Astérisque

LÊ DŨNG TRÁNG
DENIS CHÉNIOT

Remarque sur les deux exposés précédents de D. Chéniot et H. Popp

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 253-261
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__253_0>

REMARQUES SUR LES DEUX EXPOSES PRECEDENTS

de D. Chéniot et H. Popp

D. Chéniot – Lê Dũng Tráng

0.- INTRODUCTION

Nous allons faire quelques remarques sur les exposés précédents dans le cas où le corps de base est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Un certain nombre de théorèmes ont une démonstration par voie topologique et n'ont pas encore leur analogue algébrique : par exemple les théorèmes appelés ci-dessous théorèmes de Zariski local et global, théorème de Van Kampen. D'autres résultats, comme le calcul du groupe fondamental du complémentaire d'une courbe projective plane non singulière, s'obtiennent assez facilement par voie topologique, malheureusement la méthode utilisée ne permet pas d'obtenir ce calcul quand la courbe a des singularités "pas trop grosses", comme dans le cas algébrique. De toute façon, tous les résultats, dont nous parlerons, concerneront le groupe fondamental topologique et conduisent donc à des résultats analogues pour le groupe fondamental algébrique.

1.- THEOREMES DE ZARISKI ET DE VAN KAMPEN LOCAUX

Dans l'exposé de D. Chéniot [1], on démontre le théorème de Zariski global et du même coup on obtient le théorème classique de Van Kampen sur les courbes projectives planes (cf. [9]). Nous allons donner leurs analogues locaux.

Soit H une hypersurface analytique passant par l'origine, définie dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Soit B_ε la boule réelle fermée de centre O et de rayon $\varepsilon > 0$ dans $\mathbb{C}^n$, S_ε la sphère réelle qui borde B_ε. D'après J. Milnor [6] (cf. [5]), il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour ε et ε', $0 < \varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon_0$, $(S_\varepsilon, S_\varepsilon - H)$ et $(S_{\varepsilon'}, S_{\varepsilon'} - H)$ soient difféomorphes. D'autre part dans [6], on montre également que $(B_\varepsilon, B_\varepsilon \cap H)$ est homéomorphe à $(B_\varepsilon, C(K_\varepsilon))$, où $K_\varepsilon = S_\varepsilon \cap H$ et $C(K_\varepsilon)$ est le cône réel union des segments réels d'extrémités O et un point de K_ε (cf. [5]). On en déduit que $B_\varepsilon - H$ et $B_{\varepsilon'} - H$ ont le même type d'homotopie (en fait ils sont même homéomorphes !).

D'après D. Prill ([8] Proposition 2), ce qui précède montre que le groupe fondamental local de U - H en O (cf. [2] Chap. 13) est isomorphe au groupe fondamental de $B_\varepsilon - H$ en $x \in B_\varepsilon - H$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

H. Hamm et Lê Dũng Tráng ont démontré l'analogue local suivant du théorème de Zariski (cf.[12] et [3]) :

THEOREME (1.1)

Il existe un ouvert de Zariski $\mathcal{H}$ non vide de l'espace projectif des hyperplans linéaires de $\mathbb{C}^n$ tel que, pour tout $L \in \mathcal{H}$, il existe un rayon $r > 0$ assez petit pour lequel on ait que :

a) l'homomorphisme :

$$\pi_i\,((B_\rho - H) \cap L, y) \rightarrow \pi_i(B_\rho - H, y)$$

défini par l'inclusion $(B_\rho - H) \cap L \subset B_\rho - H$ avec $y \in (B_\rho - H) \cap L$ et $0 < \rho \leqslant r$, est :

i) bijectif si $i < n - 2$

ii) surjectif si $i = n - 2$.

b) Si u est une forme linéaire qui définit L, on note L_θ l'hyperplan affine d'équation $u = \theta$, avec $\theta \in \mathbb{C}$, alors pour tout ρ, $0 < \rho \leqslant r$, il existe $\theta(\rho) > 0$ tel que l'homomorphisme :

$$\pi_i((B_\rho - H) \cap L_\theta, y) \rightarrow \pi_i(B_\rho - H, y)$$

défini par l'inclusion $(B_\rho - H) \cap L_\theta \subset B_\rho - H$ avec $y \in (B_\rho - H) \cap L_\theta$ et $0 < |\theta| \leqslant \theta(\rho)$ soit :

i) bijectif si $i < n - 1$

ii) surjectif si $i = n - 1$.

On a des énoncés analogues à celui du théorème (1.1) avec des groupes d'homologie et de cohomologie. En fait, comme la démonstration de (1.1) utilise la théorie de Morse, la bonne formulation de ce théorème se donne en termes de complexes cellulaires.

Il faut remarquer ici que c'est la partie "faible" a) de (1.1) qui implique le théorème de Zariski global (cf.[12]) dont D. Chéniot a parlé.

De même, il existe un théorème, analogue local du théorème de Van Kampen. O. Zariski utilise un tel théorème pour calculer le groupe fondamental local d'une courbe analytique plane (cf.[10]). On l'énonce de la façon suivante :

THEOREME (1.2)

Soit C une courbe analytique plane définie dans un voisinage ouvert U de $0 \in \mathbb{C}^2$. Soient X et Y deux droites orthogonales issues de O. Supposons que O soit un point isolé de $Y \cap C$. Soient D_1 et D_2 des disques respectivement dans X et Y centrés en O tels que :

a) $D_1 \times D_2$ est contenu dans U ;

b) $(\{0\} \times D_2) \cap C = \{0\}$;

c) $(D_1 \times \partial D_2) \cap C = \emptyset$, où ∂D_2 est le bord de D_2 ;

d) la projection de $C \cap \mathring{D} \times D_2$ sur $\mathring{D}$, où $\mathring{D}$ est l'intérieur d'un disque de X contenant D_1, est plate sur $\mathring{D}$ et lisse sur $\mathring{D} - \{0\}$;

dans ce cas la projection de $(\partial D_1 \times D_2) - C$ sur ∂D_1 est une fibration différentiable localement triviale dont les fibres sont des disques moins k trous $\{x\} \times D_2 - C$ où $x \in \partial D_1$ et k égale la multiplicité d'intersection en O de C et la droite Y. De plus, on peut construire : $\{x\} \times D_2 - C \to \{x\} \times D_2 - C$, homéomorphisme caractéristique de cette fibration qui soit l'identité sur $\{x\} \times \partial D_2$. Les générateurs du groupe fondamental local du complémentaire de C en O sont alors les générateurs $[g_i]$ du groupe libre $\pi_1(\{x\} \times D_2 - C, y)$ avec $y \in \{x\} \times D_2 - C$ et les relations sont :

$$[g_i] = [h \circ g_i]$$

où g_i est un représentant de $[g_i]$ et $[h \circ g_i]$ est la classe d'homotopie de $h \circ g_i$.

On peut démontrer ce théorème comme on le fait dans le cas global mais sans avoir besoin de modifications ([1]), ou bien, plus facilement, on utilise le théorème de Van Kampen classique en constatant :

a) $\partial(D_1 \times D_2) - C = (\partial D_1 \times D_2 - C) \cup (D_1 \times \partial D_2)$

et $(D_1 \times \partial D_2) \cap (\partial D_1 \times D_2 - C) = \partial D_1 \times \partial D_2$;

b) $\partial(D_1 \times D_2) - C$ a le type d'homotopie de $D_1 \times D_2 - C$;

c) $D_1 \times D_2 - C$ a le type d'homotopie de $B_\epsilon - C$ pour tout ϵ assez petit.

Contrairement à ce qui se passe pour le cas global, le calcul du groupe fondamental local du complémentaire d'une hypersurface H en O ne peut s'obtenir à l'aide de ces deux théorèmes locaux. En effet, après l'application du a) de (1.1) pour se ramener au complémentaire d'une surface analytique, il faut utiliser b) de (1.1) qui donne un problème de calcul du groupe fondamental qui n'est ni local ni global.

2.- GROUPE FONDAMENTAL DU COMPLEMENTAIRE D'UNE HYPERSURFACE PROJECTIVE LISSE

On a l'analogue topologique suivant du théorème démontré dans H. Popp [7] :

THEOREME (2.1)

Soit $H \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ une hypersurface projective complexe lisse avec $n \geqslant 2$. Alors le groupe fondamental de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - H$ en un point $e \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - H$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ où d est le degré d'une équation réduite qui définit H.

Nous allons en donner deux démonstrations. La première peut être "algébrisée". La seconde utilise les résultats de J. Milnor (cf.[6] et [5]).

Première démonstration de (2.1)

On démontre tout d'abord :

LEMME (2.2)

Soient H_1 et H_2 deux hypersurfaces projectives complexes lisses de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ qui ont même degré. Alors la paire $(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), H_1)$ est difféomorphe à la paire $(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), H_2)$.

Preuve

Soit $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ l'espace projectif des équations homogènes de n+1 variables de degré d. Soit $p : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ la seconde projection.

Soit $\mathcal{H}$ l'hypersurface de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ qui est l'image de l'hy-

persurface de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{N+1}$ de coordonnées $(x_o,\dots,x_n, a_{i_o\dots i_n})$ avec $\sum_{j=0}^{n} i_j = d$, définie par l'équation
$$\sum_{\substack{i_o,\dots,i_n \\ \sum_{j=0}^{n} i_j = d}} a_{i_o\dots i_n} x_o^{i_o} \dots x_n^{i_n} = 0.$$

Ainsi si $\bar{a} \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, et si $(\bar{a}_{i_o\dots i_n})$ est un représentant de $\bar{a}$ dans $\mathbb{C}^{N+1}$, $p^{-1}(\bar{a}) \cap \mathscr{H}$ est l'hypersurface de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \{\bar{a}\}$ définie par :

$$\sum_{\substack{i_o,\dots,i_n \\ \sum_{j=0}^{n} i_j = d}} \bar{a}_{i_o\dots i_n} x_o^{i_o} \dots x_n^{i_n} = 0.$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ l'ouvert de Zariski non vide des équations homogènes de n+1 variables de degré d qui définissent une hypersurface de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ non singulière.

On remarque alors que p induit des morphismes propres et submersifs :

$$p^{-1}(\Omega) \to \Omega$$

$$p^{-1}(\Omega) \cap \mathscr{H} \to \Omega$$

En utilisant une construction de champs de vecteurs analogue à celle qui permet de démontrer le théorème d'Ehresmann qui établit qu'un morphisme propre et submersif de variétés différentiables connexes est une fibration différentiable localement triviale, on peut montrer que p définit une fibration de $p^{-1}(\Omega)$ sur Ω qui respecte $\mathscr{H}$ et ceci permet d'établir le lemme (2.2).

Considérons maintenant un point $x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) - \Omega$ qui correspond à l'équation de d hyperplans qui forment un diviseur à croisements normaux. Il existe alors un chemin analytique $q : D \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ défini sur un disque D de $\mathbb{C}$ centré en $0 \in \mathbb{C}$ tel que $q(0) = x$ et $q(t) \in \Omega$ pour tout $t \in D - \{0\}$. Soit $\tilde{p} : X \to D$ l'image réciproque de p par q :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \arrow[d, "p"] \\ D \arrow[r, "q"] & \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

On a ainsi une famille d'hypersurfaces de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ paramétrée par D dont la fibre générique est une hypersurface lisse de degré d et la fibre spéciale est d hyperplans de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ qui forment un diviseur à croisements normaux.

Le théorème classique de Van Kampen permet de calculer, par récurrence sur d, le groupe fondamental du complémentaire dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de d hyperplans formant un diviseur à croisements normaux. On trouve que le groupe fondamental est abélien.

Comme $n \geqslant 2$, une application classique du théorème de Zariski (cf. [4]) donne que le groupe fondamental du complémentaire d'une hypersurface complexe lisse est quotient du groupe fondamental du complémentaire de d hyperplans formant un diviseur à croisements normaux. Donc le groupe fondamental cherché est abélien.

Comme $n \geqslant 2$, en appliquant le théorème de Zariski, on se ramène au calcul du groupe fondamental du complémentaire d'une courbe plane lisse de degré d. Le théorème de Van Kampen montre qu'il y a d générateurs $g_1, \dots, g_d$ avec des relations du type :

$$\begin{cases} g_i = h\, g_j\, h^{-1} & (1) \\ g_1 \dots g_d = 1 & (2) \end{cases}$$

comme le groupe obtenu est abélien et que la courbe est irréductible, un argument classique (cf. [11], p.210) montre que $g_1, \dots, g_d$ sont conjugués et conduit à :

$$g_1 = \dots = g_d = g$$

comme $g^d = 1$, le groupe obtenu est bien cyclique d'ordre d.

Ce dernier argument montre que dans tous les cas l'abélianisé du groupe fondamental du complémentaire d'une courbe projective pl[illegible] irréductible de degré d est cyclique d'ordre d.

<u>Seconde démonstration de (2.1)</u>

On remarque que :

<u>LEMME (2.3)</u>

Soit H une hypersurface projective complexe lisse de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Soit F une équation homogène réduite de n+1 variables qui définit H, alors l'application canonique de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ induit un revêtement de degré d $\pi : V \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - H$ de l'hypersurface V de $\mathbb{C}^{n+1}$ définie par F = 1 sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - H$. De plus, le groupe de Galois du revêtement est celui des racines d-ièmes de l'unité.

Ce lemme provient de ce que :

$$F(\lambda x) = \lambda^d F(x)$$

car F est homogène de degré d.

Un théorème de J. Milnor ([6] et [5] théorème (3.1)) donne que V a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères de dimension réelle n, car F = 0 n'a une singularité qu'en 0. Comme $n \geqslant 2$, V est donc simplement connexe. Le revêtement $\pi : V \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - H$ donne une suite exacte courte :

$$1 \to \pi_1(V,e) \to \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - H, \pi(e)) \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to 1$$

avec $e \in V$. Comme $\pi_1(V,e) = \{1\}$, on obtient le résultat cherché.

De façon générale, pour établir que le groupe fondamental du complémentaire d'une hypersurface projective de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ réduite et irréductible de degré d définie par F = 0 est cyclique d'ordre d, on pourra chercher à montrer que l'hypersurface V de $\mathbb{C}^{n+1}$ définie par F = 1 est simplement connexe.

On peut remarquer que la première démonstration de (2.1) peut être utilisée à montrer que le groupe fondamental du complémentaire dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de k hypersurfaces lisses de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ formant un diviseur à croisements normaux est abélien et si $d_1,\dots,d_k$ sont leurs degrés respectifs leur groupe abélien ainsi obtenu a k générateurs $g_1,\dots,g_k$ et avec la relation :

$$d_1 g_1 + \dots + d_k g_k = 0$$

on obtient donc un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z}$ où δ est le plus grand commun diviseur de $d_1,\dots,d_k$.

3.- COMMENTAIRES

Dans le paragraphe 2, les méthodes utilisées pour calculer le groupe fondamental du complémentaire d'une courbe projective plane lisse n'ont pas encore permis de démontrer la conjecture suivante de O. Zariski (cf.[11], p. 210) :

CONJECTURE (3.1) (O. Zariski)

Le groupe fondamental du complémentaire d'une courbe projective plane irréductible de degré d n'ayant comme singularités que des croisements normaux est cyclique d'ordre d.

Dans [7] H. Popp indique comment on peut approcher ce théorème par voie algébrique. Il obtient ainsi des résultats quand les singularités de la courbe ne sont pas trop "grosses".

Indiquons que, pour l'étude des groupes fondamentaux des complémentaires de courbes projectives planes, D. Mumford dans [11] (p. 231) propose d'étudier l'analogue des polynômes d'Alexander pour ces groupes, i.e. si G est le groupe fondamental du complémentaire d'une courbe projective plane irréductible et G' son sous-groupe des commutateurs, il s'agit de connaître la structure du $\mathbb{Z}[G/G']$-module $G'/(G')'$ où $\mathbb{Z}[G/G']$ est l'algèbre du groupe abélien G/G'. Remarquons que $G/G' \approx \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Enfin, comme A. Grothendieck le fait dans ([2], Chap. 13), on peut espérer obtenir un théorème analogue au théorème (1.1) quand on a une hypersurface Y définie sur un espace analytique X par une fonction f. Plus précisément, soit $x \in Y \subset X$, soit U un ouvert de X tel que $X \cap U \subset \mathbb{C}^N$, soit L un hyperplan générique de $\mathbb{C}^N$ passant par x, alors :

QUESTION :

Quelles sont les hypothèses sur X-Y à faire pour que l'on puisse comparer les groupes d'homotopie locaux en x de $L \cap (X - Y)$ et $X - Y$?

Quand $X - Y$ est non singulier, les méthodes de H. Hamm et Lê Dũng Tráng [3] permettent d'obtenir un théorème analogue à (1.1).

Quand $X - Y$ est singulier, il semble qu'il faille faire des hypothèses sur la profondeur des singularités (cf. [2], Chap. 13), par exemple supposer que les singularités dans $X - Y$ sont des intersections complètes.

* * *

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Chéniot, Le groupe fondamental du complémentaire d'une hypersurface projective complexe, dans "Singularités à Cargèse".

[2] A. Grothendieck, Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGAZ), North Holland Cie.

[3] H.Hamm - Lê Dũng Tráng, Un théorème de Zariski du type de Lefschetz à paraître dans Annales de l'Ecole Normale Supérieure, Paris.

[4] Lê Dũng Tráng, Une application du théorème de Zariski, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 275, p. 57-59.

[5] Lê Dũng Tráng, Topologie des singularités des hypersurfaces complexes, dans "Singularités à Cargèse".

[6] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Stud. 61, Princeton.

[7] H. Popp, Introduction to the algebraic theory of fundamental groups, dans "Singularités à Cargèse".

[8] D. Prill, Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups, Duke Math. J. 34, (1967), p.375-386.

[9] E. Van Kampen, On the fundamental group of an algebraic curve, Amer. J. Math., Vol. 55 (1933).

[10] O. Zariski, On the topology of algebroïd singularities, Amer. J. Math., Vol. 54 (1932).

[11] O. Zariski, Algebraic surfaces, second supplemented Edition, Ergebnisse der mathematik und ihrer grenzgebiete, band 61, Springer.

[12] O. Zariski, On the Poincaré group of a projective hypersurface, Ann. Math. 38, N° 1 (1937), p. 131-141.