JOËL BRIANÇON

Weierstrass préparé à la Hironaka

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 67-73

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__67_0>

WEIERSTRASS PREPARE A LA HIRONAKA

Joël BRIANÇON

INTRODUCTION . – On donne une démonstration d'une généralisation du théorème de préparation classique de Weierstrass : généralisation en ce sens que l'on divise un germe de fonction analytique par plusieurs autres, par rapport à plusieurs coordonnées.

La démonstration donnée ici s'inspire de la démonstration du théorème classique faite par M. HOUZEL dans le cours de C 4 qui consiste à perturber un isomorphisme d'espaces de Banach ; ici, perdant l'unicité de la division, on se contentera de perturber un épimorphisme.

L'intérêt du théorème est de pouvoir construire, étant donné un idéal de séries convergentes, un changement de coordonnées et un système de générateurs de l'idéal plus "simple" que les autres, ce que HIRONAKA [1] appelle une "donnée distinguée" .

NOTATIONS .

1 . – K étant une algèbre de Banach commutative et $\rho = (\rho_1 \ldots \rho_r) \in (\mathbb{R}^{+*})^r$ un poly-rayon, on désigne par $K(\rho)$ l'algèbre des séries entières à r indéterminées à coefficients dans K , $f = \sum_{A \in \mathbb{N}^r} F_A Y^A$

telles que $$\|f\| = \sum_{A \in \mathbb{N}^r} \|f_A\| \rho^A < +\infty \quad .$$

$K(\rho)$ munie de la norme ci-dessus est une algèbre de Banach.

2 . – Etant donnés p-multiindices $E_1, E_2 \ldots E_p$ de $\mathbb{N}^r$, on note $\Delta = \bigcup_{i=1}^{p} (E_i + \mathbb{N}^r)$, et $R(\Delta , \rho)$ le sous-espace de Banach de $K(\rho)$ des

séries $f = \sum_{A \in \mathbb{N}} f_A Y^A$ de $K(\rho)$ telles que $f_A = 0$ pour tout $A \in \Delta$.

3 . – L désignera une forme linéaire positive non nulle $L : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ tels que $L(a_1, \ldots, a_r) = \sum_{j=1}^{r} \ell_j a_j$, les coefficients ℓ_j étant des nombres réels positifs non tous nuls.

On remarquera que pour tout $B \in \mathbb{N}^r$, il existe un nombre $\alpha(B)$ réel positif strictement tel que $A \in \mathbb{N}^r$ et $L(A - B) > 0$ implique $L(A - B) \geq \alpha(B)$.

En effet, on peut supposer tout d'abord que les ℓ_j sont tous strictement positifs, et s'apercevoir alors que $L(A) \leq L(A')$ implique que pour tout $j = 1 \ldots r$, $a_j \leq \frac{1}{\ell_j} L(A')$; il n'y a donc qu'un nombre fini de multiindices A tels que $L(A) \leq L(A')$.

I . – DIVISIONS ELEMENTAIRES .

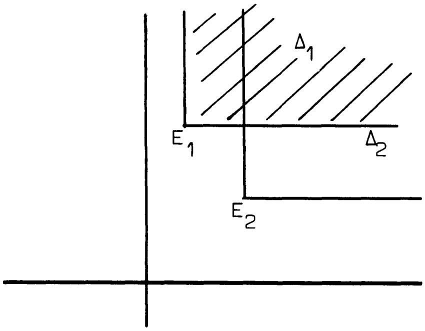
Dans un élément f de $K(\rho)$, on va mettre en facteur Y^{E_i} $(i = 1 \ldots p)$ autant de fois qu'il est possible de le faire. Plus précisément, soit $H(\rho) = K(\rho)^p \oplus R(\Delta, \rho)$ l'espace de Banach muni de la norme :

$$\|(g_1 \ldots g_p ; h)\| = \sum_{i=1}^{p} \rho^{E_i} \|g_i\| + \|h\| \qquad ; \qquad \text{et}$$

$$\varphi_1 : H(\rho) \to K(\rho) \text{ le morphisme } \varphi_1(g_1 \ldots g_p ; h) = \sum_{i=1}^{p} g_i Y^{E_i} + h .$$

LEMME 1 . – φ_1 est un épimorphisme qui envoie la boule unité de $H(\rho)$ sur la boule unité de $K(\rho)$.

Preuve . – On choisit une partition $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \ldots \cup \Delta_p$ de Δ telle que pour tout $i = 1, \ldots, p$, $\Delta_i \subset E_i + \mathbb{N}^r$. (Par exemple $\Delta_1 = E_1 + \mathbb{N}^r$, $\Delta_2 = (E_2 + \mathbb{N}^r) - \Delta_1, \ldots$)



Tout élément f de $K(\rho)$ s'écrit : $\sum_{A \in \mathbb{N}^r} f_A Y^A = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{A \in \Delta_i} f_A Y^A \right) +$ $+ \sum_{A \notin \Delta} f_A Y^A$, autrement dit, $f = \sum_{i=1}^{p} g_i Y^{E_i} + h$ où l'on a posé :

$$\begin{cases} g_i = \sum_{A \in \Delta_i} f_A Y^{A-E_i} & \text{pour } i = 1 \dots p \\ h = \sum_{A \notin \Delta} f_A Y^A & \end{cases}$$

De plus, comme l'on a fait une partition de $\mathbb{N}^r = (\Delta_1 \cup \Delta_2 \dots \cup \Delta_p) \cup (\mathbb{N}^r - \Delta)$ on a égalité des normes :

$$\|f\| = \sum_{i=1}^{p} \|Y^{E_i} g_i\| + \|h\| = \sum_{i=1}^{p} \rho^{E_i} \|g_i\| + \|h\| \quad .$$

II . – PERTURBATION DE φ_1 .

Soient $\tau > 0$, $0 < \eta < 1$, ρ le poly-rayon $\rho = (\tau\eta^{\ell_1}, \tau\eta^{\ell_2}, \dots, \tau\eta^{\ell_r})$.

Pour chaque indice $i = 1,.., p$, on se donne des séries $u_i = \sum_{L(A) > L(E_i)} u_{iA} Y^A$, et v_i de $K(\tau)$ (où τ désigne ici le poly-rayon $(\tau, \tau, \dots, \tau)$) .

Soit $\varphi_2 = H(\rho) \to K(\rho)$ le morphisme défini par $\varphi_2(g_1, \dots, g_p \,;\, h) = \sum_{i=1}^{p} (u_i + v_i) g_i$.

LEMME 2 . –

$$\|\varphi_2\| \leq \sup_{i = 1 \dots p} \{\tau^{-|E_i|} (\eta^{\alpha_i} \|u_i\|_{K(\tau)} + \eta^{-L(E_i)} \|v_i\|_{K(\tau)})\}$$

où $|E_i|$ désigne la longueur du multiindice E_i

$\alpha_i = \alpha(E_i)$ défini dans les notations au n° 3 .

Preuve . – Il suffit de calculer :

$$\|\varphi_2(g_1 \dots g_p \,;\, h)\| \leq \sum_{i=1}^{p} \rho^{E_i} \|g_i\| \, [\|u_i\| \, \rho^{-E_i} + \|v_i\| \, \rho^{-E_i}]$$

où les normes sont calculées dans $K(\rho)$ sauf indication contraire.

$$\|u_i\| \rho^{-E_i} = \sum_{L(A-E_i)>0} \|u_{iA}\| \rho^{A-E_i} = \sum_{L(A-E_i)} \|u_{iA}\| \tau^{|A-E_i|} \eta^{L(A-E_i)}$$

donc
$$\|u_i\| \rho^{-E_i} \leq \tau^{-|E_i|} \eta^{\alpha_i} \|u_i\|_{K(\tau)} .$$

<u>Conséquence</u> . -
$$\begin{cases} \text{(i)} & \eta^{\alpha_i} < \dfrac{\tau^{|E_i|}}{2} \left(\|u_i\|_{K(\tau)}\right)^{-1} \\ \text{(ii)} & \|v_i\|_{K(\tau)} < \dfrac{\tau^{|E_i|} \eta^{L(E_i)}}{2} \end{cases}$$

pour $i = 1 \dots p$, impliquent $\|\varphi_2\| < 1$ et donc $\varphi_1 + \varphi_2$ épimorphisme. (Si l'on perturbe un épimorphisme φ_1 par un épimorphisme φ_2 de norme inférieure à la conorme de φ_1 , l'on obtient encore un épimorphisme $\varphi_1 + \varphi_2$).

III . - <u>THEOREME I</u> . - Etant donnés :

L une forme positive sur $\mathbb{R}^r$

$f_1, \dots, f_p$ des éléments de $\mathbb{C}\{X, Y\}$ où $X = (X_1 ; \dots ; X_q)$,

$Y = (Y_1, \dots, Y_r)$ vérifiant :

(*) $\forall\, i = 1 \dots p$, $\exists\, E_i \in \mathbb{N}^r$ tel que, dans le développement de f_i

$f_i = \sum_{A \in \mathbb{N}^r} f_{iA} Y^A$ par rapport à Y à coefficients dans $\mathbb{C}\{X\}$, on a

1) $f_{iE_i}(0) \neq 0$

2) $f_{iA}(0) = 0$ pour tout $A \in \mathbb{N}^r$, $A \neq E_i$ et $L(A) \leq L(E_i)$.

Alors, pour tout $g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$, il existe des séries $g_1 \dots g_p$, h de $\mathbb{C}\{X, Y\}$ telles que

1)
$$g = \sum_{i=1}^{p} f_i\, g_i + h$$

2)
$$h = \sum_{A \in \mathbb{N}^r} h_A Y^A \quad \text{avec} \quad h_A = 0 \quad \text{pour} \quad A \in \Delta = \bigcup_{i=1}^{p} (E_i + \mathbb{N}^r) .$$

<u>Preuve</u> . - On peut évidemment supposer $f_{iE_i}(0) = 1$, et, à cause de la condition (*) écrire : $f_i - Y^{E_i} = u_i + v_i$.

$$\begin{cases} u_i = \displaystyle\sum_{L(A - E_i) > 0} f_{iA}\, Y^A \\[2ex] v_i = \displaystyle\sum_{\substack{L(A - E_i) \leq 0 \\ A \neq E_i}} f_{iA}\, Y^A \quad \text{avec} \quad v_i(0, Y) = 0 \end{cases}$$

On suppose les séries convergentes dans le polydisque $|x| \leq \nu_o$, $|y| \leq \tau_o$, et pour tout $\nu < \nu_o$, on pose $K_\nu = \mathbb{C}(\nu)$ (voir notations n° 1) ; pour tout $\tau < \tau_o$ on a :

(iii) $\|u_i\|_{K_\nu(\tau)} \leq \|u_i\|_{K_{\nu_o}(\tau_o)}$

(iv) pour tout coefficient f_{iA} tel que $f_{iA}(0) = 0$, on a

$$\|f_{iA}\|_{K_\nu} \leq \frac{\nu}{\nu_o} \|f_{iA}\|_{K_{\nu_o}} \quad \text{et par conséquent}$$

$$\|v_i\|_{K_\nu(\tau)} \leq \frac{\nu}{\nu_o} \|v_i\|_{K_{\nu_o}(\tau_o)}$$

Pour tout $\tau < \tau_o$ on choisit successivement :

– η assez petit pour que $\eta^{\alpha_i} < \dfrac{\tau^{|E_i|}}{2} \left(\|u_i\|_{K_{\nu_o}(\tau_o)}\right)^{-1}$

quel que soit $i = 1 \ldots p$, ce qui implique (i) pour $K = K_\nu$ quel que soit $\nu < \nu_o$ en vertu de (iii) .

– ν assez petit pour que $\dfrac{\nu}{\nu_o} \|v_i\|_{K_{\nu_o}(\tau_o)} < \dfrac{1}{2} \cdot \tau^{|E_i|} \eta^{L(E_i)}$

quel que soit $i = 1 \ldots p$, ce qui implique (ii) pour $K = K_\nu$ en vertu de (iv) .

On sait donc trouver un système fondamental de poly-disques (ν, ρ) de $\mathbb{C}^{q+r}$ tels que l'application

$$(\varphi_1 + \varphi_2)\,(g_1 \ldots g_p \,;\, h) = \sum_{i=1}^{p} f_i\, g_i + h$$

soit un épimorphisme de $H_\nu(\rho)$ sur $K_\nu(\rho)$.

Le passage à la limite inductive prouve le théorème.

IV . - ADDENDUM : où il est question d'unicité .

Dans le théorème I , on n'a pas en général l'unicité du reste de la division ; plus précisément, il y a équivalence entre les deux propositions :

(i) Pour tout élément g de $\mathbb{C}\{X, Y\}$ le reste de la division est unique.

(ii) Si $f = \sum_{A \notin \Delta} f_A Y^A$ est dans l'idéal engendré par $f_1, \ldots, f_p$, alors il est nul.

Il suffit donc de donner quelques définitions dans ce sens pour obtenir le théorème de division par un idéal, avec unicité du reste.
On impose dorénavant les conditions : $q = 0$ et

(**) L est une forme linéaire positive dont les coefficients $(\ell_j)_{j=1\ldots r}$ sont indépendants sur $\mathbb{Z}$.

DEFINITION 1 . - Etant donné un élément non nul f de $\mathbb{C}\{Y\}$, on appelle exposant privilégié de f pour la direction L le multi indice $E = \exp_L(f)$ tel que :

1) $f_E(0) \neq 0$

2) $f_A(0) = 0$ pour tout $A \in \mathbb{N}^r$ et $L(A) < L(E)$

(la condition (**) implique l'unicité de E) .

DEFINITION 2 . - Etant donné un idéal I de $\mathbb{C}\{Y\}$, on appelle ensemble des privilégiés de I pour la direction L l'ensemble $E_L(I)$ des exposants privilégiés des éléments de I .

On vérifie facilement : $\exp_L(fg) = \exp_L(f) + \exp_L(g)$ et $A \in E_L(I)$ implique $A + \mathbb{N}^r \subset E_L(I)$.

DEFINITION 3 . - On appelle frontière distinguée de $E_L(I)$ la plus petite partie (finie) $F_L(I)$ telle que $E_L(I) = \bigcup_{E \in F_L(I)} [E + \mathbb{N}^r]$.

Enfin une base standard de I pour la direction L est une famille $(f^E)_{E \in F_L(I)}$ d'éléments de I telle que $\exp_L(f^E) = E$ pour tout multi indice de $F_L(I)$.

Le théorème II est une conséquence triviale du théorème I et des définitions :

THEOREME II . - Etant donnés :

L une forme linéaire positive sur $\mathbb{R}^r$ vérifiant :

(**) les coefficients $(\ell_j)_{j=1\dots r}$ de L sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$.

I un idéal de $\mathbb{C}\{Y\}$, $E_L(I)$ l'ensemble des privilégiés de I dans la direction L , $F_L(I)$ la frontière distinguée de $E_L(I)$ et $(f^E)_{E \in F_L(I)}$ une base standard de I ; on a

1) I est engendré par $(f^E)_{E \in F_L(I)}$

2) Tout élément $g \in \mathbb{C}\{Y\}$ est équivalent modulo I à un unique élément h de la forme : $h = \sum_{A \notin E_L(I)} h_A Y^A$

Remarque . - La condition (**) , commode pour la démonstration du Théorème II , n'est pas indispensable : en faisant varier la forme linéaire L on pourrait, par un passage à la limite assez délicat, obtenir un théorème analogue sans la condition (**) .

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. HIRONAKA - M. LEJEUNE - B. TEISSIER
Résolution des singularités des espaces analytiques complexes. (à paraître).