Astérisque

MONIQUE LEJEUNE-JALABERT
BERNARD TEISSIER

Transversalité, polygone de Newton, et installations (notes prises par Margherita Galbiati)

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 75-119
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__75_0>

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

TRANSVERSALITE, POLYGONE DE NEWTON, ET INSTALLATIONS

Monique LEJEUNE-JALABERT - Bernard TEISSIER

(Notes prises par Margherita GALBIATI)

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous présentons et étudions un ensemble de notions qui constitue une généralisation, au cas d'un germe d'espace analytique complexe quelconque, de la construction du polygone de Newton d'un germe de courbe plane.

Rappelons brièvement quelques points importants de cette construction. Soit $(X,0) \subset (\mathbb{C}^2,0)$ un germe de courbe plane. Si l'on choisit des coordonnées (w,z) sur $\mathbb{C}^2$, et une équation $f = 0$ pour X, on peut dans le développement

$$f = \sum c_{a,b} \, z^a \, w^b \qquad (c_{a,b} \in \mathbb{C})$$

considérer l'ensemble des couples $(b,a) \in \mathbb{N}^2 \subset \mathbb{R}^2_+$ tels que $c_{a,b} \neq 0$. On obtient ainsi un essaim $\Delta(f)_{(z,w)}$ de points de $\mathbb{R}^2_+$. L'ensemble $\bigcup_{p \in \Delta(f)_{(z,w)}} (p + \mathbb{R}^2_+)$ a une enveloppe convexe, ligne brisée le séparant de l'origine $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. C'est le polygone de Newton de f dans les coordonnées (z,w). On vérifie facilement qu'il ne dépend pas du choix du générateur f de l'idéal définissant X dans $\mathbb{C}^2$ en 0, et qu'il ne dépend en fait que du choix d'un germe de courbe lisse $(W,0)$ comme axe des w, et du choix d'une rétraction $r : (\mathbb{C}^2,0) \longrightarrow (W,0)$. Classiquement, le polygone de Newton décrit une méthode par approximations successives pour le calcul des racines de l'équation $f(z,w) = 0$ comme fonctions multiformes de w.

Si nous supposons X analytiquement irréductible à l'origine, un certain nombre de faits importants se manifeste : tout d'abord, dans ce cas, le polygone de Newton n'a qu'un seul côté, quel que soit le choix de coordonnées. (Traditionnellement, on exclut les côtés qui coïncident avec l'un des axes de $\mathbb{N}^2$). La pente du côté du polygone de Newton peut s'écrire $-\frac{1}{d}$ où d est un nombre rationnel, dont un peu d'expérimentation montre qu'il peut servir à mesurer le contact de X avec l'axe W choisi (relativement à la rétraction choisie). En fait, dès que l'on a trouvé (W,r) tels que d soit > 1, d ne dépend plus de la rétraction choisie.

De plus, si l'on choisit (W,r) tels que d soit le plus grand possible, on trouve que $d = \frac{m_1}{n_1}$ où (m_1,n_1) est le premier exposant caractéristique de Puiseux de X, qui est connu pour être un invariant du type topologique du plongement $(X,0) \subset (\mathbb{C}^2,0)$. Enfin, si $r = \left[\frac{m_1}{n_1}\right]$ est la partie entière de $\frac{m_1}{n_1}$, r est exactement le nombre de modifications (ou éclatements) de centres ponctuels qu'il faut faire avant de parvenir à un germe de courbe ayant une multiplicité strictement inférieure à celle de X en 0.

Ainsi, le polygone de Newton décrit non seulement un processus d'approximation, mais contient déjà, dans des coordonnées bien choisies, des invariants de la singularité de courbe plane $(X,0) \subset (\mathbb{C}^2,0)$ qui sont d'une importance fondamentale non seulement du point de vue de la résolution des singularités mais aussi du point de vue de l'étude topologique. Le fait que le polygone de Newton doive jouer un rôle dans la résolution des singularités tient à ce que trouver des solutions de $f(z,w) = 0$ de la forme $z = \varphi(w^{1/n})$ revient à construire une uniformisante locale t de X en posant $w = t^n$. Le fait qu'il donne un invariant du type topologique de la singularité est un phénomène profond, maintenant bien compris dans notre cas particulier grâce aux travaux de Zariski sur l'équisingularité des courbes planes, mais qui demeure mystérieux en dimension supérieure à 1. (Ce travail (cf. [10]) apporte, nous l'espérons du moins, quelques notions qui seront utiles de ce point de vue).

Enfin, le fait que le polygone de Newton mesure le contact entre W et X est une découverte de Hironaka. La motivation initiale du travail présenté ici a été la démonstration des théorèmes sur la "continuité du contact" dans la théorie du contact de Hironaka (cf. [3] [4]), théorie qui est une des clefs de sa méthode de résolution des singularités.

Avant de décrire la construction générale, faisons quelques remarques de nature technique sur le polygone de Newton d'une courbe plane :

Tout d'abord, le point singulier étant fixé, nous associons un polygone de Newton à la situation décrite par le diagramme :

$$\Delta = \quad X \hookrightarrow C^2 \xrightarrow{r} W$$

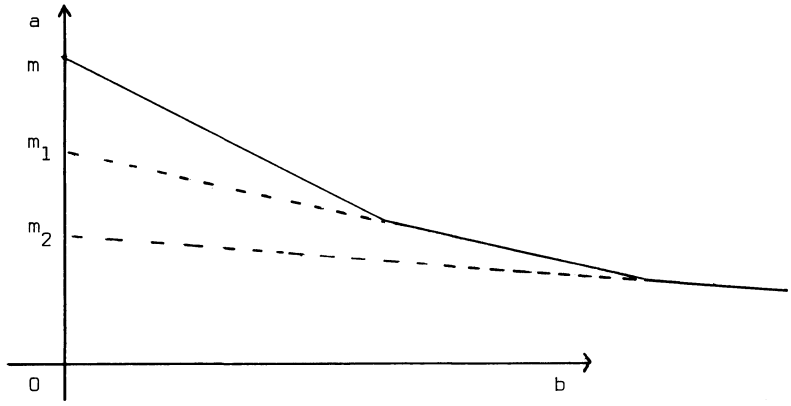
(le choix de W (axe des w) et de r revient au choix d'un tel diagramme). Si nous supposons que $r^{-1}(0)$ n'est pas une composante de X, le théorème de préparation de Weierstrass nous dit que nous pouvons choisir pour l'équation de X (après choix d'une coordonnée locale z sur $r^{-1}(0)$)

$$f(z,w) = z^m + a_{m-1}(w)\, z^{m-1} + \ldots + a_0(w) = 0$$

ou m est le nombre d'intersection de X avec $r^{-1}(0)$, ou encore la multiplicité de $X \cap r^{-1}(0)$.

Si nous supposons que l'espace tangent $T_{r^{-1}(0),0}$ n'est pas contenu dans le cône tangent à X en 0, $C_{X,0}$, c'est-à-dire que $r^{-1}(0)$ est transverse à X, ou comme nous dirons plus rapidement, que r est transverse (ou que Δ est transverse), m est la multiplicité de X en 0.

On constate alors que le polygone de Newton a la forme suivante :



Il est clair que la donnée du polygone de Newton est équivalente à la donnée des pentes de ses différents côtés, et des points d'intersection des supports de ces côtés avec l'axe des a. $(m, m_1, \ldots)$, m correspondant à la multiplicité de $X \cap r^{-1}(0)$ en 0. C'est sous cette forme que nous allons généraliser le polygone de Newton. Les pentes des côtés seront les "tropismes critiques" du § 2, et la généralisation des points $(m, m_1, \ldots)$ sera la collection des "fonctions de Samuel anisotropes" du § 3.

Notre méthode dans le cas général va être l'analogue de la construction suivante dans le cas des courbes planes : W et r étant fixés, on regarde pour chaque $d \in [0, +\infty]$ la plus petite valeur de $a + \frac{b}{d}$ donnée par un couple (a,b) tel que $C_{a,b} \neq 0$. Géométriquement ceci revient à pousser dans $\mathbb{R}^2$ les droites de pente $-\frac{1}{d}$, en partant de celle passant par l'origine, jusqu'à ce que l'on soit arrêté par un point de $\Delta(f)_{(z,w)}$. On note $\nu_d(f)$ (d-ordre de f) la valeur de $a + \frac{b}{d}$ ainsi obtenue.

On considère l'équation quasi-homogène :

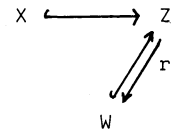
$$(*) \qquad in_0(f, \underline{\Delta}, d) = in_0(f,d)_{(z,w)} = \sum_{a+\frac{b}{d} = \nu_d(f)} C_{a,b}\, z^a\, w^b = 0$$

comme définissant un cône quasi-homogène $C^d_{\Delta,x}$ (qui en réalité habite dans un "espace tangent anisotrope"). On étudie la variation de l'équation (*) avec d, et l'on s'aperçoit qu'elle est localement constante sur $\mathbb{R}^+ - \{d_1, \ldots\ldots, d_s\}$ où les $d_i \in \mathbb{Q}$ correspondent aux côtés du polygone de Newton ($-\frac{1}{d_i}$ est pente du i-ème côté).

D'autre part, les $\nu_{d_i}(f)$ correspondent aux points d'intersection du support du i-ème côté du polygone de Newton avec l'axe des a. Ce sont aussi des multiplicités attachées aux quasi-cônes $C^{d_i}_{\Delta,x}$. Aussi nous allons considérer, à la place du polygone de Newton, des objets géométriques, les cônes tangents anisotropes $C^d_{\Delta,x}$, qui nous permettent, en étudiant leur variation en fonction de d, et leur multiplicité (qui sera en réalité remplacée par la fonction de Samuel anisotrope) d'obtenir toute l'information que contient un polygone de Newton.

Ce point de vue présente différents avantages : dans le cas général, on se heurte en effet à deux difficultés principales, qu'il permet de surmonter simultanément.

D'une part l'espace analytique X singulier en x n'est plus défini par une seule équation, d'autre part, son lieu singulier n'est plus réduit au point x. Une fois introduite la notion de polygone de Newton en un point $x \in X$, il faudra donc étudier sa variation lorsque x se déplace dans le lieu singulier de X. Pour ce faire, nous pouvons utiliser les propriétés de cohérence du faisceau structural d'un espace complexe, et les théorèmes de Cartan. De notre point de vue, on s'aperçoit que l'on peut attacher un polygone de Newton à tout diagramme d'espaces analytiques



où X et W sont des sous-espaces de Z et r est une rétraction de l'immersion de W dans Z, en tout point x de $X \cap W$, sous la seule hypothèse que r soit lisse en x (et non plus W et Z lisses). C'est une telle situation géométrique que nous appelons une (bonne) installation (cf. § 1, 1-1) et notons $\mathbb{A}$.

Au § 1, on trouvera la définition des cônes normaux anisotropes que nous associons à une installation $\mathbb{A}$. On remarquera qu'elle est indépendante de tout choix de coordonnées et de tout choix d'un système de générateurs de l'Idéal définissant X dans Z au voisinage de x. Nous construisons des isomorphismes canoniques qui vont nous permettre de comparer entre eux les cônes normaux anisotropes pour les différentes valeurs de $d \in [0, \infty]$. Ceci nous permet de définir les tropismes critiques de l'installation $\mathbb{A}$ le long d'un sous-espace Y de $W \cap X$ au point x. Lorsque $Y = \{x\}$ ces tropismes critiques nous donnent, comme il a été expliqué plus haut, les pentes des côtés de notre polygone. Le fait qu'on puisse également définir des tropismes critiques de $\mathbb{A}$ le long de Y en x s'avère essentiel pour l'étude de la variation des tropismes

critiques de $\mathcal{A}$ en y quand y varie sur Y dans un voisinage de x. Au § 3, nous introduisons les fonctions de Samuel anisotropes, qui sont les analogues des points d'intersection des supports des côtés du polygone de Newton avec l'axe des a. Ce sont les $H_{\mathcal{A},x}(d_i)$ où $(d_1,\ldots,d_s)$ est l'ensemble des tropismes critiques de $\mathcal{A}$ en x. A ce point, nous avons défini notre polygone de Newton généralisé, associé à l'installation $\mathcal{A}$ en $x \in X \cap W$.

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A},x} = \{(d_1,\ldots,d_s) \; ; \; H_{X\cap r^{-1}(x),x} \; ; \; H_{W,x} \; ; \; H_{\mathcal{A},x}(d_i)_{1 \leq i \leq s}\}$$

(W n'étant plus lisse en x, il est naturel de faire figurer sa fonction de Samuel en x dans le polygone de Newton). Il est déjà remarquable qu'ici les résultats sur toutes les fonctions de Samuel anisotropes, nous permettent de démontrer un résultat sur les fonctions de Samuel ordinaires (cf. cor 4.7.) C'est un critère numérique de platitude du morphisme $C_{X,x} \longrightarrow C_{W,x}$ (où $C_{X,x}$ (resp. $C_{W,x}$) est le cône tangent à X (resp. W) en x).

On introduit ensuite une notion de transversalité anisotrope. De notre point de vue, la notion de transversalité de la fibre $r^{-1}(x)$ à X en x dans Z (espaces tous 3 singuliers) s'exprime le plus simplement en disant que le morphisme des cônes tangents $d(r|X) : C_{X,x} \longrightarrow C_{W,x}$ est plat. Nous généralisons cette notion aux cônes normaux anisotropes le long d'un sous-espace Y de $W \cap X$ en un point x. (Nous avons ici toujours en vue l'étude de la variation du polygone le long de Y). De plus nous obtenons toute une série de conditions équivalentes (théorème 4.2)de nature technique très variée. Nous montrons aussi que la transversalité est stable par changement de base.

Au § 5, nous entrons dans le vif des difficultés signalées plus haut. On montre comment l'on peut déterminer des systèmes de générateurs pour l'idéal définissant X dans Z en x (les bases standard normalisées de [3]) et nous trouvons un procédé permettant de calculer le 1er tropisme critique $d_{\mathcal{A},x}$ à partir des développements de Taylor des générateurs.

Enfin, la définition suffisamment générale des installations nous permet l'étude locale, du point de vue des installations, de n'importe quel morphisme d'espaces analytiques. Nous en tirons en particulier un critère numérique de platitude d'un morphisme $f : X \longrightarrow W$ en un point $x \in X$, et un résultat analogue pour la platitude tangentielle (i.e. celle de $df : C_{X,x} \longrightarrow C_{X,f(x)}$) en x. Nous y montrons aussi que la platitude tangentielle entraîne la platitude.

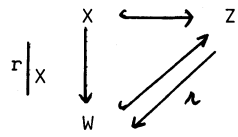
On ne présente pas ici toutes les démonstrations des résultats énoncés. Elles se trouvent dans [10] .

Cependant, on a tenu a en présenter quelques unes en détail pour donner au lecteur une idée des techniques de calcul que nous utilisons. On y trouvera également la démonstration complète des résultats utilisés dans [11] .

§ 1 - CONES ANISOTROPES

1.1 - DEFINITION

On appelle installation, la donnée d'un espace analytique complexe Z, de deux sous-espaces X et W de Z et d'une rétraction lisse de Z sur W. Un tel objet sera noté $\mathbb{A} = (X,Z,W;r)$. Il résume le diagramme suivant :



1.2 - REMARQUES

Puisqu'on travaille localement, on peut toujours supposer $Z = W \times \mathbb{C}^t$. On fixe donc des coordonnées $(z_1,\ldots,z_t)$ sur $\mathbb{C}^t$. Pour la même raison, on peut supposer X et W sous-espaces fermés de Z. On ne fait aucune hypothèse sur la lissité des espaces.

1.3 - DEFINITION

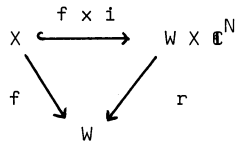
On appelle installation ambiante, toute installation de la forme $(Z,Z,X;r)$. On note $\underline{\mathbb{A}}$ l'installation ambiante $(Z,Z,W;r)$ canoniquement associée à $\mathbb{A} = (X,Z,W;r)$.

1.4 - REMARQUE

Si $f : X \longrightarrow W$ est un morphisme d'espaces analytiques et si $x \in X$, posant

$$N = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}_{X,x} / \mathfrak{m}_{X,x}^2 \quad ,$$

nous pouvons plonger un voisinage de x dans X (noté X par abus de notation) dans $\mathbb{C}^N$. Soit $i : X \hookrightarrow \mathbb{C}^N$ un tel plongement $(i(x) = 0)$. Il lui est associé un diagramme commutatif



où f x i est une immersion, $r = pr_1$
Le choix d'un autre plongement i' donne une situation isomorphe.
A tout choix d'une section σ de r au voisinage de $w = f(x)$, telle que
$\sigma(w) = w \times 0$ est alors associé une installation

$$\mathbb{A}(\sigma) = (X, W \times \mathbb{C}^N, W; r)$$

où W est plongé dans $W \times \mathbb{C}^N$ grâce à σ. On peut donc appliquer la théorie des installations à l'étude locale des morphismes.

On va maintenant définir les cônes normaux anisotropes de $\mathbb{A}$ le long d'un sous-espace analytique fermé Y (non nécessairement lisse, ni même réduit) de $W \cap X$.

Soit $\mathcal{J}$ l'Idéal de $\mathcal{O}_Z$ associé à l'immersion de X dans Z. On considère le germe $\mathcal{J}_x$ en $x \in Y$ de cet Idéal. Désignons par $\mathcal{O}_{W,x}\{z_1,\ldots,z_t\}$ l'anneau local en $x \times 0$ de $W \times \mathbb{C}^t \simeq Z$.
Soit $f \in \mathcal{J}_x$. On a un développement

$$f = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_A \, z^A, \quad f_A \in \mathcal{O}_{W,x}$$

Soit Q l'idéal de $\mathcal{O}_{W,x}$ associé à l'immersion de Y dans W
Pour tout multi-indice A, on désigne par :

$$\nu_Y(f_A) = \sup \{ \mu : f_A \in Q^\mu \}$$

et $in_Y f_A$ l'image de f_A dans la composante de degré $\nu_Y(f_A)$ du germe en x

de $gr_Y W = \bigoplus_{\mu \geq 0} Q^\mu / Q^{\mu+1}$

1.5 - DEFINITION : On appelle d-ordre de f , le long de Y en x relativement à l'installation $\underline{\Delta}$

$$\nu_Y(f\ ;\ \underline{\Delta},\ d) = \inf_{A \in \mathbb{N}^t} \frac{\nu_Y(f_A)}{d} + |A|$$

1.6 - DEFINITION : on appelle d-forme initiale de f le long de Y relativement à l'installation $\underline{\Delta}$, la forme :

$$in_Y(f\ ;\underline{\Delta},\ d) = \sum_{|A| + \nu_Y(f_A)/d = \nu_Y(f\ ;\underline{\Delta},\ d)} in_Y f_A\ Z^A$$

L'ensemble des $in_Y(\ f\ ;\underline{\Delta},\ d)$ lorsque f parcourt $\mathcal{I}_X$ engendre un idéal dans $(gr_Y W)_X\ [Z_1,\ldots,Z_t]$ noté $\mathcal{I}n_Y(\Delta,\underline{\Delta},\ d)_X$. Ces différents germes se recollent en un Idéal de $gr_Y W\ [Z_1,\ldots,Z_t\ ]$ noté $\mathcal{I}n_Y(\Delta,\underline{\Delta},\ d)$.

1.7 - DEFINITION : On appelle cône normal anisotrope de Δ le long de $Y \subset W \cap X$ de tropisme $d \in\ ]0,\ \infty[$ et on note $C^d_{\Delta,Y}$, le sous-espace analytique de $C_{W,Y} \times \mathbb{C}^t$ défini par $\mathcal{I}n_Y(\Delta,\underline{\Delta},\ d)$

1.8.1 REMARQUE : L'existence de $\mathcal{I}n_Y(\Delta,\underline{\Delta},\ d)$ provient du fait que la définition précédente peut être donnée intrinséquement de la façon suivante. Soit $\mathcal{P}$ l'Idéal de $\mathcal{O}_X$ définissant $W \cap X$ dans X, $\mathcal{P}'$ celui définissant $r^{-1}(Y) \cap X$ dans X et $\mathcal{Q}$ celui définissant Y dans X . On a :

si $d \geq 1$ $\quad gr_Y\Delta\ ;\ d = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{N} + 1/d\mathbb{N}} \sum_{a+b/d \geq \mu} \mathcal{P}^a \mathcal{Q}^b \Big/ \sum_{a + \frac{b}{d} > \mu} \mathcal{P}^a \mathcal{Q}^b$

si $d \leq 1$ $\quad \bigoplus_{\mu \in \mathbb{N} + 1/d\mathbb{N}} \sum_{a + \frac{b}{d} \geq \mu} \mathcal{P}'^b \mathcal{Q}^a \Big/ \sum_{a + \frac{b}{d} > \mu} \mathcal{P}'^b \mathcal{Q}^a$

On montre que cette Algèbre est de présentation finie et on peut donc considérer l'espace analytique relatif au dessus de Y

$$\mathrm{Specan}_Y \ \mathrm{gr}_Y \mathcal{A} \ ; \ d$$

Il n'est autre que $C^d_{\mathcal{A},Y}$. On étend cette définition pour d = o et d = ∞ de la façon suivante

$$C^o_{\mathcal{A},Y} = \mathrm{Specan}_Y \ \mathrm{gr}_Y \ (\mathrm{gr}_{r^{-1}(Y)\cap X} X)$$

où l'on considère l'Y-graduation de $\mathrm{gr}_{r^{-1}(Y)\cap X} X$ vu comme $\mathcal{O}_{r^{-1}(Y)\cap X}$ - Module.

$$C^\infty_{\mathcal{A},Y} = \mathrm{Specan}_Y \ \mathrm{gr}_Y \ (\mathrm{gr}_{W\cap X}, X)$$

Ici également on considère l'Y-graduation de $\mathrm{gr}_{W\cap X} X$ associée à sa structure de $\mathcal{O}_{W\cap X}$ - Module.

Dans le cas d = 1, les définitions données coïncident avec

$$\mathrm{Specan}_Y \ \mathrm{gr}_Y X = C_{X,Y}$$

1.8.2 Dans le cas de l'installation ambiante $\mathcal{A}$, on vérifie que $\mathrm{gr}_Y \mathcal{A}$, d est canoniquement isomorphe à $\mathrm{gr}_Y W \otimes_{\mathcal{O}_Y} [\mathrm{gr}_W Z \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_Y]$ et on a donc un isomorphisme canonique (dépendent uniquement des données de $\mathcal{A}$) des espaces analytiques sous-jacents aux cônes.

$$C^d_{\mathcal{A},Y} \xrightarrow{\sim} C_{W,Y} \times_Y [C_{Z,W} \times_W Y]$$

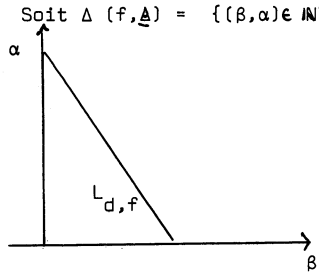
Le choix d'une décomposition de Z comme $W \times \mathbb{C}^t$ permet ensuite d'identifier $C_{Z,W} \times_W Y$ à $Y \times \mathbb{C}^t$.

1.8.3 Pour $0 \leq d \leq 1$ $C^d_{\underline{A},Y}$ ne dépend que de la trace de $r^{-1}(Y)$ sur X. Pour $1 \leq d \leq \infty$ $C^d_{\underline{A},Y}$ ne dépend pas de la rétraction r de l'installation. Pour $d = 1$ $C_{\underline{A},Y} = C^d_{X,Y}$ ne dépend ni de l'un ni de l'autre.

1.9 La situation que nous étudions est donc bien comme annoncée dans l'introduction, une généralisation de la méthode du polygône de Newton.
En fait, écrivant comme plus haut

$$f = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_A z^A \ , \ f_A \in \mathcal{O}_{W,x}$$

Soit $\Delta(f,\underline{A}) = \{(\beta,\alpha) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists A \in \mathbb{N}^t \text{ t.q. } |A| = \alpha, \nu_Y(f_A) = \beta\}$



Soit $E(f,\underline{A}) = \{v \in \mathbb{R}^{+2}, \ v \in \Delta(f;\underline{A}) + \mathbb{R}^{+2}\}$
Soit $F(f,\underline{A})$ l'enveloppe convexe de $E(f,\underline{A})$, et $P(f,\underline{A})$ la partie de la frontière de $F(f,\underline{A})$ qui n'est pas contenue dans les deux axes.

C'est le polygone de Newton de f par rapport à $\underline{A}$, relatif à Y en x.
Soit $d \neq 0$, soit $I(d,\mu)$ (resp. $I^+(d,\mu)$) l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,x}$ engendré par les $f_A z^A$ tels que

$|A| + \nu_Y(f_A)/_d \geq \mu$ (resp. $> \mu$)

Si $f = \Sigma f_A z^A$, $\nu_Y(f,\underline{A},d) = \sup\{\mu \in \mathbb{R}^+, \ f \in I(d,\mu)\}$

Soit $L_{d,f} = \{ (\beta,\alpha) \in \mathbb{R}^{+2} \mid \alpha + \beta/_d = \nu_Y(f,\underline{A},d) \}$

$L_{d,f}$ est la première droite telle que $P(f,\underline{A})$ soit tout entier situé dans la région de $\mathbb{R}^{+2}$ délimitée par cette droite qui ne contient pas l'origine et $in_Y(f;\underline{A},d) = \Sigma_{(\nu_Y(f_A),|A|) \in L_{d,f}} in_Y f_A z^A$

Cette construction permet de comparer les $C^d_{\underline{A},Y}$ quand d varie, puisque ce sont tous des sous-espaces de $C_{W,Y \times_Y [C_{Z,W} \times_W Y]}$.

1.10 THEOREME DE FINITUDE :

Soit $\mathbb{A} = (X,Z,W;r)$ une installation. Soit $Y \subset W \cap X$, et $x \in Y$. Il existe une suite finie de rationnels

$$d_o < d_1 < \ldots < d_s < d_{s+1}$$

où $d_o = 0$, $d_{s+1} = \infty$, telle que l'on ait

(1) Pour tout $1 \leq i \leq s+1$, le germe de $C^d_{\mathbb{A},Y}$ en x est indépendant de $d \in]d_{i-1}, d_i[$

On désigne ce germe par $C_{\mathbb{A},Y}(i)$ et le germe de $C^{d_i}_{\mathbb{A},Y}$ en x par $C_{\mathbb{A},Y,i}$.

(2) $C_{\mathbb{A},Y}(1) = C_{\mathbb{A},Y,o}$

$C_{\mathbb{A},Y}(s+1) = C_{\mathbb{A},Y,s+1}$

(3) $C^d_{\mathbb{A},Y} = C_{W,Y} \underset{Y}{\times} C$ (où C est un sous-cône de $C_{Z,W} \underset{W}{\times} Y$) entraîne $d \in [0,d_1[$

(4) Les cônes $C_{\mathbb{A},Y}(1),\ldots, C_{\mathbb{A},Y}(s+1), C_{\mathbb{A},Y,1},\ldots,C_{\mathbb{A},Y,s}$ sont tous distincts et il n'y a entre eux aucune inclusion non triviale.

1.11 REMARQUE :

De plus on a une immersion fermée

$$(*) \qquad C^o_{\mathbb{A},Y} \hookrightarrow C_{W,Y} \times_Y C_{X \cap r^{-1}(Y),Y}$$

En effet, on a toujours une surjection canonique

$$(**) \qquad gr_Y X \otimes_{O_Y} \varphi_{X \cap r^{-1}(Y)} \longrightarrow gr_{X \cap r^{-1}(Y)} X \longrightarrow 0$$

Elle induit une surjection des Y-gradués des deux membres vus comme $\mathcal{O}_{X\cap r^{-1}(Y)}$ Modules, qui n'est autre que

$$gr_Y W \boxtimes_{O_Y} gr_Y X \cap r^{-1}(Y) \longrightarrow gr_Y \; gr_{X\cap r^{-1}(Y)} X \longrightarrow 0$$

De la même façon, on peut voir que

(***) $$C^{\infty}_{\underline{\Delta},Y} \hookrightarrow C_{W\cap X,Y} \; {}_{X_Y} \; C_{r^{-1}(Y),Y}$$

La démonstration du théorème 1.10 nécessite une série de lemmes qui permettent de comparer les $\mathcal{I}n_Y(\Delta,\underline{\Delta},d)$ quand d varie. En voici quelques uns. Pour alléger l'écriture, on écrira in(f,d) au lieu de $in_Y(f,\underline{\Delta},d)$, on écrira également $\nu(f,d)$ au lieu de $\nu_Y(f,\underline{\Delta},d)$.

1.12 LEMME :

Soient $0 \leq d_1 < d_2 < \infty$ et supposons que $\mathcal{I}n_Y(\Delta,\underline{\Delta},d_2) \subset \mathcal{I}n_Y(\Delta,\underline{\Delta},d_1)$ au voisinage de $\mathfrak{X}$. Si :

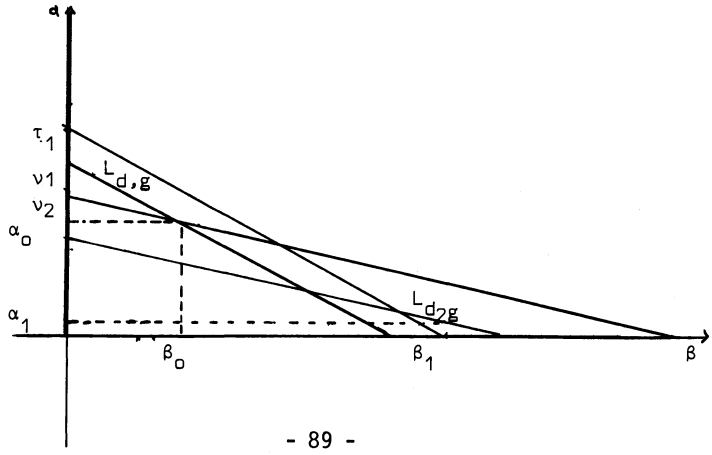
$$M_{\beta_o,\alpha_o} = \sum_{A\in\mathbb{N}^t;\,|A| = \alpha_o,\ \deg F_A = \beta_o} F_A \, Z^A \in gr_Y W[Z_1,\ldots,Z_t]$$

appartient à $\mathcal{I}n_Y(\Delta,\underline{\Delta},d_1)$, il existe $f \in \mathcal{I}_{\mathfrak{X}}$ tel que $M_{\beta_o,\alpha_o} = in(f,d_1)$ et $\nu(f,d_2) = \nu_2 = \alpha_o + \beta_o/d_2$.

Si $d_2 = \infty$, le même résultat reste vrai en remplaçant $\mathcal{I}_{\mathfrak{X}}$ par son complété.

DEMONSTRATION :

Nous allons prouver ce lemme par récurrence sur ν_2. Si $0 < d_2 \leq 1$, le plus petit ν_2 possible est 1, si $1 \leq d_2 < \infty$, c'est $1/d_2$, si $d_2 = \infty$, c'est 0. Dans ces trois cas, tout $f \in \mathcal{I}_{\mathfrak{X}}$ tel que $M_{\beta_o,\alpha_o} = in(f,d_1)$ convient.



En général, soit $g \in \mathcal{J}_x$, $g = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} g_A z^A$ tel que $in(g,d_1) = M_{\beta_o,\alpha_o}$. Soit $\nu_1 = \alpha_o + \beta_o/d_1 = \nu(g,d_1)$ si $d_1 \neq 0$, $= \beta_o$ si $d_1 = 0$. Soit $\mu = \nu(g,d_2)$. On a $\mu \leq \nu_2$. Si on a l'égalité, c'est fini. Si $\mu < \nu_2$, soit β_1 le plus petit β pour lequel il existe $A \in \mathbb{N}^t$ tel que $\nu_Y(g_A) = \beta$, $(\nu_Y(g_A),|A|) \in L_{d_2,g}$ Soit α_1 la valeur de $|A|$ correspondante et $\tau_1 = \beta_1 + \alpha_1/d_1$ si $d_1 \neq 0$, $= \beta_1$ si $d_1 = 0$. On a $\nu_1 < \tau_1$. Comme $\mathcal{J}n_Y(\underline{A},\underline{A},d_2) \subset \mathcal{J}n_Y(\underline{A},\underline{A},d_1)$, chaque composante d_1-homogène de $in(g,d_2)$ appartient à $\mathcal{J}n_Y(\underline{A},\underline{A},d_1)$, en particulier : (*)

$$M_{\beta_1,\alpha_1} = \sum_{A \in \mathbb{N}^t \ |A| = \alpha_1, \nu_Y(g_A) = \beta_1} in_Y g_A \ z^A.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe $h_1 \in \mathcal{J}_x$ tel que $M_{\beta_1,\alpha_1} = in(h_1,d_1)$ et $\nu(h_1,d_2) = \mu$. Posons $g_1 = g - h_1$, $g_1 \in \mathcal{J}_x$, $in(g_1,d_1) = M_{\beta_o,\alpha_o}$ et $\nu(g_1,d_2) \geq \mu$. Si $\nu(g_1,d_2) = \mu$, recommençons avec g_1 la même construction qu'avec g. On détermine β_2,α_2,τ_2 et $\alpha_2 < \alpha_1$. Au bout d'un nombre fini d'opérations, on trouvera donc $g_k \in \mathcal{J}_x$ tel que $in(g_k,d_1) = M_{\beta_o,\alpha_o}$, $\nu(g_k,d_2) > \mu$, puis $f \in \mathcal{J}_x$, tel que $in(f,d_1) = M_{\beta_o,\alpha_o}$ et $\nu(f,d_2) = \nu_2$.

Supposons maintenant $d_2 = \infty$. Comme ci-dessus, étant donné un g, on construit β_1, α_1, τ_1, $g_1 \in \mathcal{J}_x$. Si $\nu(g_1,\infty) = \mu$, on construit β_2,α_2,τ_2, $h_2 \in \mathcal{J}_x$ et $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_2 > \beta_1$, $\tau_2 > \tau_1$ de sorte que

$h_2 \in \hat{M}^{\tau_2}_{Z,x}$ si $d_1 \geq 1$, $\hat{M}^{\tau_2 \ d_1}_{Z,x}$ si $0 < d_1 \leq 1$, $\in \hat{M}^{\alpha_2+\beta_2}_{Z,x}$ si $d_1 = 0$. La suite g_i est donc une suite de Cauchy de $\hat{\mathcal{J}}_x$. Si $g^1 = \lim_{i \to \infty} g_i$, $g^1 \in \hat{\mathcal{J}}_x$, $M_{\beta_o,\alpha_o} = in(g^1,d_1)$ et $\nu(g^1,\infty) > \mu$. On conclut alors comme plus haut.

(*) On dit qu'un élément de $gr_Y W \otimes_{O_Y} [gr_W Z \otimes_{O_W} O_Y]$ est d-homogène si son image par l'isomorphisme

$$gr_Y W \otimes_{O_Y} [gr_W Z \otimes_{O_W} O_Y] \longrightarrow gr_Y \Delta;d$$

est un élément homogène de $gr_Y \Delta;d$.

1.13 - LEMME :

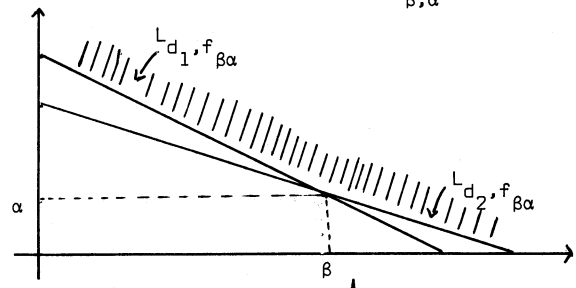
Les hypothèses sont celles du lemme 1.12. Pour $0 \leq d_1 \leq d \leq d_2 < \infty$

$$\mathcal{J}n_Y(\blacktriangle,\underline{\blacktriangle},d_2) \boxtimes_{\mathcal{O}_Y} \sigma_{Y,x} \subset \mathcal{J}n_Y(\blacktriangle,\underline{\blacktriangle},d) \boxtimes_{\mathcal{O}_Y} \sigma_{Y,x} \subset \mathcal{J}n_Y(\blacktriangle,\underline{\blacktriangle},d_1) \boxtimes_{\mathcal{O}_Y} \sigma_{Y,x}.$$

DEMONSTRATION :

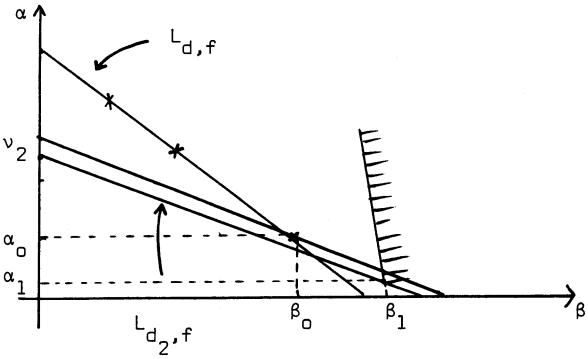
Soient d, $d_1 < d < d_2$ et $f \in \mathcal{J}_x$. Ecrivons $f = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_A z^A$

Considérons $in(f,d_2)$. Il existe $M_{\beta,\alpha}$, $(\beta,\alpha) \in L_{d_2,f}$ comme au lemme 1.12 tels que $M_{\beta,\alpha} \in \mathcal{J}n_Y(\blacktriangle,\underline{\blacktriangle},d_1)$ et $in(f,d_2) = \sum_{\beta,\alpha} M_{\beta\alpha}$



Après ce lemme, il existe donc $f_{\beta\alpha} \in \mathcal{J}_x$ tel que $M_{\beta\alpha} = in(f_{\beta\alpha},d_1)$ et $\nu(f_{\beta\alpha},d_2) = \nu(f,d_2)$. Par suite, $M_{\beta\alpha} = in(f_{\beta\alpha},d)$ et

$$\mathcal{J}n_Y(\blacktriangle,\underline{\blacktriangle},d_2) \boxtimes_{\mathcal{O}_Y} \sigma_{Y,x} \subset \mathcal{J}n_Y(\blacktriangle,\underline{\blacktriangle},d) \boxtimes_{\mathcal{O}_Y} \sigma_{Y,x}.$$



Considérons maintenant $in(f,d)$. Soit β_o le plus grand β pour lequel il existe $A \in \mathbb{N}^t$ tel que $\nu_Y(f_A) = \beta$, $(\nu_Y(f_A), |A|) \in L_{d,f}$. Soit α_o la valeur de $|A|$ correspondante et $\nu_2 = \alpha_o + \beta_o/d_2$. On peut supposer $\nu(f,d_2) = \nu_2$. Sinon $\nu(f,d_2) < \nu_2$. Soit β_1 le plus petit β pour lequel il existe $A \in \mathbb{N}^t$ tel que $\nu_Y(f_A) = \beta_1$, $(\nu_Y(f_A), |A|) \in L_{d_2,f}$. Soit α_1 la valeur de $|A|$ correspondante. Soit $M_{\beta_1,\alpha_1} = \sum_{A \in \mathbb{N}^t, |A| = \alpha_1, \nu_Y(f_A) = \beta_1} in_Y f_A Z^A$. C'est un élément de $\mathfrak{I}n_Y(\underline{A},\underline{A},d_1)$ et appliquons lui le lemme 1.12. Il existe $h_1 \in \hat{\int}_x$ tel que $M_{\beta_1,\alpha_1} = in(h_1,d_1)$ et $\nu(h_1,d_2) = \nu(f,d_2)$. D'où $\nu(h_1,d) > \nu(f,d)$ et posant $f_1 = f - h_1$, $f_1 \in \hat{\int}_x$, $in(f,d) = in(f_1,d)$ et $\nu(f_1,d_2) \geq \nu(f,d_2)$. Si $\nu(f_1,d_2) = \nu(f,d_2)$, on recommence avec f_1 la même construction qu'avec f. On détermine α_2, β_2 et $\beta_1 < \beta_2$. Si $d_2 < \infty$, on trouvera donc au bout d'un nombre fini d'opérations $f_k \in \hat{\int}_x$ tel que $in(f,d) = in(f_k,d)$ et $\nu(f_k,d_2) > \nu(f,d_2)$. Si $d_2 = \infty$, la suite $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de Cauchy converge dans $\hat{\int}_x$ vers un élément f ayant les mêmes propriétés. Dans tous les cas, on peut donc supposer $\nu(f,d_2) = \nu_2$. $A\ M_{\beta_o,\alpha_o} = \sum_{A \in \mathbb{N}^t, \nu_Y(f_A) = \beta_o, |A| = \alpha_o} in_Y f_A Z^A$, on peut appliquer alors le lemme 1.12. Il existe $g_1 \in \hat{\int}_x$ tel que $M_{\beta_o,\alpha_o} = in(g_1,d_1) = in(g_1,d)$ et $\nu(g_1,d_2) = \nu_2$ et on a, si $in(f,d) \neq M_{\beta_o,\alpha_o}$, $in(f,d) = in(g_1,d) + in(f-g_1,d)$. On recommence avec $f - g_1$ la même construction qu'avec f et finalement on montre que $in(f,d) \in \mathfrak{I}n_Y(\underline{A},\underline{A},d_1)$:

1.14. - LEMME :

Pour $0 < d_1 \leq d \leq d_2 \leq \infty$, si $\mathfrak{I}n_Y(\underline{A},\underline{A},d_1) \subset \mathfrak{I}n_Y(\underline{A},\underline{A},d_2)$ alors

$$\mathfrak{I}n_Y(\underline{A},\underline{A},d_1) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x} \subset \mathfrak{I}n_Y(\underline{A},\underline{A},d) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x} \subset \mathfrak{I}n_Y(\underline{A},\underline{A},d_2) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x}$$

La démonstration est duale de la précédente.

1.15 - LEMME :

Pour $0 < d \leq \infty$ $d \notin \mathbb{Q}$, il existe $d' \in]0,d[$ tel que pour tout $\delta \in [d',d]$: $\mathcal{J}n_Y(\blacktriangle,\underline{\blacktriangle},\delta) \boxtimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x} = \mathcal{J}n_Y(\blacktriangle,\underline{\blacktriangle},d) \boxtimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x}$

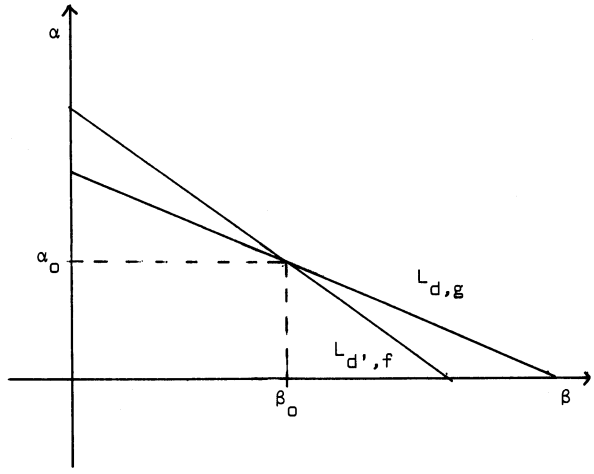
(ce lemme s'applique au cas $d = \infty$).

DEMONSTRATION :

Soit $(f_1,\ldots,f_m)$ un système d'éléments de $\mathcal{J}_x$ tel que $\mathcal{J}n_Y(\blacktriangle,\underline{\blacktriangle},d) \boxtimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x} = (\ldots,in(f_i,d),\ldots)$.

Sur une droite de pente irrationnelle, il existe au plus un point à coordonnées entières non négatives. D'où il existe $d' \in]0,d[$, tel que pour tout $\delta \in [d',d]$, $1 \leq i \leq m$, $in(f_i,\delta) = in(f_i,d)$. Ceci reste vrai si $d = \infty$. Dans tous les cas, $\mathcal{J}n_Y(\blacktriangle,\underline{\blacktriangle},d) \boxtimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x} \subset \mathcal{J}n_Y(\blacktriangle,\underline{\blacktriangle},d') \boxtimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x}$.

On peut supposer évidemment d'irrationnel. Soit $f \in \mathcal{J}_x$; il existe alors (β_o,α_o) tel que $in(f,d') = \sum_{A \in \mathbb{N}^t,\ deg(F_A) = \beta_o,\ |A| = \alpha_o} F_A\, Z^A$.



A in(f,d') appliquons le lemme 1.12. Il existe $g \in \mathcal{J}_{\mathfrak{X}}$ tel que in(g,d') = in(f,d') et $\nu(g,d) = \alpha_o + \beta_o/d$. Sur $L_{d,g}$, le seul point à coordonnées entières est (β_o,α_o) si $d < \infty$. D'où in(g,d) = in(g,d'). Si $d = \infty$, on a de toute façon in(g,d) = in(g,d'). Par suite,

$\mathcal{I}n_Y(\underline{\Delta},\underline{\Delta},d') \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{X}} \subset \mathcal{I}n_Y(\underline{\Delta},\underline{\Delta},d) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{X}}$. En appliquant les lemmes 1.13 et 1.14., on déduit le résultat.

1.16 Remarque : Les lemmes 1.12 à 1.15 et leurs duaux suffisent à montrer l'existence de d_1 et d_{s+1} rationnels.

§ 2 - TROPISMES CRITIQUES

2. 1 DEFINITION : Soit $d \in \mathbb{R}^+$; on dit que d est un tropisme critique de $\mathbb{A}$ le long de Y en x

(a) lorsque $d = 0$, si l'immersion (*) de 1.11 est stricte au voisinage de x

(b) lorsque $d \in]0,\infty[$, si d est l'un des $d_1,\ldots,d_s$ du théorème 1.10.

(c) lorsque $d = \infty$, si l'immersion (* * *) de 1.11 est stricte au voisinage de x .

2.2. On notera $d_{\mathbb{A},Y,x}$ le plus petit tropisme critique.

Soit $\mathbb{A} = (X,Z,W ; r)$ une installation, et soit $\underline{\mathbb{A}} = (Z,Z, W ; r)$ l'installation ambiante associée. On notera $\underline{\mathbb{A}}|W = (W, W, W ; id W)$ la restriction de $\underline{\mathbb{A}}$ à W .

On peut associer canoniquement à ces données, pour $d \in [0,\infty]$ et Y sous-espace analytique de $W \cap X$, une nouvelle installation :

2.3. DEFINITION On appellera installation normale à $\mathbb{A}$ le long de Y , l'installation

$$\mathcal{C}^d_{\mathbb{A},Y} = (C^d_{\mathbb{A},Y} , C^d_{\underline{\mathbb{A}},Y} , C^d_{\underline{\mathbb{A}}| W,Y} ; dr)$$ où dr est le morphisme canonique.

On peut se demander quels sont les tropismes critiques de cette installation (en particulier, apparaissent-ils tous déjà dans la suite des tropismes critiques de $\mathbb{A}$ le long de Y en x).

2.4 PROPOSITION : Identifiant canoniquement $C^\delta_{(\mathcal{C}^d_{\mathbb{A},Y}),Y}$ avec

$$C_{W,Y} \times_Y [C_{Z,W} \times_W Y]$$

le germe de $C^\delta_{(\mathcal{C}^d_{\mathbb{A},Y}),Y}$ en x est celui de $C^d_{\mathbb{A},Y}$ si d n'est pas un tropisme critique $\neq 0$ ou ∞ .

$$= C_{\mathbb{A},Y}(i) \text{ si } d = d_i \text{ et } \delta > d_i$$

$$= C_{\mathbb{A},Y}(i+1) \text{ si } d = d_i \text{ et } \delta < d_i$$

est celui de $C^d_{\mathbb{A},Y}$ si $\delta = d = d_i$

2.5 Remarque : la proposition 2.4 permet de montrer qu'il existe un voisinage U de x dans Y tel que les tropismes critiques de Δ le long de Y en y , $y \in U$, sont extraits de la suite des tropismes critiques de Δ le long de Y en x . On prendra garde que cette suite peut ne pas être identique comme le montre l'exemple suivant : W le parapluie de Whitney (d'équation $x^2 - y^2 t$) , $Z = W \times \mathbb{C}$, X d'équation $z - t$ et Y l'axe des y .

2.6 PROPOSITION : Si $d_{\Delta,Y,x} > 0$, il existe $(f_1,\ldots,f_m)$ un système d'éléments de $\mathcal{J}_x$ (où $\mathcal{J}$ est l'Idéal de $\mathcal{O}_Z$ définissant l'immersion de X dans Z au voisinage de x , et $\mathcal{J}_x$ est son germe en x) tel que :

pour $0 \leq d < d_{\Delta,Y,x}$

(1) $1 \leq k \leq m$, $in_Y(f_k,d)$ est indépendant de d avec

$$in_Y(f_k,d) = 1 \otimes Q_k \in gr_Y W \otimes_{\mathcal{O}_Y} (gr_W Z \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Yx})$$

où Q_k est un élément homogène de $gr_W Z \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x}$.

pour $0 \leq d \leq d_{\Delta,Y,x}$

(2) $$\mathcal{J}n_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x} = (\ldots in(f_k,d),\ldots)$$

Pour qu'il en soit ainsi il suffit qu'il existe un système d'éléments $(f_1,\ldots,f_m)$ de $\mathcal{J}_x$ et $\varepsilon > 0$, tel que pour d, $0 \leq d < \varepsilon$, les conditions (1) et (2) soient vérifiées.

C'est essentiellement un corollaire de 1.12.

§ 3 FONCTION DE SAMUEL ANISOTROPE

3.1 DEFINITION : On appelle d-fonction de Sammuel d'une installation $\mathbb{A} = (X,Z,W ; r)$ en $x \in W \cap X$ l'application

$$H^1_{\mathbb{A},x}(d) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$\mu \longrightarrow \sum_{0 \leq \nu \leq \mu} \dim_{\mathbb{C}} gr^{\nu}_{x} \mathbb{A} \; ; \; d$$

3.2 REMARQUE : $\sum_{0 \leq \nu \leq \mu} \dim_{\mathbb{C}} gr^{\nu}_{x} \mathbb{A} \; ; \; d$ est une somme finie, parce que tous les termes sont nuls, sauf un nombre fini. En fait $\nu \in \mathbb{N} + \frac{1}{d} \cdot \mathbb{N}$.

3.3 DEFINITION On définit pour $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$,

$$H^{i+1}_{\mathbb{A},x}(d) = H^1_{\mathbb{A}\times\mathbb{C}^i,x}(d)$$

où $\mathbb{A}\times\mathbb{C}^i = (X \times \mathbb{C}^i , Z \times \mathbb{C}^i , W \times \mathbb{C}^i ; r \times Id\ \mathbb{C}^i)$.

3.4 DEFINITION On appelle d-fonction caractéristique pour $\mathbb{A}$ en x l'application

$$G_{\mathbb{A},x}(d) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$\mu \longmapsto \dim\ gr^{\mu}_{x} \mathbb{A} ; d$$

3.5 REMARQUE . D'après les définitions précédentes, on voit que

$$H^{i+1}_{\mathbb{A},x}(d) = H^{i}_{\mathbb{A},x}(d) * G_{(\mathbb{C}),o}(d)$$

où $(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}, \mathbb{C}, \mathbb{C}, Id\ \mathbb{C})$ et $*$ indique le produit de convolution (i.e)

$$L_1 * L_2(M) = \sum_{\substack{\mu_1,\mu_2 \in \mathbb{N} + \frac{1}{d}\cdot\mathbb{N} \\ \mu_1 + \mu_2 = \mu}} L_1(\mu_1) \cdot L_2(\mu_2))$$

On a aussi

$$H^1_{\mathbb{A},x}(d) = H^1_{\{x\},x}(d) * G_{\mathbb{A},x}(d)$$

On va maintenant étudier la variation de la δ-fonction de Samuel de $\mathcal{C}^d_{\mathbb{A},x}$ en fonction de $d \in [0,\infty]$.

3.6 THEOREME Soit $\mathcal{A} = (X, Z, W ; r)$ une installation, $x \in W \cap X$ soit δ un réel fixé, $\delta \in]0,\infty[$. Soit $d_1,\dots,d_s$ la suite des tropismes critiques de $\mathcal{A}$ en x , qui appartiennent à $]0,\infty[$. Sur $\mathbb{N}^{\mathbb{R}^+}$ on considère l'ordre produit.
Il existe $H_1,\dots,H_{s+1}$ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{R}^+}$ tel que

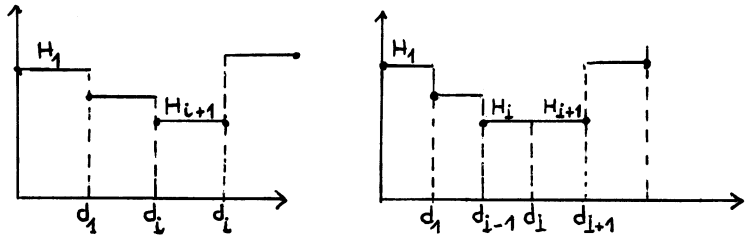
(a) si $\delta \in]d_i, d_{i+1}[$ on ait pour $1 \leq j \leq i$,

$$d \in [d_{j-1}, d_j[: H_{\mathcal{C}^d_{\mathcal{A},x},x}(\delta) = H_j$$

$$d \in [d_i , d_{i+1}] : \quad = H_{i+1}$$

pour $i+1 \leq k \leq s, d \in]d_i , d_{i+1}] : H_{\mathcal{C}^d_{\mathcal{A},x},x}(\delta) = H_{k+1}$

avec $H_1 > H_2 > \dots > H_{i+1} < H_{i+2} < \dots < H_{s+1}$



(a) si $\delta = d_i$ on ait

pour $1 \leq j \leq i$, $d \in [d_{j-1}, d_j[: H_{\mathcal{C}^d_{\mathcal{A},x},x}(\delta) = H_j$

$$d = d_i : H_{\mathcal{C}^d_{\mathcal{A},x},x}(\delta) = H_{\mathcal{A},x}(d_i)$$

pour $i \leq k \leq s$, $d \in]d_k , d_{k+1}] : H_{\mathcal{C}^d_{\mathcal{A},x},x}(\delta) = H_{k+1}$

avec $H_1 > H_2 > \dots > H_i = H_{\mathcal{A},x}(d_i) = H_{i+1} < H_{i+2} < \dots < H_{s+1}$

La démonstration de ce théorème repose sur 2.4 et sur le théorème de Jordan-Hölder.

On en déduit :

3.7 COROLLAIRE : Sous les hypothèses du théorème 3.6 , on a

$$H_{\Delta,x}(\delta) \leq H_{\underline{\Delta}|\,W,x}(\delta) * G_{X \cap r^{-1}(X),x}$$

et on a égalité si et seulement si

$$d_{\Delta,x} \geq \delta$$

DEMONSTRATION On remarque qu'on a toujours

$$H_{\Delta,x}(\delta) = H_{\mathcal{C}^{\delta}_{\Delta,x},x}(\delta) \leq H_{\mathcal{C}^{\circ}_{\Delta,x},x}(\delta)$$

Si on désigne par $\tilde{\mathcal{C}}$ l'installation

$$(C_{W,x} \times C_{X \cap r^{-1}(x),x}\ ,\ C_{W,x} \times C_{r^{-1}(x),x}\ ,\ C_{W,x}\ ;\ p_1)$$

on a

$$H_{\mathcal{C}^{\circ}_{\Delta,x},x}(\delta) \leq H_{\tilde{\mathcal{C}},x}(\delta)$$

mais

$$H_{\tilde{\mathcal{C}},x}(\delta) = H_{\underline{\Delta}|W,x}(\delta) * G_{X \cap r^{-1}(x),x} \quad .$$

§ 4 d-TRANSVERSALITE

Soit $\mathbb{A} = (X, Z, W ; r)$ une installation, Y un sous-espace de $X \cap W$, x un point de Y. Soit $d \in]0, +\infty[$.

4.1 DEFINITION : $\mathbb{A}$ est d-transverse le long de Y en x si le morphisme naturel :

$$C^d_{\mathbb{A},Y} \longrightarrow C^d_{\underline{\mathbb{A}}\,W,Y}$$

est plat en x.

4.2 THEOREME : Soit $dr : C^d_{\underline{\mathbb{A}},Y} \longrightarrow C^d_{\underline{\mathbb{A}}|W,Y}$ le morphisme naturel. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathbb{A}$ est d-transverse le long de Y en x

(2) $C_{X \cap r^{-1}(Y),Y} \longrightarrow Y$ est plat en x et

$$d_{\mathbb{A},Y,x} \geq d .$$

(3) $C^d_{\mathbb{A},Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x et le germe en x de $\mathrm{Tor}_1^{gr_Y\underline{\mathbb{A}}|W;d}(gr_Y\mathbb{A} ; d, \mathcal{O}_Y)$ est nul.

(4) (3) + $C^d_{\mathbb{A},Y} \cap dr^{-1}(Y) = C_{X \cap r^{-1}(Y),Y}$

(5) $C^d_{\mathbb{A},Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x et le germe en x de $\mathrm{Tor}_1^{gr_Y\mathbb{A};d}(gr_Y\mathbb{A}; d, gr_Y r^{-1}(Y)) \longrightarrow Y$ est nul

(6) Soit $\overline{\mathcal{N}} = \bigoplus_{i \geq 1} gr_Y^i W \,.\, C^d_{\mathbb{A},Y}\ dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$

$C^d_{\mathbb{A},Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x et

$$[\mathcal{J}n_Y(\mathbb{A},\underline{\mathbb{A}}, d) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x}] \cap [\overline{\mathcal{N}} . gr_Y\underline{\mathbb{A}}; d \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x}]$$

$$= [\mathcal{J}n_Y(\mathbb{A},\underline{\mathbb{A}}, d) . \overline{\mathcal{N}} . gr_Y\underline{\mathbb{A}}; d] \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x}$$

(7) $C^d_{\mathbb{A},Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x et pour tout $p \in \mathbb{N}$.

$$\left[In_Y(\blacktriangle,\underline{\blacktriangle}\ ,\ d).\otimes_{O_Y} O_{Y,x}\right] \cap \left[\ \bar{dr}^{\,p}.gr_Y\underline{\blacktriangle}\ ;\ d\otimes_{O_Y}\ O_{Y,x}\right] =$$

$$= \left[In_Y(\blacktriangle,\ \underline{\blacktriangle},\ d).\ \bar{dr}^{\,p}\ .\ gr_Y\ \underline{\blacktriangle};\ d\right]\otimes_{O_Y} O_{Y,x}$$

(8) pour tout $\delta \in [0,d]$, $C^{\delta}_{\blacktriangle,Y} \longrightarrow C^{\delta}_{\underline{\blacktriangle}}\,|W,Y$

est plat en x

(9) il existe un voisinage U de x dans Z tel que pour tout $\delta \in [0,d]$, tout $y \in U \cap Y$

$$C^{\delta}_{\blacktriangle,Y} \longrightarrow C^{\delta}_{\underline{\blacktriangle}}\,|W,Y$$

soit plat en y .

(10) $C^{d}_{\blacktriangle,Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x .

Soit J l'Idéal de O_Z définissant l'immersion de X dans Z au voisinage de x ; J_x son germe en x . Il existe $(f_1,\ldots,f_m)$ un système d'éléments de J_x tel que

(i) pour $0 \leq \delta < d$, $1 \leq k \leq m$, $in(f_k,\delta)$ est indépendant de δ , avec $in(f_k,\delta) = 1\otimes Q_k \in gr_Y\ W\otimes_{O_Y}(gr_W\ Z\otimes_{O_W} O_{Y,x})$ où Q_k est un élément homogène de $gr_W\ Z\otimes_{O_W} O_{Y,x}$.

(ii) pour $0 \leq \delta \leq d$, $In_Y\ (\blacktriangle,\ \underline{\blacktriangle}\ ,\delta) = (\ldots in(f_k,\delta)\ldots)$

(11) Si l'immersion de Y dans W est régulière en x,

$C^{d}_{\blacktriangle,Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x et l'immersion

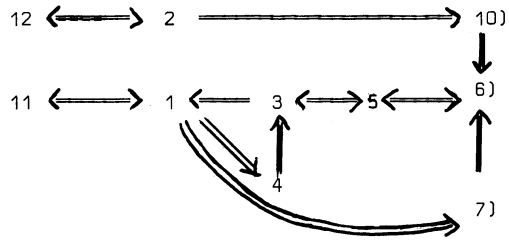
$$C^{d}_{\blacktriangle,Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow C^{d}_{\blacktriangle,Y}$$

est régulière en x , de codimension celle de Y dans W .

(12) Si $Y = \{x\}$

$$H_{\blacktriangle,x}(d) = H_{\underline{\blacktriangle}}\ |\ W,x(d) * G_{X\cap r^{-1}(x),\ x} \quad .$$

Le schéma logique de la démonstration est le suivant



et 9) ⟹ 8) ⟹ 1) (2 ⟺ 1) + 1) ⟹ 9)

On va rappeler un critère de platitude qu'on utilisera dans la démonstration.

(4.3) THEOREME

Soient $A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux noethériens, I un idéal de A tel que IB soit contenu dans le radical de B , M un B-module de type fini.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) M est A-plat

(ii) $M \otimes_A A/I$ est A/I -plat et $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) = 0$

(iii) $M \otimes_A A/I$ est A/I- plat et l'homomorphisme canonique

$$gr_I^\circ(M) \otimes_{A/I} gr_I(A) \longrightarrow gr_I(M)$$

est un isomorphisme.

(iv) Pour tout entier n , $M \otimes_A A/I^n$ est plat sur A/I^n .

Pour la démonstration de ce critère on peut voir (SGA).
On aura besoin aussi du lemme suivant :

(4.4) LEMME : Soit A un anneau , $A[Z_1,\ldots,Z_t]$ un anneau de polynomes , $B = A[Z_1,\ldots,Z_t)] / J$ un anneau quotient de $A[Z_1,\ldots,Z_t]$.
Soit N un A-module

$$\mathrm{Tor}_1^A(B,N) = \mathrm{Tor}_1^{A[Z]}(B, N \otimes_A A[Z]) \quad .$$

On appliquera 4.3 avec :

$$A = gr_Y W = gr_Y \underline{A} \mid W \; ; \; d \qquad B = gr_Y \underline{A} \; ; \; d$$

$$M = gr_Y A \; ; \; d \qquad I = \mathcal{I} = \bigoplus_{i \geq 1} gr_Y^i W \quad .$$

(4.5) Passons maintenant à la démonstration des implications

$$1 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 3$$

$$1 \Longrightarrow 2$$

$$1 \Longrightarrow 7 \Longrightarrow 6$$

$C^d_{A,Y} \longrightarrow C^d_{\underline{A} \mid W,Y}$ est plat en x .

Cette hypothèse correspond évidemment à la condition i) du théorème 4.3 ,

On a alors :

α_1) $C^d_{A,Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x (changement de base).

α_2) le germe en x du morphisme canonique

$$gr_Y A \; ; \; d \Big/ \overline{\mathcal{I}}\, gr_Y A \; ; \; d \quad \otimes_{O_Y} \quad gr_{\overline{\mathcal{I}}} (gr_Y W) \longrightarrow gr_{\overline{\mathcal{I}}} gr_Y A \; ; \; d$$

est un isomorphisme

α_3) le germe en x de $Tor_1^{gr_Y \underline{A} \mid W \; ; d} (gr_Y A \; ; \; d, \; O_Y)$ est nul

α) le germe en x de $Tor_1^{gr_Y W} (gr_Y A \; ; \; d \; , \; gr_Y W / \overline{\mathcal{I}}^p)$ est nul

De α_1 on a donc la première partie des implications 3, 4, 6, 7 en question.

De α_2 on déduit qu'on a un isomorphisme canonique :

$$gr_Y W \otimes_{O_Y} gr_Y A \; ; \; d \Big/ \overline{\mathcal{I}}\, gr_Y A \; ; \; d \longrightarrow gr_Y C^d_{A,Y} \; ; \; O$$

(En effet, $\underset{\mathcal{N}}{gr}\ gr_Y A$; d étant déjà bigradué, s'identifie à $gr_Y\ gr_{dr^{-1}(Y)\cap C^d_{A,Y}} C^d_{A,Y}$ et pour avoir l'isomorphisme, il suffit de se rappeler que

$$\underset{\mathcal{N}}{gr}\ gr_Y A = gr_Y\ gr_{dr^{-1}(Y)\cap C^d_{A,Y}} C^d_{A,Y} = gr_Y \mathcal{C}^d_{A,Y} \ ; \ 0$$

On a donc l'isomorphisme canonique

$$C^\circ_{\mathcal{C}^d_{A,Y},Y} \longrightarrow C_{W,Y} X_Y C^d_{A,Y} \cap dr^{-1}(Y)$$

mais pour $d \in]d_i, d_{i+1}]$, on a

$$C^\circ_{\mathcal{C}^d_{A,Y},Y} = C_{A,Y}(i+1)$$

$$C_{A,Y}(i+1) \longrightarrow C_{W,Y} X_Y C^d_{A,Y} \cap dr^{-1}(Y)$$

Or ceci n'est possible que pour $i = 0$.

Ceci montre que $d \in]0, d_1]$ et que

$$C_{A,Y}(1) \longrightarrow C_{W,Y} X_Y C^d_{A,Y} \cap dr^{-1}(Y)$$

est un isomorphisme au voisinage de x .

On en déduit que

$$C_{A,Y}(1) = C^\circ_{A,Y} \supset C_{W,Y} X_Y C_X \cap r^{-1}(Y),Y$$

En effet, il existe des $(f_1,\ldots,f_m)$ dans $\mathfrak{I}_x$ tels que

$$in_Y(A, \underline{A}, 0) \otimes_{O_Y} O_{Y,x} = (\ldots in_Y(f_k, 0)\ldots)$$

avec $in_Y(f_k,0) = 1 \otimes Q_k$.

Soit J_x l'idéal de $O_{r^{-1}(Y),x}$ définissant $X \cap r^{-1}(Y)$ dans $r^{-1}(Y)$ et $\bar{f}_k$ l'image de f_k dans $\bar{\mathfrak{I}}_x$. Alors

$$in_Y(f_k,0) = 1 \otimes in_Y \bar{f}_k$$

et par conséquent :

$$\mathcal{I}n_Y(\mathbb{A}, \underline{\mathbb{A}}, 0) \otimes_{O_Y} O_{Y,x} \subset \mathcal{I}n_Y(r^{-1}(Y) \cap X, r^{-1}(Y)) . \, gr_Y W\,[Z]$$

D'autre part on a toujours $C_{X \cap r^{-1}(Y),Y} \subset C^d_{\mathbb{A},Y} \cap dr^{-1}(Y)$

$$C_{\mathbb{A},Y}(1) = C_{W,Y} \times_Y C_{X \cap r^{-1}(Y),Y}$$

Ainsi par définition, le premier tropisme critique est positif, donc on a la deuxième partie de la condition 2 ,

$$d_{\mathbb{A},Y,x} \geq d \quad ;$$

et aussi la deuxième partie de la condition 4 ,

$$C^d_{\mathbb{A},Y} \cap dr^{-1}(Y) \simeq C_{X \cap r^{-1}(Y),Y}$$

Il reste à démontrer l'implication

$$1 \Longrightarrow 7$$

Du lemme 4.4 , pour $A = gr_Y W$, $B = gr_Y \underline{\mathbb{A}}; d$, $N = gr_Y W / \bar{\mathcal{I}}^p$, on déduit que le germe en x de :

$$Tor_1^{gr_Y \underline{\mathbb{A}}; d}(gr_Y \mathbb{A}; d, gr_Y W/\bar{\mathcal{I}}^p \otimes_{gr_Y W} gr_Y W\,[Z])$$

est nul, ceci entraîne que :

$$[\mathcal{I}n_Y(\mathbb{A}, \underline{\mathbb{A}}, d) \otimes_{O_Y} O_{Y,x}] \cap [\bar{\mathcal{I}}^p . gr_Y \underline{\mathbb{A}} ; d \otimes_{O_Y} O_{Y,x}] =$$

$$= [\mathcal{I}n_Y(\mathbb{A}, \underline{\mathbb{A}}, d) . \bar{\mathcal{I}}^p gr_Y \underline{\mathbb{A}} ; d] \otimes_{O_Y} O_{Y,x} \quad .$$

(4.5.2) On va maintenant démontrer 2) $\Longrightarrow$ 10) $\Longrightarrow$ 6 .

De la proposition 2.6 on a immédiatement 2 $\Longrightarrow$ 10) .

Soit $f = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_A z^A$ tel que $f \in \mathcal{I}_X$ et

$$in_Y(f ; \underline{\mathbb{A}}, d) \in \bar{\mathcal{I}} . gr_Y W\,[Z] \otimes_{O_Y} O_{Y,x} \quad .$$

Soit $p = \nu_{\overline{d^p}}(in_Y(f ; \underline{A}, d))$. ($p \geq 1$ par hypothèse).

On se ramène d'abord au cas où pour tout $A \in \mathbb{N}^t$

$$\nu_Y(f_A) \geq p \ .$$

Soit $M_{\beta_o, \alpha_o} = in_Y(f ; \underline{A}, 0) \in gr_Y W[Z]$. C'est un élément de bidegré (β_o , α_o) et si $\beta_o < p \quad \alpha_o + \beta_o/d > \nu_Y(f ; \underline{A}, d)$. Mais d'après 10,i), il existe R_k $k = 1,\ldots,m$ bihomogènes dans $gr_Y W[Z] \otimes_{O_Y} O_{Y,x}$ tels que :

$$M_{\beta_o,\alpha_o} = \sum_{k = 1,..m} R_k \, in(f_k,0) = \sum R_k(1 \otimes Q_k)$$

Soit ν_k le degré en Z de $Q_k \in O_{Y,x}[Z]$.

On peut alors écrire

$$R_k = \sum R_{kA} Z^A$$

où $R_{kA} \in gr_Y^{\beta_o} W \otimes_{O_Y} O_{Y,x}$

Soit $r_{kA} \in O_{W,x}$ tel que $\nu_Y(r_{kA}) = \beta_o$ et $in_Y r_{kA} = R_{kA}$ et soit encore

$$r_k = \sum_{|A|=\alpha_o-\nu_k} r_{kA} \, z^A \in O_{Z,x} \quad ,$$

pour $\delta \in [0, d]$, $\nu_Y(\sum_{k=1\ldots m} r_k f_k ; \underline{A} , \delta) = \alpha_o + \beta_o/\delta$

et pour $\delta \in [0,d[$

$$in_Y(\sum_{1,\ldots,m} r_k \, f_k ; \underline{A} , \delta) = M_{\beta_o,\alpha_o}$$

Soit $g = f - \sum r_k f_k$; on a $g \in \mathcal{J}_x$

$$in_Y(g ; \underline{A}, d) = in_Y(f ; \underline{A}, d)$$

$$\nu_Y(g, \underline{A}, 0) \geq \nu_Y(f, \underline{A} , 0)$$

s'il y a égalité sur le diagramme de Newton de g le point (β_o,α_o) a disparu.

On peut donc supposer $\nu_Y(f ; \underline{A} , 0) = p$.

Considérons encore $M_{\beta_o,\alpha_o} = in_Y(f, \underline{\Delta}, 0)$.

Alors

$$\nu_Y(f; \underline{\Delta}, d) = \alpha_o + \beta_o/d$$

On sait aussi, par hypothèse, que

$$C^d_{\underline{\Delta},Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y \quad \text{est plat en } x$$

et donc, par changement de base

$$C_{W,Y} \times_Y [C^d_{\underline{\Delta},Y} \cap dr^{-1}(Y)] \longrightarrow C_{W,Y}$$

est plat en x. Mais les conditions i de 10) entraînent que

$$C_{W,Y} \times_Y [C^d_{\underline{\Delta},Y} \cap dr^{-1}(Y)] = C^\circ_{\underline{\Delta},Y}$$

au voisinage de x . Alors, en utilisant l'implication 1 $\Longrightarrow$ 7 déjà démontrée on obtient

$$[In_Y(\Delta, \underline{\Delta}, 0) \otimes_{O_Y} O_{Y,x}] \cap [\overline{\mathcal{J}}^p . gr_Y \underline{\Delta}; 0 \otimes_{O_Y} O_{Y,x}] =$$

$$= [In_Y(\Delta, \underline{\Delta}, 0) . \overline{\mathcal{J}}^p . gr_Y \underline{\Delta}; 0] \otimes_{O_Y} O_{Y,x} .$$

Il existe donc $R_k \in \overline{\mathcal{J}}^p . gr_Y W[Z]$ bihomogènes $(k=1,\ldots,m)$ tels que

$$M_{\beta_o,\alpha_o} = \sum_{k=1}^{m} R_k \, in(f_k, 0) = \sum R_k(1 \otimes Q_k)$$

Considérons

$$(*) \quad in(f; \underline{\Delta}, d) - \sum R_k \, in(f_k ; \underline{\Delta}, d)$$

On peut avoir $(*) = 0$ et on a terminé, ou bien $(*)$ est un élément de d-degré $\alpha_o + \beta_o/d$

Mais alors son ordre pour $\overline{\mathcal{J}}$ est strictement plus grand que p . On conclut donc au bout d'un nombre fini d'opérations.

4.6 PROPOSITION Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une installation, soit $Y = \{x\}$, $x \in W \cap X$. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) $d_{\Delta,x} \geq 1$

(ii) $C_{X,x} \longrightarrow C_{W,x}$ plat en x

(iii) $H_{X,x} = H_{W,x} * G_{X \cap r^{-1}(x),x}$

4.7 COROLLLAIRE Soit $f : X \longrightarrow W$ un morphisme quelconque d'espaces analytiques complexes. Alors les conditions (ii) et (iii) de la proposition précédente sont équivalentes.

Il suffit de faire la construction de 1.4

4.8.1 PROPOSITION Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une installation, $x \in W \cap X$. Pour que $r \mid X : X \longrightarrow W$ soit plat en x, il faut et il suffit que pour tout sous espace analytique $Y \subset W \cap X$, le morphisme canonique

$$X \cap r^{-1}(Y) \longrightarrow Y$$

soit plat en x, et que $d_{\Delta,Y,x} > 0$.

Il suffit qu'il existe un sous espace Y de $W \cap X$ qui vérifie ces deux conditions.

En particulier, il faut et il suffit que $d_{\Delta,x} > 0$

4.8.2 COROLLAIRE : Hypothèses de 4.8.1. Soit $(f_1,\ldots,f_m)$ un système d'éléments de $\mathcal{O}_x$ tels que $in_x(f_1 \mid r^{-1}(x)) ,\ldots.. in_x(f_m \mid r^{-1}(x))$ forment un système minimal de générateurs de $in_x(X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x))$.

Pour que $r \mid X : X \longrightarrow W$ sont plat en x, il faut et il suffit qu'il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $\delta \in [0,\varepsilon]$ $(in_x(f_1, \underline{\Delta}, \delta), \ldots , in_x(f_m, \underline{\Delta}, \delta))$ soit un système minimal de générateurs de $in_x(\Delta, \underline{\Delta}, \delta)$.

4.9 PROPOSITION : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une installation, $x \in W \cap X$. Pour que W soit localement contenu dans X au voisinage de x, et que

$$C_{X,W} \longrightarrow W$$

soit plat en x, il faut et il suffit que pour tout sous espace analytique Y de W

$$C_{X \cap r^{-1}(Y),Y} \longrightarrow Y$$

soit plat en x, et que $d_{\Delta,Y,x} = \infty$. Il suffit qu'il existe un sous espace Y de W qui vérifie ces deux propriétés.

En particulier, il faut et il suffit que

$$d_{\Delta,x} = \infty .$$

On va énoncer maintenant deux théorèmes relatifs au comportement fonctoriel de la transversalité.

4.10 THEOREME . Soit $\mathbb{A} = (X, Z, W ; r)$ une installation, soit $Y \subset X \cap W$ soit $x \in Y$. Soit h un morphisme d'espaces analytiques complexes

$$h : W' \longrightarrow W$$

On pose $\mathbb{A}' = (X \times W' , Z \underset{W}{\times} W' , W \underset{W}{\times} W' ; r \times id_{W'})$ et $Y' = h^{-1}(Y)$.

Alors, si $\mathbb{A}$ est d-transverse le long de Y en x , $\mathbb{A}'$ est d-transverse le long de Y' en tout x' tel que $h(x') = x$.
De plus, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C^d_{\mathbb{A},Y'} & \longrightarrow & C^d_{\mathbb{A},Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^d_{\underline{\mathbb{A}'} \mid W',Y'} & \longrightarrow & C^d_{\underline{\mathbb{A}} \mid W,Y} \end{array}$$

est cartésien au voisinage de x .

4.11 THEOREME : Soit $\mathbb{A} = (X, Z, W ; r)$ une installation. Soit $x \in W \cap X$. Soit $h : W' \longrightarrow W$

un morphisme d'espaces analytiques complexes.

Soit enfin $\mathbb{A}'$ l'installation image réciproque définie dans l'énoncé du théorème 4.10.

Alors, si $\mathbb{A}$ est d-transverse en x , $\mathbb{A}'$ est d-transverse en tous points $x' \in W'$ tels que

$$h(x') = x \quad .$$

§ 5 - d- BASE STANDARD ET d-BASE STANDARD NORMALISEE

Les constructions de ce paragraphe nécessitent une forme généralisée du théorème de division de Weierstrass due à Hironaka (voir "Weierstræss préparé à la Hironaka [2]) .

5.1 THEOREME : Soit $\mathcal{O}$ une $\mathbb{C}$-algèbre analytique locale, $\mathcal{O}\{z_1,\dots,z_t\}$ l'anneau des séries convergentes à t indéterminées sur $\mathcal{O}$ (i.e.si l'anneau local de l'espace analytique W en x est $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}\{z_1,\dots,z_t\}$ est l'anneau local de $W \times \mathbb{C}^t$ en $(x \times 0)$) .

Soit N l'idéal maximal de $\mathcal{O}$.

Soit $(g_1,\dots,g_k)$ un système d'éléments non nuls de $\mathcal{O}\{z_1,\dots,z_t\}$ tels que pour $1 \leq i \leq K$, il existe $L_i \in \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_t\}$ non nul avec

$$g_i - L_i \in N.\mathcal{O}\{z_1,\dots,z_t\}$$

On pose $1 \leq i \leq K$, $L_i = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} C_{iA} z^A$, $C_{iA} \in \mathbb{C}$.

$\nu_i = \inf |A|$ tels que $C_{iA} \neq 0$.
$A_i = \sup_{\ell} A$ tels que $|A| = \nu_i$ et $C_{iA} \neq 0$.

(ℓ désigne l'ordre lexicographique de $\mathbb{N}^t$) . Alors, pour tout $g \in \mathcal{O}\{z_1,\dots,z_t\}$, il existe $h_1,\dots,h_k$ et f dans $\mathcal{O}\{z_1,\dots,z_t\}$ tels que

(1) $$g = \sum_{i=1}^{k} h_i g_i + f$$

(2) si $f = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_A z^A$, $f_A \in \mathcal{O}$, alors $f_A = 0$ dès que

$$A \in \bigcup_{i=1,\dots,K} (A_i + \mathbb{N}^t)$$

(3) si, pour $d \in]0, \infty[$, avec $\underline{A} = (W \times \mathbb{C}^t , W \times \mathbb{C}^t , W ; p_1)$ et identifiant $x \times \underline{0}$ à x , on a pour $1 \leq i \leq K$, $\nu_x(g_i ; \underline{A}, d) = \nu_i$, on peut trouver $h_1 \dots h_k$ tels que de plus

$1 \leq i \leq K$ $\quad \nu_x(h_i ; \underline{A}, d) \geq \nu_x(g ; \underline{A}, d) - \nu_x(g_i ; \underline{A}, d)$.

On va se servir de ce théorème pour calculer le premier tropisme critique $d_{\mathbb{A},x}$ et aussi $d_{\mathbb{A},Y,x}$.

5.2 DEFINITION . Soit $\mathbb{A} = (X, Z, W ; r)$ une installation, $x \in W \cap X$, et $d \in]0, \infty[$ un réel fixé.

Soit J l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,x}$ définissant X dans Z en x . Un système $(f_1,\ldots,f_m)$ d'éléments de J est appelé une d-base standard de $\mathbb{A}$ en x , s'il possède les propriétés suivantes

(1) si $\nu_x (f_i ; \mathbb{A}, d) = \nu_i$ alors

$\nu_1 \leq \nu_2 \leq \cdots \leq \nu_m$

(2) $(\ldots, in(f_i ; \mathbb{A}, d), \ldots)$ est un système minimal de générateurs de $in_x (\mathbb{A}, \mathbb{A} , d)$ (on rappelle que cet idéal est l'idéal noyau de

$$(gr_x \mathbb{A}, d \longrightarrow gr_x \mathbb{A}, d) .$$

5.3 DEFINITION : Soit $\mathbb{A} = (X, Z, W ; r)$ une installation , $x \in W \cap X$, $d \in]0,\infty[$. On note

$$\nu_x^*(\mathbb{A}, d)$$

La suite $(\nu_1,\ldots,\nu_m , \infty,\ldots, \infty,\ldots)$ où $(\nu_1,\ldots \nu_m)$ est la suite des d-ordre d'une d-base standard quelconque $(f_1,\ldots,f_m)$ de $\mathbb{A}$ en x .

5.3.1 Si d = 1 on dit base standard et on note $\nu_x^*(X,Z)$

5.4 PROPOSITION : Soit $\mathbb{A} = (X, Z, W ; r)$ une installation , $x \in W \cap X$, $d \in]0,\infty[$. Soit $(f_1,\ldots,f_m)$ une d-base standard de $\mathbb{A}$ en x . Si $\mathbb{A}$ est d-transverse en x alors :

(1) $(f_1,\ldots,f_m)$ est une δ -base standard de $\mathbb{A}$ en x pour $\delta \in]0,d]$.

(2) $\nu_x^*(\mathbb{A}, d) = \nu_x^*(\mathbb{A},\delta)$, $\forall\ \delta \in]0, d]$

(3) Si on désigne par $\mathbb{A}(x)$ l'installation $(X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x), x ; r | r^{-1}(x))$ et par $\overline{f}$ l'image canonique de $f \in \mathcal{O}_{Z,x}$ dans $\mathcal{O}_{r^{-1}(x),x}$, $(\overline{f}_1,\ldots,\overline{f}_m)$ est une base standard de $\mathbb{A}(x)$ en x et

$$\nu^*(\mathbb{A}, d) = \nu^*(X \cap r^{-1}(x) , r^{-1}(x)) .$$

5.5 DEFINITION Soit $\mathbb{A} = (X, Z, W ; r)$ une installation, soit $x \in W \cap X$. On suppose que

$$r|_X : X \longrightarrow W$$

soit plat en x .

J étant l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,x}$ définissant X dans Z en x , un système d'éléments de J $(f_1,\ldots,f_m)$ est appelé une O-base standard de $\mathbb{A}$ en x si $(f_1 \mid r^{-1}(x), \ldots, f_m \mid r^{-1}(x))$ est une base standard de $X \cap r^{-1}(x)$ en x .

On pose

$$\nu_x^*(\mathbb{A}, 0) = \nu_x^*(X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x)) .$$

5.6 Remarque : On rappelle que dans la situation de la définition précédente, on a

$$d_{\mathbb{A},x} > 0$$

5.7 Remarque : Si $(f_1,\ldots,f_m)$ est une O-base standard il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{A}$ soit ε-transverse en x et que $(f_1,\ldots,f_m)$ soit une ε-base standard de $\mathbb{A}$ en x .
On peut donc voir que si d_i est la pente du 1er côté du polygone de Newton de f_i (construit à partir de ν_x) , et si on considère

$$d_{(f),x} = \inf_{1 \leq i \leq m} d_i$$

on a toujours

5.8 $$d_{(f),x} \leq d_{\mathbb{A},x} .$$

Il se peut que l'inégalité soit stricte. Nous allons maintenant caractériser une classe de O-bases standard de $\mathbb{A}$ en x pour lesquelles on a toujours

$$d = d_{\mathbb{A},x} .$$

Ce sont les bases standard normalisées introduites par Hironaka dans [3] (plus précisément , il s'agit d'une généralisation immédiate, puisque dans ce travail W est lisse) .

5.9 DEFINITION : Soit S un anneau noethérien, $G = S[Z_1,\ldots,Z_t]$ l'anneau des polynômes à t indéterminées. On pose $Z = (Z_1,\ldots,Z_t)$ et si

$A = (a_1,\dots,a_t) \in \mathbb{N}^t$, $Z^A = Z_1^{a_1},\dots, Z_t^{a_t}$. On munit $\mathbb{N}^t$ de l'ordre lexicographique ($A = (a_1,\dots,a_t) < A' = (a'_1,\dots,a'_t)$ si et seulement si il existe i , $1 \leq i \leq t$ tel que, pour $j < i$

$$a_j = a'_j \quad \text{et} \quad a_i < a'_i)$$

On gradue G par le degré total.

Soit $\varphi = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} C_A Z^A$, $C_A \in S$ un polynôme homogène non nul. On appelle exposant privilégié de φ par rapport à $(S ; Z_1,\dots, Z_t)$ et on note $\exp^t\varphi$ le plus grand $A \in \mathbb{N}^t$ tel que $C_A \neq 0$.

5.10 DEFINITION : Avec les notations de 5.9, si I est un idéal homogène de G ,on appelle ensemble des privilégiés de I , par rapport à $(S ; Z_1,\dots, Z_t)$ et on note

$$\mathrm{Exp}^t I$$

l'ensemble des $\exp^t\varphi$, où φ parcourt l'ensemble des polynômes homogènes non nuls de I si $I \neq (0)$, $\emptyset$ si $I = (0)$. On remarque immédiatement que si $A \in \mathrm{Exp}^t I$, $A + \mathbb{N}^t \subset \mathrm{Exp}^t I$.

5.11 LEMME : dans les conditions des définitions précédentes, il existe un système fini de générateurs de $\mathrm{Exp}^t I$, i.e. il existe $(A_1,\dots,A_q)$, $A_i \in \mathbb{N}^t$ tel que

$$\mathrm{Exp}^t I = \bigcup_{i=1}^{q} (A_i + \mathbb{N}^t) \ .$$

5.12 DEFINITION : Soit $\mathcal{O}$ une $\mathbb{C}$-algèbre analytique locale, $R = \mathcal{O}\{z_1,\dots,z_t\}$ l'anneau des séries convergentes à t indéterminées sur $\mathcal{O}$. Soit $(\lambda_1,\dots, \lambda_k)$ un système de polynômes homogènes de $\mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_t]$. Soit $I = (\lambda_1,\dots,\lambda_k)$. $\mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_t]$, $E = \mathrm{Exp}^t I$ l'ensemble des privilégiés de I par rapport à $(\mathbb{C}; z_1,\dots,z_t)$. On dit que $f \in R$ est normalisé par le système $(\lambda_1,\dots, \lambda_k)$ par rapport à $(\mathcal{O}; z_1,\dots,z_t)$ si dans le développement en série entière $f = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_A z^A$, $f_A \in \mathcal{O}$, on a $f_A = 0$ si $A \in E$.

5.13 DEFINITION : Soit $\mathbb{A} = (X, Z, W ; r)$ une installation, $x \in W$. On appelle système de coordonnées adapté à $\mathbb{A}$ en x , tout système de coordonnées locales $(z_1,\dots,z_t)$ dans $r^{-1}(x)$ de centre x . (Cette notion ne dépend que de $\underline{\mathbb{A}}$) .

5.14 DEFINITION : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une installation, $x \in W \cap X$, $d \in]0, \infty[$ un réel fixé, $(z_1,\ldots,z_t)$ un système de coordonnées adapté à Δ en x. On suppose que pour $d > 0$, Δ soit d-transverse en x (resp. $r \mid X : X \longrightarrow W$ soit plat en x). On désigne par J l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,x}$ définissant X dans Z en x.

Un système $(f_1,\ldots,f_m)$ d'éléments de J est appelé d-(resp.0-) base standard de Δ en x normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; z_1,..,z_t)$ si

1) c'est une d-(resp.0-)base standard de Δ en x

2) Posant, pour $1 \leq k \leq m$, $\lambda_k = in_x(f_k ; \underline{\Delta}, 0) \in \mathbb{C}[z_1,..,z_t]$ pour $1 \leq i \leq m$ f_i est normalisée par le système $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1})$ par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; z_1,\ldots,z_t)$

5.15 THEOREME

Soit $\Delta = (X, Z, W, r)$ une installation, $x \in W \cap X$, $(z_1,\ldots,z_t)$ un système de coordonnées adapté à Δ en x. Soit $d \in]0,\infty[$ un réel fixé. On suppose que Δ est d-transverse en x (resp. que $r \mid X : X \longrightarrow W$ est plat en x). Il existe une d-(resp 0-) base standard de Δ en x normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; z_1,\ldots,z_t)$.

On démontre le théorème par récurrence sur le nombre d'éléments d'une base standard) en utilisant le théorème de préparation 5.1 comme suit:

5.16 PROPOSITION : Les notations sont celles de 5.1. Soit $(f_1,\ldots,f_k)$ un système d'éléments de $\mathcal{O}\{z_1,\ldots,z_t\}$ non nuls. Soit $1 \leq i \leq k$, $\overline{f}_i = f_i \mod N.\mathcal{O}\{z_1,\ldots,z_t\}$. On suppose $f_i \neq 0$ et on définit, pour $1 \leq i \leq k$, $\lambda_i(Z) = in_x \overline{f}_i$.

Soit $I = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\,\mathbb{C}[Z]$, $E = Exp^t I$ l'ensemble des privilégiés de I par rapport à $(\mathbb{C} ; z_1,\ldots,z_t)$.

On suppose que pour $d \in]0,\infty[$,

$$\nu_x(f_i ; \underline{\Delta}, d) = \nu_i = \nu_x(\overline{f}_i).$$

Alors, pour tout $f \in \mathcal{O}\{z_1,\ldots,z_t\}$, il existe des éléments $(h_1,\ldots,h_k)$ de $\mathcal{O}\{z_1,\ldots,z_t\}$ tels que

(1) $\nu_x(h_i\ ;\ \underline{A},\ d) \geq \nu_x(f\ ;\ \underline{A},\ d) - \nu_x(f_i\ ;\ \underline{A},\ d)$

(2) si $f - \sum_{i=1,\ldots,k} h_i f_i = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_A z^A$, $f_A \in \mathcal{O}$, on a

$$f_A = 0 \quad \text{si} \quad A \in E \ .$$

DEMONSTRATION : E a un système de générateurs fini non vide $F = \{A_1,\ldots,A_q\}$. Il existe donc, pour $1 \leq i \leq q$, $\psi_i \in I$ homogène de degré μ_i tel que $\exp^t_{\psi_i} = A_i$. Il existe aussi, pour $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq k$, $\psi_{ij} \in \mathbb{C}[Z]$ homogène de degré $\mu_i - \nu_j$ tel que

$$\psi_i = \sum_{1 \leq i \leq k} \psi_{ij}\ \lambda_j \ .$$

Soit $g_i = \sum_{j=1\ldots k} \psi_{ij}(z)\ f_j \in \mathcal{O}\{z_1,\ldots,z_t\}$ (l'anneau $\mathbb{C}[z]$ est inclus canoniquement dans $\mathcal{O}\{z\}$) .

Ainsi, on peut appliquer le théorème 5.1 avec les g_i à f . Il existe $(p_1,\ldots,p_q)$ et r dans $\mathcal{O}\{z_1,\ldots,z_t\}$ tels que

- $f = \sum_{i=1,\ldots,q} p_i g_i + r$

- si $r = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} r_A z^A$, $r_A = 0$ pour

$A \in \bigcup_{i=1,\ldots,q} (A'_i + \mathbb{N}^t)$ où $A'_i = \sup_{\ell}$ des A tels que $|A| = \mu_i$ et qui apparaissent dans le développement en z de $g_i - (g_i \bmod N\ \mathcal{O}\{z\})$ on constate que $A'_i = A_i$.

Il suffit de poser maintenant

$$1 \leq j \leq k \qquad h_j = \sum_{i=1,\ldots,q} \psi_{ij}(z)\ p_i$$

et on obtient

$$r = f - \sum_{j=1,\ldots k} h_j f_j$$

La condition 3 de 5.1 permet d'affirmer que, puisque $\nu_x(g_i\ ;\ \underline{A},\ d) = \mu_i$

$\nu_x(p_i ; \underline{A}, d) \geq \nu_x(f ; \underline{A}, d) - \mu_i$

Or $\nu_x(\psi_{ij} ; \underline{A}, d) = \mu_i - \nu_j$

Finalement, pour $1 \leq j \leq k$, $\nu_x(h_j ; \underline{A}, d) \geq \nu_x(f : \underline{A}, d) - \nu_j$

ou encore

$$\nu_x(h_j ; \underline{A}, d) \geq \nu_x(f ; \underline{A}, d) - \nu_x(f_j ; \underline{A}, d) \quad .$$

(5.17) THEOREME : Soit $\underline{A} = (X, Z, W ; r)$ une installation, $x \in W \cap X$. On suppose que $r|X : X \longrightarrow W$ est plat en x . Soit $(z_1,\ldots,z_t)$ un système de coordonnées adapté à $\underline{A}$ en x et soit $(f_1,\ldots,f_m)$ une O-base standard de $\underline{A}$ en x normalisée par rapport à $(O_{W,x} ; z_1, \ldots, z_t)$.

Alors

$$\inf d_i = d_{(f),x} = d = d_{\underline{A}, x}$$

(d_i , pente du 1er côté du polygône de Newton de f_i obtenue à partir du réseau $(\nu_x(f_{iA}) , |A|)$) . De plus $(f_1,\ldots,f_m)$ est une δ-base standard de $\underline{A}$ en x pour

$$\delta \in [0, d_{\underline{A},x}[\quad .$$

(5.18) THEOREME

Sous les mêmes hypothèses que 5.17, si on désigne par Q (resp N) l'idéal de $O_{W,x}$ définissant l'immersion de Y (resp x) dans W au voisinage de x , alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $C_{X \cap r^{-1}(Y),Y} \longrightarrow Y$ est plat

2) pour $1 \leq i \leq m$

$\nu_x(f_i \mod N . O_{Z,x}) = \nu_Y(f_i \mod Q . O_{Z,x})$.

(5.19) DEFINITION

Soit $\underline{A} = (X,Z, W ;r)$ une installation ; soit Y un sous-espace analytique de $W \cap X$ et $x \in Y$. Soit $(z_1,\ldots,z_t)$ un système de coordonnées adapté à $\underline{A}$ en x .

On suppose que $r|X : X \longrightarrow W$ est plat en x et que

$$C_{X \cap r^{-1}(Y)} \longrightarrow Y$$

est plat en x .

Soit $(f_1,\ldots,f_m)$ une O-base standard de $\mathbb{A}$ en x ,normalisée par rapport à $(O_{W,x} ; z_1,\ldots,z_t)$. Soit $\nu_x^*(\mathbb{A}, O) = (\nu_1,\ldots,\nu_m , \infty,\ldots)$

Soit

$$d_i = \text{Sup } \{d \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } in_Y(f_i;\underline{\mathbb{A}},d) \text{ soit de } d\text{-degré } \nu_i\}$$

On pose

$$d_{(f),Y,x} = \inf_{1 \leq i \leq m} d_i$$

(5.20) THEOREME

Dans les conditions de (5.17) on a

$$d_{(f),\,Y,x} = d_{\mathbb{A},Y,x}$$

(5.21) THEOREME

Soit $\mathbb{A} = (X, Z, W ; r)$ une installation, soient Y un sous-espace analytique de $W \cap X$, x un point de Y , $d \in]0, \infty[$ un réel fixé. Si $\mathbb{A}$ est d-transverse le long de Y en x, $\mathbb{A}$ est d-transverse le long de tout sous-espace analytique Y' contenant x en x .

(5.21.1) Remarque : Rapprocher ce théorème de 4.10.

On donne ici un exemple des applications de la théorie des installations. Une autre application sera donnée dans un article de Hironaka-Lejeune-Teissier qui sera publié dans cette revue. [11]

(5.23) DEFINITION

Soit $f : X \longrightarrow W$ un morphisme d'espaces analytiques. Nous dirons que f est tangentiellement plat en $x \in X$, si le morphisme tangent

$$df : C_{X,x} \longrightarrow C_{W,w} \text{ est plat } (w = f(x)) .$$

(5.24) THEOREME : (Critère numérique de platitude tangentielle)

$f : X \longrightarrow W$ est tangentiellement plat en $x \in X$ si et seulement si

$$H^1_{X,x} = H^1_{W,w} * G_{f^{-1}(w),x} .$$

(5.25) COROLLAIRE : Si $f : X \longrightarrow W$ est tangentiellement plat en x , on a

$$H^1_{X,x} \geq H^{1+d}_{W,x} = H^1_{W,w} * H^o_{\mathbb{C}^d,o} ,$$

où $d = \dim_X f^{-1}(w)$.

(5.26) REMARQUE

Le corollaire 5.21 donne une réponse partielle à un problème posé par Hironaka dans [6] .

(5.27) DEFINITION

Soit $f : (X,x) \longrightarrow (W,w)$. On appelle taux de platitude de f en x , et l'on note $P_{f,x}$, le nombre

$$P_{f,x} = \inf_{\Delta(\sigma)} d_{\Delta(\sigma),x}$$

l'inf. étant pris sur l'ensemble des installations $\Delta(\sigma)$ définies en 1.4 .

Le terme taux de platitude est justifié par:

(5.28) THEOREME

f est plat en x si et seulement si $P_{f,x} > 0$; f est tangentiellement plat en x si et seulement si $P_{f,x} = 1$.

La démonstration de 5.28 est immédiate d'après 4.2 et 4.8 .

(5.29) REMARQUE

$P_{f,x}$ est un nombre rationnel compris entre 0 et 1 . En effet si $d_{\Delta(\sigma),x}$ est < 1 il ne dépend pas du choix de σ , donc $P_{f,x}$ est atteint. D'autre part, on peut, par la méthode exposée dans ([10] , ch III, § 1) choisir σ de telle façon que $d_{\Delta(\sigma),x}=1$.

B I B L I O G R A P H I E

[1] B. BENNETT : On the characteristic function of a local ring, Annals of Math. ; vol.91, N° 1 (1970).

[2] J. BRIANÇON : Weierstrass préparé à la Hironaka, in "Singularité à Cargèse" Astérisque.

[3] H. HIRONAKA : Resolution of Singularities, Ann. of Math. vol 79 N° 1 et 2 (1964).

[4] H. HIRONAKA : Bimeromorphic smoothing of complex analytic spaces, Preprint, Universite de Warwick, 1971.

[5] H. HIRONAKA : Characteristic polyedra of singularities, Journal of Math. Kyoto University, vol.7 n° 3,(1968).

[6] H. HIRONAKA : Some numerical characters of singularities, Journal of Math. Kyoto University vol. 10 (1970).

[7] H. HIRONAKA : Introduction to the theory of infinitely near points. Publicaciones del Instituto "Jorge Juan" de matematicas, Université de Madrid, 1971.

[8] M. LEJEUNE-JALABERT et B. TEISSIER : Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités, Séminaire , Ecole Polytechnique (1972).

[9] M. LEJEUNE-JALABERT et B. TEISSIER : Normal cones and sheaves of relative jets, Preprint, Université de Warwick (1971).

[10] Contribution à l'étude des singularités du point de vue du polygône de Newton, paru dans thèse de M. LEJEUNE-JALABERT ou thèse de B. TEISSIER.

[11] H. HIRONAKA - M. LEJEUNE-JALABERT-B.TEISSIER : Platificateur local en géométrie analytique et aplatissement local "singularités à cargèse" Astérisque.