formel de  $\hat{X}$ . L'adhérence analytique de  $T$  dans  $X$  est le plus petit germe de sous-espace analytique  $Y$  de  $X$  tel que  $T$  soit un sous-espace formel de  $\hat{Y}$ . Autrement dit, c'est le germe de sous-espace analytique de  $X$  défini par l'idéal noyau de  $O_X \longrightarrow O_T$ . Si  $T$  est réduit (resp. intègre), il en est de même de son adhérence analytique  $Y$ . En effet,  $O_Y$  est isomorphe à un sous-anneau de  $O_T$ . En revanche, la dimension de  $Y$  n'est pas en général égale à la dimension de  $T$ , et  $Y$  n'est pas nécessairement lisse si  $T$  l'est.

Contre-exemple.

Dans  $\underline{C}^3$ , soit  $X = \{(x, y, z) \mid xz = y^2\}$ , et  $T$  le sous-espace formel défini abusivement par  $T = \{(x, f(x), \frac{(f(x))^2}{x})\}$ , où  $f(x) = \sum_1^\infty n! x^n$ . L'espace formel  $T$  est lisse de dimension 1; mais son adhérence analytique est  $X$ , qui est de dimension 2 et singulier.

§ 2. Énoncé des résultats.

Soit  $n$  un entier. Le théorème de M. Artin est le suivant :

THEOREME 1.- Soit  $\pi : X \longrightarrow S$  un germe de morphisme analytique avec  $S$  lisse de dimension  $n$ , soit  $\sigma : \hat{S} \longrightarrow \hat{X}$  une section formelle de  $\pi$ , et soit  $C$  un entier. Alors il existe un germe  $\tau : S \longrightarrow X$  de section analytique de  $\pi$ , tel que  $\tau$  soit tangent à  $\sigma$  à l'ordre  $C$ .

Nous démontrerons simultanément ce théorème et le résultat suivant :

THEOREME 2.- Soient  $S$  un germe d'espace analytique lisse de dimension  $n$ ,  $C$  et  $N$  des entiers, et  $h : S \times \underline{\mathbb{C}}^N \rightarrow \underline{\mathbb{C}}$  un germe d'application analytique. Posons  $H = h^{-1}(0)$  et  $\pi = \text{pr}_1 : S \times \underline{\mathbb{C}}^N \rightarrow S$ . Soient  $Y$  un germe de sous-espace analytique de  $H$  et  $\sigma : \hat{S} \rightarrow \hat{S} \times \hat{\underline{\mathbb{C}}}^N$  une section formelle de  $\pi$ , telle que  $\text{Im} \sigma \not\subset \hat{H}$  et  $\text{Im} \sigma \cap \hat{H} \subset \hat{Y}$ . Alors, il existe un germe  $\tau : S \rightarrow S \times \underline{\mathbb{C}}^N$  de section analytique de  $\pi$ , qui soit tangent à l'ordre  $C$  à  $\sigma$ , et tel que  $\text{Im} \tau \cap H \subset Y$ .

Appelons  $A_n$  l'énoncé du théorème 1 et  $B_n$  celui du théorème 2. Les énoncés  $A_0$  et  $B_0$  sont évidents. Nous montrerons que  $A_{n-1} \implies B_n$  et  $B_n \implies A_n$ .

§ 3. Démonstration de  $A_{n-1} \implies B_n$ .

Commençons par mettre  $S$  sous la forme  $T \times \underline{\mathbb{C}}$ , de telle sorte que  $\hat{h} \circ \sigma(0, \xi)$  ne s'annule pas identiquement, et soit  $d$  l'entier tel que

$$\hat{h}(\sigma(0, \xi)) = \xi^d + \dots \quad (\text{termes d'ordre supérieur}).$$

On fait aussi subir à  $S \times \underline{\mathbb{C}}^N$  un automorphisme au-dessus de  $S$  de telle sorte que  $\sigma(0, \xi) = (0, \xi, y(0, \xi))$ , avec  $y(0, \xi)$  n'ayant que des termes d'ordre  $\geq d$  en  $\xi$ . Il suffit de soustraire  $\sigma(0, \xi)$  tronqué à l'ordre  $d$ .

Soit  $f : S \times \underline{\mathbb{C}}^N \rightarrow \underline{\mathbb{C}}^m$  un germe d'application analytique tel que  $Y = H \cap f^{-1}(0)$ .

On note  $P$  l'espace des fonctions polynomiales sur  $\underline{\mathbb{C}}$  de degré  $< d$ , et  $\Gamma$  l'espace des sections  $\underline{\mathbb{C}} \rightarrow \underline{\mathbb{C}}^{1+N}$  de  $\text{pr}_1 : \underline{\mathbb{C}}^{1+N} \rightarrow \underline{\mathbb{C}}$  qui sont polynomiales de degré  $< d$ . On a  $P \cong \underline{\mathbb{C}}^d$  et  $\Gamma \cong P^N = \underline{\mathbb{C}}P^{dN}$ .

D'après le théorème de préparation de Weierstrass, il existe un germe

d'application analytique  $R : T \times \Gamma \longrightarrow P^m$  et un seul tel que la série  $h(t, \gamma(\xi)) \in \underline{\mathbb{C}}\{t, \gamma, \xi\}$  divise la série  $f(t, \gamma(\xi)) - R(t, \gamma)(\xi) \in (\underline{\mathbb{C}}\{t, \gamma, \xi\})^m$ . Pour  $t \in T$  et  $\gamma \in \Gamma$ ,  $R(t, \gamma)$  est la fonction polynomiale de degré  $< d$  à valeurs dans  $\underline{\mathbb{C}}^m$  qui coïncide avec  $f_t \circ \gamma$  sur  $\gamma^{-1}(H_t)$ . On a  $R(t, \gamma) = 0$  si et seulement si  $(\{t\} \times \text{Im } \gamma) \cap H \subset Y$ .

D'après le théorème de préparation formel, il existe des sections formelles  $q$  et  $\rho$  de  $\hat{S}$  dans  $\hat{S} \times \hat{\mathbb{C}}^N$  telles que  $\sigma = (\hat{h} \circ \sigma)q + \rho$ , avec  $\rho(t, \xi)$  polynomiale de degré  $< d$  en  $\xi$ . Comme  $\rho(0, \xi)$  est de degré  $< d$  en  $\xi$  et que  $\sigma(0, \xi)$  et  $\hat{h}(\sigma(0, \xi))$  sont d'ordre  $\geq d$ , on a  $\rho(0, \xi) = 0$ . On peut donc définir une section formelle  $\tilde{\rho} : \hat{T} \longrightarrow \hat{T} \times \hat{\Gamma}$  par  $\tilde{\rho}(t) = (t, (\xi \longrightarrow (t, \xi)))$ ; le point de base a bien pour image l'origine.

Notons  $X$  le sous-espace  $R^{-1}(0)$  de  $T \times \Gamma$ . Nous allons montrer que  $\text{Im}(\tilde{\rho}) \subset \hat{X}$ , ce qui nous permettra d'appliquer  $A_{n-1}$ .

En remontant à la définition de  $R$ , on voit que ceci est équivalent à demander que  $\hat{h} \circ \rho$  divise  $\hat{f} \circ \rho$ , ou encore que  $\text{Im } \rho \cap \hat{H} \subset \hat{Y}$ . Comme  $\text{Im } \sigma \cap \hat{H} \subset \hat{Y}$  par hypothèse, il suffit de démontrer  $\text{Im } \rho \cap \hat{H} = \text{Im } \sigma \cap \hat{H}$ , ou encore  $\hat{h} \circ \rho = (\hat{h} \circ \sigma)$  unité. Par la définition de  $\rho$ ,  $\hat{h} \circ \sigma \mid \sigma - \rho$ ; mais  $\hat{h} \circ \sigma - \hat{h} \circ \rho$  appartient à l'idéal engendré par  $\sigma - \rho$ , donc  $\hat{h} \circ \sigma \mid \hat{h} \circ \sigma - \hat{h} \circ \rho$  et  $\hat{h} \circ \sigma \mid \hat{h} \circ \rho$ . Posons  $(\hat{h} \circ \rho)(t, \xi) = (\hat{h} \circ \sigma)(t, \xi) u(t, \xi)$  et il faut voir que le terme constant de  $u$  est non nul. On peut se restreindre à la droite  $t = 0$ , où  $\rho(0, \xi) = (0, \xi, 0)$  et  $\sigma(0, \xi) = (0, \xi, \text{termes d'ordre } > d \text{ en } \xi)$ , donc  $\hat{h} \circ \rho \equiv \hat{h} \circ \sigma \pmod{m^k}$ ,  $k > d$ . Ceci ne pourrait être le cas si le terme constant de  $u$  était nul.

Nous avons maintenant vérifié toutes les hypothèses de  $A_{n-1}$ , et il existe donc  $\tilde{\rho}_1 : T \longrightarrow T \times \Gamma$  un germe de section analytique de  $p$  tel que

$R \circ \tilde{\rho}_1 = 0$  et tel que  $\tilde{\rho} \equiv \tilde{\rho}_1 \pmod{\mathfrak{m}^C}$ .

Il nous faut maintenant dévisser toute la construction pour retrouver  $\tau$ .  
D'abord définissons  $\rho_1 : S \rightarrow S \times \underline{\mathbb{C}}^N$  germe de section analytique de  $\pi$ ,  
par

$$\rho_1(t, \xi) = (t, \xi, \theta_t(\xi)) \quad , \quad \text{où } \theta_t(\xi) \text{ est défini}$$

par  $\tilde{\rho}(t)(\xi) = (t, \theta_t(\xi))$ .

Ensuite, remarquons qu'il existe  $q' : S \rightarrow S \times \underline{\mathbb{C}}^N$  section formelle  
de  $\pi$  telle que  $\sigma = (\hat{h} \circ \rho)q' + \rho$ . En effet,  $\hat{h} \circ \sigma | \sigma - \rho$  par définition,  
et nous avons vu que  $\hat{h} \circ \rho | \hat{h} \circ \sigma$ .

Posons  $q'_1 = q'$  tronqué à l'ordre  $C$ , et définissons  $\tau = (h \circ \rho_1)q'_1 + \rho_1$ .  
Il est évident que  $\sigma \equiv \tau \pmod{\mathfrak{m}^C}$ , et il faut voir que  $\text{Im } \tau \cap H \subset Y$ .  
Mais  $\text{Im } \rho_1 \cap H \subset Y$  (ceci n'est qu'une autre manière de dire  $R \circ \rho_1 = 0$ ), et  
on voit, par un raisonnement identique à celui qui démontre que  $\text{Im } \rho \cap \hat{H} = \text{Im } \sigma \cap \hat{H}$ ,  
que  $\text{im } \rho_1 \cap H = \text{im } \tau \cap H$ .  $\tau$  répond donc à toutes les conditions désirées.

#### §4. Plan de la démonstration de $B_n \implies A_n$ .

On peut supposer que  $X$  est l'adhérence analytique de  $\text{Im } \sigma$ ; alors  
 $X$  est intègre, et on a :

LEMME 1.-  $X$  est génériquement lisse sur  $S$ .

La démonstration du lemme 1 sera donnée au paragraphe 5.

Remarque.  $X$  n'est pas nécessairement lisse sur  $S$ ; il le serait si  $\sigma$   
était analytique.

On peut supposer  $X \subset S \times \underline{\mathbb{C}}^N$ , de codimension  $r$ , défini par des  
équations  $f_1, \dots, f_m$ , et en notant  $y_1, \dots, y_N$  les coordonnées dans  $\underline{\mathbb{C}}^N$ ,

on peut supposer que la fonction

$$\delta(s,y) = \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right) \quad 1 \leq i, j \leq r$$

ne s'annule pas identiquement sur  $X$ . En effet, les déterminants des mineurs d'ordre  $r$  de la matrice

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq N$$

définissent un sous-espace de  $S \times \mathbb{C}^N$  dont l'intersection avec  $X$  est le "lieu de ramification" de  $X$  sur  $S$ , qui est un sous-espace strict de  $X$ .

Comme  $X$  est l'adhérence analytique de  $\text{Im } \sigma$ ,  $\hat{\delta}$  ne s'annule pas non plus identiquement sur  $\hat{S}$ . Nous appliquerons  $B_n$  en prenant  $h = \delta^2$ ,  $Y = H \cap X$ ,  $\sigma$  et  $\tau$  étant les mêmes. On trouve donc une section analytique  $\tau : S \rightarrow S \times \mathbb{C}^N$ , tangente à  $\sigma$  à l'ordre  $C$ , et telle que  $\text{Im } \tau \cap H \subset Y$ . Remarquons que l'on emploie une hypothèse plus faible que celle dont nous disposons, et que l'on tire une conclusion plus faible que celle qu'on désire, qui serait  $\text{Im } \tau \subset X$  et non pas  $\text{Im } \tau \cap H \subset X \cap H$ . Le lemme 2, qui suit, nous permet d'améliorer le résultat.

LEMME 2.- Soit  $g : S \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^r$  un germe d'application analytique, avec  $r \leq n$ , et soit  $C \geq 1$  un entier. Soit  $\tau : S \rightarrow S \times \mathbb{C}^N$  un germe de section analytique. Posons  $\delta = \det \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq r}$ . On suppose que  $g \circ \tau \equiv 0 \pmod{(\delta \circ \tau)^2 m^C}$ . Alors, il existe une section analytique  $\tau_1 : S \rightarrow S \times \mathbb{C}^N$  telle que  $g \circ \tau_1 = 0$  et  $\tau_1 \equiv \tau \pmod{(\delta \circ \tau)^m C}$ .

La démonstration du lemme 2 sera l'objet du paragraphe 6.

Nous appliquerons le lemme 2 avec  $g = (f_1, \dots, f_r)$ , et avec le construit ci-dessus. La conclusion n'est pas encore celle que nous désirons,

car elle nous dit seulement que l'image de  $\tau_1$  tombe dans l'espace des zéros communs aux  $r$  premières équations de  $f$ , et cet espace peut contenir strictement  $X$ . Le lemme 3 nous dit que si nous avons choisi  $C$  suffisamment grand, l'image de  $\tau_1$  tombe en fait dans  $X$ .

LEMME 3.- Soit  $\pi : Y \rightarrow S$  un germe d'application analytique, avec  $S$  irréductible,  $\sigma : \hat{S} \rightarrow \hat{Y}$  une section formelle de  $\pi$ , dont l'adhérence analytique est une composante irréductible  $X$  de  $Y$ . Alors il existe un entier  $C$  tel que, si  $\tau : S \rightarrow Y$  est un germe de section analytique de  $\pi$  satisfaisant à  $\sigma \equiv \tau \pmod{\eta^C}$ , alors  $\text{im}\tau \subset X$ .

La démonstration du lemme 3 fera l'objet du paragraphe 7.

### § 5. Démonstration du lemme 1.

Rappelons l'énoncé. Soient  $X, x$  et  $S, s$  des germes d'espaces analytiques, où nous supposons  $S$  lisse;  $\pi : X \rightarrow S$  un germe d'application analytique et  $\bar{\sigma} : \hat{S} \rightarrow \hat{X}$  une section formelle de  $\pi$ , dont l'adhérence analytique est  $X$ . Alors  $X$  est génériquement lisse sur  $S$ .

Nous avons vu que sous les hypothèses du lemme,  $X$  est irréductible et réduit, donc génériquement lisse;  $X$  a donc une dimension que nous noterons  $k$ ; et nous poserons  $\dim S = n$ . Soit  $\mathcal{N}$  le faisceau analytique cohérent sur  $X$  noyau de l'application canonique  $\Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{X/S}^1$ , et appelons  $\rho$  le rang générique de  $\mathcal{N}$ .

L'ensemble des points lisses de  $X$  forme un ouvert dense  $U \subset X$ , l'ensemble des points où  $\mathcal{N}$  a rang  $\rho$  est aussi un ouvert dense  $V \subset X$ , sur  $U \cap V$  le rang de  $d\pi$  est constant et égal à  $\rho$ , par conséquent, si  $\rho = n$ ,  $d\pi$

est surjectif sur  $U \cap V$  qui est dense dans  $X$ , et  $X$  est génériquement lisse  $S$ .

On voit immédiatement que  $\rho \leq n$  en considérant  $d\pi$  sur  $U \cap V$ ; il suffit donc de démontrer  $\rho \geq n$ .

Il y a une suite exacte canonique de faisceau:

$$\pi^* \Omega_S^1 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \rightarrow 0,$$

et comme  $\mathcal{N}$  est le noyau de la seconde application, on en tire un morphisme  $d\pi: \Omega_S^1 \rightarrow \mathcal{N}$ . Ici,  $\Omega_S^1$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module et  $\mathcal{N}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module;  $d\pi$  est  $\mathcal{O}_S$ -linéaire pour la structure de  $\mathcal{O}_S$ -algèbre sur  $\mathcal{O}_X$  donnée par  $\pi^*: \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_X$ . C'est ce que nous appellerons être  $\pi^*$ -linéaire.

On déduit de manière analogue de  $\bar{\sigma}$  un morphisme  $\bar{\sigma}^* \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_S^1$  de faisceaux sur  $S$ . Comme  $\Omega_X^1 = \Omega_X^1$  et  $\Omega_S^1 = \Omega_S^1$  on peut composer et trouver une application  $d\bar{\sigma}: \hat{\mathcal{N}} \rightarrow \hat{\Omega}_S^1$ .  $d\bar{\sigma}$  est  $\bar{\sigma}^*$ -linéaire pour l'application  $\bar{\sigma}^*: \hat{\mathcal{O}}_X \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_S$  déduite de  $\bar{\sigma}$ . On vérifie aisément que  $d\bar{\sigma} \circ d\hat{\pi} = \text{identité}$ .

Soient  $M_S, M_X, M_S, M_X$  les corps de fractions de  $\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_S, \mathcal{O}_X$  respectivement, et soient  $L_X = \{f/g \mid f, g \in \mathcal{O}_X \text{ et } g \circ \sigma \neq 0\}$  et  $\hat{L}_X = \{\hat{f}/\hat{g} \mid \hat{f}, \hat{g} \in \hat{\mathcal{O}}_X \text{ et } \hat{g} \circ \bar{\sigma} \neq 0\}$ . Nous obtenons ainsi le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} M_X & \hookrightarrow & \hat{M}_X \\ \uparrow = & & \uparrow \neq \\ L_X & \hookrightarrow & \hat{L}_X \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_{X,x} & \hookrightarrow & \hat{\mathcal{O}}_{X,x} \end{array}$$

L'hypothèse que  $X$  est l'adhérence analytique de l'image de  $\bar{\sigma}$  nous donne que  $L_X = M_X$ , mais il n'est pas vrai en général que  $\hat{L}_X = \hat{M}_X$ ; la fonction formelle  $g(x,y) = y_i - \bar{\sigma}_i(x,y)$  qui s'annule sur  $\text{im } \bar{\sigma}$  n'est pas en général

identiquement nulle. Mais d'autre part, l'application  $\bar{\sigma}^* : \hat{\mathcal{O}}_X \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_S$  s'étend à une application  $\hat{L}_X \rightarrow \hat{M}_S$ , que nous noterons encore  $\bar{\sigma}^*$ , mais pas à une application  $\hat{M}_X \rightarrow \hat{M}_S$ .

L'application  $\pi^* : \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_X$  s'étend à une application  $M_S \rightarrow L_X$  et à une application  $\hat{M}_S \rightarrow \hat{L}_X$  notées  $\pi^*$  et  $\hat{\pi}^*$  respectivement. On obtient ainsi des applications

$$\hat{d}\pi \otimes \hat{\pi}^* : \hat{\Omega}_S^1 \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_S} \hat{M}_S \rightarrow \hat{\mathcal{N}} \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_X} \hat{L}_X$$

et

$$d\bar{\sigma} \otimes \bar{\sigma}^* : \hat{\mathcal{N}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \hat{L}_X \rightarrow \hat{\Omega}_S^1 \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_S} \hat{M}_S,$$

qui sont  $\hat{\pi}^*$  et  $\bar{\sigma}^*$ -linéaires respectivement, et qui satisfont à  $(d\bar{\sigma} \otimes \bar{\sigma}^*) \circ (\hat{d}\pi \otimes \hat{\pi}^*) = \text{identité}$ .

Mais  $\hat{\mathcal{N}} \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_X} \hat{L}_X$  est un  $\hat{L}_X$  module libre de rang  $\rho$ , car  $\hat{\mathcal{N}} \otimes_{\mathcal{O}_X} M_X$  est libre de rang  $\rho$ , et  $\hat{\mathcal{N}} \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_X} \hat{L}_X = \hat{\mathcal{N}} \otimes_{\mathcal{O}_X} M_X \otimes_{M_X} \hat{L}_X$ ; et  $\hat{\Omega}_S^1 \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_S} \hat{M}_S$  est un  $\hat{M}_S$ -espace vectoriel de dimension  $n$  pour des raisons analogues.

Le lemme 1 suit donc du lemme purement algébrique suivant, dont la démonstration sera laissée au lecteur.

LEMME.- Soient A et B des anneaux,  $\alpha : A \rightarrow B$  et  $\beta : B \rightarrow A$  des morphismes tels que  $\beta \circ \alpha = \text{id}$ . Soient E et F des modules libres de rang p et q sur A et B respectivement. Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow E$  des applications  $\alpha$  et  $\beta$ -linéaires respectivement, tels que  $g \circ f = \text{id}$ . Alors  $p \leq q$ .

Dans notre cas, cette inégalité donne  $n \leq \rho$ , et c'est ce qu'il fallait démontrer.

§ 6. Démonstration du lemme 2.

On peut sans perte de généralité supposer que  $\tau(s) = (s, 0)$  et que  $r = N$ , en rajoutant au besoin les équations  $g_j(s, y) = y_j$ ,  $r+1 \leq j \leq N$ .

Notons  $J_s = (g_s)' 0$  et  $\delta(s) = \det J_s$ .

Nous essaierons de résoudre l'équation

$$(1) \quad g(s, \delta(s)u) = 0 \text{ pour } u \text{ en fonction de } s.$$

D'après le théorème de Cramer, si  $M_s$  désigne la matrice des cofacteurs de  $J_s$ ,

$$(2) \quad J_s \circ M_s = M_s \circ J_s = \delta(s)I.$$

Il existe une application analytique  $\epsilon : S \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$  telle que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\epsilon(s, y)}{\|y\|} = 0,$$

et que

$$g(s, y) = g(s, 0) + J_s(y) + \epsilon(s, y).$$

L'équation (1) s'écrit

$$0 = g(s, 0) + J_s(\delta(s)u) + \epsilon(s, \delta(s)u).$$

Par hypothèse,  $g(s, 0)$  peut s'écrire  $(\delta(s))^2 g_1(s, 0)$ , et, si l'on pose

$$\epsilon_1(s, u) = \frac{\epsilon(s, \delta(s)u)}{\delta^2(s)}, \text{ on a encore } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\epsilon_1(s, u)}{\|u\|} = 0.$$

L'équation (2) peut donc s'écrire

$$0 = (\delta(s))^2 g_1(s, 0) + \delta(s) J_s(u) + \delta^2(s) \epsilon_1(s, u).$$

En simplifiant par  $\delta(s)$  et en substituant (2), on trouve l'équation

$\varphi(s, u) = 0$ , où

$$\varphi(s, u) = M_s(g_1(s, 0)) + u + M_s \delta(s) \epsilon_1(s, u).$$

Le jacobien de la matrice  $\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right)$ ,  $1 \leq i, j \leq N$  est l'identité en zéro, et on peut donc résoudre pour  $u$  en fonction de  $s$  par le théorème des fonctions implicites.

§ 7. Démonstration du lemme 3.

L'espace  $Y$  peut s'écrire  $X \cup X'$ , avec  $X'$  un sous-espace fermé de  $Y$  ne contenant pas  $X$  et il existe donc une section  $\varphi$  de  $O_Y$  qui s'annule identiquement sur  $X'$  mais pas sur  $X$ .

Comme  $X$  est l'adhérence analytique de  $\text{Im } \sigma$ , la série formelle  $\varphi \circ \sigma$  n'est pas nulle, et disons qu'elle a des termes non nuls de degré  $C$ .

Alors, si  $\sigma \equiv \tau \pmod{m^C}$ ,  $\varphi \circ \sigma \equiv \varphi \circ \tau \pmod{m^C}$ , et par conséquent  $\varphi \circ \tau$  n'est pas la section nulle de  $O_S$ , et  $\text{Im } \tau \not\subset X'$ .

Par conséquent  $\text{Im } \tau \subset X$ .