BERNARD MAISONNEUVE

Systèmes régénératifs

Astérisque, tome 15 (1974)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__15__1_0>

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

La notion de système régénératif généralise simultanément les notions de processus fortement markovien et d'ensemble régénératif (au sens de HOFFMANN-JØRGENSEN). Du point de vue markovien, un tel système est un processus "partiellement markovien", c'est-à-dire ne possédant la propriété de Markov que pour une famille privilégiée de temps d'arrêt. D'un point de vue de renouvellement et de manière intuitive, un système régénératif est un processus subissant des renouvellements aux instants d'un ensemble aléatoire donné et en fonction de l'état présent du processus (et non pas nécessairement de manière indépendante comme pour les processus de renouvellement usuels).

De même que les ensembles régénératifs de HOFFMANN-JØRGENSEN permettent d'étudier de manière intrinsèque l'ensemble $M = \{t : X_t = x_o\}$ associé à un processus fortement markovien (X_t) et un état x_o, les systèmes régénératifs permettent d'étudier de manière intrinsèque le système constitué

- de l'ensemble $M = \{t : X_t \in F\}$
- du processus lacunaire $\{X_t, t \in M\}$

pour un processus fortement markovien (X_t) et un ensemble presque borélien finement fermé F, souvent appelé frontière. On a ainsi une notion de "processus à la frontière" qui n'est pas liée à l'existence d'un temps local sur F, et qui a l'avantage sur les processus à la frontière habituels de garder l'information relative à l'ensemble M. Le comportement du processus (X_t) hors de l'ensemble M sera également étudié à l'aide du processus des "incursions".

Depuis la rédaction de cette thèse, nous avons découvert dans la littérature les processus semi-markoviens de LEVY, les F-processus de NEVEU et les Markov renewal processes de PYKE. Nous ne développerons pas ici les relations entre ces diverses notions et les systèmes régénératifs.

Nous avons divisé ce travail en courts chapitres et groupé ces chapitres en trois parties. La première partie est consacrée à des résultats généraux sur les systèmes régénératifs, la seconde à quelques résultats supplémentaires relatifs à un processus fortement markovien et à une frontière de son espace d'états, la troisième aux ensembles régénératifs. La présentation matérielle a été assurée à l'I.R.M.A. de Strasbourg par Madame WATHLE, Madame KOEHLY et Monsieur SPRAUL. Je suis heureux de les remercier pour la qualité de leur travail.

P.A. MEYER a bien voulu me faire venir à Strasbourg et diriger mon travail de recherche. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens également à saluer la mémoire de P. VISSIO qui m'a donné le goût des mathématiques, à remercier J. NEVEU dont l'enseignement lumineux m'a orienté vers les probabilités, C. DELLACHERIE et X. FERNIQUE qui ont accepté de faire partie de mon jury, enfin l'espoir du ski américain et ami J.B. WALSH pour quelques conversations à bâtons rompus...

<u>Références bibliographiques</u>.

Chacun des courts chapitres composant ce travail possède sa bibliographie propre. Nous y ajouterons ici, comme bibliographie générale, trois articles qui compléteront utilement celui-ci.

E.B. DYNKIN. Wanderings of a Markov process. Theory of Prob. Vol.16, 1971, p. 401-408 (traduction anglaise de Teoriia Veroiatn).

R. GETOOR et M. SHARPE. Last exit decompositions and distributions. A paraître (Indiana J. of Math.).

B. MAISONNEUVE et P.A. MEYER. Ensembles aléatoires markoviens homogènes. A paraître dans le vol.VIII du Séminaire de Probabilités de Strasbourg, Lecture Notes in M. Springer-Verlag.

Ce dernier travail (consistant en cinq exposés) reprend les résultats de GETOOR-SHARPE et DYNKIN, ainsi qu'une partie du présent article, mais il en diffère par la recherche du maximum de généralité, et l'emploi de techniques beaucoup plus lourdes (compactifications, ensembles analytiques,...).

APERÇU GENERAL

1. Voici rapidement résumée la définition d'un système régératif, dans le cadre habituel $(\Omega, \mathcal{F}^{o}, \mathcal{F}_{t}^{o}, X_{t}, \theta_{t})$ utilisé pour un processus fortement markovien à valeurs dans un espace E. De manière canonique un système régénératif est caractérisé par

1) une famille universellement mesurable $(P^{x})_{x \in E}$ de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F}^{o})$. On définit alors comme d'habitude les mesures P^{μ} et la famille $(\mathcal{F}_{t})$ complétée par rapport à ces mesures. On suppose que la famille $(\mathcal{F}_{t})$ a été rendue continue à droite (propriété automatique pour un processus fortement markovien) ;

2) un temps d'arrêt terminal parfait exact R de la famille $(\mathcal{F}_{t})$, par exemple le temps d'entrée $T_{F} = \inf\{t > 0 : X_{t} \in F\}$ dans un borélien F.

On suppose que pour tout temps d'arrêt S de $(\mathcal{F}_{t})$, on a la propriété régénératrice (ou de Markov) au temps $D_{S} = S + R \circ \theta_{S}$:

$$E^{x}[Y \circ \theta_{D_S} | \mathcal{F}_{D_S}] = E^{X_{D_S}}[Y] \quad \text{p.s. sur } \{D_S < \infty\}$$

pour tout $x \in E$ et toute fonction Y $\mathcal{F}^{o}$-mesurable bornée.

2. Voici maintenant un aperçu de la théorie générale. Les outils essentiels seront

- la famille de tribus $(\hat{\mathcal{F}}_{t}) = (\mathcal{F}_{D_t})$
- les processus $\hat{X}_{t} = (D_{t} - t, X_{D_t})$

$$\hat{\imath}_{t} = (D_{t} - t, \theta_{t} \circ a_{D_t})$$

(a_s est l'opérateur d'arrêt à s : $X_t \circ a_s = X_{t \wedge s}$ $\forall t \geq 0$).

On notera que $\hat{\mathcal{F}}_{t} \supset \mathcal{F}_{t}$ et que la composante temporelle $D_{t} - t$ des processus $(\hat{X}_{t})$ et $(\hat{\imath}_{t})$ est un processus en dents de scie descendantes, alors que le processus de l'âge de la théorie du renouvellement a des dents de scie ascendantes.

Nous montrons que les processus $(\hat{X}_t)$ et $(\hat{\imath}_t)$ sont continus à droite (Ω étant muni de la topologie de la convergence en mesure), et fortement markoviens par rapport à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ avec des semi-groupes que nous explicitons ; nous étudions également la quasi-continuité à gauche de ces processus par rapport à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$.

La famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ permet aussi d'étudier le comportement du processus (X_t) "à la sortie" de l'ensemble $M = \overline{\bigcup_{t \geq 0} [D_t]}$ ($[D_t]$ est le graphe de D_t) ; les variables

$$G_t = \inf\{s : D_s > t\} = \sup\{s \leq t : s \in M\}$$

sont en effet des temps d'arrêt de $(\hat{\mathcal{F}}_t)$. Sous certaines hypothèses nous établissons au chapitre IX la propriété de Markov simple pour le processus $\check{X}_t = (t - G_{t-}, X_{G_t-})$. L'étude de ce processus pourrait également se faire par retournement du temps à partir du processus $(\hat{X}_t)$, mais nous n'avons pas développé ce point de vue.

Les fonctionnelles R-additives que nous introduisons au chapitre V sont des fonctionnelles (A_t) adaptées à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$, additives aux instants D_s et telles que $A_{D_s} = A_s$ p.s. ; elles conduisent à une théorie du R-potentiel. Nous définissons la R-balayée (d'ordre λ) d'une fonctionnelle additive au sens ordinaire adaptée à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$, étendons une formule d'AZEMA (*), et donnons des résultats de décomposition et d'approximation de cette R-balayée en utilisant un système de Lévy du processus $(\hat{\imath}_t)$ (chapitre VI).

Enfin, si $R = T_F$ et sous des hypothèses de régularité, nous définissons un temps local sur F (c'est aussi un temps local sur $\{0\} \times E$ pour le processus

---

(*) Nous venons de prendre connaissance d'un "preprint" de GETOOR et SHARPE : Last exit times and additive functionals, où cette formule d'AZEMA est établie par la même méthode pour un processus de Markov.

$(\hat{X}_t))$; nous lui associons un processus à la frontière et un processus des excursions en effectuant un changement de temps sur le processus (X_t) et sur le processus $(i_t) = (\theta_t \circ a_{D_t})$ respectivement (chapitre VII) .

3. Dans la deuxième partie, nous supposons que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^\mu)$ est la réalisation habituelle d'un semi-groupe <u>fortement markovien</u> (P_t) sans point de branchement et que R est un temps d'arrêt terminal parfait exact de la famille $(\mathcal{F}_t)$. En plus des résultats de la première partie, nous avons alors une interprétation des noyaux P et Q de MOTOO et OKABE (références [1] et [2] du chapitre VIII) à l'aide du noyau de LEVY du processus $(\hat{\imath}_t)$, et des résultats sur le caractère markovien du processus $\bar{X}_t = (t - G_t, X_{G_t})$.

Depuis la rédaction de ce travail nous avons pris connaissance de l'article "Last exit decompositions and distributions" de GETOOR et SHARPE, à paraître. Dans un exposé avec P.A. MEYER (Séminaire de Strasbourg VIII) nous montrerons que les résultats de GETOOR et SHARPE sont liés à l'existence d'un système de LEVY pour le processus $(\hat{\imath}_t)$. D'autre part, l'article cité permet d'améliorer les résultats du chapitre IX , lorsque le processus satisfait aux hypothèses droites de MEYER. Nous publierons prochainement un article à ce sujet.

4. En théorie probabiliste du renouvellement, on a d'abord étudié des sous-ensembles aléatoires discrets de $\mathbb{R}_+$ (DOOB, FELLER), puis des ensembles ayant p.s. une mesure de Lebesgue strictement positive (KINGMAN), comme l'ensemble des instants de passage en un point stable d'une chaine de Markov. La notion d'ensemble régénératif introduite récemment par HOFFMANN-JØRGENSEN permet d'étudier de manière intrinsèque des ensembles aléatoires comme l'ensemble des zéros du mouvement brownien.

Rappelons qu'un <u>ensemble régénératif</u> de HOFFMANN-JØRGENSEN est un fermé droit aléatoire M défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \theta_t, P)$, tel que, si on note (M_t) et $(\overline{M}_t)$ les processus I_M et $I_{\overline{M}}$,

1) $M_s \circ \theta_t = M_{s+t} \quad \forall\ s,t \geq 0$

2) (M_t) est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)$

3) $E(\overline{M}_t - M_t) = 0 \qquad \forall\ t \geq 0$

4) $0 \in M$ p.s.

5) pour tout temps d'arrêt T de $(\mathcal{F}_t)$ tel que $[T] \subset M$ on a $\theta_T^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ et la propriété de régénération

$$P(A \cap \theta_T^{-1}(B)) = P(A)P(B) \quad \text{pour} \quad A \in \mathcal{F}_T \cap \{T < \infty\}\ ,\ B \in \mathcal{F}\ .$$

Voici le résultat principal de HOFFMANN-JØRGENSEN : le processus de l'âge $A_t = t - \sup\{s \leq t : s \in \overline{M}\}$ est markovien pour tout ensemble régénératif M , et fortement markovien si l'ensemble M est p.s. d'intérieur vide

Dans l'article (X, [7]), écrit avec MORANDO, nous en avons déduit pour des ensembles régénératifs p.s. sans point isolé l'existence d'un temps local et une caractérisation à l'aide de subordinateurs. Dans l'article (X, [3]), nous avons établi ces résultats sans utiliser le résultat de HOFFMANN-JØRGENSEN et sans l'hypothèse 3) (cette hypothèse, omise par erreur dans l'article (X, [2]) est en fait une conséquence des autres axiomes).

La définition des ensembles régénératifs que nous adopterons dans la troisième partie n'exige pas les propriétés 3) et 4). Elle sera donnée dans le cadre des systèmes régénératifs, de sorte que l'intérêt n'est pas seulement porté sur l'ensemble des instants de renouvellement d'une certaine catégorie d'individus, mais aussi sur le comportement de ces individus.

Le résultat essentiel est que le processus en dents de scie descendantes

$$R_t = \inf\{s > t : s \in M\} - t$$

associé à l'ensemble régénératif M est fortement markovien et que son semi-groupe est de Hunt si l'ensemble est p.s. sans point isolé. La propriété 3) en résulte immédiatement. De plus, si M est p.s. sans point isolé le processus (R_t) admet un temps local au point 0 et ce temps local est aussi un temps local pour l'ensemble M, c'est-à-dire une fonctionnelle additive continue dont l'ensemble des points de croissance est indistinguable de $\overline{M}$. Nous reprenons alors sans grand changement l'étude des ensembles régénératifs faite dans (X, [3]) à l'aide des subordinateurs : structure de l'ensemble M, caractère markovien de (A_t) (chapitre XI).

Enfin, nous adaptons la méthode de SMYTHE (X, [6]) pour donner des résultats d'approximation du temps local à l'aide d'excursions d'un type très général (chapitre X), et nous étendons aux ensembles régénératifs le résultat d'ITO selon lequel le processus des excursions est un processus de Poisson ponctuel (chapitre VI).

Rappelons pour terminer la notion très générale d'ensemble aléatoire markovien due à KRYLOV et YUSHKEVICH : un ensemble aléatoire M est dit (fortement) markovien si le processus (A_t) associé à M est (fortement) markovien. On notera qu'on exige ici une propriété de Markov (forte) globale du processus (A_t) et non partielle comme pour les ensembles régénératifs ; dans la pratique il est aussi difficile de vérifier cette définition que de démontrer le résultat principal de HOFFMANN-JØRGENSEN. A partir de ces axiomes, HOROWITZ (XI, [6]) a établi la relation des ensembles fortement markoviens avec les subordinateurs et a étudié en détail leur structure. Nous prions le lecteur de s'y reporter pour des résultats complémentaires à ceux du chapitre XI.

5. Rappelons que les principaux exemples d'ensembles régénératifs sont :

a) l'ensemble des instants de passage d'un processus fortement markovien en un point x_o ,

b) l'ensemble des valeurs prises par un subordinateur,

c) l'ensemble des "ladder points" d'un processus Z à accroissements indépendants et stationnaires (c'est-à-dire l'ensemble $\{t : Z_s \leq Z_t \quad \forall\, s \leq t\}$).

Nous avons déjà remarqué qu'un exemple de système régénératif est fourni par l'ensemble des instants de passage d'un processus de Markov dans un borélien B . L'exemple b) peut également être généralisé et fournit un système régénératif à l'aide de subordinateurs généralisés, dont les F-processus de NEVEU sont des cas particuliers. L'exemple c) a aussi trouvé une généralisation depuis la publication des articles de CINLAR, Markov additive processes I et II (Z.Wahrsch. 24, Springer 72). Nous donnerons peut-être un jour des détails sur ce sujet.

Première Partie

SYSTEMES REGENERATIFS

CHAPITRE I

SYSTEMES REGENERATIFS : DEFINITION ET PROPRIETES ELEMENTAIRES

Dans ce premier chapitre nous donnons la définition d'un système régénératif dans le cadre canonique utilisé pour les processus de Markov et nous indiquons quelques conséquences élémentaires de cette définition.

NOTATIONS

1. E désigne un sous-ensemble borélien d'un espace compact métrisable. On distingue dans E un point "cimetière" ∂. La tribu borélienne de E est notée $\mathcal{E}$ et la tribu des ensembles universellement mesurables est notée $\mathcal{E}^*$.

Ω désigne l'ensemble des applications continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans E qui gardent la valeur ∂ après leur temps d'entrée dans $\{\partial\}$. Pour certains résultats nous supposerons que les applications de Ω sont pourvues de limites à gauche. Pour tout $x \in E$ l'application constante $t \to x$ est notée $[x]$.

X_t, θ_t, a_t désignent respectivement les applications coordonnées, les opérateurs de translation et les opérateurs d'arrêt de Ω. Par définition on a pour tous $s,t \geq 0$ et tout $\omega \in \Omega$

$$X_s(\omega) = \omega(s) \quad , \quad X_s(\theta_t\omega) = X_{s+t}(\omega) \quad , \quad X_s(a_t\omega) = X_{s\wedge t}(\omega)$$

On pose

$$X_\infty(\omega) = \partial \quad , \quad \theta_\infty(\omega) = [\partial] \; .$$

$\mathcal{F}^o$ (resp. $\mathcal{F}^o_t$) désigne la tribu sur Ω engendrée par les variables X_s, $s \geq 0$ (resp. X_s, $0 \leq s \leq t$). Pour toute probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F}^o)$, on note $\mathcal{F}^P$ la tribu P-complétée de $\mathcal{F}^o$ et $\mathcal{F}^P_t$ la tribu obtenue par adjonction de tous les ensembles P-négligeables de $\mathcal{F}^P$ à $\boxed{\mathcal{F}^o_{t+}}$, de sorte que la famille $(\mathcal{F}^P_t)$ est continue à droite pour tout P .

$\mathcal{F}^*$ désigne la complétée universelle de $\mathcal{F}^o$ c'est-à-dire la tribu $\bigcap_P \mathcal{F}^P$, où P parcourt l'ensemble des probabilités sur $(\Omega,\mathcal{F}^o)$.

2. Pour tout $x \in E$ on se donne une loi P^x sur $(\Omega,\mathcal{F}^o)$. On suppose que $P^\partial = \varepsilon_{[\partial]}$ et que l'application $x \to P^x(A)$ est $\mathcal{E}^*$-mesurable pour tout $A \in \mathcal{F}^o$ (donc aussi pour tout $A \in \mathcal{F}^*$).

Pour toute probabilité μ sur $(E,\mathcal{E})$ on définit par intégration $P^\mu = \int \mu(dx)P^x$ et on pose $\mathcal{F}^\mu = \mathcal{F}^{P^\mu}$, $\mathcal{F}^\mu_t = \mathcal{F}^{P^\mu}_t$. Les tribus $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_t$ sont alors définies comme intersection des tribus $\mathcal{F}^\mu$, $\mathcal{F}^\mu_t$. Les familles $(\mathcal{F}_t)$, $(\mathcal{F}^\mu_t)$ sont <u>continues à droite</u> par construction. La mesurabilité de l'application $x \to P^x(A)$ s'étend à tout $A \in \mathcal{F}$ par un raisonnement classique. Sauf indication particulière $\boxed{\text{p.s.}}$ signifiera P^μ - p.s. pour toute loi μ sur E .

3. Soit R un <u>temps d'arrêt terminal parfait et exact</u> de la famille $(\mathcal{F}_t)$; on a identiquement en t et ω (*)

$$\begin{cases} R(\theta_t\omega) = R(\omega) - t \quad \text{si} \quad R(\omega) > t \\ \lim\limits_{t\downarrow 0} R(\theta_t\omega) = R(\omega) \end{cases}$$

On suppose que $R([\partial]) = +\infty$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$R_t = R \circ \theta_t \ , \ D_t = t + R \circ \theta_t$$

et on pose également

$$R_\infty = 0 \ , \ D_\infty = +\infty .$$

(*) Le procédé de régularisation de WALSH ([1] et [2]) permet permet de voir que la première de ces deux hypothèses ne restreint pas vraiment la généralité lorsque la seconde est satisfaite.

Il est facile de vérifier que <u>l'application</u> $t \to D_t(\omega)$ <u>est croissante et continue à droite pour tout</u> $\omega \in \Omega$.

<u>Nous supposerons que les variables</u> (D_t) <u>sont des temps d'arrêt de la famille</u> $(\mathcal{F}_t)$ (cette condition est vérifiée si R est $\mathcal{F}^{\theta_s P^\mu}$-mesurable pour tout $s \geq 0$ et toute loi μ , donc en particulier si le processus (X_s) est markovien pour les mesures P^μ ou si R est $\mathcal{F}^*$-mesurable). Nous poserons

$$\hat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{D_t} .$$

La famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ est une famille croissante et continue à droite, telle que $\hat{\mathcal{F}}_t \supset \mathcal{F}_t$ pour tout t . Pour tout temps d'arrêt S de $(\mathcal{F}_t)$ la variable D_S est encore un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t)$ (cf. lemme I.1 ci-dessous). Nous sommes maintenant en mesure de donner la définition principale.

DEFINITION. - <u>Nous dirons que le système</u> $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,P^\mu;R)$ <u>est régénératif</u> (ou que le processus (X_t) est R-markovien par rapport à la famille P^μ) <u>si on a</u>

$$(1) \qquad P^\mu(A \cap \theta_{D_S}^{-1}(B)) = \int_A P^{X_{D_S}}(B)\,dP^\mu$$

<u>pour toute loi</u> μ , <u>tout temps d'arrêt</u> S <u>de la famille</u> $(\mathcal{F}_t)$ (<u>ou seulement de la famille</u> $(\mathcal{F}^o_{t+})$), <u>tout</u> $A \in \mathcal{F}_{D_S}$ <u>et tout</u> $B \in \mathcal{F}^o$.

La propriété (1) sera appelée <u>propriété de régénération au temps d'arrêt</u> D_S . Nous verrons qu'elle peut être étendue au cas où S est un temps d'arrêt de $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ (proposition I.1) et où $B \in \mathcal{F}$ (proposition I.2) .

Si $R = 0$, la définition précédente signifie que $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,P^\mu)$ est la réalisation canonique habituelle d'un semi-groupe universellement mesurable fortement markovien (P_t) , défini par $P_t(x,f) = E^x[f(X_t)]$.

EXEMPLES. - 1) Un processus fortement markovien (X_t) est R-markovien par rapport aux mesures P^x habituelles, pour tout temps d'arrêt terminal parfait et exact R .

Nous aurons particulièrement en vue le cas où

$$R = \inf\{t > 0 : X_t \in B\}$$

pour un ensemble presque-borélien B. Si (X_t) admet des limites à gauche, on peut aussi envisager

$$R = \inf\{t > 0 : (X_{t-}, X_t) \in K\}$$

pour un borélien K de $E \times E$.

Plus généralement, soit M un ensemble progressivement mesurable pour la famille $(\mathcal{F}_t)$, contenu dans $]0,\infty[\times \Omega$ et <u>homogène</u> : si (I_t) est son indicatrice, on a identiquement $I_{s+t} = I_s \circ \theta_t$. On peut alors poser

$$R = \inf\{t > 0 : t \in M\} .$$

2) Nous nous plaçons dans le cadre défini ci-dessus. Soit $a \in E$; posons

$$R = \inf\{t > 0 : X_t = a\}$$
$$M = \{t : X_t = a\} .$$

Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}^o)$ telle que

i) $P(X_o = a) = 1$,

ii) $P(A \cap \theta_T^{-1}(B)) = P(A)P(B)$,

pour tout temps d'arrêt T de $(\mathcal{F}^o_{t+})$ tel que $X_T = a$, tout $A \in \mathcal{F}^o_{T+}$, tout $B \in \mathcal{F}^o$.

Si on pose $P^a = P$, $P^x = \varepsilon_{[x]}$ pour $x \neq a$, il est facile de vérifier que le système $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^\mu ; R)$ est régénératif. Le cas particulier où $E = \mathbb{R}_+$, $a = 0$ correspond aux ensembles régénératifs (canoniques) de HOFFMANN-JØRGENSEN ([3] et [4]).

FORMES DIVERSES DE LA PROPRIETE DE REGENERATION

Nous commencerons par démontrer le lemme suivant :

LEMME I.1. - Si S est un temps d'arrêt de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t) = (\mathcal{F}_{D_t})$, la variable D_S est un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{F}_t)$ et on a $\hat{\mathcal{F}}_S \subset \mathcal{F}_{D_S}$.

Démonstration : Le processus (D_t) et la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ étant continus à droite, il suffit de démontrer le lemme pour un temps d'arrêt S discret, par exemple ne prenant que des valeurs dyadiques. L'égalité

$$(1) \qquad \{D_S \leq t\} = \sum_{k,n} \{D_{\frac{k}{2^n}} \leq t\} \cap \{S = \frac{k}{2^n}\}$$

et la définition des tribus $\mathcal{F}_{D_{\frac{k}{2^n}}}$ montrent que D_S est un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t)$.

D'autre part on a

$$\mathcal{F}_{D_S} = \{A \in \mathcal{F} \ : \ A \cap \{D_S \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall\ t \geq 0\}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{F}}_S &= \{A \in \mathcal{F} \ : \ A \cap \{S = \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{F}_{D_{\frac{k}{2^n}}} \quad \forall\ k,n\} \\ &= \{A \in \mathcal{F} \ : \ A \cap \{S = \frac{k}{2^n}\} \cap \{D_{\frac{k}{2^n}} \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t,k,n\}\end{aligned}$$

donc $\hat{\mathcal{F}}_S \subset \mathcal{F}_{D_S}$ à cause de (1).

PROPOSITION I.1.- La propriété de régénération au temps D_S est encore vérifiée si S est un temps d'arrêt de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$.

Démonstration : Envisageons l'ensemble aléatoire $M = \overline{\bigcup_{r \in \mathbb{Q}_+} [D_r]}$, où $[D_r]$ est le graphe du temps d'arrêt D_r. L'ensemble M est bien mesurable par rapport à la famille $(\mathcal{F}_t)$ et le processus $A_t = t - \sup\{s \leq t \ : \ s \in M\}$ est continu à droite et adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)$. Pour $k \geq 1$ désignons par $(S_n^k)_{n \geq 1}$ les temps d'entrée successifs de (A_t) dans l'ensemble $]\frac{1}{k},\frac{1}{k-1}]$, et soit $(S_n)_{n\geq 1}$ une énumération des (S_n^k) . Les variables S_n sont des temps d'arrêt de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$.

Soit S un temps d'arrêt de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$. Nous voulons montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}_{D_S}$ et $B \in \mathcal{F}^o$

(1) $$P^{\mu}(A \cap \theta_{D_S}^{-1}(B)) = \int_A P^{X_{D_S}}(B)dP^{\mu} .$$

Nous pouvons supposer $A \subset \{D_S < \infty\}$. Posons pour tout $n \geq 1$

$$A_n = A \cap \{D_S > S\} \cap \{D_S = D_{S_n} , D_{S_p} \neq D_{S_n} \ \forall\, p < n\} .$$

D'après le lemme I.1, D_S est un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t)$ et $\hat{\mathcal{F}}_S \subset \mathcal{F}_{D_S}$; donc $A_n \in \mathcal{F}_{D_{S_n}}$. En appliquant la propriété de régénération aux temps D_{S_n} , il vient

$$P^{\mu}(A_n \cap \theta_{D_S}^{-1}(B)) = \int_{A_n} P^{X_{D_S}}(B)dP^{\mu} ,$$

et en remarquant que les A_n sont des ensembles disjoints de réunion $A \cap \{D_S > S\}$, on obtient par sommation en n

$$P^{\mu}(A \cap \{D_S > S\} \cap \theta_{D_S}^{-1}(B)) = \int_{A \cap \{D_S > S\}} P^{X_{D_S}}(B)dP^{\mu} .$$

De même en appliquant la propriété de régénération au temps D_{D_S} on obtient

$$P^{\mu}(A \cap \{D_S = S\} \cap \theta_{D_S}^{-1}(B)) = \int_{A \cap \{D_S = S\}} P^{X_{D_S}}(B)dP^{\mu} ,$$

d'où la formule (1) cherchée.

PROPOSITION I.2.-<u>Soit</u> S <u>un temps d'arrêt de</u> $(\hat{\mathcal{F}}_t)$. <u>L'application</u> θ_{D_S} <u>est mesurable de</u> $(\Omega,\mathcal{F})$ <u>dans</u> $(\Omega,\mathcal{F})$ <u>et la formule</u> (1) <u>est encore vraie pour tout</u> $B \in \mathcal{F}$.

<u>Démonstration</u> : Posons $T = D_S$. Soit $B \in \mathcal{F}$; pour toute loi μ sur E on choisit B' et B'' dans $\mathcal{F}^o$ de sorte que $B' \subset B \subset B''$ et que $P^{X_T P^{\mu}}(B'' \setminus B') = 0$ (*) .

(*) $X_T P^{\mu}$ désigne la loi image de P^{μ} par X_T .

D'après la propriété de régénération au temps T , on a $P^{\mu}(\theta_t^{-1}(B''\backslash B')) = 0$ (prendre $A = \Omega$) , donc $\theta_T^{-1}(B) \in \mathfrak{F}^{\mu}$ pour toute loi μ , c'est-à-dire $\theta_T^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$. L'extension de la formule (1) au cas $B \in \mathfrak{F}$ est immédiate.

C.Q.F.D.

PROPOSITION I.3.- Soit S un temps d'arrêt de la famille $(\hat{\mathfrak{F}}_t)$. On pose $T = D_S$. Pour toute fonction positive G définie sur $\Omega \times \Omega$ et $\mathfrak{F}_T \times \mathfrak{F}$-mesurable, on a

$$(2) \qquad E^{\mu}[G(\omega, \theta_T(\omega)) \mid \mathfrak{F}_T] = E^{X_T(\omega)}[G(\omega,.)] \quad \text{p.s. sur l'ensemble } \{T < \infty\} .$$

Démonstration : On envisage d'abord une fonction $G(\omega,\omega') = H(\omega)K(\omega')$, où H est $\mathfrak{F}_T$-mesurable et K est $\mathfrak{F}$-mesurable : la formule (2) découle alors immédiatement des propositions I.1 et I.2 . Le passage au cas général se fait par un raisonnement de classe monotone.

POINTS DE BRANCHEMENT ET LOI 0-1

DEFINITION I.2.- Nous dirons qu'un point x de E est un point de branchement si $P^x(X_0 = x) < 1$ et que x est un point régulier si $P^x(X_0 = x , R = 0) = 1$.

PROPOSITION I.4. 1) Si x n'est pas un point de branchement on a $P^x(R = 0) = 0$ ou 1

2) Si x est un point régulier, la tribu $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_{0+}$ est dégénérée pour la loi P^x (Loi 0-1) .

Démonstration : Pour démontrer 1) on applique la formule (1) de la définition avec $S = 0$, $A = \{R = 0\}$, $B = \{R = 0\}$ et $\mu = \varepsilon_x$ (on peut choisir $B = \{R = 0\} \in \mathfrak{F}$ à cause de la proposition I.2) : le membre de gauche est $P^x\{R = 0\}$ et le membre de droite est $\int_{\{R=0\}} P^{X_R}\{R = 0\}dP^x = (P^x\{R = 0\})^2$ car $X_0 = x$ P^x- p.s. Donc $P^x(R = 0) = 0$ ou 1 .

Soit maintenant x un point régulier : $X = x$, $R = 0$ P^x-p.s. Pour $S = 0$ $A \in \mathfrak{F}_0$, $B = A$ et $\mu = \varepsilon_x$ la formule (1) s'écrit alors $P^x(A) = (P^x(A))^2$, donc $P^x(A) = 0$ ou 1 .

C.Q.F.D.

REFERENCES

[1] J.B. WALSH — The perfection of multiplicative functionals.
Séminaire de Probabilités VI, Lecture Notes in Math. 258
Springer Verlag 1972.

[2] P.A. MEYER — La perfection en probabilité.
Séminaire de Probabilités VI. Lecture Notes in Math. 258
Springer Verlag, 1972.

[3] H. HOFFMANN-JØRGENSEN
Markov sets.
Mathematica Scandinavia, 24, fasc. 2 (1969).

[4] P.A. MEYER — Ensembles régénératifs, d'après Hoffmann-Jørgensen.
Séminaire de Probabilités V. Lecture Notes in Math. 191
Springer Verlag, 1971.

CHAPITRE II

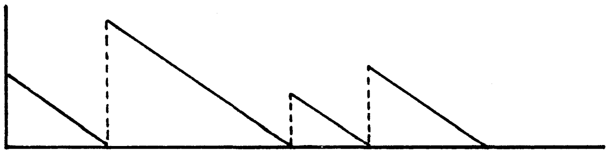
PREMIER PROCESSUS DE MARKOV ASSOCIE A UN SYSTEME REGENERATIF

DEFINITION II.1.- Nous posons

$$\hat{E} = \bar{\mathbb{R}}_+ \times E$$

$$\hat{X}_t = (R_t, X_{D_t}) = (R, X_R) \circ \theta_t \; .$$

Le processus $(\hat{X}_t)$ à valeurs dans $\hat{E}$, est continu à droite et adapté à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t) = (\mathcal{F}_{D_t})$. Remarquons que l'application $t \to R_t(\omega)$ est affine de pente -1 sur chacun des intervalles contigus à l'ensemble des valeurs $\{D_t(\omega), t \geq 0\}$. D'un point de vue graphique la composante temporelle du processus $(\hat{X}_t)$ a des trajectoires en dents **de scie descendantes :**



CARACTERE MARKOVIEN DE $(\hat{X}_t)$

DEFINITION II.2.- Nous définissons les noyaux $(\hat{P}_t)$ en posant

$$\hat{P}_t((r,x),f) = f(r-t,x) \qquad \text{si} \quad t < r$$
$$= E^x[f(R_{t-r}, X_{D_{t-r}})] \qquad \text{si} \quad t \geq r$$

pour tout $(r,x) \in \hat{E}$ et toute fonction f universellement mesurable positive définie sur $\hat{E}$.

THEOREME II.1 .- La famille $(\hat{P}_t)$ est un semi-groupe universellement mesurable sur $\hat{E}$, admettant comme points de branchement les points $(0,x)$ tels que

$$P^x(X_0 = x) < 1 \quad \text{ou} \quad P^x(R=0) < 1 \; .$$

<u>Pour toute loi</u> P^{μ} <u>le processus</u> $(\hat{X}_t)$ <u>est fortement markovien par rapport à la famille</u> $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ <u>et admet</u> $(\hat{P}_t)$ <u>comme semi-groupe de transition.</u>

<u>Démonstration</u> : a) <u>Propriété de Markov forte de</u> $(\hat{X}_t)$ <u>pour</u> P^{μ}. Soit S un temps d'arrêt fini de $(\hat{\mathcal{F}}_t)$; nous voulons montrer que pour toute fonction f mesurable positive définie sur $\hat{E}$ et tout $t \geq 0$

$$E^{\mu}[f \circ \hat{X}_{S+t} | \hat{\mathcal{F}}_S] = \hat{P}_t(\hat{X}_S, f) \quad \text{p.s.}$$

Sur l'ensemble $\{t < R_S\}$ on a

$$f \circ \hat{X}_{S+t} = f(R_{S+t}, X_{D_{S+t}}) = f(R_S - t, X_{D_S}).$$

Comme les variables R_S et X_{D_S} sont $\hat{\mathcal{F}}_S$-mesurables, l'égalité (1) est donc vérifiée sur l'ensemble $\{t < R_S\}$.

- Sur l'ensemble $\{t \geq R_S\}$ un calcul facile montre que $f \circ \hat{X}_{S+t}(\omega) = G(\omega, \theta_{D_S}(\omega))$, où l'on a posé

$$G(\omega, \omega') = f(\hat{X}_{t-R_S(\omega)}(\omega')) .$$

La fonction G ainsi définie est $\hat{\mathcal{F}}_S \times \mathcal{F}$-mesurable comme composée de l'application

$$(\omega, \omega') \to ((t - R_S(\omega))^+, \omega') ,$$

mesurable de $\hat{\mathcal{F}}_S \times \mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{F}$, et de l'application $\mathcal{B}(R_+) \times \mathcal{F}$-mesurable

$$(s, \omega') \to f(\hat{X}_s(\omega')) .$$

D'après le lemme I.1. $\hat{\mathcal{F}}_S \subset \mathcal{F}_{D_S}$, donc $\{t \geq R_S\} \in \mathcal{F}_{D_S}$ et G est $\mathcal{F}_{D_S} \times \mathcal{F}$-mesurable. La propriété de régénération au temps D_S, sous la forme de la proposition I.3. donne sur l'ensemble $\{t \geq R_S\}$

$$E^{\mu}[f \circ \hat{X}_{S+t}(\omega) | \mathcal{F}_{D_S}] = E^{X_{D_S}(\omega)}[G(\omega, .)]$$

$$= \hat{P}_t(\hat{X}_S(\omega), f)$$

et l'égalité (1) résulte de ce que $\hat{\mathcal{F}}_S \subset \mathcal{F}_{D_S}$ et que $\hat{X}_S$ est $\hat{\mathcal{F}}_S$-mesurable.

b) Propriété de semi-groupe des noyaux $(\hat{P}_t)$

Soit $(r,x) \in \hat{E}$ et soit f une fonction universellement mesurable positive définie sur $\hat{E}$. On a par définition

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{s+t}((r,x),f) &= f(r-s-t,x) && \text{si } s+t<r \\
&= E^x[f(\hat{X}_{s+t-r})] && \text{si } s+t \geq r \\
\hat{P}_t\hat{P}_s((r,x),f) &= \hat{P}_s((r-t,x),f) && \text{si } t<r \\
&= E^x[\hat{P}_s(\hat{X}_{t-r},f)] && \text{si } t \geq r \\
\hat{P}_s((r-t,x),f) &= f(r-s-t,x) && \text{si } s+t<r \\
&= E^x[f(\hat{X}_{s+t-r})] && \text{si } s+t \geq r,\ t<r
\end{aligned}$$

et d'après la propriété de Markov simple du processus $(\hat{X}_t)$ pour la loi P^x on a pour $t \geq r$

$$\begin{aligned}
E^x[f(\hat{X}_{s+t-r})] &= E^x[E^x[f(\hat{X}_{s+t-r})\,|\,\hat{\mathcal{F}}_{t-r}]] \\
&= E^x[\hat{P}_s(\hat{X}_{t-r},f)]\ .
\end{aligned}$$

De toutes ces égalités résulte la propriété de semi-groupe de la famille $(\hat{P}_t)$.

c) Points de branchement .

On a

$$\begin{aligned}
\hat{P}_o((r,x),f) &= f(r,x) && \text{si } r>0 \\
&= E^x[f(R,X_R)] && \text{si } r=0
\end{aligned}$$

donc $\hat{P}_o((r,x),.) \neq \varepsilon_{(r,x)}$ si et seulement si $P^x(R=0)<1$ ou $P^x(X_o=x)<1$.

Ceci achève la démonstration du théorème.

REALISATION DU SEMI-GROUPE $(\hat{P}_t)$

Pour tout $(r,x) \in \hat{E}$ posons

$$\begin{aligned}
\hat{X}_t^{r,x}(\omega) &= (r-t,x) && \text{si } t<r \\
&= (R_{t-r}(\omega), X_{D_{t-r}}(\omega)) && \text{si } t \geq r
\end{aligned}$$

Par le raisonnement de la note [1] (*), on peut montrer que, pour la loi P^x, le processus $(\hat{X}_t^{r,x})$ est fortement markovien, avec $(\hat{P}_t)$ comme semi-groupe et $\epsilon_{(r,x)}\hat{P}_o$ comme loi initiale. **Ce résultat est plus difficile que celui du théorème II.1.**

Pour construire une réalisation fortement markovienne de $(\hat{P}_t)$ il suffit alors d'envisager l'espace W des applications continues à droite de R_+ dans $\hat{E}$, muni de ses applications coordonnées (ξ_t). La loi $P^{r,x}$ est la loi image de P^x par l'application qui à $\omega \in \Omega$ associe la trajectoire $t \to \hat{X}_t^{r,x}(\omega)$ de W et on définit par intégration la loi $P^{\hat{\mu}}$, pour toute mesure $\hat{\mu}$ sur $\hat{E}$. On a alors le théorème suivant :

THEOREME II.2.- <u>Pour toute mesure</u> $P^{\hat{\mu}}$ <u>le processus</u> (ξ_t) <u>est fortement markovien par rapport au semi-groupe</u> $(\hat{P}_t)$ <u>et admet</u> $\hat{\mu}\hat{P}_o$ <u>pour loi initiale</u>.

Désignons par $\mathcal{G}^o$ la tribu sur W engendrée par les variables ξ_t, $t \geq 0$ et soit Ψ l'application de Ω dans W qui à ω associe l'application $t \to \hat{X}_t(\omega)$. La proposition qui suit donne une relation entre les mesures P^μ sur Ω et les mesures $P^{\hat{\mu}}$ sur W ; elle sera utilisée au chapitre V sur les fonctionnelles R-additives.

PROPOSITION II.1.- <u>Si</u> $\hat{X}_0$ <u>est p.s. un point de non branchement du semi-groupe</u> $(\hat{P}_t)$ <u>on a pour toute mesure</u> P^μ <u>sur</u> Ω

(2) $$\Psi P^\mu = P^{\hat{X}_0 P^\mu}$$

<u>où</u> ΨP^μ <u>est la loi sur</u> $(W, \mathcal{G}^o)$ <u>image de</u> P^μ <u>par</u> Ψ <u>et</u> $\hat{X}_0 P^\mu$ <u>la loi sur</u> $\hat{E}$ <u>image de</u> P^μ <u>par</u> $\hat{X}_0$.

(*) On trouvera aussi un raisonnement très analogue au chapitre IV pour le processus des incursions.

Démonstration : Le processus $(\hat{X}_t)$ est markovien, de semi-groupe $(\hat{P}_t)$ et de mesure initiale $\hat{X}_o P^{\mu}$, pour la mesure P^{μ} sur Ω ; il en est donc de même du processus (ξ_t) pour la mesure ΨP^{μ} sur W . D'après le théorème précédent le processus (ξ_t) est également markovien, de semi-groupe $(\hat{P}_t)$ et de loi initiale $\hat{\mu}\,\hat{P}_o$, pour la mesure $P^{\hat{\mu}}$ sur W , où l'on a posé $\hat{\mu} = \hat{X}_o\, P^{\mu}$. Mais, par hypothèse, la mesure $\hat{\mu}$ ne charge pas les points de branchement du semi-groupe $(\hat{P}_t)$, donc

$$\hat{\mu}\,\hat{P}_o = \hat{\mu} = \hat{X}_o P^{\mu}$$

et l'égalité (2) en résulte.

C.Q.F.D.

PROPRIETE DE QUASI-CONTINUITE A GAUCHE DE $(\hat{X}_t)$

Dans ce paragraphe nous supposerons que les éléments de Ω sont des applications pourvues de limites à gauche. Nous ferons également les hypothèses de régularité suivantes :

HYPOTHESES (HR)

(HR_1) $P^{X_R(w)}(R = 0) = 1$ pour tout $w \in \Omega$ tel que $R(w) < \infty$

(HR_2) $D_{T_n} \uparrow D_T$ p.s. pour toute suite croissante (T_n) de temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t)$ admettant pour limite T .

Dans l'énoncé de l'hypothèse (HR_2) p.s. signifie comme d'habitude, P^{μ}-p.s. pour toute mesure μ . Notons que l'hypothèse (HR_1) entraîne $R_{D_S} = 0$ p.s. pour tout temps d'arrêt S de $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ (il suffit d'appliquer la propriété de régénération au temps D_S , avec $A = \Omega$, $B = \{R = 0\}$), donc que l'ensemble $M = \overline{\bigcup_{r \in \mathbb{Q}_+} [D_r]}$ est p.s. sans point isolé (donc parfait). Nous donnerons en appendice des conditions permettant de réaliser les hypothèses (HR).

THEOREME II.3.- <u>Si le processus</u> (X_t) <u>est quasi-continu à gauche</u> (*) <u>par rapport à la famille</u> $(\mathcal{F}_t)$ <u>et sous les hypothèses</u> (HR) , <u>le processus</u> $(\hat{X}_t)$ <u>est quasi-continu à gauche par rapport à la famille</u> $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ <u>pour toute loi</u> P^{μ} .

<u>Démonstration</u> : Soit (U_n) une suite croissante de temps d'arrêt de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ admettant pour limite U . Il s'agit de montrer que $\hat{X}_{U_n} \to \hat{X}_U$ p.s. sur l'ensemble $\{U < \infty\}$.

Si $D_{U_n} = D_U$ pour n suffisamment grand on a aussi $U_n + R_{U_n} = U + R_U$, donc $R_{U_n} \to R_U$ sur l'ensemble $\{U<\infty\}$; la convergence cherchée en résulte.

Raisonnons maintenant sur l'ensemble $A = \{D_{U_n} < D_U, \ \forall\ n \geq 0\}$. Si l'on pose $V_n = D_{U_n}$ on a d'après l'hypothèse (HR_1) $D_{V_n} = D_{U_n}$ p.s. donc $D_{V_n} < D_U$ p.s. sur A et $V_n < U$ p.s. sur A ; comme $U_n \leq V_n$ et $U_n \uparrow U$, il en résulte que $V_n \uparrow U$ p.s. sur A . D'autre part, la propriété (HR_2) appliquée à la suite (V_n) de temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t)$ montre que $D_{V_n} \uparrow D_U$ p.s. sur A et que $D_U = U$ p.s. sur A . Les relations $D_{U_n} = U_n + R_{U_n}$ et $D_U = U + R_U$ montrent alors que $R_{U_n} \to R_U$ p.s. sur $A \cap \{U<\infty\}$ et la quasi-continuité à gauche de (X_t) appliquée à la suite (D_{U_n}) entraîne que $X_{D_{U_n}} \to X_{D_U}$ p.s. sur $\{D_U<\infty\}$, donc sur $A \cap \{U<\infty\}$.

C.Q.F.D.

<u>Remarques</u> : a) Dans la démonstration qui précède seule intervient la quasi-continuité à gauche de (X_t) pour les suites (D_{V_n}) (les V_n étant des temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t)$).

b) Il est facile de voir que la réalisation de $(\hat{P}_t)$ construite sur l'espace W au paragraphe précédent est également quasi-continue à gauche pour les mesures $P^{r,x}$ sous les hypothèses du théorème II.3. Pour cela on vérifie que le processus $(\hat{X}_t^{r,x})$ est quasi-continu à gauche pour P^x , $\forall\ (r,x) \in \hat{E}$.

(*) Cette hypothèse peut être affaiblie (cf. remarque a) ci-dessous).

REFERENCES

[1] B. MAISONNEUVE — Un résultat de renouvellement pour des processus de Markov généraux
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 272, (1970), pp. 964-966.

APPENDICE : REALISATION DES HYPOTHESES (HR)

DEFINITION II.3.- Nous dirons qu'un point x de E est régulier pour R si $P^x\{R=0\}=1$ et nous noterons F l'ensemble des points réguliers pour R.

L'hypothèse (HR_1) peut donc également s'énoncer

$$X_R(w) \in F \quad \text{pour tout} \quad w \in \Omega \quad \text{tel que} \quad R(w) < \infty$$

Nous allons montrer que sous une hypothèse de "régularité uniforme" des points de F l'hypothèse (HR_2) est automatiquement satisfaite. Remarquons d'abord que si un point x de E est régulier pour R on a pour tout $a > 0$

$$P^x\{G^a \leq \varepsilon\} \to 0 \qquad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0 ,$$

où l'on a posé

$$G^a = \inf\{t : R_t > a\} .$$

Cette remarque conduit à la définition suivante :

DEFINITION II.4.- Nous dirons que les points de F sont uniformément réguliers pour R si pour tout $a > 0$

$$\sup_{x \in F} P^x\{G^a \leq \varepsilon\} \to 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0 .$$

Remarque : Cette condition exprime que $\lim_{t\to 0} R_t = 0$ P^x-p.s. uniformément en $x \in F$, ou encore que $\lim_{t\to 0} E^x(e^{-D_t}) = 1$ uniformément en $x \in F$. Si le processus (X_t) est markovien, cela signifie que la fonction $E^{\cdot}(e^{-R})$ est uniformément 1-excessive.

PROPOSITION II.2.- Si l'hypothèse (HR_1) est satisfaite et si les points de F sont uniformément réguliers pour F, l'hypothèse (HR_2) est réalisée.

Démonstration : L'ensemble $M = \overline{\bigcup_r [D_r]}$ est p.s. sans point isolé à cause de l'hypothèse (HR_1). Soit (T_n) une suite croissante de temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{F}_t)$ admettant pour limite T et soit a un nombre > 0. Nous allons montrer que l'ensemble

$$A_a = \{R_T > a \ , \ T_n < T < \infty \ \forall\, n\}$$

a une P^μ-probabilité nulle pour toute loi μ sur E. En effet, sur l'ensemble A_a T est extrémité gauche d'intervalle contigu à M et comme M est p.s. sans point isolé T est p.s. point d'accumulation à gauche de points de M. Il en résulte que $D_{T_n} < T$ et $D_{T_n} \to T$ p.s. sur A_a. On a

$$P^\mu(A_a \cap \{D_{T_n} \geq T-\varepsilon\}) \leq P^\mu(\{D_{T_n} < \infty\} \cap \theta^{-1}_{D_{T_n}} \{G^a \leq \varepsilon\})$$
$$= E^\mu(I_{\{D_{T_n} < \infty\}} P^{X_{D_{T_n}}}\{G^a \leq \varepsilon\})$$

où l'égalité précédente résulte de la propriété de régénération au temps D_{T_n}. Par passage à la limite en n il vient

$$P^\mu(A_a) \leq \limsup_n E^\mu[\, I_{\{D_{T_n} < \infty\}} P^{X_{D_{T_n}}}\{G^a \leq \varepsilon\}]$$

$$\leq E^\mu[\limsup I_{\{D_{T_n} < \infty\}}\ P^{X_{D_{T_n}}}\{G^a \leq \varepsilon\}]$$

et ce dernier terme tend vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$, à cause de l'hypothèse de régularité uniforme. Donc $P(A_a) = 0$ pour tout $a > 0$ et $D_{T_n} \to D_T$ p.s. car le processus (D_t) n'admet de discontinuités qu'en des instants t tels que $R_t > 0$. La condition (HR_2) est donc réalisée.

C.Q.F.D.

CHAPITRE III

PROCESSUS DES INCURSIONS - CAS GENERAL

Nous allons dans ce chapitre associer au système régénératif $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,P^\mu;R)$ un deuxième processus de Markov. Sa valeur à l'instant t renseigne sur tout le comportement du processus (X_t) dans l'intervalle de temps $[t,D_t]$. Pour un processus fortement markovien (X_t) nous avons déjà introduit un tel processus dans la note [1].

DEFINITION III.1.- Etant donné le système régénératif $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,P^\mu;R)$ nous appellerons processus des incursions le processus défini sur Ω par

$$i_t(\omega) = a_R \circ \theta_t(\omega) = \theta_t \circ a_{D_t}(\omega) \quad , \quad t \geq 0 \ , \ \omega \in \Omega$$

Nous poserons $i_\infty(\omega) = [\partial]$.

Lorsque $R = \inf\{t>0 : X_t \in F\}$, pour F borélien, $i_t(\omega)$ est la trajectoire $\theta_t(\omega)$ arrêtée à son temps d'entrée dans F, ce qui justifie peut-être la terminologie utilisée.

TOPOLOGIE DE LA CONVERGENCE EN MESURE

Pour rendre le processus (i_t) continu à droite, nous munissons son espace d'états Ω de la topologie de la convergence en mesure. Rappelons que Ω est complémentaire d'analytique dans un compact métrisable et que sa tribu borélienne est la tribu $\mathcal{F}^o$ engendrée par des applications coordonnées (X_t).

Si d est une distance définissant la topologie du compact métrisable dont E est un sous-ensemble borélien, la topologie de la convergence en mesure peut être définie par la distance

$$\delta(\omega,\omega') = \int_0^\infty e^{-t} d(X_t(\omega),X_t(\omega'))dt \ .$$

La proposition qui suit est une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

PROPOSITION III.1.- Si Ω est muni de la topologie de la convergence en mesure, le processus (θ_t) est continu et le processus (i_t) est continu à droite (et pourvu de limites à gauche si (X_t) est pourvu de limites à gauche).

Remarque : Si E est un compact métrisable et si le processus (X_t) est pourvu de limites à gauche, on peut munir Ω de la topologie de Skorokhod définie dans [2], et qui est plus fine que la topologie de la convergence en mesure.
Les processus (θ_t) et (i_t) sont encore continus à droite pour cette topologie.
Si on place sur Ω la topologie trace de la topologie de Skorokhod de $E^{\mathbb{R}}$ (cf. [2]) les processus (θ_t) et (i_t) sont également pourvus de limites à gauche.

CARACTERE MARKOVIEN DU PROCESSUS $(\hat{i}_t) = (R_t, i_t)$

DEFINITION III.2.- Sur l'ensemble $\hat{\Omega} = \mathbb{R}_+ \times \Omega$ définissons les noyaux $\hat{\pi}_t$ en posant

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_t((r,w),f) &= f(r-t, a_{r-t} \circ \theta_t w) \qquad \text{si} \quad t<r \\ &= E^{X_r(w)}[f(R_{t-r}, i_{t-r})] \quad \text{si} \quad t \geq r\end{aligned}$$

pour tout $(r,w) \in \hat{\Omega}$ et toute fonction universellement mesurable positive f définie sur $\hat{\Omega}$.

THEOREME III.1.- La famille $(\hat{\pi}_t)$ est un semi-groupe universellement mesurable sur $\hat{\Omega}$, à points de branchement. Pour toute loi P^{μ} le processus $(\hat{i}_t) = (R_t, i_t)$ est fortement markovien par rapport à la famille $(\hat{\mathfrak{F}}_t)$ et admet $(\hat{\pi}_t)$ comme semi-groupe de transition.

La démonstration de ce théorème est entièrement analogue à celle du théorème II .1. Pour vérifier que le processus (i_t) est adapté à la famille $(\hat{\mathfrak{F}}_t)$ il suffit de remarquer que pour tout $s \geq 0$ la variable

$$X_s \circ i_t = X_{(s+t)\wedge D_t}$$

est $\hat{\mathfrak{F}}_t$ -mesurable.

Remarques III.1 1) Le processus $(\hat{X}_t)$ étudié au chapitre II s'exprime à l'aide du processus $(\hat{\imath}_t)$. En effet

$$\hat{X}_t(\omega) = (R_t(\omega), X_{D_t}(\omega)) = (R_t(\omega), X_{R_t(\omega)}(i_t(\omega))) ,$$

donc, si π_1 et π_2 désignent les projections de $\hat{\Omega}$ sur $\bar{R}_+$ et Ω respectivement et si φ désigne l'application de $\hat{\Omega}$ dans $\hat{E}$

$$\hat{\omega} \to (\pi_1(\hat{\omega}) , X_{\pi_1(\hat{\omega})}(\pi_2(\hat{\omega}))) ,$$

on a $\hat{X}_t = \varphi \circ \hat{\imath}_t$. De même le semi-groupe $(\hat{P}_t)$ du processus $(\hat{X}_t)$ s'exprime à l'aide du semi-groupe $(\hat{\pi}_t)$ du processus $(\hat{\imath}_t)$ par la formule

$$\hat{P}_t((r,x),f) = \hat{\pi}_t((r,[x]).f \circ \varphi) .$$

On déduirait alors facilement le caractère markovien de $(\hat{X}_t)$ sur l'espace (Ω, P^{μ}) du caractère markovien de $(\hat{\imath}_t)$ sur ce même espace. Nous avons préféré donner une démonstration directe pour le processus $(\hat{X}_t)$ et dire que, pour le processus $(\hat{\imath}_t)$, la démonstration est analogue.

2) En général, il n'est pas possible d'exprimer R_t à l'aide de i_t et le processus (i_t) n'est pas lui-même markovien. Toutefois cela sera vérifié pour certains "bons temps d'arrêt" R définis au chapitre suivant.

REALISATION SIMULTANEE DES SEMI-GROUPES $(\hat{P}_t)$ ET $(\hat{\pi}_t)$ SUR L'ESPACE $\hat{\Omega}$.

Il est facile de construire sur l'espace $\hat{\Omega}^{R_+}$ une réalisation du semi-groupe $(\hat{\pi}_t)$ par le même procédé que pour $(\hat{P}_t)$. Nous allons construire dans ce paragraphe une autre réalisation qui aura l'avantage de justifier la notion de fonctionnelle R-additive.

1. Définissons d'abord les opérateurs $(\hat{\theta}_t)$ en posant

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_t(r,\omega) &= (r-t, \theta_t\omega) && \text{si} \quad t < r \\ &= (R_t(\omega), \theta_t\omega) && \text{si} \quad t \geq r \end{aligned}$$

pour tout $(r,\omega) \in \hat{\Omega}$, et vérifions que

(1) $$\hat{\theta}_s \circ \hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{s+t} \;.$$

On a en effet

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_s \circ \hat{\theta}_t (r,\omega) &= \hat{\theta}_s(r-t,\theta_t\omega) = (r-t-s,\theta_s\theta_t\omega) && \text{si} \quad s+t < r \\
&= (R_s(\theta_t\omega),\theta_s\theta_t\omega) && \text{si} \quad t<r,\ s \geq r-t \\
&= \hat{\theta}_s(R_t(\omega),\theta_t\omega) = (R_t(\omega)-s,\theta_s\theta_t\omega) && \text{si} \quad t \geq r,\ s<R_t(\omega) \\
&= (R_s(\theta_t\omega),\theta_s\theta_t\omega) && \text{si} \quad t \geq r,\ s \geq R_t(\omega) \;.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{s+t}(r,\omega) &= (r-t-s,\theta_{s+t}\omega) \quad \text{si} \quad s+t<r \\
&= (R_{s+t}(\omega),\theta_{s+t}\omega) \text{si} \quad s+t \geq r
\end{aligned}$$

d'où la relation (1).

2. Nous définissons ensuite les <u>processus</u> $(Y_t),(\hat{Y}_t),(\hat{j}_t)$ sur $\hat{\Omega}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
Y_t(r,\omega) &= X_t(\omega) \\
\hat{Y}_t(r,\omega) &= (r-t,X_r(\omega)) && \text{si} \quad t<r \\
&= \hat{X}_t(\omega) && \text{si} \quad t \geq r \\
\hat{j}_t(r,\omega) &= (r-t,a_{r-t} \circ \theta_t\omega) && \text{si} \quad t<r \\
&= \hat{i}_t(\omega) && \text{si} \quad t \geq r
\end{aligned}$$

Ces processus sont <u>compatibles avec la famille</u> $(\hat{\theta}_t)$, car en appelant π_1 et π_2 les projections de $\hat{\Omega}$ sur $\mathbb{R}_+$ et Ω respectivement on a

$$\begin{aligned}
Y_t &= X_o \circ \pi_2 \circ \hat{\theta}_t \\
\hat{Y}_t &= (\pi_1,X_{\pi_1} \circ \pi_2) \circ \hat{\theta}_t \\
\hat{j}_t &= (\pi_1,a_{\pi_1} \circ \pi_2) \circ \hat{\theta}_t \;.
\end{aligned}$$

3. Pour définir les <u>mesures</u> $(\pi^{r,w})_{(r,w) \in \hat{\Omega}}$ nous utiliserons la notation suivante :

NOTATION III.1. - Pour $w \in \Omega, \omega \in \Omega, r \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tels que $r \leq \zeta(w)$ nous noterons $w/r/\omega$ la trajectoire qui coïncide avec w sur l'intervalle $[0,r[$ et dont la translatée par r est ω :

$$\begin{aligned} X_s(w/r/\omega) &= X_s(w) \quad \text{si} \quad s<r \\ &= X_{s-r}(\omega) \quad \text{si} \quad s \geq r . \end{aligned}$$

Si $r > \zeta(w)$ nous poserons $w/r/\omega = w$. Soit $\mathcal{G}^o$ la tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{F}^o$ sur $\hat{\Omega}$. Sur $(\hat{\Omega},\mathcal{G}^o)$ on définit les mesures $(\pi^{r,w})$ en posant pour tout $(r,w) \in \hat{\Omega}$

$$\pi^{r,w}(A) = E^{X_r(w)}[I_A(r,w/r/.)] \; , \; A \in \mathcal{G}^o .$$

Pour toute loi $\hat{P}$ sur $(\hat{\Omega},\mathcal{G}^o)$ on définit la mesure $\pi^{\hat{P}}$ par intégration des $\pi^{r,w}$ par rapport à $\hat{P}$. Pour des lois μ et $\hat{\mu}$ sur E et $\hat{\mu}$ respectivement on définit encore les mesures Q^{μ} et $Q^{\hat{\mu}}$ par intégration des mesures

$$\begin{aligned} Q^x &= \pi^{0,[x]} = \varepsilon_o \otimes P^x \\ Q^{r,x} &= \pi^{r,[x]} . \end{aligned}$$

Le théorème qui suit sera également énoncé sans démonstration. Pour trouver une démonstration très voisine on pourra se reporter au théorème IV.1.

THEOREME III.2. - 1) Supposons le système régénératif sans point de branchement. Alors, pour toute loi $\pi^{\hat{P}}$ sur $\hat{\Omega}$, le processus $(\mathfrak{J}_t)$ est fortement markovien par rapport au semi-groupe $(\hat{\pi}_t)$ et admet $\hat{P}\hat{\pi}_o$ comme loi initiale.

2) Pour toute loi $Q^{\hat{\mu}}$ sur $\hat{\Omega}$, où $\hat{\mu}$ ne charge que les (r,x) de $\hat{E}$ tels que $r = +\infty, x = \partial$ ou $r < \infty$, $x \neq \partial$, le processus $(\hat{Y}_t)$ est fortement markovien par rapport au semi-groupe $(\hat{P}_t)$ et admet $\hat{\mu}\hat{P}_o$ comme loi initiale.

3) Pour toute loi μ sur E , la loi du processus (Y_t) pour Q^{μ} est la loi du processus (X_t) pour P^{μ} .

(La troisième partie est triviale.)

FONCTIONNELLES R-ADDITIVES

Ce paragraphe sert d'introduction au chapitre V consacré aux fonctionnelles R-additives et donne une correspondance entre ces fonctionnelles et les fonctionnelles additives (au sens ordinaire) sur $(\hat{\Omega},\hat{\theta}_t)$.

Désignons par $(\hat{\mathcal{G}}_t)$ les tribus $(\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+} \otimes \hat{\mathcal{F}}_t)$ sur $\hat{\Omega}$ et précisons d'abord ce que nous entendons par "fonctionnelle additive sur $(\hat{\Omega},\hat{\mathcal{G}}_t,\hat{\theta}_t,Q^{\mu})$" : il s'agit d'un processus croissant (B_t) (continu à droite et nul en 0) adapté à la famille $(\hat{\mathcal{G}}_t)$ et tel que, pour tous $s,t \geq 0$ et toute loi Q^{μ}, on ait

$$B_{s+t} = B_t + B_s \circ \hat{\theta}_t$$

en dehors d'un ensemble Q^{μ}-négligeable. Si l'égalité ci-dessus est vérifiée en dehors d'un ensemble négligeable indépendant de s et t , la fonctionnelle est dite parfaite, selon la terminologie habituelle.

THEOREME III.3.- Nous supposons que $R_{D_s} = 0$ p.s. pour tout $s \geq 0$ (*) ;

1) Soit (B_t) une fonctionnelle additive parfaite sur $(\hat{\Omega},\hat{\mathcal{G}}_t,\hat{\theta}_t,Q^{\mu})$; le processus (A_t) défini sur Ω par

$$A_t(\omega) = B_t(0,\omega)$$

est alors un processus croissant adapté à $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ qui possède la propriété d'additivité suivante

$$A_{D_s+t} = A_{D_s} + A_t \circ \theta_{D_s} \qquad P^{\mu}\text{- p.s.} \tag{1}$$

pour toute loi P^{μ}. On peut de plus choisir l'ensemble exceptionnel indépendant de s et t.

2) Si (A_t) est un processus croissant possédant la propriété (1) et tel que

---

(*) On rappelle qu'on a posé $R_{\infty} = 0$.

(2) $$A_{D_s} = A_s \quad \text{p.s.} \quad \forall s \geq 0 ,$$

<u>le processus</u> (B_t) <u>défini sur</u> $\hat{\Omega}$ par

(3) $$\begin{aligned} B_t(r,\omega) &= 0 & \underline{\text{si}} \quad t<r \\ &= A_{t-r}(\theta_r\omega) & \underline{\text{si}} \quad t\geq r \end{aligned}$$

<u>est une fonctionnelle additive sur</u> $(\hat{\Omega},\hat{\mathcal{G}}_t,\hat{\theta}_t,Q^{\mu})$.

Les processus croissants (A_t) adaptés à $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ et qui possèdent les propriétés (1) et (2) ci-dessus seront étudiées au chapitre V sous le nom de "<u>fonctionnelles</u> R-<u>additives</u>".

<u>Démonstration</u> : 1) Désignons par Ψ l'application $\omega \to (0,\omega)$ de Ω dans $\hat{\Omega}$. Elle est mesurable de $(\Omega,\hat{\mathcal{F}}_t)$ dans $(\hat{\Omega},\hat{\mathcal{G}}_t)$ pour tout $t\geq 0$. Il en résulte, que si (B_t) est une fonctionnelle additive sur $(\hat{\Omega},\hat{\mathcal{G}}_t,\hat{\theta}_t,Q^{\mu})$, le processus $(A_t= B_t\circ \Psi)$ est adapté à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$. D'après l'additivité parfaite de (B_t) on a

$$B_{D_s}\circ \pi_2+ t= B_{D_s}\circ \pi_2 + B_t\circ \hat{\theta}_{D_s}\circ \pi_2 \qquad Q^{\mu}\text{- p.s.}$$

pour toute loi μ , et comme $Q^{\mu}= \varepsilon_0\otimes P^{\mu}$, il vient

$$B_{D_s(\omega)+t}(0,\omega) = B_{D_s(\omega)}(0,\omega) + B_t\circ \hat{\theta}_{D_s(\omega)}(0,\omega) \qquad P^{\mu}\text{- p.s.}$$

c'est-à-dire

$$A_{D_s+ t}(\omega) = A_{D_s}(\omega)+B_t(R_{D_s}(\omega),\theta_{D_s}(\omega)) \qquad P^{\mu}\text{- p.s.}$$

Mais par hypothèse $R_{D_s}= 0$ p.s. pour tout $s\geq 0$, donc $R_{D_s}= 0$ $\forall s$, p.s., par continuité à droite ; il en résulte que

$$B_t(R_{D_s}(\omega),\theta_{D_s}(\omega))=B_t(0,\theta_{D_s}(\omega))=A_t\circ \theta_{D_s}(\omega) \quad \forall s,t, \quad \text{p.s.}$$ et l'égalité (1) est établie.

2) Soit maintenant (A_t) un processus adapté à $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ possédant les propriétés (1) et (2) énoncées dans le théorème et soit (B_t) le processus défini par (3). Le processus (B_t) est adapté à la famille $(\hat{\mathcal{G}}_t) = (\mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}_+} \otimes \hat{\mathcal{F}}_t)$. Pour vérifier la relation

$$B_{s+t} = B_s + B_t \circ \hat{\theta}_s \qquad Q^{\mu} \text{ p.s.}$$

il suffit de vérifier que

$$B_{s+t}(0,\omega) = B_s(0,\omega) + B_t \circ \hat{\theta}_s(0,\omega) \qquad P^{\mu}\text{- p.s.}$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad A_{s+t}(\omega) = A_s(\omega) + B_t(R_s(\omega), \theta_s(\omega)) \qquad P^{\mu}\text{- p.s.}$$

Or par définition

$$\begin{aligned} B_t(R_s(\omega), \theta_s(\omega)) &= 0 && \text{si } t < R_s(\omega) \\ &= A_{t-R_s(\omega)}(\theta_{D_s}(\omega)) && \text{si } t \geq R_s(\omega) \end{aligned}$$

L'égalité (4) résulte alors sur l'ensemble $\{t < R_s\}$ de l'égalité $A_{D_s} = A_s$ p.s. et sur l'ensemble $\{t \geq R_s\}$ de l'égalité de R-additivité, en remarquant que $s+t = D_s + t - R_s$.

C.Q.F.D.

QUASI-CONTINUITE A GAUCHE

THEOREME III.4.- <u>Sous les hypothèses du théorème</u> II.3. <u>le processus</u> $(\hat{\imath}_t)$ <u>est quasi-continu à gauche par rapport à la famille</u> $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ <u>pour toute loi</u> P^{μ}.

<u>Démonstration</u> : Soit (U_n) une suite croissante de temps d'arrêt de $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ admettant U pour limite. On sait déjà que $R_{U_n} \to R_U$ p.s. sur l'ensemble $\{U < \infty\}$, à cause du théorème II.2. Il nous reste à montrer que $i_{U_n} \to i_U$ p.s. sur $\{U < \infty\}$.

- Si $D_{U_n} = D_U$ pour n assez grand et si $U < \infty$

on a $i_{U_n} = \theta_{U_n} \circ a_{D_{U_n}} = \theta_{U_n} \circ a_{D_U}$ donc

$i_{U_n} \to \theta_U \circ a_{D_U} = i_U$, par continuité de l'application $t \to \theta_t \circ a_{D_U}$.

- Sur l'ensemble $A = \{D_{U_n} < D_U, \forall n\}$ nous avons vu dans la démonstration du théorème II.2 que $D_U = U$ p.s. donc $i_U = [X_U] = [X_{D_U}]$ p.s. Si δ est la distance définie plus haut sur Ω ,on a donc p.s. sur A

$$\delta(i_{U_n}, i_U) = \int_0^\infty e^{-t} d(X_t \circ i_{U_n}, X_{D_U}) dt$$

$$= \int_0^{R_{U_n}} e^{-t} d(X_t \circ i_{U_n}, X_{D_U}) dt$$

$$+ \int_{R_{U_n}}^\infty e^{-t} d(X_{D_{U_n}}, X_{D_U}) dt$$

$$\leq R_{U_n} \sup_{x \in E} d(x, X_{D_U}) + d(X_{D_{U_n}}, X_{D_U})$$

Comme $R_{U_n} \to 0$ et $X_{D_{U_n}} \to X_{D_U}$ p.s. sur $A \cap \{U < \infty\}$, $\delta(i_{U_n}, i_U) \to 0$ p.s. sur cet ensemble.

C.Q.F.D.

REFERENCES

[1] B. MAISONNEUVE Processus d'excursions et processus d'incursions. C.R.Acad. Sc. Paris t. 274 , série A (1972), pp. 497-500.

[2] B. MAISONNEUVE Topologies du type de Skorokhod. Séminaire de Probabilités VI, Lectures Notes in Math. 258, Springer Verlag 1972.

CHAPITRE IV

PROCESSUS DES INCURSIONS - CAS D'UN BON TEMPS D'ARRET

Sous certaines hypothèses sur le temps d'arrêt R nous montrons dans ce chapitre que le processus (i_t) lui-même est fortement markovien et que son semi-groupe admet une réalisation fortement markovienne sur l'espace Ω lui-même. Les résultats du chapitre III, souvent énoncés sans démonstration, ne seront pas utilisés ici.

BONS TEMPS D'ARRET

DEFINITION IV.1.- Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,P^\mu;R)$ un système régénératif. Nous dirons que R est un bon temps d'arrêt s'il est relatif à la famille $(\mathcal{F}_t^*)$ et s'il possède les propriétés

$$(B_1)\qquad \begin{cases} a_{R(w)}(\omega) = a_{R(w)}(w) \Rightarrow R(\omega) = R(w) \\ P^{X_R(w)}\{X_o = X_R(w)\} = 1 \qquad \forall w \in \Omega \end{cases}$$

ou les propriétés

$$(B_2)\qquad \begin{cases} R \circ a_R \equiv R \\ \text{il existe un temps d'arrêt terminal parfait } \tilde{R} \text{ de la famille} \\ (\mathcal{F}_t^*) \text{ tel que} \\ R = \lim\limits_{t\downarrow 0} t + \tilde{R}\circ\theta_t \\ P^{X_R(w)}\{X_0 = X_R(w), \tilde{R} = 0\} = 1 \quad \text{pour tout } w\in\Omega \text{ tel que } R(w)<\infty\,. \end{cases}$$

La première propriété (B_1) signifie que R est un temps d'arrêt strict au sens de COURREGE et PRIOURET [1], et la seconde propriété (B_1) signifie que $X_R(w)$ est un point de non-branchement.

EXEMPLES. Soit (X_t) un processus fortement markovien sans point de branchement. Tout temps d'arrêt strict terminal exact et parfait est alors un bon temps d'arrêt et en particulier le temps d'arrêt

$$R = \inf\{t > 0 : d(X_{t-},X_t) > \varepsilon\} .$$

Si F est un fermé de E le temps d'entrée dans F

$$F = \inf\{t > 0 : X_t \in F\}$$

est un bon temps d'arrêt du type (B_2) (prendre $\tilde{R} = \inf\{t \geq 0 : X_t \in F\}$), mais non du type (B_1) si $F \neq E$ ou $\emptyset$ (prendre par exemple $F = \{x\}$, $w = [x]$ et ω tel que $X_o(\omega) = x$).

PROPOSITION IV.1. - Si R est un bon temps d'arrêt (ou seulement si $R \circ a_R = R$) on a

1) $R_s = R \circ i_s \quad , s \geq 0$
2) $a_R \circ i_s = i_s \; , \; s \geq 0$
3) $i_{s+t} = i_t \circ i_s$ si $t < R_s$, s et $t \geq 0$.

Démonstration : Soit R un bon temps d'arrêt. Dans le cas (B_1) la propriété $R \circ a_R = R$ résulte de la première propriété (B_1) et dans le cas (B_2) elle fait partie de la définition. On a donc $R \circ a_R \circ \theta_s(\omega) = R \circ \theta_s(\omega)$, soit $R_s(\omega) = R \circ i_s(\omega)$ pour tout $s \geq 0$. Il en résulte aussi $a_R \circ i_s = a_R \circ \theta_s = i_s$, $\forall\, s \geq 0$.

Il reste à démontrer la propriété 3). On a

$$i_{s+t} = a_R \circ \theta_t \circ \theta_s = i_t \circ \theta_s = \theta_t \circ a_{D_t} \circ \theta_s .$$

Si $t < R_s = R \circ \theta_s$, on a aussi $D_t \circ \theta_s = R \circ \theta_s$ puisque R est terminal, donc $a_{D_t} \circ \theta_s = a_R \circ \theta_s$ et

$$i_{s+t} = \theta_t \circ a_R \circ \theta_s = \theta_t \circ i_s .$$

En appliquant la propriété 2) on obtient

$$i_{s+t} = a_R \circ i_{s+t} = a_R \circ \theta_t \circ i_s = i_t \circ i_s ,$$

C.Q.F.D.

NOYAUX $(\pi_t)_{t\geq 0}$ ET MESURES $(\pi^w)_{w\in\Omega}$.

DEFINITIONS IV.2.- 1) <u>Sur</u> $(\Omega,\mathcal{F}^*)$ <u>on définit les noyaux</u> $(\pi_t)_{t\geq 0}$ <u>en posant</u>

$$\begin{aligned} \pi_t(w,f) &= f(i_t w) && \underline{\text{si}}\quad t<R(w), \\ &= E^{X_R(w)}[f(i_{t-R(w)}(\cdot))]\ \underline{\text{si}} && t\geq R(w) , \end{aligned}$$

<u>pour tout</u> $w\in\Omega$ <u>et toute fonction</u> $\mathcal{F}^*$<u>-mesurable positive</u> f .

2) <u>Pour tout</u> $w\in\Omega$ <u>on note</u> φ_w <u>l'application</u>

$$\omega \to w/R(w)/\omega \quad (\text{cf. notation III.1})$$

<u>et on désigne par</u> π^w <u>la probabilité image de la loi</u> $P^{X_R(w)}$ <u>par l'application</u> φ_w $(\pi^w = \varepsilon_w$ <u>si</u> $R(w) = +\infty)$. <u>Pour toute loi</u> P <u>sur</u> $(\Omega,\mathcal{F}^o)$ <u>on définit encore</u> π^P <u>par intégration</u> :

$$\pi^P = \int P(dw)\pi^w .$$

Ces définitions appellent quelques commentaires et justifications :

1) Si l'on n'avait pas supposé R $\mathcal{F}^*$-mesurable π_t ne serait nécessairement un noyau sur $(\Omega,\mathcal{F}^*)$, mais seulement une probabilité de transition de $(\Omega,\mathcal{F}^*)$ dans $(\Omega,\mathcal{F})$, ce qui serait ennuyeux pour obtenir un semi-groupe. R étant supposé $\mathcal{F}^*$-mesurable, le fait que π_t <u>soit un noyau sur</u> $(\Omega,\mathcal{F}^*)$ résulte des propriétés suivantes :

- les applications $w\to R(w)$ et $w\to i_t(w)$ sont $\mathcal{F}^*$-mesurables,
- l'application $w \to (X_R(w), (t-R(w))^+)$ est mesurable de $(\Omega,\mathcal{F}^*)$

dans $(E\times R_+,\mathcal{E}^*\times \mathcal{B}_{R_+})$,

- l'application $(x,u) \to E^x[f(i_u)]$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{E}^* \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$, d'après un raisonnement classique.

2) L'application $\varphi_w : \omega \to (w/R(w)/\omega)$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}^*)$ dans $(\Omega, \mathcal{F}^*)$; la probabilité π^w est donc bien définie. De plus l'application $w \to \pi^w(A)$ est $\mathcal{F}^*$-mesurable pour tout $A \in \mathcal{F}^*$, ce qui justifie la définition de π^P.

PROPOSITION IV.2.- <u>Si</u> R <u>est un bon temps d'arrêt et si</u> w <u>est un élément de</u> Ω <u>tel que</u> $R(w) > 0$ <u>on a</u> $i_t(\omega) = i_t(w)$ π^w-p.s. <u>pour tout</u> $t < R(w)$.

<u>Démonstration</u> : Montrons d'abord que $i_o(\omega) = i_o(w)$ π^w-p.s. Pour alléger les écritures posons $r = R(w)$, $x = X_R(w)$.

<u>Si</u> R <u>est de type</u> (B_1) on a $X_o(\omega) = x$ P^x-p.s., donc les trajectoires w et $w/r/\omega$ sont identiques sur l'intervalle fermé $[0,r]$, donc

$$R(w/r/\omega) = R(w) = r \qquad P^x\text{-p.s.},$$

d'après la première propriété (B_1). Il en résulte que

$$a_R(w/r/\omega) = a_R(w) \qquad P^x\text{-p.s.}$$

c'est-à-dire

$$i_o(\omega) = i_o(w) \qquad \pi^w\text{-p.s.}$$

<u>Si</u> R <u>est de type</u> (B_2) tout revient encore à montrer que $R(w/r/\omega) = r$ P^x-p.s. . Supposons que l'on ait $R(w/r/\omega) < r$; si $t \in]R(w/r/\omega), r[$ les trajectoires $w/r/\omega$ et w sont identiques sur $[0,t[$, donc $R(w/r/\omega) = R(w)$ d'après une propriété caractéristique des temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t^*)$ ([1]) et on obtient une contradiction. Par suite $R(w/r/\omega) \geq r$. Comme r est > 0 on peut choisir t dans l'intervalle $]0,r[$ et on a

$$R(w/r/\omega) = t + \widetilde{R} \circ \theta_t(w/r/\omega) \quad .$$

L'ensemble des ω tels que $R(w/r/\omega) > r$ est aussi l'ensemble des ω tels que $\widetilde{R} \circ \theta_t(w/r/\omega) > r-t$, et comme le temps $\widetilde{R}$ est terminal parfait, cet ensemble est contenu dans l'ensemble

$$\{\omega : \widetilde{R} \circ \theta_{r-t} \circ \theta_t(w/r/\omega) > 0\} = \{\omega : \widetilde{R}(\omega) > 0\}$$

Or, si $r < \infty$ $P^x\{\widetilde{R} = 0\} = 1$, donc $R(w/r/\omega) = r$ P^x-p.s., et $i_o(\omega) = i_o(w)$ π^w-p.s. si $r = +\infty$ cette égalité est triviale.

De l'égalité $i_o(\omega) = i_o(w)$ π^w-p.s. on déduit $i_t \circ i_o(\omega) = i_t \circ i_o(w)$ π^w-p.s. $\forall t \geq 0$, et il résulte de la proposition IV.1 (propriété 3) que

$$i_t(\omega) = i_t(w) \qquad \pi^w\text{-p.s.} \qquad \forall t < R_0(w) = R(w) .$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE.- <u>Si</u> R <u>est un bon temps d'arrêt on a</u>

$$\pi_t(w,f) = E^w(f \circ i_t) \qquad \forall t \geq 0 .$$

<u>En particulier</u>, $\epsilon_w \pi_o$ <u>est la loi initiale du processus</u> (i_t) <u>pour la loi</u> π^w .

<u>Démonstration</u> : Si $t \geq R(w)$ on a par définition

$$E^w(f \circ i_t) = E^{X_R(w)}(f \circ i_{t-R(w)})$$

$$= \pi_t(w,f) ,$$

et si $t < R(w)$ on a $i_t = i_t(w)$ π^w-p.s. à cause de la proposition précédente, donc

$$E^w(f \circ i_t) = f(i_t w) = \pi_t(w,f) .$$

C.Q.F.D.

CARACTERE MARKOVIEN DU PROCESSUS (i_t) .

Le temps d'arrêt R étant relatif à $(\mathcal{F}^*_t)$, la variable D_t est un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}^*_t)$ pour tout t et le processus (i_t) est adapté à la famille $(\mathcal{F}^*_{D_t})$. Mais pour démontrer la propriété de Markov de (i_t) pour les mesures π^w, nous utiliserons une famille de tribus plus petite que $(\mathcal{F}^*_{D_t})$.

DEFINITION IV.3. - Pour $t \geq 0$ soit $\mathcal{J}_t^o$ la tribu $\mathcal{T}\{i_s, s \leq t\}$ et soit $(\mathcal{J}_t^*)$ la famille continue à droite universellement complétée à partir de $(\mathcal{J}_t^o)$ (par le même procédé que pour $(\mathcal{F}_t^*)$).

THEOREME IV.1.- On suppose que R est un bon temps d'arrêt.

a) La famille (π_t) est un semi-groupe sur $(\Omega, \mathcal{F}^*)$.

b) Pour toute loi P^μ le processus (i_t) est fortement markovien par rapport à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t) = (\mathcal{F}_{D_t})$ et admet (π_t) comme semi-groupe de transition.

c) Pour toute loi π^P le processus (i_t) est fortement markovien par rapport à la famille $(\mathcal{J}_t^*)$ avec (π_t) comme semi-groupe de transition, $P\pi_o$ comme loi initiale et (θ_t) comme opérateurs de translation.

d) Soit P_R^μ la loi de $i_o = a_R$ pour P^μ. On a $P^\mu = \pi^{P_R^\mu}$, c'est-à-dire

$$P^\mu(A) = \int \pi^{i_o}(A) dP^\mu \qquad \forall A \in \mathcal{F}^* .$$

Démonstration : 1. Montrons d'abord que pour toute loi μ, le processus (i_t) est fortement markovien pour P^μ, avec les (π_t) comme noyaux de transition. Soit S un temps d'arrêt de $(\hat{\mathcal{F}}_t)$(*) nous voulons montrer que pour toute fonction $\mathcal{F}^o$-mesurable positive f et tout $t \geq 0$ on a

$$E^\mu[f \circ i_{S+t} | \hat{\mathcal{F}}_S] = \pi_t(i_S, f) \qquad P^\mu\text{-p.s.} \tag{1}$$

- Sur l'ensemble $\{t < R_S\} = \{t < R \circ i_S\}$ on a $i_{S+t} = i_t \circ i_S$ d'après la propriété 3) de la proposition IV.1 et comme i_S est $\hat{\mathcal{F}}_S$-mesurable le premier membre de (1) vaut $f \circ i_t \circ i_S = \pi_t(i_S, f)$ p.s.

- Sur l'ensemble $\{t \geq R_S\}$, on a

$$i_{S+t}(\omega) = i_{t-R_S(\omega)} \circ \theta_{D_S}(\omega) ;$$

(*) S est supposé fini.

la propriété de régénération du temps D_S (sous la forme de la proposition I.3) donne alors sur $\{t \geq R_S\}$

$$E^{\mu}[f \circ i_{S+t}(\omega) | \mathcal{F}_{D_S}] = E^{X_{D_S}(\omega)}[f \circ i_{t-R_S(\omega)}(\cdot)] \quad \text{p.s.}$$
$$= \pi_t(i_S(\omega), f) \ ,$$

la dernière égalité résultant de ce que $R_S = R \circ i_S$ et $X_{D_S} = X_R \circ i_S$. On termine la démonstration en utilisant l'inclusion $\hat{\mathcal{F}}_S \subset \mathcal{F}_{D_S}$.

2. Soit maintenant w un point fixé de Ω et U un temps d'arrêt (*) de la famille $(\mathcal{I}^*_t)$. Nous allons montrer que

(2) $$E^w[f \circ i_{U+t} | \mathcal{I}^*_U] = \pi_t(i_U, f) \qquad \pi^w\text{-p.s.}$$

Pour la commodité des calculs nous poserons $r = R(w)$, $x = X_R(w)$. Pour tout réel $s \in [0,r[$ on a $i_o(\omega) = i_o(w)$ π^w-p.s. à cause de la proposition IV.2, donc les tribus $\mathcal{I}^o_{s+}$ et $\mathcal{I}^*_s$ sont dégénérées pour la loi π^w (ce qui n'est pas le cas de $\mathcal{F}^*_{D_s}$ ou de $\mathcal{F}^*_r$, si la tribu $\mathcal{F}_o$ n'est pas dégénérée pour P^x) . Comme $\{U < s\} \in \mathcal{I}^*_s$, on a donc $\pi^w\{U < s\} = 0$ ou 1 . Posons $u = \sup\{s : \pi^w\{U < s\} = 0\}$ et distinguons deux cas :

– Si $u < r$, on a $U = u$ π^w-p.s. et l'égalité (2) à démontrer s'écrit

$$E^w[f \circ i_{u+t} | \mathcal{I}^*_u] = \pi_t(i_u, f) \qquad \pi^w\text{-p.s.}$$

ou encore puisque la tribu $\mathcal{I}^*_u$ est dégénérée pour π^w

$$E^w[f \circ i_{u+t}] = \pi_t(i_u, f) \ .$$

Si $u+t < r$ les deux membres valent $f \circ i_{u+t}(w)$ et si $u+t \geq r$ (ou $t \geq r-u$) les deux membres valent $E^x(f \circ i_{u+t-r})$. L'égalité (2) est donc établie si $u < r$.

– Si $u \geq r$, on a $U \geq r$ π^w-p.s. Quitte à remplacer U par $U \vee r$ on peut supposer que $U \geq r$ sûrement. Posons $S(\omega) = U(w/r/\omega) - r$, on a

$$\begin{aligned} i_{U+t}(w/r/\omega) &= i_{S(\omega)+r+t}(w/r/\omega) \\ &= i_{S(\omega)+t}(\omega) . \end{aligned}$$

L'égalité (2) est donc équivalente à l'égalité

(2') $$E^x[f \circ i_{S+t} | \varphi_w^{-1}(\mathcal{J}_U^*)] = \pi_t(i_S, f) \qquad P^x\text{-p.s.}$$

et cette égalité résulte du lemme qui suit et de la formule (1) écrite pour $\mu = \epsilon_x$.

(*) fini.

LEMME IV.1.- <u>Si</u> $r = R(w)$ <u>et si</u> U <u>est un temps d'arrêt</u> $\geq r$ <u>de la famille</u> $(\mathcal{J}_t^*)$ <u>la variable</u> $S(\omega) = U(w/r/\omega)-r$ <u>est un temps d'arrêt de la famille</u> $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ <u>et</u> $\varphi_w^{-1}(\mathcal{J}_U^*) \subset \hat{\mathcal{F}}_S$.

<u>Démonstration du lemme IV.1</u> : Pour tout $u \geq 0$ et tout $A \in \mathcal{F}^o$ on a

$$\varphi_w^{-1}\{i_{r+u} \in A\} = \{i_u \in A\} \in \hat{\mathcal{F}}_u$$

donc, la famille $(\hat{\mathcal{F}}_s)$ étant continue à droite,

$$\varphi_w^{-1}(\mathcal{J}^o_{(r+s)+}) \subset \hat{\mathcal{F}}_s$$

et

$$\varphi_w^{-1}(\mathcal{J}^*_{r+s}) \subset \hat{\mathcal{F}}_s \quad .$$

Comme $\{S<s\} = \{U(w/r/.)<r+s\} = \varphi_w^{-1}\{U<r+s\}$ et que $\{U<r+s\} \in \mathcal{J}^*_{r+s}$, la variable S est donc un temps d'arrêt de $(\hat{\mathcal{F}}_s)$.

Soit $B \in \mathcal{J}_U^*$; on a par définition de la tribu $\mathcal{J}_U^*$

$$\begin{aligned} &B \cap \{U<r+s\} \in \mathcal{J}^*_{r+s} && \forall s \geq 0 \\ &\varphi_w^{-1}(B) \cap \{S<s\} \in \hat{\mathcal{F}}_s && \forall s \geq 0 \end{aligned}$$

ce qui signifie que $\varphi_w^{-1}(B) \in \hat{\mathcal{F}}_S$. Le lemme est établi.

3. Achevons maintenant la démonstration des points a.b.c. du théorème. Pour $U = s$ la formule (2) donne

$$E^w(f \circ i_{s+t}) = E^w[\pi_t(i_s, f)]$$

et comme $E^w(f \circ i_t) = \pi_t(w,f) \quad \forall t \geq 0$ (corollaire de la proposition IV.2) on en déduit la propriété de semi-groupe de la famille (π_t). Le point a. du théorème est démontré. Le point b. résulte alors de la formule (1), et le point c. résulte de la formule (2), du corollaire de la proposition IV.2 et de la relation $i_{s+t} = i_t \circ \theta_s$.

4. Il reste à établir le point d.

Soit P^μ_R la loi de $i_o = a_R$ pour P^μ et soit f une fonction $\mathcal{F}^o$-mesurable positive ; on a

$$\begin{aligned}\int E^w(f)dP^\mu_R(w) &= \int E^{a_R}(f)dP^\mu \\ &= E^\mu[E^{a_R}(f)] \\ &= E^\mu[E^{X_R \circ a_R}[f(a_R/R \circ a_R/.)]] \\ &= E^\mu[E^{X_R}[f(a_R/R/.)]]\end{aligned}$$

Appliquons la formule de Dawson au temps R [2] :

$$E^\mu[f \mid \mathcal{F}_R] = E^{X_R}[f(a_R/R/.)] \qquad P^\mu\text{-p.s.} ,$$

il vient alors

$$E^{P^\mu_R}(f) = E^\mu(f) .$$

C.Q.F.D.

QUASI-CONTINUITE A GAUCHE

THEOREME IV.2.- Si R est un bon temps d'arrêt et sous les hypothèses du théorème II.3 le processus (i_t) est quasi-continu à gauche par rapport à la famille $(\mathcal{J}^*_t)$ pour toute loi π^P (*)

(*) Ce résultat a déjà été établi au chapitre III pour les lois P^μ.

Démonstration : Soit (U_n) une suite croissante de temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{J}_t^*)$ admettant pour limite U. Nous allons montrer que $i_{U_n} \to i_U$ π^w-p.s. sur $\{U<\infty\}$, pour tout $w \in \Omega$. Soit $w \in \Omega$; nous posons de nouveau $r = R(w)$, $x = X_R(w)$. Rappelons que, pour la loi π^w, tout temps d'arrêt U de $(\mathcal{J}_t^*)$ est p.s. égal à une constante $u<r$ ou bien p.s. $\geq r$.

– Si $U_n = u_n < r$ p.s. pour tout n, (u_n) est une suite croissante de limite $u \leq r$, et on a $U = u$ p.s. . Il nous suffit donc de montrer que $i_{u_n} \to i_u$ π^w-p.s. pour $u < \infty$. Si $u<r$, on a $i_{u_n}(\omega) = i_{u_n}(w)$, $i_u(\omega) = i_u(w)$ p.s. à cause de la proposition IV.2, et $i_{u_n}(w) = \theta_{u_n} \circ a_r(w) \to \theta_u \circ a_r(w) = i_u(w)$ d'où la convergence cherchée. Si $u = r < \infty$, on a $i_u(\omega) = [x]$ p.s. car $P^x(X_0 = x, R = 0) = 1$ à cause des hypothèses faites et $i_{u_n}(\omega) = i_{u_n}(w)$ p.s. La convergence cherchée résulte alors de ce que $i_{u_n}(w) \to [x]$ lorsque $u_n \uparrow r < \infty$.

– Supposons $U_n \geq r$ p.s. pour n assez grand ; quitte à faire une rénumérotation des (U_n) et à prendre les temps d'arrêt $U_n \vee r$, nous pouvons supposer que $U_n \geq r$ sûrement pour tout n. D'après le lemme IV.1 les variables

$$S_n(\omega) = U_n(w/r/\omega) - r$$

sont des temps d'arrêt de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ et on a

$$i_{U_n}(w/r/\omega) = i_{S_n}(\omega) .$$

Il suffit alors d'appliquer, pour la suite (S_n) et la loi P^x, la propriété de quasi-continuité à gauche de (i_t) démontrée dans le théorème III.2.

REFERENCES

[1] Ph. COURREGE et P. PRIOURET

Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire.

Publ. Inst. Stat. Univ. Paris 14 (1965), pp. 245-274.

[2] D.A. DAWSON Equivalence of Markov processes.
Trans. Amer. Math. Soc. (1968), pp. 1-31.

[3] B. MAISONNEUVE
Processus d'excursions et processus d'incursions.
C.R.Acad. Sci. Paris t. 274 , série A (1972), pp. 497-500.

CHAPITRE V

FONCTIONNELLES R-ADDITIVES

R-POTENTIELS

R-TEMPS LOCAUX

INTRODUCTION

Les fonctionnelles R-additives que nous allons étudier dans ce chapitre sont liées à certaines fonctionnelles additives du processus $(\hat{j}_t)$ défini sur $\hat{\Omega}$, comme nous l'avons montré au chapitre III. La théorie du potentiel relative au processus $(\hat{j}_t)$ induit alors une "théorie du R-potentiel" pour le système régénératif. Le rôle joué par le semi-groupe (P_t) en théorie du potentiel sera joué ici par la famille de noyaux (H_t^λ) définie par

$$H_t^\lambda f(x) = E^x[e^{-\lambda D_t} f \circ X_{D_t}] ,$$

et qui n'est en général pas un semi-groupe.

Les R-temps locaux seront naturellement définis comme des fonctionnelles R-additives croissant exactement sur l'ensemble $M = \overline{\bigcup_{t \geq 0} [D_t]}$; ils correspondent, pour le processus $(\hat{j}_t)$ et les lois Q^μ du chapitre III, à des temps locaux sur $\{0\} \times \Omega$, non nécessairement continus. Lorsque l'ensemble M est p.s. parfait, nous donnons une caractérisation au moyen des noyaux (H_t^λ) des λ-potentiels de R-temps locaux. Nous montrons en particulier que la fonction $E^x[e^{-\lambda R}]$ est le λ-potentiel d'un R-temps local prévisible par rapport à la famille $(\mathcal{F}_t)$ et possédant la propriété d'additivité ordinaire ; il est de plus continu si le processus (D_t) est quasi-continu à gauche. Ce temps local, appelé temps local d'équilibre, ne dépend que du processus $(\hat{X}_t)$.

Nous définissons également la R-balayée d'une fonctionnelle additive de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ et étendons une formule due à AZEMA [6].

NOTATIONS ET HYPOTHESES

1. Dans ce chapitre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^\mu; R)$ désigne un système régénératif <u>sans point de branchement</u>. Notons F l'ensemble des points réguliers pour R (définition II.3) :

$$F = \{x \in E : P^x\{R = 0\} = 1\}$$

Rappelons que pour tout point de F la loi 0-1 est satisfaite (proposition I.4.). Nous poserons **également**

$$F' = F \cup \{\delta\}, \quad \hat{F} = \bar{\mathbb{R}}_+ \times F',$$

$$M = \{t : R_t = 0 \text{ ou } R_{t-} = 0\}$$

On remarquera que l'ensemble M est fermé ; on a aussi

$$M = \overline{\bigcup_{t \geq 0} [D_t]} = \overline{\bigcup_{r \text{ rationnel} \geq 0} [D_r]}$$

où $[D_t]$ désigne comme d'habitude le graphe du temps d'arrêt D_t.

2. Nous supposerons que le <u>processus</u> (X_{D_t}) <u>est p.s. à valeurs dans</u> F', c'est-à-dire

$$X_{D_t} \in F' \quad \forall t \geq 0, \ P^\mu\text{-p.s. pour toute loi } \mu.$$

De manière équivalente, le processus $(\hat{X}_t)$ est p.s. à valeurs dans $\hat{F}$. Voici deux conséquences importantes de cette hypothèse :

a) Le semi-groupe $(\hat{P}_t)$ peut être restreint à l'ensemble $\hat{F}$. Il est alors <u>sans point de branchement</u>.

b) Pour tout temps d'arrêt S de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$, on a $R_{D_S} = 0$ p.s. ou $D_{D_S} = D_S$ p.s. ; l'ensemble M <u>est p.s. sans point isolé</u> (ou parfait).

En effet on a d'après la propriété de régénération au temps D_S

$$P^\mu(\{D_S < \infty\} \cap \theta_{D_S}^{-1}\{R = 0\}) = \int_{\{D_S < \infty\}} P^{X_{D_S}}\{R = 0\} dP^\mu$$

Le membre de gauche est la probabilité que D_S soit point d'accumulation à droite de points de M. Le membre de droite vaut $P^{\mu}\{D_S < \infty\}$ d'après l'hypothèse faite. Il en résulte que $R \circ \theta_{D_S} = 0$ p.s. sur $\{D_S < \infty\}$, c'est-à-dire que $R_{D_S} = 0$ p.s. (on rappelle la convention $R_\infty = 0$). En faisant parcourir à S l'ensemble des rationnels ≥ 0, on voit aussi que l'ensemble M est p.s. sans point isolé.

On notera que dans tous les cas l'ensemble $\{t : R_t = 0\}$ est l'ensemble des points d'accumulation à droite de points de M et que sous l'hypothèse faite son adhérence est indistinguable de M.

FONCTIONNELLES (λ, R)-ADDITIVES

DEFINITION V.1.- Soit $\lambda \geq 0$. On appelle fonctionnelle (λ,R)-additive du système régénératif $(\Omega, \ldots ; R)$ tout processus croissant (continu à droite et nul en 0) (A_t) adapté à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ tel que pour tous s et $t \geq 0$

(1) $$A_{D_s + t} = A_s + e^{-\lambda D_s} A_t \circ \theta_{D_s} \quad \text{p.s.}$$

Une fonctionnelle $(0,R)$-additive sera dite R-additive.

Lorsque la relation (1) a lieu en dehors d'un ensemble négligeable ne dépendant pas de s et t, la fonctionnelle (A_t) sera dite parfaite.

Remarques : 1) Lorsque $R = 0$, l'égalité (1) se réduit à l'égalité de λ-additivité habituelle ([1]).

2) La propriété (1) est équivalente aux deux propriétés suivantes

(2) $$A_{D_s} = A_s \quad \text{p.s.} \qquad \forall\, s \geq 0$$

(3) $$A_{D_s+t} = A_{D_s} + e^{-\lambda D_s} A_t \circ \theta_{D_s} \quad \text{p.s.} \quad \forall\, s,t \geq 0 .$$

L'égalité (3) est l'égalité de (λ,R)-additivité à proprement parler (*). Nous avons fait l'hypothèse supplémentaire (2) car nous avons particulièrement en vue des temps

---

(*) Les fonctionnelles ne possédant que la propriété (3) se présentent naturellement si l'on ne suppose pas $X_{D_t} \in F'$ p.s. (cf. théorème V.5.).

locaux pour le système régénératif. On notera que l'égalité (2) signifie que l'<u>ensemble</u> C <u>des points de croissance de</u> (A_t) <u>est p.s. contenu dans l'ensemble</u> M <u>et que les instants</u> D_t <u>sont p.s. des instants de continuité pour les processus</u> (A_t) .

EXEMPLES V.1.- 1) Le processus $(D_t - R)$ est une fonctionnelle R-additive (on a fait ici la convention $+\infty - \infty = 0$). En effet

$$\begin{aligned} D_{D_s + t} &= D_s + t + R \circ \theta_{D_s + t} \\ &= D_s + t + R \circ \theta_t \circ \theta_{D_s} \\ &= D_s + D_t \circ \theta_{D_s} \end{aligned}$$

et $R \circ \theta_{D_s} = R_{D_s} = 0$ p.s. par hypothèse.

2) Plus généralement pour $\lambda \geq 0$ et pour toute fonctionnelle (B_t) additive au sens ordinaire et adaptée à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ le processus

$$A_t = \int_R^{D_t} e^{-\lambda s} \, dB_s$$

est une fonctionnelle (λ, R)-additive.

3) Si on pose pour tout $t \geq 0$

$$G_t = \sup\{s \leq t : s \in M\} = \sup\{s \leq t : R_{s-} = 0\}$$

le processus G_t satisfait (3) pour $\lambda = 0$, mais pas (2) ; ce n'est donc pas une fonctionnelle R-additive au sens de la définition V.1.

PROPOSITION V.1.- <u>Toute fonctionnelle</u> R-<u>additive est indistinguable d'une fonctionnelle</u> R-<u>additive parfaite</u>.

<u>Démonstration</u> : Soit (A_t) une fonctionnelle R-additive. D'après la deuxième partie du théorème III.3 le processus (B_t) défini sur l'espace $\hat{\Omega}$ par

$$B_t(r,\omega) = 0 \qquad \text{si} \quad t < r$$
$$= A_{t-r}(\theta_r\omega \quad \text{si} \quad t \geq r$$

est une fonctionnelle additive sur $(\hat{\Omega},\hat{\mathcal{F}}_t,\hat{\theta}_t,\hat{Q}^{\omega})$. Par le procédé de régularisation de WALSH ([2]) on obtient une fonctionnelle additive parfaite (B'_t) indistinguable de (B_t) (on peut même supposer l'égalité d'additivité vraie sans aucun ensemble exceptionnel). Le processus (A'_t) défini sur Ω par

$$A'_t(\omega) = B'_t(0,\omega)$$

est alors une fonctionnelle R-additive parfaite d'après la première partie du théorème III.3, et indistinguable de (A_t).

C.Q.F.D.

<u>Remarque</u> : Nous aurions pu démontrer la proposition précédente de manière directe, en adaptant la méthode de régularisation de WALSH. Pour cela on pose

$$A'_t(\omega) = \operatorname*{ess\,lim\,sup}_{s \downarrow 0} A_{D_t(\omega)-D_s(\omega)}(\theta_{D_s}(\omega)) \quad \text{pour} \quad t>0$$
$$A'_0(\omega) = \operatorname*{ess\,lim\,sup}_{t \downarrow 0} A'_t(\omega) \;,$$

et pour pouvoir appliquer le théorème de WALSH on remarque que pour toute suite $\epsilon_n \downarrow 0$

$$A_{D_t(\omega)-D_{\varepsilon_n}(\omega)}(\theta_{D_{\varepsilon_n}}(\omega)) \to A_{D_t}(\omega) - A_R(\omega) = A_{D_t}(\omega) \quad \text{p.s.}$$

et on vérifie que l'application

$$(s,\omega) \to A_{D_t(\omega)-D_s(\omega)}(\theta_{D_s}(\omega))$$

est $m \times P^{\mu}$-mesurable pour t fixé (m désignant la mesure de Lebesgue sur $\bar{\mathbb{R}}_+$). Pour ce dernier point on peut utiliser le caractère markovien du processus $(\hat{I}_t)$.

COROLLAIRE V.1. - _Si_ (A_t) _est une fonctionnelle_ (λ,R)-_additive on a pour tout temps d'arrêt_ S _de la famille_ $(\hat{\mathcal{F}}_t)$

$$A_{D_S+t} = A_S + e^{-\lambda D_S} A_t \circ \theta_{D_S} \quad \text{p.s.}$$

DEFINITION V.2. - _On appelle potentiel d'une fonctionnelle_ (λ,R)-_additive_ (A_t) _la fonction définie sur_ F' _par_

$$U_A(y) = E^y[A_\infty] \ , \ y \in F' \ ,$$

_et_ λ-_potentiel d'une fonctionnelle_ R-_additive la fonction définie sur_ F'

$$U_A^\lambda(y) = E^y[\int_0^\infty e^{-\lambda s} d\,A_s] \ , \ y \in F' \ .$$

Remarques : 1) La relation (1) écrite pour $t=+\infty$, $s=0$ montre que pour tout $x \in E$ on a (en tenant compte de ce que $X_R \in F'$ p.s.)

$$E^x[A_\infty] = E^x[e^{-\lambda R} U_A \circ X_R] \ ,$$

de sorte que pour une fonctionnelle (λ,R)-additive (A_t) la fonction $E^\cdot[A_\infty]$ sur E (c'est le potentiel habituel) est entièrement déterminée par sa restriction U_A à F'.

2) Si (A_t) est une fonctionnelle R-additive, $B_t = \int_0^t e^{-\lambda s} dA_s$ est une fonctionnelle (λ,R)-additive dont le potentiel est le λ-potentiel de (A_t).

PROPOSITION V.2. _Une fonctionnelle_ (λ,R)-_additive continue est adaptée à la famille_ $(\mathcal{F}_t)$. _Il en est de même d'une fonctionnelle_ (λ,R)-_additive prévisible ayant un potentiel borné._

Démonstration : Soit (A_t) une fonctionnelle (λ,R)-additive _continue_. A cause de la propriété (2) on a alors

$$A_t = \sup_{r \text{ rationnel}} A_r \, I_{\{D_r < t\}} \quad \text{p.s.}$$

chacune des variables $A_r I_{\{D_r < t\}}$ étant $\mathcal{F}_t$-mesurable, il en est de même de A_t.

Pour traiter le cas d'une fonctionnelle (λ,R)-additive prévisible (A_t) dont le potentiel U_A est borné, envisageons la surmartingale bornée (car U_A est borné)

$$(E^\mu[A_\infty - A_t|\mathcal{F}_t^\mu])_{t \geq 0}$$

et le processus croissant prévisible (B_t^μ), adapté à la famille $(\mathcal{F}_t^\mu)$, qui l'engendre. On a

$$(5) \qquad \begin{cases} E^\mu[A_\infty - A_t|\mathcal{F}_t^\mu] = E^\mu[B_\infty^\mu - B_t^\mu|\mathcal{F}_t^\mu] \\ E^\mu[A_\infty - A_{D_t}|\mathcal{F}_{D_t}^\mu] = E^\mu[B_\infty^\mu - B_{D_t}^\mu|\mathcal{F}_{D_t}^\mu] \end{cases}$$

la deuxième égalité résultant de ce que D_t est un temps d'arrêt de la famille continue à droite $(\mathcal{F}_t^\mu)$. Or $A_{D_t} = A_t$ p.s. par hypothèse, donc $B_{D_t}^\mu = B_t^\mu$ P^μ-p.s. en faisant la différence des deux égalités précédentes. L'égalité (5) s'écrit alors

$$E^\mu[A_\infty - A_t|\mathcal{F}_{D_t}^\mu] = E^\mu[B_\infty^\mu - B_t^\mu|\mathcal{F}_{D_t}^\mu]$$

Les processus prévisibles (A_t) et (B_t^μ), adaptés à la famille $(\mathcal{F}_{D_t}^\mu)$, engendrent donc le même potentiel de la classe (D). Par suite $A_t = B_t^\mu$ p.s. pour toute loi P^μ et A_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

C.Q.F.D.

NOYAUX (H_t^λ) ET FONCTIONS (λ,R)-SURMEDIANES

DEFINITION V.3.- <u>Pour tout $\lambda \geq 0$ et tout temps d'arrêt S de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ nous définissons le noyau H_S^λ sur F' en posant</u>

$$(6) \qquad H_S^\lambda f(x) = E^x[e^{-\lambda D_S} f \circ X_{D_S}] \qquad , x \in F' ,$$

<u>pour toute fonction f universellement mesurable positive sur F'</u>.

DEFINITION V.4.- <u>Une fonction f universellement mesurable positive définie sur F' sera dite (λ,R)-surmédiane si</u>

$$H_t^\lambda f \leq f \qquad \forall t \geq 0$$

et (λ,R)-excessive si de plus

$$H_t^\lambda f \to f \quad \text{quand} \quad t \downarrow 0 \ .$$

Une fonction (λ,R)-excessive f telle que $H_t^\lambda f \to 0$ quand $t \to +\infty$ sera appelée (λ,R)-potentiel.

Une fonction (λ,R)-surmédiane f sera dite régulière si pour toute suite croissante $\{U_n\}$ de temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t)$ de limite U on a

$$H_{U_n}^\lambda f \to H_U^\lambda f \ .$$

THEOREME V.1.- Soit ϕ le potentiel d'une fonctionnelle (λ,R)-additive presque sûrement finie (A_t) .

1) La fonction ϕ est (λ,R)-excessive ; si elle est finie c'est un (λ,R)-potentiel.

2) Si la fonction ϕ est bornée et presque borélienne pour le processus (X_{D_t}), elle est continue à droite sur les trajectoires de ce processus.

(On appelle fonction presque borélienne pour le processus (X_{D_t}) une fonction f sur F' telle que pour tout mesure P^μ il existe deux fonctions f' et f'' boréliennes sur E telles que $f' \leq f \leq f''$ sur F' et que les processus $(f' \circ X_{D_t})$ et $(f'' \circ X_{D_t})$ soient P^μ-indistinguables. Si une fonction est presque borélienne pour le processus (X_t) sa restriction à F' est évidemment presque borélienne pour le processus (X_{D_t})).

Démonstration : Soit (A_t) une fonctionnelle (λ,R)-additive p.s. finie. D'après le corollaire V.I. on a pour tout temps d'arrêt S de $(\hat{\mathcal{F}}_t)$

$$A_\infty - A_S = e^{-\lambda D_S} A_\infty \circ \theta_{D_S} \qquad \text{p.s.}$$

et en appliquant la propriété de régénération au temps D_S il vient pour toute loi μ

$$(7) \qquad E^{\mu}[A_\infty - A_S \mid \hat{\mathcal{F}}_S] = e^{-\lambda D_S} E^{X_{D_S}}[A_\infty] = e^{-\lambda D_S} \phi \circ X_{D_S} .$$

Il en résulte d'une part que

$$H_t^\lambda \phi = E^\bullet[A_\infty - A_t] \qquad t \geq 0$$

d'où le point 1) du théorème. D'autre part le processus (X_{D_t}) est continu à droite, donc indistinguable d'un processus bien-mesurable [3] ; si la fonction ϕ est presque borélienne pour le processus (X_{D_t}), le processus $(Y_t) = (e^{-\lambda D_t} \phi \circ X_{D_t})$ est lui-même bien-mesurable ; par ailleurs pour toute suite de temps d'arrêt $T_n \uparrow T$ on a $A_{T_n} \downarrow A_T$ donc $E^{\mu}[Y_{T_n}] \uparrow E^{\mu}[Y_T]$. Si la fonction ϕ est borné, le processus (Y_t) est alors continu à droite pour la loi P^{μ}, d'après un résultat de MERTENS, MEYER, RAO ([4] proposition 6). Le point 2) du théorème en résulte.

C.Q.F.D.

La proposition qui suit permettra de donner une réciproque partielle du théorème V.1.

PROPOSITION V.3.- <u>Si</u> f <u>est un</u> (λ, R)-<u>potentiel, la fonction définie sur</u> $\hat{F}$ <u>par</u>

$$\hat{f}_\lambda(r,y) = e^{-\lambda r} f(y) \quad \underline{\text{si}} \quad r < \infty$$
$$= 0 \quad \underline{\text{si}} \quad r = +\infty$$

<u>est un</u> λ-<u>potentiel</u> (au sens habituel) <u>pour le semi-groupe</u> $(\hat{P}_t)$(restreint à $\hat{F}$).

<u>Démonstration</u> : On a par définition

$$e^{-\lambda t}\hat{P}_t \hat{f}_\lambda(r,y) = e^{-\lambda t} e^{-\lambda(r-t)} f(y)\, I_{[0,+\infty[}(r-t) = \hat{f}_\lambda(r,y) \qquad \text{si } t < r$$

$$e^{-\lambda t}\hat{P}_t \hat{f}_\lambda(r,y) = e^{-\lambda t} E^y[e^{-\lambda R_{t-r}} f \circ X_{D_{t-r}}] \qquad \text{si } t \geq r$$

$$= e^{-\lambda r} H_{t-r}^\lambda f(y)$$

$$\leq e^{-\lambda r} f(y) = \hat{f}_\lambda(r,y)$$

La fonction $\hat{f}_\lambda$ est donc λ-surmédiane pour le semi-groupe $(\hat{P}_t)$.

Si $r>0$ et $t<r$ $\quad e^{-\lambda t}\hat{P}_t\hat{f}_\lambda(r,y) = \hat{f}_\lambda(r,y)$

Si $r = 0$ $\quad e^{-\lambda t}\hat{P}_t\hat{f}_\lambda(r,y) = H_t^\lambda f(y) \xrightarrow[t\downarrow 0]{} f(y) = \hat{f}(r,y)$,

car la fonction f est (λ,R)-excessive. La fonction $\hat{f}_\lambda$ est donc λ-excessive pour le semi-groupe $(\hat{P}_t)$. Enfin

si $r=+\infty$ $\quad e^{-\lambda t}\hat{P}_t\ f(r,y) = 0 \qquad \forall t\geq 0$

si $r<+\infty, t\geq r$ $\quad e^{-\lambda t}\hat{P}_t\ f(r,y) = e^{-\lambda r}\ H_{t-r}^\lambda\ f(y)\to 0$ quand $t\to+\infty$

car la fonction f est un (λ,R)-potentiel.

C.Q.F.D.

DECOMPOSITION DES $(\lambda\ ,R)$-POTENTIELS

THEOREME V.2.- <u>Soit</u> ϕ <u>un</u> (λ,R)-<u>potentiel borné et soit</u> $\hat{\phi}$ <u>la fonction définie sur</u> $\hat{F}$ <u>par</u>

$$\hat{\phi}(r,y) = e^{-\lambda r}\ \phi\ (y) \qquad \underline{\text{si}}\quad r<\infty$$
$$= 0 \qquad \underline{\text{si}}\quad r=+\infty$$

<u>Si les fonctions</u> $\hat{P}_h\ \hat{\phi}$, $h\geq 0$ <u>sont continues à droite sur les trajectoires du processus</u> $(\hat{X}_t)$ (i.e. pour toute loi P^μ) <u>la fonction</u> ϕ <u>est le potentiel d'une fonctionnelle</u> (λ,R)-<u>additive prévisible unique ; cette fonctionnelle est indistinguable d'une fonctionnelle</u> λ-<u>additive</u> (*) <u>parfaite</u> (adaptée à la famille $(\mathcal{F}_t)$). <u>Elle est continue si le potentiel</u> ϕ <u>est régulier</u>.

<u>Démonstration</u> : Etablissons d'abord <u>l'unicité</u> : soit (A_t) une fonctionnelle (λ,R)-additive prévisible telle que

$$E^y[A_\infty] = \phi(y) \qquad \forall y\in F' .$$

Comme $X_{D_t}\in F'$ p.s. l'égalité (7) pour $S=t$ donne

$$E^\mu[A_\infty - A_t\,|\,\hat{\mathcal{F}}_t] = e^{-\lambda D_t}\ \phi\circ X_{D_t} \qquad \text{p.s.}$$

(*) Au sens ordinaire ([1]) .

L'unicité de (A_t) résulte alors de l'unicité, pour toute loi P^μ du processus croissant, prévisible par rapport à la famille $(\mathcal{F}^\mu_{D_t})$, qui engendre le potentiel borné $(e^{-\lambda D_t}\,\phi \circ X_{D_t})$.

Pour démontrer le théorème d'existence nous allons utiliser la fonction $\hat{\phi}$, λ-surmédiane pour le semi-groupe $(\hat{P}_t)$ d'après la proposition V.3. Nous ne travaillerons pas directement sur l'espace Ω , en décomposant la surmartingale $(e^{-\lambda t}\,\hat{\phi} \circ \hat{X}_t)$, pour des raisons exposées dans la remarque 2) qui suit la démonstration du théorème. Nous travaillerons d'abord sur la réalisation partielle

$$(W, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \xi_t, \eta_t, P^{\hat{\mu}}) \qquad (\hat{\mu} \text{ mesure sur } \hat{F})$$

du semi-groupe $(\hat{P}_t)$, construite au chapitre II à l'aide des processus $(\hat{X}^{r,x}_t)$. Les points de $\hat{F}$ étant des points de non branchement pour le semi-groupe $(\hat{P}_t)$, le processus (ξ_t) est sans point de branchement pour la réalisation précédente. Les tribus $(\mathcal{G}_t)$ sont supposées complétées de la manière habituelle à l'aide des mesures $(P^{\hat{\mu}}, \hat{\mu}$ sur $\hat{F})$.

D'après les hypothèses faites et d'après la proposition V.3 le processus $(e^{-\lambda t}\,\hat{\phi} \circ \xi_t)$ est un potentiel de la classe (D) au sens de la théorie des surmartingales ([5]) , pour toute loi $P^{\hat{\mu}}$; il est de plus continu à droite pour chaque loi $P^{\hat{\mu}}$ car la continuité à droite de $\hat{\phi}$ sur les trajectoires de $(\hat{X}_t)$ se transporte sur les trajectoires des processus $(\hat{X}^{r,x}_t)$, donc du processus (ξ_t) (pour les lois $P^{r,x}$). De la même manière les fonctions $\hat{P}_h\hat{\phi}$ sont continues à droite sur les trajectoires de (ξ_t) .Toutes les conditions permettant d'appliquer la méthode de MEYER de décomposition des λ-potentiels bornés d'un processus de Markov sont alors remplies. Pour chaque mesure $P^{\hat{\mu}}$ on écrit la décomposition de Doob, à l'aide d'un processus croissant prévisible $(B^{\hat{\mu}}_t)$, de la surmartingale $(e^{-\lambda t}\,\hat{\phi} \circ \xi_t)$ et par le procédé classique de recollement ([1] IV Theorem (3.8)) on obtient un processus croissant prévisible (B_t) adapté à la famille $(\mathcal{G}_t)$ tel que pour toute mesure $\hat{\mu}$ sur $\hat{F}$

(8) $$E^{\hat{\mu}}[B_\infty - B_t | \mathcal{G}_t] = e^{-\lambda t}\, \hat{\phi} \circ \xi_t \qquad P^{\hat{\mu}}\text{- p.s.}$$

(9) $$B_{t+s} = B_t + e^{-\lambda t}\, B_s \circ \eta_t \qquad P^{\hat{\mu}}\text{- p.s.}$$

On notera l'importance de la restriction aux points de <u>non branchement</u> pour la phase de recollement. Par le procédé de régularisation de WALSH on obtient un processus, encore noté (B_t), qui satisfait identiquement l'égalité (9).

Soit ψ l'application de Ω dans W qui à ω associe l'application $t \to \hat{X}_t(\omega)$. Comme $\hat{X}_o \in F'$ on peut appliquer la proposition II.1. ; pour toute loi μ sur E on a donc

(10) $$\psi\, P^\mu = P^{\hat{X}_o P^\mu}$$

Il résulte alors d'un lemme classique de mesurabilité ([1](5, 6) p. 27) que l'application ψ est mesurable de $(\Omega, \hat{\mathcal{F}}_t)$ dans $(W, \mathcal{G}_t)$ pour tout $t \geq 0$. Nous désignerons par $(\mathcal{H}_t)$ la famille continue à droite formée des tribus $\psi^{-1}(\mathcal{G}_t)$, $t \geq 0$. <u>Nous posons</u>

$$A_t = B_t \circ \psi \quad , \quad t \geq 0 .$$

Le processus (A_t) est adapté à la famille $(\mathcal{H}_t)$, d'après ce qui précède, et <u>prévisible</u> par rapport à cette famille (on rappelle que la tribu des ensembles prévisibles pour une famille de tribus est engendrée par les intervalles stochastiques $]S,T]$ où S et T sont des temps d'arrêt relatifs à la famille ; un argument de classe monotone donne alors le résultat). Le processus (A_t) est donc prévisible par rapport à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$.

L'égalité (8), pour $\hat{\mu} = \hat{X}_o P^\mu$, s'écrit en tenant compte de l'égalité (10)

(11) $$\begin{aligned} E^\mu[A_\infty - A_t | \mathcal{H}_t] &= e^{-\lambda t} \hat{\phi} \circ \xi_t \circ \psi \qquad P^\mu\text{ - p.s.} \\ &= e^{-\lambda t}\, \hat{\phi} \circ \hat{X}_t \\ &= e^{-\lambda D_t}\, \phi \circ X_{D_t} \quad ; \end{aligned}$$

cette dernière égalité résulte immédiatement de la définition de $\hat{\phi}$, lorsque λ est strictement positif ; pour $\lambda = 0$ on remarque que $\phi(\delta) = H_t^o\, \phi(\delta) = 0$ car ϕ

est un potentiel. La variable D_t étant un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{H}_t)$, et comme $D_{D_t} = D_t$ p.s., on a également

$$E^{\mu}[A_\infty - A_{D_t} | \mathcal{H}_{D_t}] = e^{-\lambda D_t} \phi \circ X_{D_t} \quad \text{p.s.}$$

et par différence avec (11) on obtient

$$A_{D_t} = A_t \quad \text{p.s.} \qquad \forall t \geq 0 .$$

Enfin l'égalité d'additivité parfaite de (B_t) donne compte tenu de l'identité $\eta_t \circ \psi = \psi \circ \theta_t$

$$A_{t+s} = A_t + e^{-\lambda t} A_s \circ \theta_t \qquad \forall s,t \geq 0$$

Pour terminer la démonstration du théorème, on remarque que si le potentiel ϕ est régulier la surmartingale $(e^{-\lambda D_t} \phi \circ X_{D_t})$ est régulière pour toute loi P^{μ}, donc le processus prévisible (A_t) qui engendre cette surmartingale est <u>continu</u> pour toute loi P^{μ} ([5] VII T. 37).

C.Q.F.D.

REMARQUES V.1.- 1) La méthode utilisée montre que la fonctionnelle (λ,R)-additive prévisible (A_t) qui engendre le potentiel ϕ ne <u>dépend que du processus</u> $(\hat{X}_t)$ et de la fonction ϕ.

2) Montrons pourquoi nous avons d'abord travaillé sur l'espace W, au lieu d'effectuer directement la décomposition de la surmartingale $(e^{-\lambda D_t} \phi \circ X_{D_t})$ sur Ω pour les mesures P^{μ}. Désignons par (C_t) le processus croissant prévisible par rapport à $(\hat{\mathcal{F}}_t)$, obtenu par le procédé de recollement déjà cité, et qui engendre $(e^{-\lambda D_t} \phi \circ X_{D_t})$ pour toute mesure P^{μ} (le procédé de recollement est applicable car on a supposé le système régénératif sans point de branchement). Pour le processus (C_t) on peut établir l'égalité (3) grâce à la relation

$$\theta_{D_s} P^{\mu} = P^{X_{D_s} P^{\mu}}$$

qui résulte de la propriété de régénération au temps D_s. On obtient alors une fonctionnelle (λ,R)-additive, mais <u>les lois</u> $\theta_t P^\mu$ <u>ne figurant pas nécessairement dans la famille des lois</u> P^ν, on ne peut montrer directement l'égalité de λ-additivité ordinaire.

SUPPORT d'UNE FONCTIONNELLE R-ADDITIVE

La définition qui suit est classique.

DEFINITION V.5.- <u>Soit</u> (A_t) <u>une fonctionnelle</u> (λ,R)-<u>additive. On désigne par</u> C <u>l'ensemble de ses points de croissance et par</u> S <u>la variable</u>

$$S = \inf\{(t \geq 0 : t \in C\} = \inf\{t > 0 : A_t > 0\} .$$

<u>On définit alors le support de</u> (A_t) <u>comme l'ensemble</u>

$$\text{Supp } A = \{x : P^x\{S = 0\} = 1\}$$

On notera que $C \subset M$ p.s. , $S \geq R$ p.s. et $\text{Supp } A \subset F$.

THEOREME V.3.- <u>Soit</u> (A_t) <u>une fonctionnelle</u> (λ,R)-<u>additive dont le potentiel</u> ϕ <u>est fini. Alors le support de</u> (A_t) <u>est l'ensemble des points</u> y <u>de</u> F <u>tels que</u>

$$H_U^\lambda \ \phi \ (y) < \phi(y)$$

<u>pour tout temps d'arrêt</u> U <u>de</u> $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ <u>strictement positif</u> P^y- p.s. .

(On remarquera que pour tout $y \in F$ et tout temps d'arrêt U on a $P^y\{U > 0\} = 0$ ou 1 à cause de la loi 0-1).

<u>Démonstration</u> : Pour tout temps d'arrêt U et toute loi μ on a

$$(12) \qquad E^\mu[A_\infty - A_U] = E^\mu[e^{-\lambda D_U} \phi \circ X_{D_U}]$$

à cause de l'égalité (7), vraie dès que (A_t) est p.s. finie . Comme le potentiel ϕ est supposé fini, il vient pour tout $y \in F$

$$(13) \qquad E^y[A_U] = \phi(y) - H_U^\lambda \ \phi(y)$$

Par suite si $y \in \text{Supp } A$ et si $U > 0$ P^y- p.s. , on a $A_U > 0$ P^y- p.s. et $E^y[A_U] > 0$, donc $\phi(y) > H_U^\lambda \phi(y)$ d'après l'égalité (13).

Inversement si y est un point de F tel que $H_U^\lambda \phi(y) < \phi(y)$ pour tout temps d'arrêt $U > 0$ P^y- p.s. , envisageons le temps d'arrêt S de la définition V.5 et soit U un temps d'arrêt dont le graphe passe dans l'ensemble $]0,S[$: le premier membre de (13) est alors nul ce qui implique que $U = 0$ P^y- p.s. Par suite l'ensemble bien mesurable $]0,S[$ est indistinguable de l'ensemble vide et $S = 0$ P^y- p.s. . On notera que si (A_t) est <u>continue</u>, la démonstration se simplifie puisque dans ce cas $E^y[A_S] = 0$.

C.Q.F.D.

TEMPS LOCAUX

DEFINITION V.6.- <u>Nous dirons qu'une fonctionnelle</u> R-<u>additive est un temps local du système régénératif si l'ensemble</u> C <u>de ses points de croissance est indistinguable de</u> M (on notera $C \doteq M$) .

EXEMPLE V.2.- Les processus $(\int_R^{D_t} e^{-\lambda s}\, ds)_{t \geq 0}$ sont des temps locaux, pour $\lambda \geq 0$. De même le processus (A_t) de l'exemple V.1.2) est un temps local si l'ensemble des points de croissance de (B_t) contient M p.s. .

PROPOSITION V.3.- <u>Une fonctionnelle</u> R-<u>additive</u> (A_t) <u>est un temps local si et seulement si</u> $\text{Supp } A = F$.

<u>Démonstration</u> : Utilisons les notations C et S de la définition V.5. Si (A_t) est un temps local, on a $C \doteq M$ donc $R = S$ p.s. et $\text{Supp } A = F$. Inversement si $\text{Supp } A = F$, $S = 0$ P^y- p.s. pour tout $y \in F$; donc d'après la propriété de régénération $S \circ \theta_{D_r} = 0$ p.s. sur $\{D_r < \infty\}$ pour tout rationnel $r \geq 0$. Par suite $M \mathrel{\dot{\subset}} C$, et comme on a toujours l'inclusion contraire, $M \doteq C$.

C.Q.F.D.

DEFINITION V.7.- Une fonction ϕ est dite strictement (λ,R)-surmédiane si elle est (λ,R)-surmédiane et si

$$H_U^\lambda \phi(y) < \phi(y)$$

pour tout $y \in F$ et tout temps d'arrêt $U > 0$ P^y- p.s.

EXEMPLE V.3.- Toute constante de $]0,+\infty[$ est une fonction strictement (λ,R)-surmédiane, quelque soit $\lambda > 0$.

Le théorème suivant résulte immédiatement du théorème V.3 et de la proposition V.3.

THEOREME V.4.- Pour qu'une fonctionnelle R-additive de λ-potentiel fini soit un temps local il faut et il suffit que son λ-potentiel soit une fonction strictement (λ,R)-surmédiane.

APPLICATIONS

1) Temps local d'équilibre d'ordre λ.

Pour $\lambda \in]0,\infty[$ la fonction constante $\frac{1}{\lambda}$ est un (λ,R)-potentiel borné ϕ et cette fonction est strictement (λ,R)-surmédiane. D'après la proposition V.2 et les théorèmes V.2 et V.4 (sous réserve de continuité à droite des processus $(\hat{P}_h \hat{\phi} \circ \hat{X}_t)_{t \geq 0})$ il existe alors un temps local prévisible parfait (L_t) adapté à $(\mathcal{F}_t)$ tel que

$$E^y[\int_0^\infty e^{-\lambda s}\, dL_s] = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad y \in F' ,$$

c'est-à-dire tel que

$$E^x[\int_0^\infty e^{-\lambda s}\, dL_s] = E^x[\frac{e^{-\lambda R}}{\lambda}] , \qquad x \in E . \tag{14}$$

Ce temps local sera appelé temps local d'équilibre d'ordre λ. Il est continu si et seulement si le processus (D_t) est quasi-continu à gauche. Il permet alors de définir deux "processus à la frontière" et un "processus des excursions", comme nous le verrons au chapitre suivant.

Remarque : Le temps local d'équilibre d'ordre λ n'est pas nécessairement continu, même si le processus (X_t) est un processus de Hunt et si R est le temps d'entrée dans un ensemble finement parfait, comme le montre l'exemple suivant, dû à GETOOR : pour le processus de la translation uniforme sur la droite le temps local d'équilibre de l'ensemble des extrémités droites des intervalles contigus à l'ensemble de Cantor est une fonctionnelle additive purement discontinue.

2) Balayage d'une fonctionnelle additive et formule d'AZEMA

Soit (C_t) une fonctionnelle additive adaptée à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$. Pour $\lambda \geq 0$ le processus

(15) $$C_t^\lambda = \int_R^{D_t} e^{-\lambda s}\, dC_s$$

est une fonctionnelle (λ,R)-additive (exemple V.1.2)). Si son potentiel ϕ est borné et sous réserve de continuité à droite des processus $(\hat{P}_h \hat{\phi} \circ \hat{X}_t)_{t\geq 0}$, il existe d'après le théorème V.2 une fonctionnelle additive prévisible unique (B_t) adaptée à la famille $(\mathcal{F}_t)$ et admettant ϕ comme λ-potentiel. Cette fonctionnelle (B_t) sera naturellement appelée R-balayée d'ordre λ de (C_t). Par exemple le temps local d'équilibre d'ordre $\lambda(\lambda>0)$ est la R-balayée d'ordre λ de la fonctionnelle $C_t = t$. Remarquons que si la fonctionnelle (C_t) est continue et si le processus (D_t) est quasi-continu à gauche, le potentiel ϕ est régulier, donc la balayée (B_t) est continue.

Voici maintenant une proposition qui étend une formule d'AZEMA ([6]) aux systèmes régénératifs.

PROPOSITION V.4.- Soit (C_t) une fonctionnelle additive de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ telle que $C_{D_t} = C_{D_t^-}$ $\forall t \geq 0$ et soit (B_t) la R-balayée d'ordre λ de (C_t). Pour tout processus borné (Z_t) prévisible par rapport à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ on a la formule

(16) $$E^\bullet\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, Z_t\, dB_t\right] = E^\bullet\left[\int_R^\infty e^{-\lambda t}\, Z_{G_t}\, dC_t\right]$$

où l'on a posé pour tout $t \geq 0$

(17) $$G_t = \sup\{u \leq t : u \in M\} = \inf\{u : D_u > t\} .$$

Démonstration : Pour toute loi P^μ le processus $(\int_0^t e^{-\lambda s} \, dB_s)$ est la projection prévisible du processus (C_t^λ) (défini par la formule (15)) relativement à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ et à la loi P^μ. Pour tout processus borné (Z_t) prévisible par rapport à $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ on a donc ([3])

$$E^\bullet[\int_0^\infty e^{-\lambda t} \, Z_t \, dB_s] = E^\bullet[\int_0^\infty Z_t \, dC_t^\lambda]$$
$$= E^\bullet[\int_R^\infty e^{-\lambda t} \, Z_{G_t} \, dC_t] ,$$

la deuxième égalité résultant du lemme suivant appliqué pour tout $\omega \in \Omega$ en posant

$$d(t) = D_t(\omega) \quad , \quad g(t) = G_t(\omega)$$
$$c(t) = \int_0^t e^{-\lambda s} \, dC_s(\omega)$$
$$f(t) = Z_t(\omega) .$$

LEMME V.1.- Soit d une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs positives, finies ou non, croissante et continue à droite. Posons pour $t \in \mathbb{R}_+$

$$g(t) = \inf\{s : d(s) > t\} .$$

Soit c une fonction finie croissante et continue à droite telle que $c(0) = 0$ et $c(d(t)) = c(d(t)-0)$ pour tout $t \geq 0$. On pose $c_d(t) = c(d(t))$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

Pour toute fonction f borélienne positive sur $\mathbb{R}_+$ on a alors

(18) $$\int_0^\infty f(t) d \, c_d(t) = \int_{d(0)}^{d(\infty)} f(g(t)) dc(t) .$$

Démonstration : Comme pour la démonstration d'un résultat classique ([5] T. 12 chap. VII) qui correspond au cas $c(t) = t$, il suffit de traiter le cas $f = I_{[0,s]}$.

Le premier membre de (18) vaut alors $c_d(s) - c_d(0)$. D'autre part $f(g(t)) = 1$ si $t < d(s)$ et $f(g(t)) = 0$ si $t > d(s)$, par définition de $g(t)$.

Comme $c(d(s)) = c(d(s)-0)$, le second membre de (18) vaut $c(d(s))-c(d(0))$ et l'égalité (18) est vérifiée.

REMARQUE.- Si on pose

$$\Gamma_t = G_{t-}$$

on a aussi

$$E^{\bullet}[\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Z_t dB_t] = E^{\bullet}[\int_R^{\infty} e^{-\lambda t} Z_{\Gamma_t} dC_t] \quad . \tag{19}$$

En effet on ne peut avoir $G_t(\omega) \neq \Gamma_t(\omega)$ que pour des instants t de la forme $D_s(\omega)$ et la fonction $s \to C_s(\omega)$ est continu en ces instants.

COROLLAIRE V.2.- Supposons le processus (X_t) pourvu de limites à gauche et désignons par (L_t) le temps local d'équilibre d'ordre $\lambda > 0$. On a les formules (on pose $\Gamma_t = G_{t-}$) .

$$E^{\bullet}[\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} f \circ X_{s-} \, dL_s] = E^{\bullet}[\int_R^{\infty} e^{-\lambda s} f \circ X_{\Gamma_s -} \, ds]$$

$$E^{\bullet}[\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} g \circ i_{s-} \, dL_s] = E^{\bullet}[\int_R^{\infty} e^{-\lambda s} g \circ [X_{\Gamma_s -}] \, ds]$$

pour toute fonction f borélienne bornée définie sur E et toute fonction g borélienne bornée définie sur Ω .

Démonstration : On applique la formule (19) aux processus prévisibles par rapport à $(\hat{\mathcal{F}}_t)$

$$Z_t = f \circ X_{t-} \qquad \text{et} \qquad Z_t = g \circ i_{t-}$$

et on remarque que $i_{\Gamma_s -} = [X_{\Gamma_s -}]$ p.s. car l'ensemble M est p.s. sans point isolé.

C.Q.F.D.

Le chapitre VII sera consacré à des résultats de décomposition et d'approximation de la R-balayée d'une fonctionnelle additive.

EXTENSIONS

1) Le théorème V.2 peut être étendu à des (λ,R)-potentiels ϕ naturels, c'est-à-dire tels que pour toute suite $U_n \uparrow +\infty$ de temps d'arrêt de $(\mathfrak{F}_t)$

$$H^{\lambda}_{U_n}\ \phi \to 0$$

2) Si le système régénératif $(\Omega,\ldots;R)$ ne satisfait pas à l'hypothèse

$$X_{D_t} \in F' \quad \forall t \quad \text{p.s.}$$

certains des résultats précédents subsistent moyennant quelques modifications. Tout d'abord les noyaux (H^{λ}_t) , les fonctions (λ,R)-surmédianes et les (λ,R)-potentiels doivent être définis sur tout E . La proposition V 3 reste vraie et le théorème V.2 **prend alors la forme suivante :**

THEOREME V.5.- Soit ϕ un (λ,R)-potentiel satisfaisant à des conditions analogues à celles du théorème V.2. Il existe alors un processus croissant prévisible par rapport à $(\hat{\mathfrak{F}}_t)$ unique (A_t) tel que pour tout temps d'arrêt S de $(\hat{\mathfrak{F}}_t)$

$$(20) \qquad A_{D_S+t} = A_{D_S} + e^{-\lambda D_S}\, A_t \circ \theta_{D_S} \quad \text{p.s.}$$

et tel que

$$E^{\bullet}[A_\infty] = \phi \quad \text{sur } E$$

(On notera que cette fois le processus (A_t) ne vérifie pas nécessairement $A_{D_s} = A_s$ p.s. $\forall s \geq 0$ et n'est pas nécessairement adapté à $(\mathfrak{F}_t)$).

Démonstration : On raisonne directement sur l'espace Ω : soit (A_t) le processus croissant prévisible par rapport à $(\hat{\mathfrak{F}}_t)$ engendrant pour toute loi P^{μ} le potentiel de la classe (D) $(e^{-\lambda D_t}\ \phi \circ X_{D_t})$ (cf. remarque V.1.2)). Pour établir l'égalité (20) il suffit de montrer que pour toute loi μ , tout temps d'arrêt $T = D_S$ et toute variable $\mathfrak{F}$-mesurable bornée et positive Z on a

$$(21) \qquad E^{\mu}[(A_{T+t} - A_T)Z] = E^{\mu}[e^{-\lambda T}(A_t \circ \theta_T)Z] ,$$

et pour cela nous allons, comme d'habitude, utiliser les laplaciens approchés

$$A_t^h = \int_0^t e^{-\lambda s} \frac{\hat{\phi} - e^{-\lambda h} \hat{P}_h \hat{\phi}}{h} \circ \hat{X}_s \, ds \quad ,$$

où $\hat{\phi}(r,x) = e^{-\lambda r} \phi(x)$ pour $r<\infty$ et 0 pour $r=+\infty$. La fonction $\hat{\phi}$ étant λ-surmédiane pour le semi-groupe $(\hat{P}_t)$, le processus $(A_t^h)_{t\geq 0}$ est croissant ; de plus on a les propriétés suivantes :

(22) $$A_{s+t}^h = A_s^h + e^{-\lambda s} A_t^h \circ \theta_s \qquad \forall s,t \geq 0$$

(23) $$E^x[A_t^h] \leq \|\phi\|_\infty \qquad \forall t \geq 0$$

(24) $$\lim_{h\to 0} E^\mu[A_U^h \, Z] = E^\mu[A_U \, Z] \text{ pour tout temps d'arrêt } U \text{ de } (\hat{\mathcal{F}}_t) .$$

(L'égalité (24) résulte d'un théorème classique de MEYER ([5] VII T.29) grâce à l'hypothèse de continuité à droite des processus $(\hat{P}_h \hat{\phi} \circ \hat{X}_t)_{t\geq 0}$; l'inégalité (23) résulte de la relation

$$E^x[A_\infty^h] = \frac{1}{h} E^x[\int_0^h e^{-\lambda s} \hat{\phi} \circ \hat{X}_s \, ds]) .$$

Soit Z' une variable $\mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}_+} \otimes \mathcal{F}$-mesurable bornée et positive telle que

$$E^\mu[Z|(T,\theta_T)^{-1}(\mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}_+} \otimes \mathcal{F})] = Z'(T,\theta_T) \quad \text{p.s.}$$

On a alors

$$E^\mu[e^{-\lambda T} A_t^h \circ \theta_T \, Z] = E^\mu[e^{-\lambda T} A_t^h \circ \theta_T \, Z'(T,\theta_T)]$$

(25) $$= E^\mu[e^{-\lambda T} E^{X_T}[A_t^h(.)Z'(T,.)]]$$

à cause de la propriété de régénération au temps T, prise sous une forme généralisée à l'espace-temps. De la même manière on a

(26) $$E^\mu[e^{-\lambda T} A_t \circ \theta_T \, Z] = E^\mu[e^{-\lambda T} E^{X_T}[A_t(.)Z'(T,.)]]$$

On peut supposer que $Z' \leq \|Z\|_\infty$ partout ; on a donc pour tout $x \in E$ et $u \geq 0$

$$E^x[A_t^h(.)Z'(u,.)] \leq \|\phi\|_\infty \|Z\|_\infty$$

$$\lim_{h \to 0} E^x[A_t^h(.)Z'(u,.)] = E^x[A_t(.)Z'(u,.)]$$

Il résulte alors des égalités (25) et (26) et du théorème de Lebesgue que

$$\lim_{h \to 0} \; E^\mu[e^{-\lambda T} \; A_t^h \circ \theta_T \; Z] = E^\mu[e^{-\lambda T} \; A_t \circ \theta_T \; Z] \; .$$

D'autre part,

$$\lim_{h \to 0} E^\mu[A_{T+t}^h - A_T^h)Z\,] = E^\mu[(A_{T+t} - A_T)Z]$$

à cause de (24), donc l'égalité (21) est établie.

C.Q.F.D.

REFERENCES

[1] R.M. BLUMENTHAL and R.K. GETOOR
Markov Process and potential theory.
Academic Press 1968 .

[2] J.B. WALSH — The perfection of multiplicative functionnals
Séminaire de probabilités VI . Lectures Notes in Math. 258
Springer Verlag 1972

[3] C. DELLACHERIE — Capacités et processus stochastiques.
Springer 1972

[4] P.A. MEYER — Le retournement du temps d'après Chung et Walsh
Séminaire de Probabilités V . Lecture Notes in Math. 191
Springer Verlag 1971

[5] P.A. MEYER — Probabilités et Potentiels.
Hermann 1966.

[6] J. AZEMA — Quelques applications de la théorie générale des processus I.
Invent. Math., 18, p. 293-336.

CHAPITRE VI

DECOMPOSITION ET APPROXIMATION DE LA R-BALAYEE D'UNE FONCTIONNELLE ADDITIVE

Nous allons donner des résultats de décomposition et d'approximation de la R-balayée d'ordre λ d'une fonctionnelle additive (cf. Chapitre V, Application 2)) à l'aide de processus $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-mesurables liés à R et au processus des incursions, dont nous utiliserons un système de Lévy. Les **résultats** de décomposition seront raffinés dans le cadre des processus de Markov (décomposition de la résolvante, chapitre VIII) et ceux d'approximation seront précisés dans le cadre des ensembles régénératifs et conduiront à une généralisation de résultats de R.T. SMYTHE [1] pour une chaîne de Markov (**chapitre X**).

NOTATIONS ET HYPOTHESES

Nous supposons que R est le temps d'entrée dans un fermé F et que les hypothèses (HR) sont vérifiées :

$P^y(R=0) = 1$ pour tout $y \in F$

$D_{T_n} \uparrow D_T$ p.s. pour toute **suite** $T_n \uparrow T$ de temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t)$.

Nous notons

- M le fermé aléatoire $\overline{\bigcup_{t\geq 0} [D_t]}$,

- G (resp. D) l'ensemble des extrémités gauches (resp. droites) des intervalles contigus à M ,

- M_g (resp. M_d) le fermé gauche minimal (resp. fermé droit minimal) d'adhérence M .

L'ensemble M étant p.s. <u>sans point isolé</u> à cause de la première hypothèse (HR), l'ensemble M_g est indistinguable de $M\setminus(D\cup\{0\})$ et M_d est indistinguable de $M\setminus G$.

Soit (C_t) une fonctionnelle additive adaptée à la famille $(\mathcal{F}^*_{D_t})$ et de λ-potentiel <u>borné</u> $(\lambda \geq 0)$; nous supposons que cette fonctionnelle admet une R-balayée d'ordre λ (B_t) : (B_t) est une fonctionnelle additive prévisible par rapport à la famille $(\mathcal{F}_t)$ et telle que

(1) $$E^\bullet[\int_0^\infty e^{-\lambda s}\, dB_s] = E^\bullet[\int_R^\infty e^{-\lambda s}\, dC_s]$$

Nous poserons (*)

$$g = \int_0^R e^{-\lambda s}\, dC_s \quad ;$$

cette fonction g est universellement mesurable sur Ω, c'est-à-dire $\mathcal{F}^*$-mesurable.

PROPOSITION VI .1.- <u>Pour tout temps d'arrêt</u> T <u>de la famille</u> $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ <u>on a</u>

(2) $$E^\bullet[B_T] = E^\bullet[\int_0^T I_{M_g}(s)\, dC_s] + E^\bullet[\sum_{\substack{0<s\leq T\\ s\in G}} g\circ i_s]$$

<u>En particulier, pour</u> $\lambda>0$ <u>et</u> $C_s = s$, <u>on a la décomposition suivante pour le temps local d'équilibre d'ordre</u> λ (L_t) :

(3) $$E^\bullet[L_T] = E^\bullet[\int_0^T I_F\circ X_s\, ds] + E^\bullet[\sum_{\substack{0<s\leq T\\ s\in G}} (\frac{1-e^{-\lambda R_s}}{\lambda})]$$

<u>Démonstration</u> : La formule

$$E^\bullet[\int_S^\infty e^{-\lambda s}\, dB_s] = E^\bullet[\int_{D_S}^\infty e^{-\lambda s}\, dC_s]$$

vraie pour tout temps d'arrêt S de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ montre que pour tout temps

---

(*) $\int_a^b$ signifie $\int_{]a,b]}$ comme d'habitude.

d'arrêt T de $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ et tout intervalle $]a,b]$ de $\mathbb{R}_+$ on a

$$E^{\bullet}[\int_0^T e^{-\lambda s} I_{]a,b]}(s)\, dB_s] = E^{\bullet}[\int_{a\wedge T}^{b\wedge T} e^{-\lambda s}\, dB_s]$$

$$= E^{\bullet}[\int_{D_{a\wedge T}}^{D_{b\wedge T}} e^{-\lambda s}\, dC_s]$$

$$= E^{\bullet}[\int_0^T e^{-\lambda s} I_{]a,b]}(s)\, I_{M_g}(s)\, dC_s]$$

$$+ E^{\bullet}[\sum_{\substack{s\in]a,b]\cap G\\ 0<s\leq T}} e^{-\lambda s}\, g\circ i_s]$$

Pour la fonction $\varphi = I_{]a,b]}$, nous avons donc obtenu la formule

$$E^{\bullet}[\int_0^T e^{-\lambda s} \varphi(s) dB_s] = E^{\bullet}[\int_0^T e^{-\lambda s} \varphi(s)\, I_{M_g}(s) dC_s]$$

$$+ E^{\bullet}[\sum_{\substack{0<s\leq T\\ s\in G}} e^{-\lambda s} \varphi(s)\, g\circ i_s]$$

Cette formule s'étend aux indicatrices de boréliens de $\mathbb{R}_+$ par un raisonnement de classes monotones, puis aux fonctions boréliennes positives quelconques. En particulier pour $\varphi(s) = e^{\lambda s}$ on obtient la formule (2).

Si la fonctionnelle (C_s) est continue on peut remplacer $I_{M_g}(s)$ par $I_F \circ X_s$ dans la formule (2) ; en particulier pour $C_s = s$ on obtient la formule (3).

C.Q.F.D.

SYSTEME DE LEVY DU PROCESSUS (i_t)

Nous supposons désormais que le processus (X_t) est quasi-continu à gauche, ce qui implique la quasi-continuité à gauche du processus (i_t) d'après le théorème IV.2 . Nous supposons également que (N,H) est un système de Lévy pour le processus (i_t), dans le sens précis suivant (*)

- N est un noyau sur $(\Omega,\mathcal{F}^*)$ tel que $N(w,\{w\}) = 0$ pour tout $w \in \Omega$
- (H_t) est une fonctionnelle additive continue de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ (on peut supposer que (H_t) est R-additive, et adaptée à $(\mathcal{F}_t)$ d'après la proposition V.2).
- pour tout couple (f,g) de fonctions universellement mesurables positives sur Ω , tout $\alpha \geq 0$ et toute loi μ on a

$$(4)\qquad E^{\mu}[\sum_{\substack{s>0\\ i_{s-}\neq i_s}} e^{-\alpha s} f\circ i_{s-}\; g\circ i_s] = E^{\mu}[\int_0^{\infty} e^{-\alpha s} f\circ i_s\; Ng\circ i_s\; dH_s] \,.$$

THEOREME VI .1.- Pour toute fonction f universellement mesurable positive sur E et toute fonction g universellement mesurable positive sur Ω on a pour tout $\alpha \geq 0$

$$(5)\qquad E^{\bullet}[\sum_{\substack{s>0\\ s\in G}} e^{-\alpha s} f\circ X_{s-}\; g\circ i_s] = E^{\bullet}[\int_0^{\infty} e^{-\alpha s} f\circ X_s\; Sg\circ X_s\; dH_s]$$

où S est le noyau de $(E,\mathcal{E}^*)$ dans $(\Omega,\mathcal{F}^*)$ défini par

$$S(x,g) = N([x], gI_{\{R>0\}})$$

Démonstration : En dehors d'un ensemble négligeable de trajectoires ω , l'application $t \to i_t(\omega)$ admet des discontinuités exactement

---

(*) l'existence d'un tel système a été établie récemment pour tout processus de Hunt sans hypothèse (L) par A. BENVENISTE [2] . Voir aussi A.BENVENISTE et J.JACOD [4].

aux instants $t>0$ appartenant à l'ensemble $M_g \cap M_d(\omega)$: on a alors $i_{t-}(\omega) = [X_{t-}(\omega)]$, $i_t(\omega) = [X_t(\omega)]$, $R \circ i_{t-}(\omega) = R \circ i_t(\omega) = 0$

et aux instants $t>0$ appartenant à l'ensemble $G(\omega)$: on a alors $i_{t-}(\omega) = [X_{t-}(\omega)]$, $R \circ i_{t-}(\omega) = 0$, $R \circ i_t(\omega) > 0$. Le membre de gauche de (5) s'écrit donc

$$E^{\bullet}[\sum_{\substack{s>0 \\ i_{s-} \neq i_s}} e^{-\alpha s} f \circ X_o \circ i_{s-} \, g I_{\{R>0\}} \circ i_s]$$

et en appliquant la formule (4) **au couple** $(f \circ X_o, \, g\, I_{\{R>0\}})$ on obtient la formule (5).

C.Q.F.D.

Revenons à la R-balayée (B_t). On a le théorème de décomposition suivant.

THEOREME VI .2.- <u>Si la fonctionnelle</u> (C_t) <u>est continue, la R-balayée d'ordre</u> λ (B_t) <u>est continue et indistinguable du processus</u>

$$B'_t = \int_0^t I_F \circ X_s \, dC_s + \int_0^t S\, g \circ X_s \, dH_s \, ,$$

<u>où</u> g <u>désigne la fonction</u> $\int_0^R e^{-\lambda u} \, dC_u$.

<u>Démonstration</u> : Pour tout $x \in E$ on a

$$\begin{aligned}\phi(x) = E^x[\int_0^\infty e^{-\lambda s} \, dB_s] &= E^x[\int_R^\infty e^{-\lambda s} \, dC_s] \\ &= E^x[\int_0^\infty e^{-\lambda s} \, I_F \circ X_s \, dC_s] \\ &+ E^x[\sum_{\substack{s>0 \\ s \in G}} \int_s^{D_s} e^{-\lambda u} \, dC_u] \, .\end{aligned}$$

Le dernier terme est égal à

$$E^x[\sum_{\substack{s>0 \\ s\in G}} e^{-\lambda s} \, g \circ i_s] = E^x[\int_0^\infty e^{-\lambda s} \, S g \circ X_s dH_s]$$

à cause du théorème VI .1. Par suite

$$\phi(x) = E^x[\int_0^\infty e^{-\lambda s} \, dB_s] = E^x[\int_0^\infty e^{-\lambda s} \, dB'_s] \, ,$$

et l'unicité de la décomposition de Doob de la surmartingale $(e^{-\lambda D_t} \phi \circ X_{D_t})$, relativement à la famille $(\mathcal{F}_{D_t})$ et à la loi P^μ, montre alors que les fonctionnelles additives (B_t) et (B'_t) prévisibles et adaptées à la famille $(\mathcal{F}_{D_t})$, sont P^μ-indistinguables. La continuité de (B_t) résulte de celle de (B'_t) (ou directement de celle de (C_t) et de la quasi-continuité à gauche de (D_t)).

C.Q.F.D.

APPROXIMATION DE (B_t)

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite croissant vers $\{R>0\}$ de parties boréliennes de Ω (i.e. $A_n \in \mathcal{F}^o$, $\forall n \geq 1$). On pose pour tout $n \geq 1$

$$G_1^n = G^n = \inf\{t>0 : i_t \in A_n\}$$

$$D_1^n = D^n = D_{G^n}$$

et par récurrence on définit les variables $(G_k^n)_{k\geq 1}$ de la manière suivante :

$$G_{k+1}^n = D_k^n + G^n \circ \theta_{D_k^n} \tag{6}$$

$$D_{k+1}^n = D_{G_{k+1}^n} \tag{7}$$

Les variables (G_k^n) sont des temps d'arrêt de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$, grâce à la continuité à droite du processus (i_t), et les variables D_k^n sont des temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{F}_t)$ d'après le lemme I.1.

Nous supposerons que les <u>variables</u> (G_k^n) <u>passent dans l'ensemble</u> G <u>et que</u>

$$G_k^n \nearrow +\infty \text{ lorsque } k \uparrow +\infty,$$

<u>pour tout</u> $n \geq 1$ (sans cette hypothèse, il faudrait effectuer une récurrence transfinie).

EXEMPLE VI .1.- Si $A_n = \{R \geq \frac{1}{n}\}$ les variables (G_k^n) correspondantes vérifient les conditions précédentes.

Pour $n \geq 1$ définissons le processus croissant K^n en posant

(8) $$K_t^n = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda G_k^n} g \circ i_{G_k^n} I_{\{0 < G_k^n \leq t\}}$$

On remarquera que la condition $G_k^n > 0$ est vérifiée p.s. pour $k \geq 2$; en effet G_k^n passant dans G et M étant p.s. parfait, on a $G_k^n > D_{k-1}^n$ p.s. pour $k \geq 2$. On notera également que $G^n > 0$ implique $G^n > R$ p.s.

THEOREME VI .3.- <u>Supposons la fonctionnelle</u> (C_t) <u>continue. Pour tout</u> $n \geq 1$ <u>il existe une fonctionnelle</u> R-<u>additive et continue</u> J^n <u>admettant pour</u> λ-<u>potentiel</u> $E^{\bullet}[K_\infty^n]$. <u>Pour toute loi</u> P^μ <u>on a</u>

$$\int_0^t e^{-\lambda s} I_F \circ X_s \, dC_s + \int_0^t e^{-\lambda s} dJ_s^n \xrightarrow{\mathbb{L}^2(P^\mu)} \int_0^t e^{-\lambda s} dB_s \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Le processus K^n est continu à droite, et adapté à la famille $(\hat{\mathfrak{F}}_t)$, car les variables G_k^n sont des temps d'arrêt de $(\hat{\mathfrak{F}}_t)$. Montrons que K^n est une <u>fonctionnelle</u> (λ, R)-<u>additive</u>, c'est-à-dire que pour tous $s, t \geq 0$ on a

(9) $$K_{D_s}^n = K_s^n \qquad \text{p.s.}$$

(10) $$K_{D_s + t}^n = K_{D_s}^n + e^{-\lambda D_s} K_t^n \circ \theta_{D_s} \qquad \text{p.s.}$$

L'égalité (9) résulte de la définition (8). Pour établir (10) désignons par k l'entier tel que (*) ou de manière équivalente telle que

$$G_k^n < D_s < G_{k+1}^n \qquad\qquad D_k^n \leq D_s < G_{k+1}^n \ .$$

Le temps d'arrêt G^n étant terminal on a

$$\begin{aligned} G_{k+1}^n &= D_k^n + G^n \circ \theta_{D_k^n} \\ &= D_s + G^n \circ \theta_{D_s} \end{aligned}$$

(*) on raisonne sur l'ensemble $\{D_s < \infty\}$; sur l'ensemble $\{D_s = \infty\}$ l'égalité (10) est triviale, car $K_t^n([\delta]) = 0$.

et de l'identité

$$D_{D_s + u} = D_s + D_u \circ \theta_{D_s}$$

il résulte que

$$D^n_{k+1} = D_{G^n_{k+1}} = D_{D_s + G^n \circ \theta_{D_s}}$$

$$= D_s + D_{G^n} \circ \theta_{D_s}$$

$$= D_s + D^n \circ \theta_{D_s}$$

On démontre alors par récurrence que pour tout $\ell \geq 1$

$$G^n_{k+\ell} = D_s + G^n_\ell \circ \theta_{D_s}$$

$$D^n_{k+\ell} = D_s + D^n_\ell \circ \theta_{D_s}$$

et l'égalité (10) en résulte.

Le processus (K^n_t) est de plus <u>quasi-continu à gauche</u> relativement à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$, puisque ses temps de saut G^n_k passent dans G et que le processus (D_t) est quasi-continu à gauche relativement à $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ (Théorème II.2). Le potentiel de la fonctionnelle (λ,R)-additive K^n est donc un (λ,R)-potentiel régulier et borné à cause de l'inégalité

$$E^\cdot[K^n_\infty] \leq E^\cdot[\int_R^\infty e^{-\lambda s} \, dC_s] .$$

Sous les réserves habituelles on peut appliquer le théorème V.2. Il existe alors une fonctionnelle R-additive continue J^n dont le potentiel est $E^\cdot[K^n_\infty]$.

Il reste à établir la <u>convergence</u> indiquée dans l'énoncé du théorème. Soit K le processus défini par

$$K_o = 0$$

$$K_t = \sum_{\substack{0<s\leq t \\ s \in G}} e^{-\lambda s} \, g \circ i_s \qquad t>0 .$$

Ce processus est adapté à $(\hat{\mathfrak{F}}_t)$ car $K_t = \lim\limits_n K_t^n$. Pour $u \leq v$ on a

$$E^{\bullet}[K_v - K_u] \leq E^{\bullet}\left[\int_{D_u}^{D_v} e^{-\lambda s}\, dC_s\right] < \infty$$

donc $\lim\limits_{v \downarrow u} E^{\bullet}[K_v - K_u] = 0$ à cause de la continuité à droite de (D_t). L'application $t \to E^{\bullet}[K_t]$ est donc continue à droite et il existe un potentiel continu à droite (Y_t) relatif à la famille $(\hat{\mathfrak{F}}_t^{\mu})$ et à la loi P^{μ} tel que

$$Y_t = E^{\mu}[K_\infty - K_t \,|\, \hat{\mathfrak{F}}_t^{\mu}]$$

La relation $K_\infty - K_t = e^{-\lambda D_t} K_\infty \circ \theta_{D_t}$ p.s. montre que l'on a aussi

$$Y_t = e^{-\lambda D_t} E^{X_{D_t}}[K_\infty]$$

et que le potentiel (Y_t) est <u>borné</u> par la constante A qui majore le λ-potentiel de (C_t). Le potentiel (Y_t) est également engendré par le processus croissant continu

$$B_t^* = \int_0^t e^{-\lambda s}\, dB_s - \int_0^t e^{-\lambda s} I_F \circ X_s\, dC_s.$$

Par ailleurs soit (Y_t^n) le potentiel continu à droite engendré par le processus (K_t^n) :

$$Y_t^n = E^{\mu}[K_\infty^n - K_t^n \,|\, \hat{\mathfrak{F}}_t^{\mu}]$$

La convergence $K_\infty^n - K_t^n \uparrow K_\infty - K_t$ montre que

$$Y_t^n \uparrow Y_t \qquad P^{\mu}.\text{p.s.}$$

Il résulte alors de la continuité à droite des processus (Y_t^n) et de MEYER ([3] T. 16 chap .VI) que l'on a P^{μ}.p.s.

$$Y_t^1 \leq Y_t^2 \leq \ldots \leq Y_t^n \leq \ldots \leq \sup_n Y_t^n = Y_t \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+$$

Nous sommes donc en mesure d'appliquer le théorème T.36 de ([3] chap.VII);

il vient

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}\, d\, J_s^n \xrightarrow{\mathbb{L}^2(P^\mu)} B^*_\infty$$

En substituant à la loi μ la loi $X_{D_t} P^\mu$ (ou à P^μ la loi $\theta_{D_t} P^\mu$) on obtient également la convergence

$$\int_{D_t}^\infty e^{-\lambda s}\, dJ_s^n \xrightarrow{\mathbb{L}^2(P^\mu)} B^*_\infty - B^*_{D_t}$$

et par différence

$$\int_0^{D_t} e^{-\lambda s}\, dJ_s^n \xrightarrow{\mathbb{L}^2(P^\mu)} B^*_{D_t} = \int_0^{D_t} e^{-\lambda s}\, dB_s - \int_0^{D_t} e^{-\lambda s}\, I_F \circ X_s dC_s$$

Il reste à remarquer qu'on ne change pas les intégrales en remplaçant D_t par t.

C.Q.F.D.

Remarque : La fonctionnelle $(\int_0^t e^{-\lambda s}\, I_F \circ X_s\, dC_s + \int_0^t e^{-\lambda s}\, dJ_s^n)$, qu'on peut appeler R-balayée approchée à l'ordre n, est indistinguable d'une fonctionnelle additive continue adaptée à $(\mathcal{F}_t)$, d'après les résultats du chapitre V. De plus son support est contenu dans F.

REFERENCES

[1] R.T. SMYTHE — Approximation of local times at regular boundary points of a Markov chain. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 20 (1971), pp. 134-142.

[2] A. BENVENISTE — Application de deux théorèmes de G.Mokobodzki à l'étude du noyau de Lévy d'un processus de Hunt. Thèse de 3^e cycle, Paris VI (1972). Séminaire de Prob. VI, Université de Strasbourg (L.N.n° 321) p. 1-24.

[3] P.A. MEYER — Probabilités et Potentiels. Hermann, 1966.

[4] A. BENVENISTE et J. JACOD Systèmes de Lévy des processus de Markov. Inventiones Math. 21 (1973) p. 183-198.

CHAPITRE VII

PROCESSUS DES EXCURSIONS ASSOCIE A UN TEMPS LOCAL CONTINU

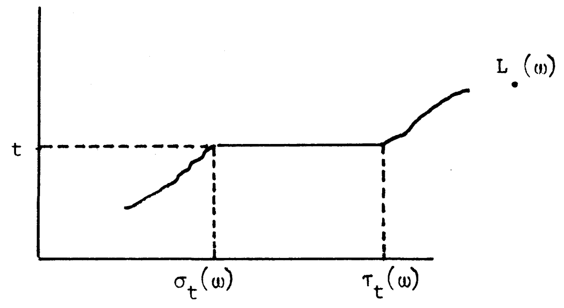
Nous supposons que le système régénératif $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^\mu; R)$ admet un temps local continu (L_t), c'est-à-dire une fonctionnelle R-additive continue dont l'ensemble des points de croissance est indistinguable de l'ensemble $M = \overline{\bigcup_{t\geq 0} [D_t]}$.
Ceci implique que l'ensemble M est p.s. sans point isolé. On notera que le processus (L_t) est adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)$ d'après la proposition V.1 .

Nous supposons également que R est un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{F}_t^*)$ et par commodité nous supposerons même que R est un bon temps d'arrêt (chapitre IV) de sorte que l'on a $R_t = R \circ i_t$, $X_{D_t} = X_R \circ i_t$ pour tout t . Le cas général se traiterait par adjonction d'une composante temporelle au processus des excursions que nous allons définir.

DEFINITION VII.1.-Au temps local (L_t) nous associons les processus (σ_t) et (τ_t) définis par

$$\sigma_t = \inf\{s : L_s \geq t\} \quad (= +\infty \text{ si } \{\ \} = \emptyset)$$

$$\tau_t = \inf\{s : L_s > t\} \quad (= +\infty \text{ si } \{\ \} = \emptyset)$$



Sur le dessin précédent nous avons indiqué les valeurs $\sigma_t(\omega)$, $\tau_t(\omega)$ correspondant à une valeur palier t de l'application $s \to L_s(\omega)$. Si $\sigma_t(\omega) < \infty$ on a $L_s(\omega) = t$

pour tout s fini de l'intervalle $[\sigma_t(\omega),\tau_t(\omega)]$. On notera que pour $t>0$ on a $\sigma_t=\tau_{t-}$.

PROPOSITION VII.1.- <u>Les applications</u> $t\to\sigma_t$, $t\to\tau_t$ <u>sont respectivement continues à gauche et continue à droite ; les variables</u> σ_t, τ_t, $t\geq 0$ <u>sont des temps d'arrêt de la famille</u> $(\mathcal{F}_t)$. <u>De plus on a les relations</u>

$$(1)\quad \sigma_{s+t} = \tau_s + \sigma_t \circ \theta_{\tau_s} \quad \text{p.s.} \qquad s\geq 0,\ t>0$$

$$(2)\quad \tau_{s+t} = \tau_s + \tau_t \circ \theta_{\tau_s} \quad \text{p.s.} \qquad s,t\geq 0$$

<u>Démonstration</u> : La continuité à droite du processus (τ_t) est classique et la continuité à gauche du processus (σ_t) résulte de ce que $\sigma_t=\tau_{t-}$. Les variables σ_t et τ_t sont des temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{F}_s)$ puisque ce sont les temps d'entrée dans $[t,\infty[$ et $]t,\infty[$ respectivement du processus (L_s), qui est progressivement mesurable par rapport à la famille $(\mathcal{F}_s)$. Les relations (1) et (2) résultent facilement de la continuité et de la propriété d'additivité de (L_t) au temps $\tau_s=D_{\sigma_s}$ (cf. [1] V proposition (2.3)).

DEFINITION VII.2.- <u>Le processus</u> $(e_t=i_{\sigma_t})_{t>0}$ <u>est appelé processus des excursions</u> (*) <u>associé au temps local</u> (L_t).

En explicitant cette définition il vient

$$e_t(\omega) = a_R(\theta_{\sigma_t}(\omega))$$

$$X_s(e_t(\omega)) = X_{(\sigma_t+s)\wedge\tau_t}(\omega) \qquad \forall s\geq 0.$$

On remarquera que $e_t(\omega)$ est la trajectoire $\theta_{\sigma_t}(\omega)$ arrêtée à R et non tuée à R selon l'habitude ([2] ou [3]), de sorte que $e_t(\omega)$ donne également la valeur $X_{\tau_t}(\omega)=X_R(e_t(\omega))$.

(*) L'incursion i_o n'est pas considérée comme une excursion.

Le processus (e_t) prend ses valeurs dans l'ensemble Ω et est adapté à la famille $(\tilde{\mathfrak{F}}_t) = (\mathfrak{F}_t)$. Il admet des limites à droite en tout point, mais il n'est pas continu à droite. Précisément, on a

$$e_{t+} = [X_{\tau_t}] \quad \forall\, t > 0 ,$$

de sorte que le processus (e_{t+}) s'identifie au processus change de temps $(\tilde{X}_t) = (X_{\tau_t})$. Ce dernier processus est continu à droite et fortement markovien d'après un raisonnement classique qui utilise la relation (2).

Si le processus (X_t) admet des limites à gauche, le processus (e_t) est également pourvu de limites à gauche et l'on a

$$e_{t-} = [X_{\sigma_t -}] \quad \forall\, t > 0$$

de sorte que le processus $(e_{t-})_{t>0}$ s'identifie au processus $(X_{\sigma_t -})_{t>0}$. Lorsque $R = T_F$, où F est un ensemble fermé (et finement parfait), les processus $(X_{\tau_t})_{t\geq 0}$ et $(X_{\sigma_t -})_{t>0}$ sont deux processus "à la frontière" : le premier correspond à l'entrée dans la frontière F et le second à la sortie de la frontière F .

CARACTERE MARKOVIEN DU PROCESSUS (e_t)

Remarquons d'abord que l'on peut avoir $e_t = [\partial]$ p.s. pour tout t fixé ; par exemple si $R = T_{\{x_o\}}$, avec x_o régulier, (τ_t) est un subordinateur et $\tau_t = \sigma_t$ p.s. pour tout t fixé > 0 . C'est la raison pour laquelle nous allons envisager les transitions du processus (e_t) dans des intervalles de temps aléatoires. On pourrait aussi utiliser le point de vue des processus ponctuels comme dans ITO [2] .

DEFINITION VII.3. - Soit S un temps d'arrêt partout strictement positif de la famille $(\tilde{\mathfrak{F}}_t) = (\mathfrak{F}_{\tau_t})$. Pour tout $w \in \Omega$ et toute fonction universellement mesurable positive fonction universellement mesurable positive f sur Ω on pose

$$\Pi_S(w,f) = E^{X_R(w)}[f(e_S)] \ .$$

En particulier, $\Pi_S(w,f) = f([\partial])$ si $R(w) = +\infty$. Nous définissons ainsi des noyaux sur $(\Omega,\mathfrak{F}^*)$; le raisonnement est le même que pour les noyaux (π_t) relatifs à (i_t) .

THEOREME VII.1. - <u>Soient</u> S <u>et</u> T <u>deux temps d'arrêt strictement positifs de la famille</u> $(\mathfrak{F}_t)$. <u>Pour toute loi initiale</u> μ <u>et toute fonction universellement mesurable positive</u> f <u>sur</u> Ω <u>on a</u>

(3) $$E^{\mu}[f(e_{T+S})|\mathfrak{F}_T] = \Pi_S(e_T,f) \quad \text{p.s.}$$

<u>Démonstration</u> : La variable τ_T est un temps d'arrêt de la famille $(\mathfrak{F}_t)$, d'après un raisonnement classique qui utilise la continuité à droite de l'application $t \to \tau_t$ et la continuité à droite de la famille $(\mathfrak{F}_t)$. De plus, $\tau_T = D_{\tau_T}$ p.s. car τ_T est point de croissance à droite de $L_{\bullet}$, donc point d'accumulation à droite de M, sur l'ensemble $\{\tau_T < \infty\}$. On peut donc appliquer la propriété de régénération au temps d'arrêt τ_T et à la loi P^{μ} , ce qui donne

(4) $$E^{\mu}[f \circ e_S \circ \theta_{\tau_T} | \mathfrak{F}_{\tau_T}] = E^{X_{\tau_T}}[f \circ e_S] \quad \text{p.s.}$$

Par ailleurs $e_S \circ \theta_{\tau_t} = e_{S+T}$ p.s. à cause de la relation $\sigma_{T+S} = \tau_T + \sigma_S \circ \theta_{\tau_T}$ p.s. L'égalité (3) est alors conséquence de l'égalité (4), de l'inclusion $\mathfrak{F}_T \subset \mathfrak{F}_{\tau_T}$ (même démonstration que pour le lemme I.1.) et de l'égalité $X_{\tau_T} = X_R(e_T)$, résultant de ce que R est un bon temps d'arrêt.

C.Q.F.D.

LIEN AVEC ITO [2]

Nous supposons maintenant que les conditions d'application du théorème VI.1 sont satisfaites. En remarquant que dans la formule (4) du chapitre VI on peut remplacer $f \circ i_{s-}$ par Z_s où Z est un processus prévisible positif de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$, la formule (5) du chapitre VI s'écrit alors, pour $\alpha = 0$

(5) $$E^{\cdot}[\sum_{\substack{s>0 \\ s\in G}} Z_s g \circ i_s] = E^{\cdot}[\int_0^\infty Z_s Sg \circ X_s dH_s] .$$

La fonctionnelle additive continue (H_t) étant absolument continue par rapport à (L_t), nous supposerons que $H_t = \int_0^t h(X_s)dL_s$, où h est universellement mesurable positive sur E. Par changement de temps la formule (5) s'écrit alors

(6) $$E^{\cdot}[\sum_{0<u\leq L_\infty} Z_{\sigma_u} g \circ e_u] = E^{\cdot}[\int_0^{L_\infty} Z_{\tau_u} (h.Sg) \circ X_{\tau_u} du] .$$

Le temps d'arrêt σ_t est <u>prévisible</u> puisque $\sigma_{t-\frac{1}{n}} < \sigma_t$ sur l'ensemble $\{\sigma_t < \infty\}$ (on suppose $t > 0$, $t-\frac{1}{n} > 0$) et que $\sigma_t = \lim_n \sigma_{t-\frac{1}{n}}$. Nous pouvons donc choisir $Z = I_{]0,\sigma_t]}$ dans la formule (6), qui s'écrit alors :

(7) $$E^{\cdot}[\sum_{0<u\leq L_\infty\wedge t} g \circ e_u] = E^{\cdot}[\int_0^{L_\infty\wedge t} (h.Sg) \circ X_{\tau_u} du .$$

et si $R = T_{\{x_o\}}$ il vient

(8) $$E^{\cdot}[\sum_{0<u\leq L_\infty\wedge t} g \circ e_u] = (h.Sg)(x_o)E^{\cdot}(L_\infty \wedge t) .$$

Le processus des excursions tuées $(\varepsilon_t = k_R \circ e_t)_{t>0}$ est alors un processus de Poisson ponctuel, de mesure caractéristique H (cf. [2] ou [3]) définie par

$$H(f) = h(x_o)S(x_o, f \circ k_R) .$$

Lorsque le processus (X_t) est <u>fortement markovien</u>, il résulte alors de [2] que les mesures $(\eta_t)_{t>0}$ définies sur E par

$$\eta_t(g) = S(x_o, g \circ X_t \circ k_R)$$

forment une loi d'entrée pour le semi-groupe (Q_t) défini par

$$Q_t(x,f) = E^x[f \circ X_t, t < R] .$$

Il est alors naturel de se demander si dans le cas général, pour un processus fortement markovien (X_t) , les mesures $(\eta_t^x)_{t>0}$ définies par

$$\eta_t^x(g)_{t>0} = S(x, g \circ X_t \circ k_R)$$

forment encore une loi d'entrée pour le semi-groupe (Q_t) , au moins pour H-presque tout x . Cela résulte facilement de (5) et du lemme 1 de [5] . Dans [5] ces résultats seront même établis sans hypothèses de régularité en utilisant la décomposition de GETOOR et SHARPE de l'ensemble G : $G = G^r \cup G^i$, où G^r est l'ensemble des t de G tels que X_t soit régulier pour R et G^i l'ensemble des t de G tels que X_t soit irrégulier pour R . L'ensemble G^r possède la propriété $G^r \cap [T] = \emptyset$ p.s. pour tout temps d'arrêt T de $(\mathcal{F}_t)$, à cause de la propriété de Markov forte, tandis que G^i peut s'écrire $\bigcup_{n/t}$, avec des temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{F})$, d'après un résultat de Meyer. Seule la structure des "excursions" $\{i_t, t \in G^r\}$ est délicate.

REFERENCES

[1] R.M. BLUMENTHAL et R.K. GETOOR — Markov Processes and Potential Theory. Academic Press 1968.

[2] K. ITO — Poisson point processes and their application to Markov processes. Lecture Note. University of Kyoto, 1969. Proc. 6th Berkeley Symp. Vol. III, p. 225-240 (1972).

[3] P.A. MEYER — Processus de Poisson ponctuels, d'après K. ITO. Séminaire de Probabilités V. Lecture Notes in Math. 191, Springer-Verlag, 1971.

[4] B. MAISONNEUVE — Processus d'excursions et processus d'incursions. C.R.Acad.Sc.Paris, t. 274, série A (1972), p.497-500.

[5] B. MAISONNEUVE et P.A. MEYER — Ensembles aléatoires markoviens homogènes IV. Séminaire de Probabilités VIII. Lecture Notes in Math. Volume à paraître.

Deuxième Partie

PROCESSUS DE MARKOV

CHAPITRE VIII

DECOMPOSITION DE LA RESOLVANTE

La décomposition de FELLER-UENO de la résolvante d'une diffusion relativement à une frontière a été étendue par M. MOTOO ([1]) à des processus de Markov généraux. Le but de ce chapitre est de donner sous des hypothèses plus générales une démonstration rapide de cette décomposition et d'expliciter les noyaux P et Q de M. MOTOO ([1]) et Y. OKABE ([2]) en fonction du noyau de Lévy N du processus (i_t). Nous nous servirons d'un résultat de DYNKIN ([3] et [4]) qui utilise toute la propriété de Markov de (X_t) .

NOTATIONS ET HYPOTHESES

1. Nous reprenons les hypothèses du chapitre VI : R est le temps d'entrée de (X_t) dans un ensemble F fermé et finement parfait ; le processus (D_t) est quasi-continu à gauche.(*) Nous supposerons de plus que le <u>processus</u> (X_t) <u>est de Hunt.</u>

2. Soit $\lambda > 0$ <u>fixé</u>. On désigne par (L_t) le temps local d'équilibre d'ordre λ ; c'est une fonctionnelle additive, <u>continue</u> à cause de la quasi-continuité à gauche de (D_t), adaptée à la famille $(\mathcal{F}_t)$; on a par définition

$$E^{\bullet}\left[\int_0^{\infty} e^{-\lambda s}\, dL_s\right] = E^{\bullet}\left[\frac{e^{-\lambda R}}{\lambda}\right]$$

D'après le théorème VI . 2 on a

$$L_t \approx \int_0^t I_F \circ X_s\, ds + \int_0^t Sg \circ X_s\, dH_s ,$$

où $\approx$ est la relation d'indistinguabilité de deux processus et où on a posé

$$g = \frac{1-e^{-\lambda R}}{\lambda} .$$

(*) par rapport à $(\mathcal{F}_t)$ ou à $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ (théorème II.3)

(N,H) est un système de Lévy du processus (i_t) et le noyau S a été défini à partir de N dans l'énoncé du théorème VI .1.

Nous supposerons que

$$\int_0^t I_F \circ X_s \, ds \approx \int_0^t \ell \circ X_s dL_s$$

$$\int_0^t Sg \circ X_s dH_s \approx \int_0^t m \circ X_s \, dL_s$$

où ℓ et m sont des fonctions universellement mesurables bornées et positives sur E (sous l'hypothèse (L) de MEYER on peut choisir ℓ et m boréliennes). On peut supposer que $S(x,.) \equiv 0$ pour $x \notin F$, car $X_{s-} \in F$ si s est extrêmité gauche d'intervalle contigu à M.

3. $(U_\alpha)_{\alpha>0}$ (resp. $(U^o_\alpha)_{\alpha>0}$) désigne la résolvante du semi-groupe (P_t) (resp. du semi-groupe (P_t) tué au temps R). Pour toute fonction f universellement mesurable bornée sur E on a par définition

$$U_\alpha f = E^\cdot[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f \circ X_t \, dt] \, .$$

$$U^o_\alpha f = E^\cdot[\int_0^R e^{-\alpha t} f \circ X_t \, dt]$$

Pour f universellement mesurable borné sur E, on pose

$$V^o_\alpha f = \frac{U^o_\alpha f}{U^o_\lambda 1} \quad \text{avec la convention} \quad \frac{0}{0} = 0 \, .$$

On notera que la fonction $V^o_\alpha f$ est bornée, à cause de l'équation résolvante.

4. Pour toute fonction f universellement mesurable bornée sur E et tout $\alpha > 0$ on pose

$$H^\alpha f = E^\cdot[e^{-\alpha R} f \circ X_R]$$

$$K_\alpha f = E^\cdot[\int_0^\infty e^{-\alpha s} f \circ X_s dL_s] \text{ sur } F$$

$$= E^\cdot[\int_0^{L_\infty} e^{-\alpha \tau_s} f \circ X_{\tau_s} \, ds]$$

où $\tau_s = \inf\{u : L_u > s\}$.

5. Pour toute fonction f universellement mesurable bornée sur E on pose

$$\gamma f = \liminf_{t \text{ rationnel} \searrow 0} f \circ X_t .$$

Avant d'énoncer le théorème VIII.1 rappelons un résultat de DYNKIN ([3] et [4]) (*) :

LEMME VIII.1.- <u>Soit</u> f <u>une fonction borélienne bornée sur</u> E <u>et soit</u> $\alpha > 0$.

1) <u>Pour presque tout</u> $\omega \in \Omega$ <u>on a la propriété suivante</u> :

$$\lim_{u \downarrow 0} V^o_\alpha f \circ X_{s+u}(\omega) \ \underline{\text{existe pour tout}} \ s > 0 \ \underline{\text{de}} \ G(\omega) \ ^{(**)}$$

2) $$E^\cdot\Big[\int_R^\infty e^{-\alpha s} fI_{F^c} \circ X_s ds\Big] = E^\cdot\Big[\sum_{\substack{s>0 \\ s\in G}} e^{-\alpha s} \lim_{u\downarrow 0} V^o_\alpha f \circ X_{s+u} \int_s^{D_s} e^{-\lambda(u-s)} du\Big]$$

(Avec nos notations le second membre peut encore s'écrire

$$E^\cdot\Big[\sum_{\substack{s>0 \\ s\in G}} e^{-\alpha s} (\gamma V^o_\alpha f) o i_s \ g o i_s\Big] \quad).$$

Pour démontrer le premier point du lemme on suppose $f \geq 0$ et bornée et on envisage le processus $(Y_u)_{u>0}$ défini sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ par

$$Y_u(r,\omega) = V^o_\alpha f \circ X_{G_r + u} I_{\{A_r > u\}}(\omega) ,$$

où $G_r = \sup\{s \leq r : X_s \in F\}$, $A_r = r - G_r$. On montre que $(Y_u)_{u>0}$ est une <u>surmartingale</u> pour la loi $\hat{P}_x$ définie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{F}$ par

$$\hat{P}^x(A) = E^x\Big[\int_R^\infty e^{-\lambda r} I_A(r,\omega) dr\Big]$$

et on vérifie que

$$\sup_{u>0} \hat{E}^x[Y_u] < \infty .$$

(*) l'existence de l'article [4] nous a été aimablement signalée par H. ROST et sa traduction communiquée par N. KAROUI.

(**) L'ensemble G a été défini au chapitre VI .

Le deuxième point du lemme se déduit facilement du premier.

THEOREME VIII.1.- Pour toute fonction universellement mesurable bornée définie sur E on a (toujours avec la convention $\frac{0}{0} = 0$)

$$U_\alpha f = U_\alpha^o f + H^\alpha K_\alpha (\ell f + m \frac{S(g.\gamma V_\alpha^o f)}{Sg})$$

COROLLAIRE VIII.1.- (Décomposition de MOTOO-OKABE)

$$U_\alpha = U_\alpha^o f + H^\alpha K_\alpha (\ell f + (P+Q) V_\alpha^o f)$$

où l'on a posé pour toute fonction φ universellement mesurable bornée sur E

$$P\varphi(x) = m(x) \frac{S(gI_{\{X_o = x\}} \gamma \varphi)}{Sg}(x)$$

$$Q\varphi(x) = m(x) \frac{S(gI_{\{X_o \neq x\}} \gamma \varphi)}{Sg}(x)$$

Restreint à l'ensemble $\overline{\mathcal{M}}$, où $\mathcal{M} = \{V_\alpha^o f ; \alpha > 0, f$ borélienne bornée$\}$, Q s'identifie au noyau Q défini par MOTOO et, restreint à $\overline{\mathcal{M}}$, P s'identifie au noyau P défini par OKABE. Q correspond à la sortie de F par un saut et P correspond à la sortie continue de F.

Démonstration du théorème VIII.1.

Soit f borélienne bornée sur E et soit $\alpha > 0$. D'après une formule classique on a

$$U_\alpha f = U_\alpha^o f + H^\alpha U_\alpha f \,. \tag{1}$$

D'autre part si $y \in F$ on a $R = 0$ P^y p.s., donc en appliquant le point 2) du lemme il vient

$$U_\alpha f(y) = E^y[\int_0^\infty e^{-\alpha s} f I_F \circ X_s ds] + E^y[\sum_{\substack{s>0 \\ s\in G}} e^{-\alpha s} (\gamma V_\alpha^o f) \circ i_s g \circ i_s]$$

Le premier terme du second membre s'écrit

$$E^y[\int_0^\infty e^{-\alpha s}\,\ell f \circ X_s\, dL_s]$$

et le second terme s'écrit d'après la formule (5) du chapitre précédent

$$E^y[\int_0^\infty e^{-\alpha s} S(g\gamma V_\alpha^0 f)\circ X_s\, dH_s] = E^y[\int_0^\infty e^{-\alpha s} \frac{(S(g\gamma V_\alpha^0 f)}{S g} \circ X_s \quad m\circ X_s dL_s]$$

(avec la convention $\frac{0}{0} = 0$), soit encore $K_\alpha(m \frac{S(g.\gamma V_\alpha^0 f)}{S g})(y)$. Le théorème VIII.1 résulte alors de l'égalité (1) et de ce que $H^\alpha U_\alpha f$ est entièrement déterminé par la restriction de $U_\alpha f$ à F.

C.Q.F.D.

REFERENCES

[1] M. MOTOO — Application of additive functionals to the boundary problem of Markov processes.
Fifth Berkeley Symposium, Vol. II, part 2, 1967.

[2] Y. OKABE — The resolution of an irregularity of boundary points in the boundary problem for Markov process.
Journal of the Math. Soc. Jap. Vol. 22 (1970).

[3] E.B. DYNKIN — On extensions of a Markov Process.
Theory of Probability and its applications XIII, 4 (1968).

[4] E.B. DYNKIN — Wanderings of a Markov Process.
Teoriya veroyatnostei i se primeneniya, XVI, 3 (1971).

CHAPITRE IX

DEUX NOUVEAUX PROCESSUS

HOFFMANN-JØRGENSEN a montré que le processus de l'âge (A_t) associé à un ensemble régénératif est un processus de Markov (non nécessairement fortement markovien) ; nous reviendrons en détail sur ce résultat dans la troisième partie. Pour un système régénératif, le processus (A_t) n'est en général pas markovien, non plus que le processus $\bar{X}_t = (A_t, X_{G_t})$; mais nous montrons que, sous certaines hypothèses, c'est vrai pour le processus $\check{X}_t = (A_{t-}, X_{G_{t-}})$. Nous montrons également que le processus $(\bar{X}_t)$ est markovien si le processus (X_t) est fortement markovien. Nous explicitons les fonctions de transition à l'aide de noyaux définis par PITTENGER et SHIH ([1]). Dans un article ultérieur, nous donnerons des fonctions de transition ayant la propriété de semi-groupe.

PRELIMINAIRES

L'ensemble $\overline{\bigcup_{t \geq 0} [D_t]}$ est toujours noté M. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on pose

$$\begin{aligned} G_t &= \sup\{s \leq t : s \in M\} \\ &= 0 \text{ si } \{\ \} = \emptyset \\ A_t &= t - G_t \\ \bar{X}_t &= (A_t, X_{G_t}) \end{aligned}$$

Notons que si R est le temps d'entrée dans un fermé F on a aussi $G_t = \sup\{s \leq t : X_s \in F\}$, mais cette formule est fausse si F est ouvert.

Le processus (G_t) ainsi défini est croissant, continu à droite et et adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)$; la famille (G_t) est une <u>famille coterminale</u> au sens de PITTENGER et SHIH [1], c'est-à-dire qu'elle possède les propriétés suivantes :

(1) G_t est $\mathcal{F}_t$- mesurable

(2) $0 \leq G_t \circ k_t \leq G_t \leq t$

(3) $G_{t-s} \circ \theta_s = (G_t - s)^+$ si $s < t$

(4) $\lim\limits_{u \downarrow s} G_t \circ k_u = G_s$ si $s < t$ (on suppose que $P^{\partial}(R = 0) = 0$)

(5) si $G_t < s < t$ alors $G_t = G_s$,

où les opérateurs de meurtre (k_t) sont définis par

$$k_t\omega(s) = \omega(s) \text{ si } s < t \qquad (\omega \in \Omega)$$
$$= \partial \qquad \text{si } s \geq t$$

Nous empruntons à PITTENGER et SHIH les définitions suivantes (avec une légère modification pour la tribu $\mathcal{F}_{S-}$) .

DEFINITION IX.1.- <u>Soit</u> S <u>une variable positive sur</u> $(\Omega, \mathcal{F})$.

1) <u>On désigne par</u> $\mathcal{F}_{S-}$ <u>la tribu engendrée par la tribu</u> $\mathcal{F}_o \cap \{S = 0\}$ <u>et par la famille</u> $\{\mathcal{F}_s \cap \{s < S\}, s \geq 0\}$.

2) <u>On désigne par</u> $\mathcal{F}_S$ <u>la tribu engendrée par</u> $\mathcal{F}_{S-}$ <u>et la famille</u> $\{\mathcal{F}_T \cap \{S = T\}$, T <u>temps d'arrêt de</u> $(\mathcal{F}_t)\}$.

(Si S est un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t)$ les tribus $\mathcal{F}_{S-}$ et $\mathcal{F}_S$ sont les tribus habituelles).

Voici quelques propriétés démontrées dans [1] :

(6) S est $\mathcal{F}_{S-}$ - mesurable

(7) X_S est $\mathcal{F}_S$-mesurable

(8) Soient S et T deux variables telles que $0 \leq S \leq T$

a) Si S est $\mathcal{F}_{T-}$-mesurable on a $\mathcal{F}_{S-} \subset \mathcal{F}_{T-}$

b) Si S est $\mathcal{F}_T$-mesurable on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$

Compte tenu de la modification apportée à la définition de $\mathcal{F}_{S-}$ on a également la propriété

(9) X_{S-} est $\mathcal{F}_{S-}$-mesurable, en posant $X_{0-} = X_0$.

LE PROCESSUS $\bar{X}_t = (A_t, X_{G_t})$

Le processus $(\bar{X}_t)$ est continu à droite, et adapté à la famille $(\mathcal{F}_{G_t})$ d'après (6) et (7). Dans ce paragraphe on suppose de manière essentielle que le processus (X_t) est <u>fortement markovien</u>. Nous allons d'abord rappeler le théorème 1 de [1] sous la forme du théorème IX.1 qui suit.

DEFINITION IX.2.- <u>Soit</u> f <u>une fonction universellement mesurable bornée sur</u> E <u>et soit</u> $a>0$. <u>Si</u> x <u>est un point irrégulier pour</u> R , <u>on pose</u>

$$\bar{Q}((a,x),f) = E^x[f\circ X_a \,|\, R>a]$$

<u>et si</u> x <u>est régulier pour</u> R , <u>on pose</u>

$$\bar{Q}^*((a,x),f) = \limsup_{u \text{ rationnel} > 0} \; \limsup_{n\to\infty} E^x[f\circ X_a \,|\, D_u>a, d(x,X_u)\le \tfrac{1}{n}]$$

$$\bar{Q}_*((a,x),f) = \liminf_{u \text{ rationnel} > 0} \; \liminf_{n\to\infty} E^x[f\circ X_a \,|\, D_u>a, d(x,X_u)\le \tfrac{1}{n}]$$

(dans les égalités précédentes on a fait la convention $\frac{0}{0} = 0$) .

<u>Si</u> $\bar{Q}^*((a,x),f) = \bar{Q}_*((a,x),f)$ <u>on note</u> $\bar{Q}((a,x),f)$ <u>la valeur commune</u>.

DEFINITION IX.3.- <u>Soit</u> f <u>une fonction universellement mesurable bornée sur</u> E . <u>On pose</u>

$$\bar{W}(f) = \{(a,x) : \bar{Q}((a,x),f) \text{ est défini}\}$$

THEOREME IX.1.- <u>Soit</u> f <u>une fonction universellement mesurable bornée sur</u> E .

(1) $\bar{X}_t \in \bar{W}(f)$ p.s. <u>sur</u> $\{0 \le G_t < t\}$

(2) $E[f\circ X_t \,|\, \mathcal{F}_{G_t}] = \bar{Q}(\bar{X}_t, f)$ p.s. <u>sur</u> $\{0 \le G_t < t\}$

Dans la définition qui suit $\mathcal{H}$ désigne une famille dénombrable dense de $C(\bar{\mathbb{R}}_+ \times E')$ (E' est le compact dont E est un sous-ensemble borélien. On confondra les fonctions de $\mathcal{H}$ et leurs restrictions à $\hat{E}$.

DEFINITION IX.4.- <u>On note</u> $\bar{W}$ <u>l'ensemble des</u> (a,x) <u>tels que</u> $\bar{Q}((a,x),E^{\cdot}[h(R,X_R)])$ <u>soit défini pour tout</u> $h \in \mathcal{H}$. Pour $h \in \mathcal{H}$ on pose

$$\bar{R}((a,x),h) = \bar{Q}((a,x),E^{\cdot}[h(R,X_R)]) \quad \underline{si} \quad (a,x) \in \bar{W}$$

$$= E^x[h(R,X_R)] \quad \underline{si} \quad (a,x) \notin \bar{W},$$

<u>donc en particulier si</u> $a = 0$.

L'ensemble $\bar{W}$ est universellement mesurable. Par les procédés habituels on peut prolonger $\bar{R}$ en <u>un noyau sur</u> $\hat{E}$ muni de sa tribu des ensembles <u>universellement mesurables</u>. <u>Ce noyau sera noté</u> $\bar{R}$.

THEOREME IX.2.- <u>Pour toute loi</u> P^{μ} <u>et pour toute fonction</u> h <u>universellement mesurable bornée sur</u> $\hat{E}$ <u>on a</u>

(10) $$E^{\mu}[h \circ \hat{X}_t \mid \mathcal{F}_{G_t}] = \bar{R}(\bar{X}_t, h) \quad \text{p.s.}$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de démontrer l'égalité (10) pour $h \in \mathcal{H}$. D'après la relation $\hat{X}_t = (R,X_R) \circ \theta_t$ et la propriété de Markov simple du processus (X_t) on a

$$E^{\mu}[h \circ \hat{X}_t \mid \mathcal{F}_t] = E^{X_t}[h(R,X_R)] \quad \text{p.s.}$$

et comme $\mathcal{F}_{G_t} \subset \mathcal{F}_t$ à cause de (1) et (8), il vient

(11) $$E^{\mu}[h \circ \hat{X}_t \mid \mathcal{F}_{G_t}] = E^{\mu}[E^{X_t}[h(R,X_R)] \mid \mathcal{F}_{G_t}].$$

Par suite le théorème IX.1 appliqué à la fonction $E^{\cdot}[h(R,X_R)]$ montre que, sur l'ensemble $\{0 \le G < t\}$ ($\mathcal{F}_{G_t}$-mesurable d'après (1)), $\bar{X}_t \in \bar{W}$ p.s. et l'égalité (10) est vérifiée. Sur l'ensemble $\{G_t = t\} = \{A_t = 0\}$ on a $\bar{R}(\bar{X}_t,h) = E^{X_{G_t}}[h(R,X_R)]$ par définition et le membre de droite de (11) vaut $E^{X_{G_t}}[h(R,X_R)]$ p.s. à cause de la propriété (7). L'égalité (10) est donc établie.

C.Q.F.D.

DEFINITION IX.5.- Pour toute fonction f universellement mesurable bornée sur $\hat{E}$, tout $s \in \mathbb{R}_+$ et tout $(a,x) \in \hat{E}$ posons

$$\bar{P}_s((a,x),f) = f(a+s,x)\bar{R}((a,x),]s,\infty] \times E) + \bar{R}((a,x),\bar{F}(s-\cdot,\cdot,\cdot,f))$$

où
$$\bar{F}(u,y,f) = E^y[f \circ \bar{X}_u] \quad \text{si} \quad u \geq 0$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad u < 0 .$$

THEOREME IX.3.- Pour toute loi P^μ le processus $(\bar{X}_t)$ est un processus de Markov par rapport à la famille $(\mathcal{F}_{G_t})$ et par rapport aux noyaux de transition $(\bar{P}_t)$

Démonstration : Le processus $(\bar{X}_t)$ est adapté à la famille $(\mathcal{F}_{G_t})$ d'après (6) et (7). Vérifions d'abord que la famille $(\mathcal{F}_{G_t})$ est croissante. Pour cela il suffit de montrer que si $s<t$ la variable G_s est $\mathcal{F}_{G_t^-}$-mesurable (d'après (8) et l'inclusion $\mathcal{F}_{G_t^-} \subset \mathcal{F}_{G_t}$). On a

$$(12) \qquad \{u<G_s\} = \{u<G_s\} \cap \{G_t \leq s\} + \{u<G_s\} \cap \{G_t > s\}$$

Sur l'ensemble $\{G_t \leq s\}$ on a $G_s = G_t$ à cause de (5) et de la continuité à droite de l'application $t \to G_t$. Par suite

$$\{u<G_s\} \cap \{G_t \leq s\} = \{u<G_t \leq s\}$$

et cet ensemble appartient à $\mathcal{F}_{G_t^-}$ d'après (6). D'autre part l'ensemble $\{u<G_s\}$ appartient à $\mathcal{F}_s$, donc l'ensemble $\{u<G_s\} \cap \{s<G_t\}$ appartient à $\mathcal{F}_{G_t^-}$ par définition. D'après (12) G_s est donc $\mathcal{F}_{G_t^-}$- mesurable et la famille $(\mathcal{F}_{G_t})$ est croissante.

Nous allons maintenant établir que $(\bar{X}_t)$ est markovien par rapport à la famille $(\mathcal{F}_{G_t})$ et admet $(\bar{P}_t)$ comme fonction de transition. Soient $s,t \geq 0$ et f universellement mesurable bornée sur $\hat{E}$; d'après (5) et un raisonnement devenu familier on a

$$E^\bullet[f \circ \bar{X}_{t+s} | \mathcal{F}_{D_t}](\omega) = f(A_t + s, X_{G_t}) I_{\{s<R_t\}}(\omega)$$

$$+ E^{X_{D_t}(\omega)}[f \circ \bar{X}_{s-R_t(\omega)}(\cdot)] I_{\{s \geq R_t\}}(\omega)$$

Par application du théorème IX.2 aux fonctions $g = I_{]s,\infty] \times E}$ et $g = \bar{F}(s-.,..,f)$ il vient

$$\begin{aligned} E^{\mu}[f \circ \bar{X}_{t+s} | \mathcal{F}_{G_t}] &= f(A_t + s, X_{G_t}) \bar{R}(\bar{X}_t,]s,\infty] \times E) \\ &+ \bar{R}(\bar{X}_t, \bar{F}(s-.,..,f)) \quad \text{p.s.} \\ &= \bar{P}_s(\bar{X}_t, f) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

LE PROCESSUS $(\check{X}_t)$

Nous supposons maintenant que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^{\mu} ; R)$ est un <u>système régénératif</u> sans point de branchement, que R est le temps d'entrée dans un ensemble <u>fermé</u> F et que les points de F sont réguliers. De plus nous supposerons que les trajectoires ω de Ω ont des limites à gauche et que le processus $(\hat{X}_t)$ est quasi-continu à gauche (cf. théorème II.3).

Pour $t > 0$ on pose

$$\Gamma_t = G_{t-} = \sup \{s < t : X_s \in F\}$$
$$\check{X}_t = (A_{t-}, X_{\Gamma_t^-}) = (t - \Gamma_t, X_{\Gamma_t^-})$$

avec la convention $X_{0-} = X_0$.

Le processus $(\Gamma_t)_{t>0}$ est croissant, continu à gauche et adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)$. Le processus $(\check{X}_t)_{t>0}$ est <u>continu à gauche et adapté à la famille</u> $(\mathcal{F}_{\Gamma_t^-})_{t>0}$ d'après (6) et (9). On notera que $\mathcal{F}_{\Gamma_t^-} \subset \mathcal{F}_{G_t^-}$ puisque $\Gamma_t \leq G_t$ et que la variable $\Gamma_t = \lim_{s \uparrow t} G_s$ est $\mathcal{F}_{G_t^-}$ - mesurable.

THEOREME IX.4.- <u>Il existe un noyau</u> $\check{R}$ <u>sur la tribu des ensembles universellement mesurables de</u> $\hat{E}$ <u>tel que l'on ait</u>

$$E^{\mu}[h \circ \hat{X}_t | \mathcal{F}_{\Gamma_t^-}] = \check{R}(\check{X}_t, h) \quad \text{p.s. sur} \quad \{\Gamma_t > 0\}$$

<u>pour toute loi</u> μ , <u>tout</u> $t > 0$ <u>tel que</u> $P^{\mu}\{A_{t-} \neq A_t\} = 0$ <u>et toute fonction</u> h <u>universellement mesurable positive sur</u> $\hat{E}$.

<u>Démonstration</u> : 1) Nous allons d'abord <u>définir le noyau</u> $\check{R}$. $(W,(\xi_t),(P^{r,x})_{r,x\in\hat{E}})$ désigne la réalisation canonique du semi-groupe $(\hat{P}_t)$ construite au chapitre II. Sur W on pose

$$\delta_u = \inf\{s>u : \xi_s \in \{0\}\times E\}$$

et pour $a>0$, $(r,x)\in\hat{E}$, h universellement mesurable bornée sur $\hat{E}$, on pose, toujours avec la convention $\frac{0}{0}=0$

$$\check{Q}^*(a,r,x,h) = \limsup_{\substack{u \text{ rationnel} > 0 \\ u\to 0}} E^{r,x}[h\circ\xi_a \mid \delta_u > a]$$

$$\check{Q}_*(a,r,x,h) = \liminf_{\substack{u \text{ rationnel} > 0 \\ u\to 0}} E^{r,x}[h\circ\xi_a \mid \delta_u > a].$$

Lorsque $\check{Q}^*(a,r,x,h) = \check{Q}_*(a,r,x,h)$ on note $\check{Q}(a,r,x,h)$ la valeur commune.

Désignons par $\check{W}(h)$ l'ensemble des $(a,r,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times E$ tels que $Q(a,r,x,h)$ soit défini et par $\check{W}$ l'ensemble $\bigcap_{h\in\mathcal{H}}\check{W}(h)$, où $\mathcal{H}$ est la famille utilisée dans la définition IX.4. Finalement on pose pour $h\in\mathcal{H}$

$$\check{R}((a,x),h) = \check{Q}(a,0,x,h) \qquad \text{si } (a,0,x)\in\check{W}$$

$$= h(0,x) \qquad \text{si } (a,0,x)\notin\check{W}\text{, donc en particulier}$$

si $a=0$.

Par les procédés d'extension habituels on obtient un noyau $\check{R}$ sur la tribu des ensembles universellement mesurables de $\hat{E}$.

2) Définissons les tribus $\hat{\mathcal{F}}_{S-}$ à partir de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ comme nous l'avons fait pour la famille $(\mathcal{F}_t)$ dans la définition IX.1. 2). Comme $\check{X}_t$ est $\mathcal{F}_{\Gamma_t^-}$- mesurable et que $\mathcal{F}_{\Gamma_t^-}\subset\mathcal{F}_{G_t^-}\subset\hat{\mathcal{F}}_{G_t^-}$, il nous suffit d'établir l'égalité

$$E^{\mu}[h\circ\hat{X}_t \mid \hat{\mathcal{F}}_{G_t^-}] = \check{R}(\check{X}_t,h) \text{ p.s. sur } \{\Gamma_t>0\} \tag{14}$$

et il nous suffit même d'établir cette égalité pour $h \in \mathcal{H}$. On remarquera que, comme $A_{t-} = A_t$ P^μ- p.s. ou $\Gamma_t = G_t$ p.s., l'égalité (14) peut aussi s'écrire

(15) $$E^\mu[h \circ \hat{X}_t | \hat{\mathcal{F}}_{G_t^-}] = \check{R}((A_t, X_{G_t^-}), h) \quad \text{p.s. sur} \quad \{G_t > 0\}$$

3) <u>Démontrons l'égalité</u> (15) <u>pour</u> $h \in \mathcal{H}$.

a) Sur l'ensemble $\{G_t = t\} = \{A_t = 0\}$ le second membre de (15) s'écrit $\check{R}((0, X_{G_t^-}), h)$ c'est-à-dire $h(0, X_{G_t^-})$ par définition. Comme $\Gamma_t = G_t$ p.s. ce terme s'écrit aussi $h \circ \hat{X}_{G_t^-}$ p.s.

Le processus $(\hat{X}_t)$ étant quasi-continu à gauche, on a $\hat{X}_t = \hat{X}_{t-}$ p.s. Sur l'ensemble $\{G_t = t\}$ le premier membre de (15) vaut donc $h \circ \hat{X}_{G_t^-}$ à cause de la propriété (9) appliquée à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ et au processus $(\hat{X}_t)$. L'égalité (15) est donc établie sur l'ensemble $\{G_t = t\}$.

b) Sur l'ensemble $\{0 < G_t < t\}$ nous allons montrer <u>qu'on peut appliquer le théorème 2 de</u> [1] <u>au processus</u> $(\hat{X}_t)$ <u>et à la famille</u> (G_t) .

En effet

- le processus $(\hat{X}_t)$ est fortement markovien et quasi-continu à gauche ;
- le temps d'arrêt R est p.s. égal au temps d'entrée $\hat{R}$ du processus $(\hat{X}_t)$ dans l'ensemble $\{0\} \times F$, car l'ensemble M est p.s. sans point isolé, donc (G_t) est une famille coterminale pour $(\hat{X}_t)$;
- sur l'ensemble $\{0 < G_t < t\}$ $\hat{X}_{G_t^-}$ est p.s. un point régulier (*) pour l'ensemble $\{0\} \times F$, car $\hat{X}_{G_t^-} = (0, X_{\Gamma_t^-}) \in \{0\} \times F$ p.s. et les points de $\{0\} \times F$ sont réguliers pour $\{0\} \times F$.

On peut donc appliquer le théorème 2 au processus $(\hat{X}_t)$ et à la famille (G_t). On notera que dans le cas présent la démonstration de ce théorème se simplifie beaucoup puisque les variables G_t <u>sont des temps d'arrêt de la famille</u> $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ (en effet $G_t = \inf \{s : D_s > t\}$) , ce qui n'est pas vrai pour la famille $(\mathcal{F}_t)$. On obtient ainsi les propriétés suivantes :

(*) relativement au processus $(\hat{X}_t)$

(16) $$(A_t, \hat{X}_{G_t^-}) \in \check{W} \text{ p.s. sur } \{0 < G_t < t\}$$

(17) $$E^{\mu}[h \circ \hat{X}_t \mid \hat{\mathfrak{F}}_{G_t^-}] = \check{Q}(A_t, \hat{X}_{G_t^-}, h) \text{ p.s. sur } \{0 < G_t < t\}$$

En tenant compte de ce que $\hat{X}_{G_t^-} = (0, X_{G_t^-})$ p.s. sur $\{0 < G_t < t\}$ le second membre de (17) peut s'écrire $\check{Q}(A_t, 0, X_{G_t^-}, h)$ et en tenant compte de (16) ce terme vaut $\check{R}((A_t, X_{G_t^-}), h)$ p.s. par définition de $\check{R}$. L'égalité (15) est donc établie sur l'ensemble $\{0 < G_t < t\}$.

C.Q.F.D.

<u>Remarque</u> : En appliquant le théorème 2 de [1] au processus (i_t) (*) on obtient les généralisations suivantes du théorème IX.4 :

1) Pour toute loi μ, tout $t > 0$ tel que $P^{\mu}\{A_{t-} \neq A_t\} = 0$ et toute fonction f universellement mesurable bornée sur Ω on a

(18) $$E^{\mu}[f \circ i_t \mid \mathfrak{F}_{\Gamma_t^-}] = \check{\rho}(\check{X}_t, f) \quad \text{p.s. sur } \{\Gamma_t > 0\}$$

où

$$\check{\rho}((a,x), f) = \limsup_{\substack{u \text{ rationnel} > 0 \\ u \to 0}} E^x[f \circ i_a \mid D_u > a] \quad \text{si } a > 0$$

$$= f([x]) \quad \text{si } a = 0$$

2) Pour toute loi μ, tout $t > 0$ tel que $P^{\mu}\{A_t \neq A_{t-}\} = 0$ et toute fonction g universellement mesurable bornée sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ on a

(19) $$E^{\mu}[g(A_t, i_{\Gamma_t^-}) \mid \mathfrak{F}_{\Gamma_t^-}] = \rho(\check{X}_t, g) \quad \text{p.s. sur } \{\Gamma_t > 0\}$$

où

$$\rho((a,x), g) = \limsup_{\substack{u \text{ rationnel} > 0 \\ u \to 0}} E^x[g(a, i_u) \mid D_u > a] \quad \text{si } a > 0$$

$$= g(a, [x]) \quad \text{si } a = 0 .$$

(*) (i_t) est supposé quasi-continu à gauche.

La formule (19) est plus générale que la formule (18), qui se déduit de la première en prenant $g(a,\omega) = f(\theta_a\omega)$.

DEFINITION IX.6.- Pour toute fonction f universellement mesurable bornée sur $\hat{E}$ tout $s \in \mathbb{R}_+$ et tout $(a,x) \in \hat{E}$ posons

$$\check{P}_s((a,x),f) = f(a+s,x)\check{R}((a,x),[s,\infty] \times E) + \check{R}((a,x),\check{F}(s-.,..,f))$$

où

$$\begin{aligned}\check{F}(u,y,f) &= E^y[f \circ \check{X}_u] \qquad \text{si } u>0 \\ &= 0 \qquad \text{si } u \leq 0\end{aligned}$$

THEOREME IX.5.- Soit ν une loi sur F et soit T l'ensemble des $t>0$ tels que $P^\nu[A_{t-} \neq A_t] = 0$. Pour toute fonction f universellement mesurable bornée sur $\hat{E}$, tout $t \in T$ et tout $s \geq 0$ on a

$$E^\nu[f \circ \check{X}_{t+s} | \mathcal{F}_{\Gamma_{\bar{t}}}] = \check{P}_s(\check{X}_t,f) \qquad \text{p.s.} \tag{18}$$

En particulier si le processus (A_t) n'a pas de discontinuité fixe, le processus $(\check{X}_t)_{t>0}$ est markovien par rapport à la famille $(\mathcal{F}_{\Gamma_{\bar{t}}})_{t>0}$, avec les noyaux $(\check{P}_t)_{t\geq 0}$, sur l'espace (Ω,P^ν) .

Démonstration : Sur l'ensemble $\{\Gamma_t > 0\}$ on a

$$\begin{aligned} f \circ \check{X}_{t+s}(\omega) &= f(A_{t-}(\omega)+s,\ X_{\Gamma_{t-}}(\omega)) \qquad \text{si } s \leq R_t(\omega) \\ &= f(\check{X}_{s-R_t(\omega)}(\theta_{D_t}(\omega))) \qquad \text{si } s > R_t(\omega)\end{aligned}$$

donc d'après la propriété de régénération au temps D_t

$$\begin{aligned} E^\nu[f \circ \check{X}_{t+s} | \mathcal{F}_{D_t}](\omega) &= f(A_{t-}(\omega)+s, X_{\Gamma_{t-}}(\omega)) I_{\{s \leq R_t\}}(\omega) \\ &+ E^{X_{D_t}(\omega)}[f \circ \check{X}_{s-R_t(\omega)}(\cdot)] I_{\{s > R_t\}}(\omega)\end{aligned}$$

En appliquant le théorème IX.4 il vient

$$E^{\nu}[f \circ \check{X}_{t+s} | \mathcal{F}_{\Gamma_t^-}] = \check{P}_s(\check{X}_t, f) \quad \text{p.s.} \quad \text{sur } \{\Gamma_t > 0\} .$$

On peut retirer la restriction à l'ensemble $\{\Gamma_t > 0\}$, puisque ν est une loi sur l'ensemble F ; on obtient alors la formule (18).

C.Q.F.D.

REFERENCES

[1] A.O. PITTENGER and C.T. SHIH Coterminal families and the strong Markov property. (A paraître dans Trans.Amer.Math.Soc.).

Troisième Partie

<u>ENSEMBLES REGENERATIFS</u>

CHAPITRE X

APPLICATIONS AUX ENSEMBLES REGENERATIFS

DEFINITION ET PREMIERES PROPRIETES

DEFINITION X.I.- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^\mu ; R)$ un système régénératif tel que R soit le temps d'entrée de (X_t) dans l'ensemble $\{x_o\}$, où x_o est un point fixé de E vérifiant $P^{x_o}\{X_o = x_o\} = 1$.

L'ensemble

$$M = \overline{\{t : X_t = x_o\}} = \overline{\bigcup_{t \geq 0} [D_t]}$$

est alors appelé ensemble régénératif relatif à l'ensemble E, au point x_o et aux lois P^μ.

On notera que M désigne ici un fermé aléatoire, ce qui n'est pas le cas dans HOFFMANN - JØRGENSEN [1], ni dans notre introduction. Nous désignerons par $\underline{M}$ le fermé droit minimal d'adhérence M : pour tout $\omega \in \Omega$, $\underline{M}(\omega)$ est l'ensemble des points de $M(\omega)$ qui sont points d'accumulation à droite ou points isolés pour $M(\omega)$.

La propriété de définition des systèmes régénératifs prend ici la forme suivante :

Pour toute loi μ sur E, tout temps d'arrêt S de la famille $(\mathcal{F}_t)$, tout ensemble $A \in \mathcal{F}_{D_S}$ contenu dans l'ensemble $\{D_S < \infty\}$ et tout $B \in \mathcal{F}$ on a

(1) $$P^\mu(A \cap \theta_{D_S}^{-1}(B)) = P^\mu(A) P^{x_o}(B) .$$

Remarques X.1. 1) Pour $\mu = \varepsilon_{x_o}$ la propriété (1) est la propriété de régénération de HOFFMANN-JØRGENSEN au temps D_S et par rapport à la loi P^{x_o}. Mais l'ensemble $\{t : X_t = x_o\}$ n'est pas nécessairement un ensemble régénératif de HOFFMANN-JØRGENSEN pour la loi P^{x_o} : par exemple il n'y a pas nécessairement régénération en 0 .

2) Dans la définition de [1] ou de [2] intervient <u>une seule mesure</u> P, mais il est facile d'en déduire le modèle de la définition X.1. En effet si l'ensemble régénératif est canoniquement défini par une probabilité P sur l'espace des fonctions en dents de scie ([2] ou [3]), appelons P^o la loi induite par P sur l'espace Ω des applications continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et posons $P^x = \varepsilon_{[x]}$ pour tout $x > 0$: on obtient alors un ensemble régénératif en notre sens, avec $E = \mathbb{R}_+$, $x_o = 0$.

Voici le premier résultat de structure des ensembles régénératifs.

PROPOSITION X.1.- <u>Ou bien</u> $P^{x_o}\{R=0\} = 0$ <u>et l'ensemble</u> M <u>est p.s. discret, ou bien</u> $P^{x_o}\{R=0\} = 1$ <u>et l'ensemble</u> M <u>est p.s. parfait</u> (on rappelle que p.s. signifie P^{μ}- p.s. pour toute loi μ)

DEFINITION X.2.- <u>Si</u> $P^{x_o}\{R=0\} = 1$ <u>on dira que l'ensemble régénératif</u> M <u>est régulier</u>.

<u>Démonstration de la proposition</u> X.1. D'après l'hypothèse $P^{x_o}\{X_o = x_o\} = 1$ et la proposition I.4 on a $P^{x_o}\{R=0\} = 0$ ou 1 .

– Si $P^{x_o}\{R=0\} = 1$ les hypothèses du chapitre V sont satisfaites et nous avons vu que l'ensemble M est alors p.s. parfait .

– Si $P^{x_o}\{R=0\} = 0$, désignons par T_n^{ε} le n^e temps d'entrée du processus $A_t = t - \sup\{s \le t : s \in M\}$ dans l'ensemble $[\varepsilon, +\infty[$ $(\varepsilon > 0)$; T_n^{ε} est un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{F}_t)$ car le processus (A_t) est continu à droite et adapté à $(\mathcal{F}_t)$. La propriété (1) écrite pour $S = T_n^{\varepsilon}$, $A = \{D_{T_n^{\varepsilon}} < \infty\}$, $B = \{R > 0\}$ montre que $D_{T_n^{\varepsilon}}$ est p.s. un point isolé de M sur $\{D_{T_n^{\varepsilon}} < \infty\}$. Il en résulte que l'ensemble D des extrémités droites des intervalles contigus à M est p.s. discret : cet ensemble s'écrit en effet

$$D = \bigcup_{\substack{\varepsilon \text{ rationnel } > 0 \\ n \geq 1}} [D_{T_n^\varepsilon}] .$$

L'ensemble M est donc lui-même p.s. discret .

C.Q.F.D.

LE PROCESSUS (R_t)

THEOREME X.1. 1) La famille (Q_t) de noyaux sur $\bar{\mathbb{R}}_+$ définie par

$$\begin{aligned} Q_t(r,f) &= f(r-t) && \text{si } t<r \\ &= E^{x_o}[f(R_{t-r})] && \text{si } t \geq r \end{aligned}$$

pour $t \in [0,+\infty[$, $r \in \bar{\mathbb{R}}_+$, f borélienne bornée sur $\bar{\mathbb{R}}_+$, est un semi-groupe de Markov ; de plus ce semi-groupe est borélien.

2) Pour toute loi P^μ le processus (R_t) est fortement markovien par rapport à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ et par rapport au semi-groupe (Q_t) .

3) Si l'ensemble régénératif M est régulier le semi-groupe (Q_t) est un semi-groupe de Hunt et le processus (R_t) est quasi-continu à gauche par rapport à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ et toute loi P^μ .

Démonstration : Les points 1) et 2) s'établissent comme le théorème II.1, avec quelques simplifications. On peut aussi les déduire du théorème II.1 en remarquant que $\hat{X}_t = (R_t, x_o)$ sur l'ensemble $\{R_t < \infty\}$.

Le fait que le semi-groupe (Q_t) soit borélien résulte de ce que pour tout $t \geq 0$ le noyau Q_t transforme les fonctions continues sur $\bar{\mathbb{R}}_+$ en fonctions continues à gauche. En effet pour f continue

- l'application $r \to f(r-t)$ pour $r \in]t,\infty]$ est continue
- l'application $r \to E^{x_o}[f(R_{t-r})]$ pour $r \in [0,t]$ est continue à gauche.

Si $P^{x_o}\{R=0\} = 1$ l'hypothèse (HR_1) du chapitre II est réalisée et il résulte de la proposition II.2 donnée en appendice que le processus (D_t) est quasi-continu à gauche par rapport à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ pour toute loi P^μ et que le semi-groupe (Q_t) est de Hunt (cf. remarque b. à la suite du théorème II.3).

C.Q.F.D.

COROLLAIRE X.1.- Un ensemble régénératif régulier est indistinguable de l'ensemble des instants de passage en 0 d'un processus de Hunt.

Remarque : Au contraire, le processus de l'âge (A_t), que nous étudierons au chapitre suivant, n'est pas nécessairement quasi-continu à gauche, ni même fortement markovien pour un ensemble régulier.

TEMPS LOCAL D'UN ENSEMBLE REGENERATIF REGULIER

THEOREME X.2.- Si l'ensemble régénératif M est régulier il existe une fonctionnelle additive continue parfaite (L_t) adaptée à la famille $(\mathcal{F}_t)$, unique, telle que

$$E^{\bullet}[\int_0^{\infty} e^{-s}\, dL_s] = E^{\bullet}[e^{-R}]$$

et dont l'ensemble des points de croissance est indistinguable de M.

DEFINITION X.2.- La fonctionnelle additive (L_t) du théorème X.2 sera appelée temps local de M.

Démonstration du théorème X.2. Le semi-groupe (Q_t) est de Hunt, le point 0 est un point régulier pour ce semi-groupe. L'existence du temps local (L_t) résulte alors d'un théorème connu.(*) On peut aussi montrer que les conditions d'applications du théorème V.2 à la fonction ϕ qui vaut 1 sur l'ensemble $\{x_0\}$ sont vérifiées.

C.Q.F.D.

Remarque. L'unicité, à une constante multiplicative près, du temps local pourrait se démontrer de manière analogue à l'unicité du temps local dans le théorème 3.13 du chapitre V de [4].

(*) Le fait que (L_t) soit adapté à $(\mathcal{F}_t)$ se démontre comme dans la proposition V.2.

COROLLAIRE X.2.- Si M est régulier, le fermé droit minimal $\underline{M}$ est indistinguable, pour toute loi P^{μ}, de l'image d'un subordinateur (c'est-à-dire de l'ensemble des valeurs prise par ce subordinateur).

On appelle ici subordinateur un processus croissant continu à droite, non nécessairement nul en 0, à accroissements indépendants et stationnaires, à ceci près qu'il peut prendre la valeur $+\infty$.

Démonstration : On définit le processus (τ_t) comme l'inverse continu à droite du temps local (L_t) :

$$\tau_t = \inf\{s : L_s > t\}$$

Ce processus vérifie la relation

$$\tau_{t+s} = \tau_t + \tau_s \circ \theta_{\tau_t} \quad \text{p.s.}$$

comme nous l'avons vu au chapitre VII. Il résulte alors de la propriété de régénération appliquée au temps d'arrêt $\tau_t = D_{\tau_t}$ p.s. que le processus (τ_t) est un subordinateur. L'image de (τ_t) est indistinguable de l'ensemble C_d des points de croissance à droite de (L_t), c'est-à-dire du fermé droit minimal d'adhérence M (on rappelle que M est indistinguable de l'ensemble C des points de croissance de (L_t)). Le corollaire est donc établi.

C.Q.F.D.

Remarque. Dans le chapitre suivant nous utiliserons ce corollaire pour étudier les ensembles régénératifs.

UN THEOREME DE REPARTITION DU TEMPS LOCAL

Le théorème qui suit généralise un résultat de KESTEN (voir l'exposé de MEYER [5]) et nous sera utile pour l'approximation du temps local à l'aide des excursions. On notera que le temps d'arrêt T n'est pas supposé fini P^{x_o}-p.s. comme dans [5].

THEOREME X.3.- *Soient* M *un ensemble régénératif régulier,* (L_t) *son temps local,* T *un temps d'arrêt terminal parfait de la famille* $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ *(relativement aux opérateurs de translation* (θ_t)*). Alors pour la loi* P^{x_o}

1) L_T *est une variable exponentielle*

2) *Les variables* L_T *et* i_T *sont indépendantes.*

Démonstration : Pour tout $t \geq 0$ on a

$$\{L_T > t\} = \{T > \tau_t\}$$

où le processus (τ_t) a été défini précédemment ; par suite

$$\begin{aligned}\{L_T > s+t\} &= \{T > \tau_{s+t}\} \\ &= \{T > \tau_s + \tau_t \circ \theta_{\tau_s}\} \text{ p.s.,} \\ &= \{T > \tau_s\} \cap \theta^{-1}_{\tau_s}\{T > \tau_t\} \text{ p.s.}\end{aligned}$$

où dans la dernière égalité on a utilisé la propriété de Markov forte au temps τ_s du temps terminal parfait T. On applique alors la propriété de régénération (1) au temps $\tau_s = D_{\tau_s}$ p.s. , avec $A = \{T > \tau_s\}$ $(A \in \mathcal{F}_{\tau_s}$ d'après le lemme I.1) et $B = \{T > \tau_t\}$; il vient

$$P^{x_o}\{L_T > s+t\} = P^{x_o}\{L_T > s\}\, P^{x_o}\{L_T > t\}$$

d'où le point 1) du théorème.

D'autre part on a

$$\{L_T > s,\ i_T \in A\} = \{T > \tau_s\} \cap \theta^{-1}_{\tau_s}\{i_T \in A\}$$

et le point 2) résulte encore de la propriété de régénération au temps τ_s.

C.Q.F.D.

Remarque. Le processus (i_t) est fortement markovien et (L_t) est un temps local en $[x_o]$ pour ce processus ; le théorème X.3 peut également se démontrer en appliquant le résultat de KESTEN à ce processus.

APPROXIMATION DU TEMPS LOCAL A L'AIDE DES EXCURSIONS

Nous supposons l'ensemble M régulier et p.s. de mesure de Lebesgue nulle. Soit (L_t) son temps local. Il résulte de la proposition VI .1 et du théorème VI .2 que l'on a p.s.

$$L_t = \int_0^t S(1-e^{-R}) \circ X_s \, dH_s$$

Nous allons donner des résultats d'approximation du processus (L_t) à l'aide des excursions du processus (X_t) par rapport au point x_o.

Soit $\{U_n\}$ une suite croissante de parties de Ω admettant pour limite $\{R>0\}$ et telle que les variables

$$T^n = \inf\{t>0 : i_t \in U_n\} \text{ et } R_{T^n}$$

soient strictement positives P^{x_o}-p.s. On note pour tout n

$$T_o^n = 0 \ , \ D_o^n = R$$

et par récurrence on définit les variables $(T_k^n)_{k\geq 1}$ de la manière suivante :

$$T_{k+1}^n = D_k^n + T^n \circ \theta_{D_k^n} \ , \ D_{k+1}^n = D_{T_{k+1}^n}$$

Posons encore

$$N_t^n = \sum_{k=1}^{\infty} I_{[T_k^n, +\infty[}(t) = \sup\{k : T_k^n \leq t\}$$

Avec ces notations on a le résultat suivant :

THEOREME X.4.-

$$L_t = \lim_{P^{x_o}\text{-p.s.}} N_t^n \, E^{x_o}\Big[\sum_{\substack{0<u\leq T^n \\ u\in G}} (1-e^{-R_u})\Big]$$

(G désigne comme d'habitude l'ensemble des extrêmités gauches des intervalles contigus à M).

<u>Remarque.</u> D'après la proposition VII.1 l'énoncé du théorème peut aussi s'écrire

$$L_t = \lim_{P^{x_o}\text{-p.s.}} N_t^n \, E^{x_o}[L_{T^n}]$$

et nous retrouvons alors la forme du résultat de SMYTHE [6]. La forme que nous avons donnée a l'avantage d'exprimer complètement (L_t) à l'aide des excursions.

<u>Démonstration du théorème</u> X.4. La suite de temps d'arrêt $\{T^n\}$ décroît vers le temps d'entrée du processus (i_t) dans l'ensemble $\{R>0\}$, qui est nul P^{x_o}- p.s. puisque M a une mesure de Lebesgue p.s. nulle. Par continuité de (L_t) on a donc $L_{T^n} \downarrow 0$ p.s. . Par ailleurs L_{T^n} est une variable exponentielle (théorème X.3), donc pour n assez grand L_{T^n} est intégrable et $E^{x_o}[L_{T^n}] \to 0$.

De plus la variable L_{T^n} est indépendante de i_{T^n} d'après le théorème X.3. Il est alors facile de voir que l'on peut appliquer la méthode de R.T. SMYTHE. Nous allons simplement indiquer les étapes de la démonstration dans le cas récurrent (M est p.s. non borné).

1) On pose

$$K_t^n = \sup\{k : R_{T_o^n} + R_{T_1^n} + \ldots + R_{T_{k-1}^n} \leq t\} \qquad (K_t^n \geq N_t^n)$$

et on démontre que $K_t^n - N_t^n \to 0$ P^{x_o}-p.s. . On est alors ramené à montrer que

$$L_t = \lim_{P^{x_o}\text{-p.s.}} K_t^n \ell^n \quad , \quad \text{où } \ell^n = E^{x_o}[L_{T^n}] \, .$$

On notera que $E^{x_o}[K_t^n] < \infty$ grâce à l'hypothèse $R_{T^n} > 0$ P^{x_o}-p.s. et à l'indépendance des variables $R_{T_k^n}$, $k \geq 0$.

2) $$\sum_{k=0}^{K_t^n - 1} L_{T^n} \circ \theta_{D_k^n} - K_t^n \ell^n \xrightarrow{\mathbb{L}^2(P^{x_o})} 0$$

3) $$\sum_{k=0}^{K_t^n - 1} L_{T^n} \circ \theta_{D_k^n} \xrightarrow{P^{x_o}\text{-p.s.}} L_t$$

4) De 2) et 3) on déduit l'existence d'une suite croissante (n_j) d'entiers telle que

$$K_t^{n_j} \ell^{n_j} \xrightarrow{P^{x_o}\text{-p.s.}} L_t$$

puis la convergence cherchée.

<u>EXEMPLES</u>. On peut choisir $U_n = \{R \geq \frac{1}{n}\}$. Pour toute suite $\{V_n\} \downarrow \{x_o\}$ de voisinages de x_o on peut également choisir $U_n = \{X_o \in V_n^c\}$.

<u>REFERENCES</u>

[1] J. HOFFMANN-JØRGENSEN <u>Markov Sets</u>. Mathematica Scandinavca, 24, fasc. 2 (1969)

[2] P.A. MEYER <u>Ensembles régénératifs, d'après Hoffmann-Jørgensen</u>. Séminaire de Probabilités IV.Lecture Notes in Mathematics 124, Springer 1970.

[3] B. MAISONNEUVE <u>Ensembles régénératifs</u>, <u>temps locaux et subordinateurs</u>. Séminaire de Probabilités V , Lecture Notes in Mathematics 191, Springer 1971.

[4] R.M. BLUMENTHAL and R.K. GETOOR <u>Markov Process and Potential Theory</u>. Academic Press 1968.

[5] P.A. MEYER <u>Un théorème de répartition des temps locaux</u>. Séminaire de probabilités V, Lecture Notes in Mathematics 191, Springer 1971.

[6] R.T. SMYTHE <u>Approximation of local times at regular boundary points of a Markov chain</u>. Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie <u>20</u>, (1971),pp.134-142.

[7] B. MAISONNEUVE et Ph. MORANDO <u>Temps local d'un ensemble régénératif.</u> Séminaire de Probabilités IV. Lecture Notes in Mathematics 124. Springer 1970.

CHAPITRE XI

ETUDE DES ENSEMBLES REGENERATIFS REGULIERS A L'AIDE DES SUBORDINATEURS

PRELIMINAIRES

Soit M un ensemble régénératif au sens de la définition X.1. Nous supposerons que M est régulier ; c'est-à-dire que $P^{x_o}\{R=0\}=1$ ou, de manière équivalente, que M est p.s. parfait (proposition X.1). Nous avons établi dans le chapitre précédent que le fermé droit minimal $\underline{M}$ est alors indistinguable de l'image d'un subordinateur, à savoir le processus (τ_t) inverse continu à droite du temps local (L_t).

Nous n'étudierons l'ensemble M que pour la loi $P=P^{x_o}$: l'étude de M pour une loi P^{μ} quelconque se déduit de la précédente par la propriété de régénération au temps R. Dans tout ce chapitre p.s. signifiera donc P-p.s.

Le subordinateur (τ_t) admet la décomposition classique suivante (noter que $\tau_o=0$ p.s.)

$$\tau_t = \alpha t + \sum_{0<s\leq t} \Delta \tau_s$$

où $\Delta \tau_s = \tau_s - \tau_{s-}$ si $\tau_{s-}<\infty$, 0 si $\tau_{s-}=\infty$. On en déduit facilement que, si I désigne l'image $\{\tau_s, s\geq 0\}$ du subordinateur (τ_s) et m la mesure de Lebesgue, pour tout $t\geq 0$, on a

$$m(I\cap[0,t]) = \alpha L_t \quad \text{p.s.}$$

La mesure de Lévy du subordinateur (τ_t) est une mesure λ sur $]0,\infty]$ telle que $\int_0^\infty (x\wedge 1)\lambda(dx)<\infty$. Rappelons que pour tout borélien B de $]0,\infty]$ l'instant S_B où se produit le premier saut dont l'amplitude appartient à B est une variable exponentielle de paramètre $\lambda(B)$. Si B et B' sont disjoints, les variables S_B et $S_{B'}$ sont indépendantes.

Rappelons aussi qu'un subordinateur est un processus de Hunt et qu'il admet un système de Lévy constitué de fonctionnelle additive $H_t = t$ et du noyau de convolution N lié à la mesure de Lévy λ par la relation

$$N(x,B) = \lambda(B-x)$$

Nous commencerons par étudier la structure de l'ensemble M à l'aide des caractéristiques (α,λ) du subordinateur (τ_t), puis nous montrerons que le processus de l'âge

$$A_t = t - \sup\{s \leq t : s \in M\}$$

est markovien, en utilisant le système de Lévy (H,N) et la formule de WEIL de conditionnement par rapport au passé strict ([1] ou [2]) .

STRUCTURE DES ENSEMBLES REGENERATIFS REGULIERS

THEOREME XI.1.- 1) M <u>est</u> p.s. <u>borné ou</u> p.s. <u>non borné selon que</u> $\lambda\{+\infty\} > 0$ <u>ou</u> $\lambda\{+\infty\} = 0$

2) <u>La mesure de Lebesgue de</u> M <u>est</u> p.s. <u>nulle ou</u> p.s. <u>strictement positive selon que</u> $\alpha = 0$ <u>ou</u> $\alpha > 0$

3) M <u>est</u> p.s. <u>d'intérieur vide ou</u> p.s. <u>d'intérieur non vide selon que</u> $\lambda]0,+\infty] = +\infty$ <u>ou</u> $< +\infty$.

<u>Démonstration</u> : Le premier point résulte de ce que la variable $S = \inf\{t : \tau_t = +\infty\}$ est une variable exponentielle de paramètre $\lambda\{+\infty\}$.

D'autre part l'ensemble $\underline{M}$ est indistinguable de l'image I du subordinateur (τ_t) , donc pour tout $t \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} m(M \cap [0,t]) &= m(\bar{I} \cap [0,t]) \quad \text{p.s.} \\ &= \alpha L_t \end{aligned}$$

Comme $L_t > 0$ p.s. le point 2) en résulte.

Si $\lambda]0,+\infty] = +\infty$ l'image I est p.s. d'intérieur vide car (τ_t) saute instantanément ; si $\lambda]0,+\infty]<+\infty$ on doit avoir $\alpha>0$ puisque M est régulier : l'ensemble M est alors réunion d'une suite d'intervalles disjoints. Le point 3) en résulte.

C.Q.F.D.

THEOREME XI.2.- <u>Soient</u> M_t <u>et</u> $\underline{M}_t$ <u>les coupes en</u> t <u>des ensembles</u> M <u>et</u> $\underline{M}$. <u>Alors pour tout</u> $t\geq 0$ <u>on a</u>

(1) $$P(M_t\setminus \underline{M}_t) = 0$$

<u>Démonstration</u>. (*) On a

$$P(M_t\setminus\underline{M}_t) = P(\tau_{L_{t^-}} = t,\ \tau_{L_t} > t)$$

Comme L_t est le temps d'entrée du processus (τ_s) dans le fermé $[t,+\infty]$ et que (τ_s) est un processus de Hunt, le deuxième membre de l'égalité précédente est nul d'après un résultat classique (WEIL [1], DELLACHERIE [3]).

<u>Remarque</u>. La relation (1) faisait partie des hypothèses de HOFFMANN-JØRGENSEN [4].

COROLLAIRE XI.1. - <u>Pour tout</u> $t>0$ <u>et tout</u> $a>0$ $P\{A_t=a\} = 0$.

<u>Démonstration</u> : Si $a>t$ $\{A_t=a\} = \emptyset$; si $a=t$ $P\{A_t=a\} = 0$ à cause de la régularité de x_0 . Si $a<t$ $P\{A_t=a\} = P\{M_{t-a}\setminus\underline{M}_{t-a}\} = 0$ à cause du théorème XI.2.

LE PROCESSUS DE L'AGE (A_t)

Pour éviter le cas trivial $A_t\equiv 0$ <u>nous supposerons que</u> $\lambda]0,+\infty]>0$.

DEFINITION XI.1.- <u>On pose pour tout</u> $a\geq 0$

$$T^a = \inf\{t>0 : A_t= a\}$$

PROPOSITION XI.1.- <u>Soit</u> $c=\inf\{a>0 : \lambda]a,+\infty]=0\}$. <u>On a</u>

$$T^a <+\infty \quad \text{p.s.} \quad \underline{\text{pour}} \quad a<c$$

$$T^a = +\infty \quad \text{p.s.} \quad \underline{\text{pour}} \quad a\geq c$$

(*) On peut aussi démontrer le théorème XI.2 en remarquant que le processus (D_t) est quasi-continu à gauche, donc n'a pas de discontinuité fixe.

<u>Démonstration</u> : L'instant L_{T^a} du premier saut de (τ_t) ayant une amplitude dans l'intervalle $]a,+\infty]$ est une variable exponentielle de paramètre $\lambda]a,+\infty]$. Par conséquent

si $a<c$, $\lambda]a,+\infty]>0$ donc $L_{T^a}<\infty$ p.s. et $T^a<\infty$ p.s.

si $a\geq c$, $\lambda]a,+\infty]=0$ donc $L_{T^a}=+\infty$ p.s. et $T^a=+\infty$ p.s.

C.Q.F.D.

DEFINITIONS XI.2.- <u>Pour tout borélien</u> B <u>de</u> $\overline{\mathbb{R}}_+$ <u>et tout</u> $t\geq 0$ <u>posons</u>

1) $F(t,B) = P\{A_t\in B\}$

2) $P_t(a,B) = P\{A_{T^a+t}\in B\}$ <u>si</u> $0\leq a<c$

$= I_B(a+t)$ <u>si</u> $a\geq c$

3) $R(a,B) = P\{R_{T^a}\in B\}$ <u>si</u> $a\geq 0$.

On notera que P_t et R sont des noyaux sur $\overline{\mathbb{R}}_+$, que $P_t(0,B)=F(t,B)$ et $R(0,B) = I_B(0)=F(0,B)$. Pour $a>0$ la mesure $R(a,.)$ est portée par $\overline{\mathbb{R}}_+\setminus\{0\}$ et pour $a=0$ elle est concentrée en 0 . Le noyau R est lié au noyau H de HOFFMANN-JØRGENSEN par la relation

$$R(a,B) = H(a,a+B).$$

Les deux propositions suivantes se démontrent à l'aide de la propriété de régénération (cf. [4]). La troisième relie le noyau R à la mesure de Lévy λ .

PROPOSITION XI.2.- <u>Pour</u> $a,s\geq 0$ <u>on a</u>

$$P_s(a,B)=I_B(a+s)R(a,]s,\infty]) + \int_{[0,s]} F(s-u,B)R(a,du) .$$

PROPOSITION XI.3.- <u>Pour</u> $s,t\geq 0$ <u>on a</u>

$$P[A_{t+s} \in B \mid \mathcal{F}_{D_t}] = I_B(A_t + s)\, I_{\{R_t > s\}} + F(s-R_t, B) I_{\{R_t \leq s\}}$$

PROPOSITION XI.4.- <u>Pour tout</u> $a \in]0,c[$ <u>et tout borélien</u> B <u>de</u> $\overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{0\}$ <u>on a</u>

$$R(a,B) = \frac{\lambda(a+B)}{\lambda]a,+\infty]}$$

<u>Démonstration</u> : Posons

$$C = a + B$$

$$C' =]a,+\infty] \setminus (a+B)$$

Le temps S (resp. S') du premier saut de (τ_t) ayant une amplitude dans l'ensemble C (resp. C') est une variable exponentielle de paramètre $\lambda(C)$ (resp. $\lambda(C')$). Comme les ensembles C et C' sont disjoints les variables S et S' sont indépendantes ; la proposition résulte alors de ce que $R(a,B) = P\{S < S'\}$ et d'un calcul classique.

C.Q.F.D.

Le théorème qui suit est crucial.

THEOREME XI.3.- <u>Pour tout borélien</u> B <u>de</u> $\overline{\mathbb{R}}_+$ <u>et tout</u> $t \geq 0$ <u>on a</u>

(1) $$P[R_t \in B \mid \mathcal{G}_t] = R(A_t, B) \quad \text{p.s.}$$

<u>où</u> $\mathcal{G}_t$ <u>désigne la tribu engendrée par les variables</u> A_s, $s \leq t$.

<u>Démonstration</u> : <u>Sur l'ensemble</u> $\{A_t = 0\}$ on a $R(A_t, B) = I_B(0)$, et $R_t = 0$ p.s. à cause du théorème XI.2 , d'où l'égalité (1).

Il reste à établir la formule (1) <u>sur l'ensemble</u> $\{A_t > 0\}$ pour $t > 0$. Le temps d'entrée du processus (τ_t) dans l'ensemble $[t,+\infty]$ est égal à L_t ; si $(\mathcal{B}_t)$ désigne la famille des tribus naturelle (et satisfaisant aux conditions habituelles) du processus (τ_t) , la formule de WEIL de conditionnement par rapport au passé strict appliquée au temps L_t s'écrit alors, en posant $N(x,C) = \lambda(C-x)$ et en remarquant que $A_t = t - \tau_{L_t^-}$

(2) $$P\{\tau_{L_t} \in t + B | \mathcal{B}_{L_{\bar{t}}}\} = \frac{N(\tau_{L_{\bar{t}}}, t+B)}{N(\tau_{L_{\bar{t}}},[t,+\infty])} = \frac{\lambda(A_t+B)}{\lambda[A_t,+\infty]} ,$$

p.s. sur l'ensemble $\{0<\lambda\{A_t,+\infty\}<\infty\ ,\ \tau_{L_{\bar{t}}} \notin [t,+\infty]\}$. La condition $\tau_{L_{\bar{t}}} \notin [t,-\infty]$ est p.s. vérifiée sur $\{A_t>0\}$, et de même $0<\lambda[A_t,+\infty]<\infty$ p.s. sur $\{A_t>0\}$ puisque $A_t<c$ p.s. d'après la proposition XI.1. D'autre part, $\lambda[A_t,\infty] = \lambda]A_t,\infty]$ p.s. car pour chacun des atomes a de la mesure λ on a $P\{A_t=a\} = 0$. La formule (1) sur $\{A_t>0\}$ résulte alors de la formule (2), de la proposition XI.4, de la relation $\tau_{L_t} = D_t$ p.s. et de l'inclusion $\mathcal{B}_{L_{\bar{t}}} \supset \mathcal{G}_t$ (en effet $\mathcal{G}_t$ est engendrée par les variables $\tau_{L_{\bar{s}}}$, $s\leq t$, aux ensembles négligeables près).

C.Q.F.D.

THEOREME XI.4.- <u>Pour</u> $s,t\geq 0$ <u>et</u> B <u>borélien de</u> $\mathbb{R}_+$ <u>on a</u>

$$P\{A_{t+s}\in B|\mathcal{G}_t\} = P_s(A_t,B) \quad \text{p.s.}$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit d'appliquer successivement la proposition XI.3, le théorème XI.3 et la proposition XI.2.

Nous renvoyons à l'exposé de MEYER pour la démonstration de ce que les noyaux P_t forment un <u>semi-groupe de Markov sur</u> $\mathbb{R}_+$ et que, si $\lambda]0,+\infty]=+\infty$, le semi-groupe (P_t) est fellérien pour la topologie droite de $\mathbb{R}_+$; dans ce dernier cas le processus des âges est donc <u>fortement markovien.</u>

Pour les relations entre les caractéristiques de KRYLOV et YUSHKEVICH et le subordinateur associé à un ensemble régénératif régulier d'intérieur vide on pourra consulter [5] et [6].

REFERENCES

[1] M. WEIL — C.R.Acad.Sc. Paris, t. 268, Série A (1969).
C.R.Acad.Sc. Paris, t. 270, Série A (1970).

[2] M. WEIL — Conditionnement par rapport au passé strict. Séminaire de Probabilités V, Lecture Notes in Mathematics 191, Springer 1971.

[3] C. DELLACHERIE — Au sujet des sauts d'un processus de Hunt. Séminaire de Probabilités IV, Lecture Notes in Mathematics 124, Springer 1970.

[4] J. HOFFMANN-JØRGENSEN — Markov Sets. Mathematica Scandinavca, 24, fasc. 2 (1969).

[5] B. MAISONNEUVE — Ensembles régénératifs, temps locaux et subordinateurs. Séminaire de Probabilités V, Lecture Notes in Mathematics 191, Springer 1971.

[6] J. HOROWITZ — Semilinear Markov process. Subordinators and renewal theory. Z.Wahrsch. 24 (1972). Springer.

SYSTEMES REGENERATIFS

Abstract

Regenerative systems are defined as processes satisfying the Markov property on a given renewal set. This altervatively corresponds to a revewal theory which takes into account not only the age of the individuals, but their whole evolution. Various Markov processes will be associated with a regenerative systems, and, under regularity assumptions, local times will be defined on the renewal set. This theory also provides different decompositions of a strong Markov process with respect to a boundary.