Astérisque

DENIS CHÉNIOT

Le groupe fondamental du complémentaire d'une hypersurface projective complexe

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 241-251
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__241_0>

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LE GROUPE FONDAMENTAL DU COMPLEMENTAIRE D'UNE HYPERSURFACE PROJECTIVE COMPLEXE

Denis CHENIOT

0. INTRODUCTION.

Deux théorèmes permettent d'obtenir par leur application successive une présentation du groupe fondamental du complémentaire d'une hypersurface $H \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ pour $n \geq 2$: le théorème de ZARISKI (0.1) (c.f. [8]) permet de se ramener au cas d'une courbe projective plane, et le théorème de VAN KAMPEN (6.3) (c.f. [6]) donne la présentation voulue dans ce cas particulier.

Le théorème de ZARISKI (c.f. [8]) s'énonce :

THEOREME 0.1. (ZARISKI) : Soit H une hypersurface algébrique de l'espace projectif complexe à n dimensions. Si $n \geq 3$, alors pour tout hyperplan projectif L d'un ouvert de ZARISKI non vide Ω de l'espace des hyperplans de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, l'injection canonique de L-H dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$-H induit un isomorphisme :

$$\pi_1(L-H,e) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})-H,e) \quad \text{pour } e \in L-H.$$

On peut obtenir ce théorème comme corollaire d'un théorème local du type LEFSCHETZ dû à H. HAMM et LÊ DŨNG TRÁNG (c.f. [2] et [3]). Ici nous présentons les grandes lignes d'une démonstration directe qui donne aussi en passant le théorème de VAN KAMPEN (6.3). Une version complète de cette démonstration paraîtra dans Compositio Mathematica.

La méthode utilisée est la suivante : nous montrons qu'on peut retirer à $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, un nombre fini d'hyperplans $L_1, \ldots, L_m, L_\infty$ concourants en un $n-2$ plan A, de manière à ce que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - (H \cup L_1 \cup \ldots \cup L_m \cup L_\infty)$ soit un fibré localement trivial dont la fibre générique est $L-(A \cup H)$ et la base $\mathbb{C}$ moins m points. Cela permet de comparer les groupes fondamentaux de l'espace et de la fibre. Nous étudions ensuite la perturbation apportée par la réintroduction de $L_1, \ldots, L_m, L_\infty$. Cette étude donne le théorème de ZARISKI pour $n \geq 3$ et celui de VAN KAMPEN pour $n = 2$.

Pour montrer la fibration localement triviale mentionnée nous utilisons le premier théorème d'isotopie de THOM et MATHER (c.f. [4] et [5]). Mais celui-ci n'est pas directement applicable et il nous est nécessaire de procéder à l'éclatement de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ le long de A. Dès lors il est même plus aisé de faire toute l'étude des groupes fondamentaux dans l'éclaté Z de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ le long de A et de comparer au dernier moment les groupes fondamentaux dans Z et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Le choix de L (et de A) est commandé par la possibilité d'appliquer le premier théorème d'isotopie : nous le choisirons donc transversal à toutes les strates d'une stratification de H possédant les propriétés (a) et (b) de WHITNEY (c.f. [7]). Ce choix est effectivement générique.

1. CHOIX DE L'HYPERPLAN GENERIQUE L

H est une hypersurface algébrique de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, avec $n \geq 2$.

PROPOSITION 1.1. On peut munir $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ d'une stratification Σ possédant les propriétés (a) et (b) de WHITNEY, telle que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - H$ soit une strate. Σ est alors finie et l'adhérence de toute strate est un ensemble algébrique de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

PROPOSITION 1.2. L'espace des hyperplans projectifs de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Il existe un ouvert de ZARISKI non vide Ω de cet espace tel que tout élément de Ω soit transversal à toutes les strates de Σ.

L sera un hyperplan projectif fixé, arbitrairement choisi dans Ω.

PROPOSITION 1.3. Il existe un n - 2 plan A de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ contenu dans L et transversal à toutes les strates de Σ. Tous les hyperplans issus de A, sauf un nombre fini $L_1,\dots,L_m$, sont transversaux à toutes les strates de Σ.

2. STRATIFICATION DE L'ECLATE Z DE $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ LE LONG DE A

Z est une variété analytique complexe de dimension n et le morphisme d'éclatement :

$$\varphi : Z \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

est un isomorphisme analytique au-dessus de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - A$, tandis que $\varphi^{-1}(A)$ est une sous-variété fermée de codimension 1 de Z.

Soit $\rho : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - A \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

l'application projective qui à tout point x de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})-A$ fait correspondre la direction de l'hyperplan déterminé par A et x. La composition de ρ avec la restriction de φ à $Z - \varphi^{-1}(A)$ se prolonge de manière unique en un morphisme

$$\tilde{\rho} : Z \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

qui est une submersion propre.

Pour tout hyperplan projectif K de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ passant par A, le transformé strict $\tilde{K}$ de K est $\tilde{\rho}^{-1}(\rho(K-A))$ et la restriction de φ à $\tilde{K}$ est un isomorphisme analytique de $\tilde{K}$ sur K.

Soit e_0 un point de $\tilde{L} \cap \varphi^{-1}(A)$ hors de $\varphi^{-1}(H)$. Ce point servira de point base. Remarquons que $\varphi(e_0) \in A - H$. Soit α défini par $\alpha = \varphi^{-1}(\varphi(e_0))$. On a $e_0 \in \alpha, \alpha \cap \varphi^{-1}(H) = \emptyset$ et α servira à relever les lacets de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

En rafinant convenablement la partition de Z constituée par les $\varphi^{-1}(S)$ pour $S \in \Sigma$, on obtient :

PROPOSITION 2.1. Il existe une stratification $\tilde{\Sigma}$ de Z possédant les propriétés suivantes :

(i) $\tilde{\Sigma}$ vérifie les propriétés (a) et (b) de WHITNEY.

(ii) $\varphi^{-1}(H)$, $\varphi^{-1}(A)$ et σ sont unions de strates

(iii) pour tout hyperplan K de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ passant par A autre que $L_1,\ldots,L_m$ le transformé strict $\tilde{K}$ de K est transversal à toutes les strates de $\tilde{\Sigma}$.

La démonstration de cette proposition repose essentiellement sur le lemme suivant à l'aide duquel le rafinement voulu est opéré, après avoir remarqué que Z peut être considéré comme une sous-variété analytique de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

<u>LEMME 2.2.</u> Soit Σ une stratification possédant les propriétés (a) et (b) de WHITNEY d'un sous-ensemble fermé E d'une variété analytique complexe M et soit P une sous-variété fermée de M transversale à toutes les strates de Σ . Soit N une autre variété analytique complexe. Soient Σ_1, Σ_2, Σ_3 les partitions de $E \times N$, $E \cap P$, $E \cup P$ respectivement, définies comme suit :

Σ_1 est l'ensemble des $S \times N$ pour $S \in \Sigma$

Σ_2 est l'ensemble des $S \cap P$ pour $S \in \Sigma$

Σ_3 est l'union de Σ_2, de $\{P-E\}$ et de l'ensemble des $S-P$ pour $S \in \Sigma$.

Alors Σ_1, Σ_2, Σ_3 sont des stratifications possédant les propriétés (a) et (b) de WHITNEY.

On a un résultat analogue au lemme 2.2. pour une stratification complexe quelconque (c.f. [1]).

3. FIBRATION DE $\mathcal{G} = Z - (\tilde{L}_1 \cup \ldots \cup \tilde{L}_m \cup \tilde{L}_\infty)$

L_∞ est un hyperplan quelconque (hyperplan à l'infini) passant par A, distinct de L, $L_1,\ldots, L_m$, introduit pour la commodité de la présentation des groupes fondamentaux.

L'application $\tilde{p}$ étant propre, la proposition 2.1 permet l'application du 1er théorème d'isotopie de THOM et MATHER (c.f. [4] et [5]) qui donne :

PROPOSITION 3.1. L'espace $\mathcal{P} = Z - (\tilde{L}_1 \cup \ldots \cup \tilde{L}_m \cup \tilde{L}_\infty)$ est un fibré topologique localement trivial respectant $\varphi^{-1}(H), \varphi^{-1}(A)$ et α, de base $\mathcal{B} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{\tilde{\rho}(\tilde{L}_1), \ldots, \tilde{\rho}(\tilde{L}_m), \tilde{\rho}(\tilde{L}_\infty)\}$ et de projection $\tilde{\rho}|\mathcal{P}$. En particulier $\mathcal{H} = \mathcal{P} - \varphi^{-1}(H)$ est un fibré localement trivial de base $\mathcal{B}$ et de projection $\pi = \tilde{\rho}|\mathcal{H}$ respectant α et $\varphi^{-1}(A)$.

Si l'on pose $\mathcal{A} = \alpha - \{\alpha \cap \tilde{L}_1, \ldots, \alpha \cap \tilde{L}_m, \alpha \cap \tilde{L}_\infty\}$, on a $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ et la restriction de π à $\mathcal{A}$ est un isomorphisme analytique de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$. Il en résulte :

PROPOSITION 3.2. Pour tout lacet η de base e_0 (c.f. § 2) contenu dans $\mathcal{A}$, il existe une isotopie $J_\eta : \mathcal{F} \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{H}$ de l'injection canonique de la fibre $\mathcal{F} = \mathcal{L} - \varphi^{-1}(H)$ dans $\mathcal{H}$, qui relève $\pi \circ \eta$, qui respecte $\varphi^{-1}(A)$ et où e_0 parcourt η. L'homéomorphisme $J_\eta(.,1) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ ne dépend à une isotopie près dans $\mathcal{F}$ que de la classe d'homotopie de η dans $\mathcal{A}$.

4. DETERMINATION DU GROUPE FONDAMENTAL DE $\mathcal{H} = \mathcal{P} - \varphi^{-1}(H)$.

La suite exacte d'homotopie du fibré $\mathcal{H}$, le fait que $\mathcal{B}$ a le type d'homotopie d'un bouquet de cercles et a donc un π_2 trivial, l'isomorphisme analytique entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ induit par π, donnent la courte suite exacte :

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{F}, e_0) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{H}, e_0) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{A}, e_0) \longrightarrow 1$$

où la deuxième flèche est induite par l'injection canonique de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{H}$ et où la troisième flèche a pour section l'homomorphisme de $\pi_1(\mathcal{A}, e_0)$ dans $\pi_1(\mathcal{H}, e_0)$ induit par l'injection canonique de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$.

Si $h_1, \ldots, h_m$ sont des générateurs du groupe libre $\pi_1(\mathcal{A}, e_0)$ et si l'on se donne une présentation de $\pi_1(\mathcal{F}, e_0)$ on peut déduire de ce qui précède la :

PROPOSITION 4.1. Une présentation de $\pi_1(\mathcal{H}, e_0)$ est donnée par les générateurs $g_1, \ldots, g_\rho$ de $\pi_1(\mathcal{F}, e_0)$ et $h_1, \ldots, h_m$ et par les relations de $\pi_1(\mathcal{F}, e_0)$ et les relations :

$$g_i\, h_j = h_j\, \varphi_{ij}(g_1, \ldots, g_\rho) \text{ pour } 1 \leq i \leq \rho \text{ et } 1 \leq j \leq m.$$

où φ_{ij} $(g_1,\ldots, g_p)$ est un mot en $g_1,\ldots, g_p$ représentant la classe d'homotopie dans $\mathcal{T}$ du lacet J_{n_j} $(.,1) \circ \gamma_i$ (c.f. prop.3.2), γ_i étant un représentant de g_i et n_j un représentant de h_j. La classe d'homotopie représentée par φ_{ij} $(g_1,\ldots, g_p)$ ne dépend pas du choix des représentants γ_i et n_j.

5. DETERMINATION DU GROUPE FONDAMENTAL DE $Z - \varphi^{-1}(H)$.

PROPOSITION 5.1. Une présentation de $\pi_1(Z - \varphi^{-1}(H),e_0)$ est donnée par les générateurs $g_1,\ldots, g_p$ de $\pi_1(\tilde{L} - \varphi^{-1}(H),e_0)$ et les relations de $\pi_1(\tilde{L} - \varphi^{-1}(H), e_0)$ ainsi que les relations $g_i = \varphi_{ij}$ $(g_1,\ldots, g_p)$ pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq m$.

ESQUISSE DE DEMONSTRATION : L'ensemble $Z - \varphi^{-1}(H)$ est obtenu à partir de $\mathcal{H}$ par l'introduction $(\tilde{L}_1 \cup \ldots \cup \tilde{L}_m \cup \tilde{L}_\infty) \cap (Z - \varphi^{-1}(H))$ qui est une sous-variété fermée de codimension réelle 2 de $Z - \varphi^{-1}(H)$. L'injection canonique de $\mathcal{H}$ dans $Z - \varphi^{-1}(H)$ induit donc une surjection de $\pi_1(\mathcal{H},e_0)$ sur $\pi_1(Z - \varphi^{-1}(H),e_0)$. Par suite $\pi_1(Z - \varphi^{-1}(H),e_0)$ est obtenu à partir de $\pi_1(\mathcal{H},e_0)$ par la seule introduction de nouvelles relations.

Comme nouvelles relations on a les relations évidentes $h_i = 1$ pour $1 \leq i \leq m$ puisque α est simplement connexe et inclus dans $Z - \varphi^{-1}(H)$. Pour montrer que ce sont les seules, il suffit de montrer que tout lacet μ de base e_0 contenu dans $\mathcal{H}$ et homotope dans $Z - \varphi^{-1}(H)$ au lacet constant en e_0 est homotope dans $\mathcal{H}$ à un certain lacet dont la trivialité dans $Z - \varphi^{-1}(H)$ est clairement conséquence des relations $h_i = 1$. La relations exprimant que μ est homotope à un point sera alors conséquence des relations $h_i = 1$.

Soit donc μ un lacet homotope dans $Z - \varphi^{-1}(H)$ au lacet constant en e_0. On peut montrer le :

LEMME 5.2. Il existe une homotopie K dans $Z - \varphi^{-1}(H)$ de μ sur le lacet constant en e_0 telle que l'image réciproque de $\tilde{L}_1 \cup \ldots \cup \tilde{L}_m \cup \tilde{L}_\infty$ par K soit composée d'un nombre fini de points $\rho_1, \dots, \rho_k$ contenus dans $]0,1[^2$.

On peut découper la cellule d'homotopie comme suit : On extrait de $[0,1]$ k disques ouverts $D_1, \dots, D_k$ respectivement centrés en $\rho_1, \dots, \rho_k$ et d'adhérences mutuellement disjointes. Soit ξ_i un lacet contenu dans Fr D_i, d'origine c_i. On peut choisir les D_i suffisamment petits pour que $K \circ \xi_i$ soit homotope comme lacet (sans point base fixe) dans $\mathcal{H}$ à un lacet contenu dans $\mathcal{K}$. Cela résulte du Lemme suivant qu'on peut démontrer :

<u>LEMME 5.3.</u> Soit M un point de $\tilde{L}_i - \varphi^{-1}(H)$ avec $1 \leq i \leq m$ ou $i = \infty$. Il existe un voisinage V de M dans $Z - \varphi^{-1}(H)$ tel que tout lacet de $V - \tilde{L}_i$ soit contenu dans $\mathcal{H}$ et homotope comme lacet (sans point base fixe) dans $\mathcal{H}$ à un lacet de $\mathcal{K}$.

Alors $K \circ \xi_i$ est homotope dans $\mathcal{H}$ à un lacet de base $K(c_i)$ de la forme $K_i \, \mu_i \, K_i^{-1}$ où μ_i est contenu dans $\mathcal{K}$. La trivialité de μ_i dans $Z - \varphi^{-1}(H)$ est conséquence des relations $h_j = 1$. Il est d'autre part assez aisé de voir que μ est homotope dans $\mathcal{H}$ à un composé de lacets du type $\sigma_i(K \circ \xi_i)\sigma_i^{-1}$ et de leurs inverses. Il en résulte que la trivialité de μ dans $Z - \varphi^{-1}(H)$ est conséquence des relations $h_j = 1$. Cela achève la démonstration de la proposition 5.1.

<u>6. COMPARAISON DES GROUPES FONDAMENTAUX DE $Z - \varphi^{-1}(H)$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - H$, $\tilde{L} - \varphi^{-1}(H)$, L-H.</u>

Rappelons que φ induit des isomorphismes analytiques de $Z - \varphi^{-1}(A)$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - A$ et de $\tilde{L}$ sur L.

D'autre part $\varphi^{-1}(A) - \varphi^{-1}(H)$ est une sous-variété fermée de $Z - \varphi^{-1}(H)$ de codimension réelle 2 et A - H est une sous-variété fermée de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - H$ de codimension réelle 4. Il en résulte que les injections canoniques induisent un homomorphisme surjectif :

$$\pi_1(Z - \varphi^{-1}(A \cup H), e) \longrightarrow \pi_1(Z - \varphi^{-1}(H), e)$$

et un isomorphisme :

$$\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - (A \cup H), \varphi(e)) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - H, \varphi(e))$$

pour $e \in Z - \varphi^{-1}(A \cup H)$.

Enfin la proposition 5.1 montre que l'injection canonique de $\tilde{L} - \varphi^{-1}(H)$ dans $Z - \varphi^{-1}(H)$ induit un homomorphisme surjectif :

$$\pi_1(\tilde{L} - \varphi^{-1}(H), e_o) \longrightarrow \pi_1(Z - \varphi^{-1}(H), e_o).$$

Tout cela permet de montrer les propositions suivantes :

<u>PROPOSITION 6.1.</u> La restriction de φ à $Z - \varphi^{-1}(H)$ induit un isomorphisme :

$$\pi_1(Z - \varphi^{-1}(H), e_o) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - H, \varphi(e_o))$$

<u>PROPOSITION 6.2.</u> La restriction de φ à $\tilde{L} - \varphi^{-1}(H)$ induit un isomorphisme :

$$\pi_1(\tilde{L} - \varphi^{-1}(H), e_o) \longrightarrow \pi_1(L - H, \varphi(e_o)).$$

Cette proposition jointe à la proposition 5.1. donne dans le cas $n = 2$ le théorème de VAN KAMPEN (c.f. [6]).

<u>THEOREME 6.3. (VAN KAMPEN).</u> Soit $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une courbe projective plane. Soit A un point non situé sur C. Soient $L_1, \dots, L_m, L_\infty$ des droites issues de A parmi lesquelles toutes celles qui sont tangentes à C ou qui passent par un point singulier de C. Soit L une droite issue de A distincte de $L_1, \dots, L_m, L_\infty$. Elle coupe C en ρ points $G_1, \dots, G_\rho$, où ρ est le degré d'une équation réduite de C. Soient $g_1, \dots, g_\rho$ les classes d'homotopie dans L-C de lacets d'origine A, entourant respectivement et exclusivement $G_1, \dots, G_\rho$ et dont le composé est trivial dans L-C. Soient $h_1, \dots, h_m$ des générateurs du groupe libre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_\infty\}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_\infty$ sont les directions de $L_1, \dots, L_m, L_\infty$ respectivement. Pour tout j, il existe une isotopie de L dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C$

respectant C, laissant A fixe et où la direction de L décrit un représentant de h_j. Par cette isotopie un représentant de g_i pour $1 \leq i \leq \rho$ est transformé en un lacet de L - C dont la classe d'homotopie dans L - C ne dépend que de g_i et h_j ; elle est représentée par un mot $\varphi_{ij}(g_1, \ldots, g_\rho)$ en $g_1, \ldots, g_\rho$ qui est un conjugué de g_{i_j} où G_{i_j} est le transformé de G_i par cette isotopie; une présentation de $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C, A)$ est alors donnée par les générateurs $g_1, \ldots, g_\rho$ et les relations $g_1 \ldots g_\rho = 1$, $g_i = \varphi_{ij}(g_1, \ldots, g_\rho)$ pour $1 \leq i \leq \rho$ et $1 \leq j \leq m$.

Dans le cas général $n \geq 2$, on obtient :

<u>PROPOSITION 6.4.</u> (LEFSCHETZ) : l'injection canonique de L - H dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$-H induit un homomorphisme surjectif :

$$\pi_1(L - H, e) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - H, e)$$

pour $e \in L - H$.

Pour $n \geq 3$ on a :

<u>PROPOSITION 6.5.</u> Si $n \geq 3$ l'injection canonique de $\tilde{L} - \varphi^{-1}(H)$ dans $Z - \varphi^{-1}(H)$ induit un isomorphisme :

$$\pi_1(L - \varphi^{-1}(H), e_0) \longrightarrow \pi_1(Z - \varphi^{-1}(H), e_0)$$

<u>ESQUISSE DE DEMONSTRATION.</u> L'hypothèse $n \geq 3$ permet d'appliquer la proposition 6.4 à A - H et L - H : l'injection canonique de A - H dans L - H induit un homomorphisme surjectif :

$$\pi_1(A - H, \varphi(e_0)) \longrightarrow \pi_1(L - H, \varphi(e_0))$$

d'où il résulte que l'injection canonique de $(L \cap \varphi^{-1}(A)) - \varphi^{-1}(H)$ dans $\tilde{L} - \varphi^{-1}(H)$ induit un homorphisme surjectif :

$$\pi_1((\tilde{L} \cap \varphi^{-1}(A)) - \varphi^{-1}(H), e_0) \longrightarrow \pi_1(\tilde{L} - \varphi^{-1}(H), e_0).$$

Soit g_i un générateur de $\pi_1(\tilde{L} - \varphi^{-1}(H), e_0)$. Un représentant de g_i est donc homotope dans $\tilde{L} - \varphi^{-1}(H)$ à un lacet γ_1 contenu dans $\tilde{L} \cap \varphi^{-1}(A)$. Cette homotopie se transporte par l'isotopie J_{n_j} des propositions 3.2 et 4.1. en une homotopie dans $\tilde{L} - \varphi^{-1}(H)$ d'un représentant de $\varphi_{ij}(g_1, \ldots, g_p)$ vers un lacet γ_2 contenu dans $\tilde{L} \cap \varphi^{-1}(A)$. Cette même isotopie qui respecte $\varphi^{-1}(A)$ permet de voir que γ_1 et γ_2 sont homotopes dans $(\tilde{L} \cap \varphi^{-1}(A)) - \varphi^{-1}(H)$. Il en résulte qu'un représentant de g_i et un représentant de $\varphi_{ij}(g_1, \ldots, g_p)$ sont homotopes dans $(\tilde{L} \cup \varphi^{-1}(A)) - \varphi^{-1}(H)$. En prenant l'image de cette situation par φ et en remontant par l'isomorphisme analytique induit par φ entre $\tilde{L}$ et L on voit qu'ils sont homotopes dans $\tilde{L} - \varphi^{-1}(H)$. La relation $g_i = \varphi_{ij}(g_1, \ldots, g_p)$ est donc conséquence des relations de $\pi_1(\tilde{L} - \varphi^{-1}(H), e_0)$, ce qui, avec la proposition 5.1 donne le résultat.

Les propositions 1.2., 6.1., 6.2., 6.4., entraînent le théorème de ZARISKI (0,1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. CHENIOT : Sur les sections transversales d'un ensemble stratifié C.R. Acad. Sc.Paris t.275 n°19 (6 nov. 1972).

[2] D. CHENIOT et LÊ DŨNG TRÁNG : "Remarques sur les exposés de H.POPP et D. CHENIOT". Dans ce même recueil.

[3] H. HAMM et LÊ DŨNG TRÁNG : Un théorème de ZARISKI du type de LEFSCHETZ. A paraître dans Annales de l'E.N.S.

[4] J. MATHER : Notes on topological stability. Harvard University 1970.

[5] R. THOM : Ensembles et morphismes stratifiés. Bull. Amer. Math. Soc. 75 n°2 (1969).

[6] E. VAN KAMPEN : On the fundamental group of an algebraic curve. Amer. J. Math. Vol. 55 (1933).

[7] H. WHITNEY : Tangents to an analytic variety. Ann. Math. 81 n°3 (1965) pp. 496-549.

[8] O. ZARISKI : On the Poincaré group of a projective hypersurface. Ann. math 38 n°1 (1937) pp. 131 - 141.