OSCAR ZARISKI

Quatre exposés sur la saturation (notes prises par J.J. Risler)

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 21-39

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__21_0>

QUATRE EXPOSES SUR LA SATURATION

Oscar ZARISKI

(Notes prises par J.J. RISLER)

Nous noterons S.E.S. I, II ou III (resp G.T.S. I, II ou III), les articles de O. Zariski "Studies in equisingularity" I, II ou III parus dans l'American Journal of Mathematics, vol 87 (1965) et vol 90 (1968) (resp : les articles "General theory of saturation" I, II parus dans la même revue, vol 93 (1971), ou III, en cours de publication dans la même revue) .

Tous les anneaux seront commutatifs, avec éléments unités ; les morphismes d'anneaux étant supposés envoyer l'élément unité sur l'élément unité.

§ 1.- DEFINITION GENERALE DE LA SATURATION

Soient A un anneau, F son anneau total des fractions, K un sous-corps de F.

Nous allons définir la saturation de A par rapport à K : ce sera un sous-anneau de la clôture intégrale $\bar{A}$ de A dans F.

Soit Ω une clôture algébrique (fixée une fois pour toutes) de K ; notons H l'ensemble de K-homomorphismes de F dans Ω, A^* le plus petit sous-anneau de Ω contenant les anneaux $\psi(A)$ (pour tout $\psi \in H$), et $\bar{A}^*$ la clôture intégrale de A^*.
(Remarquons que A^* et $\bar{A}^*$ sont des anneaux intègres).

Définition 1.1

Soient η et ξ deux éléments de F. On dit que η domine ξ par rapport à K (ce que nous noterons $\eta \underset{K}{\succ} \xi$ ou $\eta \succ \xi$ s'il n'y a pas de confusion possible sur le corps K), si, quels que soient ψ_1 et ψ_2 dans H, on a :

$$\frac{\psi_1(\eta) - \psi_2(\eta)}{\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)} \in \bar{A}^* \qquad \text{si} \qquad \psi_1(\xi) \neq \psi_2(\xi)$$

$$\psi_1(\eta) = \psi_2(\eta) \qquad \text{si} \qquad \psi_1(\xi) = \psi_2(\xi)$$

Définition 1.2

Soit B un sous-anneau de $\bar{A}$ contenant A. On dit que B est saturé par rapport à K si B est fermé dans $\bar{A}$ pour la relation de domination, c'est-à-dire si, pour deux éléments ξ et η de $\bar{A}$, les conditions $\xi \in B$ et $\eta \underset{K}{>} \xi$ impliquent $\eta \in B$.

Remarquons que cette définition implique que $\bar{A}$ est saturé par rapport à K : l'ensemble des sous-anneaux de $\bar{A}$ contenant A et saturés n'est donc pas vide. Il est clair, d'autre part, que l'intersection d'une famille d'anneaux saturés est un anneau saturé.

Définition 1.3

Le saturé de A par rapport à K, noté $\tilde{A}_K$, est le plus petit sous-anneau saturé entre A et $\bar{A}$.

Remarque

Dans S.E.S. III, les hypothèses suivantes sont faites :

a) A est réduit,

b) F est de dimension finie sur K (ce qui implique que F est noetherien et de plus isomorphe à une somme directe finie de corps F_i),

c) les F_i sont des extensions séparables de K.

Ces hypothèses ne sont pas indispensables pour donner une définition de la saturation, mais sont probablement nécessaires pour pouvoir en dire quelque chose d'intéressant.

§ 2-CAS DES VARIETES ALGEBROÏDES

Nous appellerons variété algébroïde (ou variété algébrique formelle) le spectre V d'un anneau $\mathcal{O}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $\mathcal{O}$ est un anneau local noetherien, complet pour la topologie définie par l'idéal maximal et équicaractéristique,

b) $\mathcal{O}$ est réduit (ce qui est équivalent à dire que l'idéal (O) est intersection finie d'idéaux premiers minimaux : $(0) = \mathfrak{P}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{P}_n$),

c) $\mathcal{O}$ est équidimensionnel

(i.e. les dimensions des anneaux $\frac{\mathcal{O}}{\mathcal{P}_i}$ sont égales).

Faisons d'abord quelques rappels d'algèbre commutative ; soit $\varphi : \mathcal{O} \to \mathcal{O}/\underline{m}$ le morphisme canonique ($\underline{m}$ désignant l'idéal maximal de l'anneau $\mathcal{O}$). Un sous-corps k de $\mathcal{O}$ est appelé <u>corps de coefficients</u> si $\varphi|k$ est un isomorphisme de k sur $\mathcal{O}/\underline{m}$. Un tel corps est évidemment maximal parmi les sous corps de $\mathcal{O}$. On peut montrer ("Théorèmes de Cohen") que sous les hypothèses faites plus haut, il existe toujours un corps de coefficients, et que si la caractéristique de $\mathcal{O}$ (et donc de $\mathcal{O}/\underline{m}$) est 0, les corps de coefficients sont exactement les sous-corps maximaux de $\mathcal{O}$.

Si k et k' sont deux corps de coefficients dans $\mathcal{O}$, il existe un isomorphisme canonique $\varphi_{k,k'} : k \tilde{\to} k'$; il suffit de poser :

$$\varphi_{k,k'} = (\varphi|k')^{-1} \circ (\varphi|k)$$

On peut aussi définir $\varphi_{k,k'}$ par la condition :

$$\varphi_{k,k'}(c) - c \in \underline{m} \qquad \forall c \in k.$$

N.B.- $\varphi_{k,k'}$ n'est pas en général le seul isomorphisme de k sur k'.

<u>Définition 2.1</u>

Soit r la dimension de $\mathcal{O}$. Un ensemble d'éléments $x_1, x_2, \dots, x_r$ de $\underline{m}$ tel que l'idéal $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ soit primaire pour $\underline{m}$ est appelé un <u>système de paramètres</u> pour $\mathcal{O}$.

Il existe toujours des systèmes de paramètres dans un anneau local.

<u>Interprétation géométrique</u> :

Ecrivons $\mathcal{O}$ comme quotient d'un anneau de séries formelles : $\mathcal{O} \tilde{\to} k[[y_1, \dots, y_n]]/I$, ce qui géométriquement s'interprète comme un plongement local de la variété V dans un espace affine (sur lequel les coordonnées sont $y_1, \dots, y_n$). Relevons les x_i en des éléments X_i de $k[[y_1, \dots, y_n]]$. Le fait que $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ soit un système de paramètres pour $\mathcal{O}$ s'interprète alors en disant que l'intersection de V avec la variété d'équations : $X_1 = \dots = X_r = 0$ est réduite à l'origine.

Fixons maintenant un corps de coefficients k, et un système de paramètres $x_1, \dots, x_r$. On a alors les propriétés suivantes :

1) Les éléments $x_1,\dots,x_r$ sont analytiquement indépendants sur k (cela veut dire que le sous-anneau $R = k[[x_1,\dots,x_r]]$ de $\mathcal{O}$ est isomorphe à l'anneau des séries formelles en r indéterminées).

2) Aucun élément de R n'est diviseur de 0 dans $\mathcal{O}$ (ceci parce que $\mathcal{O}$ est supposé équidimensionnel).

3) $\mathcal{O}$ est un R-module de type fini.

Ces propriétés entraînent que si K est le corps des fractions de R, K est canoniquement contenu dans l'anneau total des fractions F de $\mathcal{O}$ et que F est un K-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 2.2

L'anneau $\tilde{\mathcal{O}}_K$ (défini au paragraphe précédent) s'appelle la k-saturation de $\mathcal{O}$ par rapport à $(x_1,\dots,x_r)$. On le note aussi $\tilde{\mathcal{O}}_k\ (x_1,\dots,x_r)$.

On peut montrer que si k est donné, l'anneau $\tilde{\mathcal{O}}_K$ est le même pour tous les choix suffisamment "génériques" des paramètres dans les cas suivants:

- V est une hypersurface (cf. note (1) à la fin du texte)

- V est une courbe (i.e. $r = 1$).

Précisons un peu ce qui se passe dans le cas $r = 1$ (le cas d'une hypersurface sera traité au § 5) :

Supposons que k soit de caractéristique 0 et soit x un paramètre de $\mathcal{O}$. Alors $\tilde{\mathcal{O}}_{k,x}$ est un anneau local noetherien de dimension 1, de corps résiduel k et de même multiplicité que $\mathcal{O}$ (dans le cas où $\mathcal{O}$ est intègre, cf. G.T.S. I , proposition 2.5) .

Un paramètre x de $\mathcal{O}$ est dit <u>transverse</u> si on a l'égalité :

$\dim_k(\frac{\mathcal{O}}{(x)}) = e(\mathcal{O})$, $e(\mathcal{O})$ désignant la multiplicité de l'anneau local $\mathcal{O}$ (l'inégalité $\dim_k(\frac{\mathcal{O}}{(x)}) \geqslant e(\mathcal{O})$ est toujours satisfaite). On a alors :

Théorème 2.3

Si k et k' sont deux corps de coefficients de $\mathcal{O}$, et x et x' deux paramètres transverses tels que le résidu de x'/x soit égal à 1 , alors l'isomorphisme canonique $\varphi_{k,k'} : k \overset{\sim}{\to} k'$ peut s'étendre en un automorphisme de $\tilde{\mathcal{O}}_{k,x}$ qui envoie x sur x' (G.T.S. II, théorème 4.4 et G.T.S. III, Appendice A, théorème A.1) .

On voit qu'un anneau saturé possède beaucoup d'automorphismes, un peu comme un anneau de séries formelles.

Il résulte de ce théorème que, dans le cas des courbes, la saturation $\tilde{\mathcal{O}}_{k,x}$ est la même pour tout choix du corps de coefficients et pour tout paramètre x supposé transverse.

§ 3.- LA SATURATION DE PHAM-TEISSIER

(cf. : fractions lipschitziennes d'une algèbre analytique complexe et saturation de Zariski, par Frédéric Pham et Bernard Teissier, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique (Juin 1969)).

Nous allons en donner une définition due à J. Lipman, un peu plus générale que celle de l'article original.

Donnons d'abord quelques rappels algébriques sur la clôture intégrale d'un idéal (cf. par exemple M. Lejeune et B. Teissier : Quelques calculs utiles à la résolution des singularités, séminaire publié par le Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique).

Définition 3.1

Soient A un anneau, R un sous-anneau de A et I un R-module contenu dans A.

Alors la clôture intégrale $\overline{I}$ de I dans A, est par définition l'ensemble des éléments x de A qui vérifient une équation de la forme :

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \qquad \text{avec} \qquad a_i \in I^i \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

Exemple :

Soit F l'anneau total des fractions de A, et soit x un élément de F qui s'écrira : $x = \frac{a}{b}$ avec a, b $\in$ A, et b $\neq$ 0. Alors x est entier (au sens classique) sur l'anneau R, si, et seulement si, a est entier sur le sous R-module de A engendré par b.

Soient maintenant R un anneau, A et A' deux R-algèbres, $g : A \to A'$ un R-homomorphisme. On peut considérer A' comme une A-algèbre, et on a un homomorphisme canonique f :

$$A' \underset{R}{\otimes} A' \to A' \underset{A}{\otimes} A'$$

Nous poserons $I_{R,A,A'} = \operatorname{Ker} f$; c'est l'idéal de $A' \underset{R}{\otimes} A'$ engendré par les éléments $g(a) \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} g(a)$ $(\forall a \in A)$.

Définition 3.2

La saturation de Pham-Teissier de A dans A' relativement à R est l'anneau :

$$A^{*}_{R,A'} = \{x \in A' \mid x \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} x \in \overline{I_{R,A,A'}}\}$$

Reprenons maintenant les notations du début, et posons $R = A \cap K$ (rappelons que K est un sous-corps de l'anneau total des fractions F de A).

Nous faisons les hypothèses suivantes :

a) A est entier sur R,

b) K est le corps des fractions de R.

a) implique que F (et donc aussi K) est algébrique sur le corps des fractions de R.

Nous envisageons aussi l'hypothèse suivante, plus forte que l'hypothèse b) :

b^{*}) R est intégralement clos dans K.

Ω étant une clôture algébrique de K, soit H l'ensemble des R-homomorphismes : $\overline{A} \to \Omega$, et A^* le plus petit sous-anneau de Ω contenant les anneaux $\psi(A)$ $(\forall\ \psi \in H)$.

L'hypothèse a) implique que $\overline{A}^*$ est entier sur R, puisque $\psi(A)$ est entier sur R $\forall\ \psi \in H$. On voit donc que si $\xi, \eta \in \overline{A}$, la relation $\eta \underset{K}{\succ} \xi$ équivaut à dire que $\psi_1(\eta) - \psi_2(\eta)$ est entier (au sens défini plus haut) sur le R-module engendré dans Ω par l'élément $\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)$ $(\forall\ \psi_1, \psi_2 \in H)$.

Traduisons ce fait en terme de produit tensoriel : si ψ_1 et $\psi_2 \in H$, soit $f = \psi_1 \otimes \psi_2$ l'homomorphisme : $\overline{A} \underset{R}{\otimes} \overline{A} \to \Omega$ défini par $f(\xi \underset{R}{\otimes} 1) = \psi_1(\xi)$ et $f(1 \underset{R}{\otimes} \xi) = \psi_2(\xi)$.

Il est, d'autre part, clair que tout homomorphisme de $\overline{A} \underset{R}{\otimes} \overline{A}$ dans Ω est de cette forme.

La remarque que nous venons de faire donne alors :

<u>Lemme 3.3</u>

Soient ξ et η deux éléments de $\overline{A}$. Alors $\eta \underset{K}{\succ} \xi$ si, et seulement si, pour tout R-homomorphisme $f : \overline{A} \underset{R}{\otimes} \overline{A} \to \Omega$, $f(\eta \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} \eta)$ est entier sur le sous R-module de Ω engendré par $f(\xi \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} \xi)$.

Enonçons maintenant une proposition due à J. Lipman :

<u>Proposition 3.4</u>

Soient ξ et η deux éléments de $\overline{A}$.

1) si $\eta \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} \eta$ est entier sur le R-module engendré dans $\overline{A} \underset{R}{\otimes} \overline{A}$ par $\xi \underset{R}{\otimes} 1 - 1 \underset{R}{\otimes} \xi$, alors $\eta \underset{K}{\succ} \xi$

2) Si R est intégralement clos dans son corps des fractions K et si F est séparable sur K (i.e. si F est une somme directe de corps F_i, extensions séparables de K), alors la réciproque est vraie.

1) est évident, et nous allons donner des indications de démonstration de 2) (démonstration valable sous l'hypothèse plus faible que R est

géométriquement unibranche, i.e. que $\bar{R}$ est radiciel sur R).

Supposons donc que $\eta \succ_K \xi$ et posons $S = R[\xi,\eta]$ (S est un sous-anneau de $\bar{A}$). Comme S est de type fini sur R, $S \otimes_R S$ est noetherien et n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_m$.

D'autre part, R est intégralement clos, et $S \otimes_R S$ est entier sur R ; on a donc $\mathfrak{P}_i \cap R = (0)$ par le "going down" de Cohen-Seidenberg. (c'est ici que l'hypothèse R intégralement clos, ou géométriquement unibranche, intervient) .

Notons φ_i le composé de l'application canonique :
$S \otimes_R S \to S \otimes_R S / \mathfrak{P}_i$ et d'un plongement $S \otimes_R S / \mathfrak{P}_i \to \Omega$; φ_i est de la forme $\varphi_{i,1} \otimes \varphi_{i,2}$ où $\varphi_{i,1}$ et $\varphi_{i,2}$ sont des R-homomorphismes : $S \to \Omega$.

D'après le lemme 3.3, $\varphi_i(\eta \otimes_R 1 - 1 \otimes_R \eta)$ est entier sur le R-module engendré par $\varphi_i(\xi \otimes_R 1 - 1 \otimes_R \xi)$; il existe donc un polynôme homogène $G_i \in R[X,Y]$, de degré n_i, tel que $G_i(X,0) = X^{n_i}$ et $G_i(\eta \otimes_R 1 - 1 \otimes_R \eta, \xi \otimes 1 - 1 \otimes \xi) \in \mathfrak{P}_i$.

Posons $G(X,Y) = \prod G_i(X,Y)$: c'est un polynôme homogène de degré $n = \Sigma n_i$, tel que $G(X,0) = X^n$ et que $G(\eta \otimes 1 - 1 \otimes \eta, \xi \otimes 1 - 1 \otimes \xi) \in \bigcap \mathfrak{P}_i = (0)$ (ceci à cause de l'hypothèse de séparabilité) ; $\eta \otimes 1 - 1 \otimes \eta$ est donc bien entier sur le R-module engendré par $\xi \otimes 1 - 1 \otimes \xi$.

<u>Théorème 3.5</u>

Avec les notations précédentes, notons $\tilde{A}_K$ la saturation de Zariski de A (définition 1.3) et $A^*_{R,\bar{A}}$ la saturation de Pham-Teissier (définition 3.2). Supposons que les hypothèses a) et b^*) soient vérifiées. On a alors :

1) $\tilde{A}_K \subset A^*_{R,\bar{A}}$

2) S'il existe un élément $y \in \bar{A}$ tel que $\tilde{A}_K = \widetilde{R[y]}_K$ (un tel élément s'appelle un K-saturateur pour A relativement à R dans la terminologie de Zariski) on a l'égalité :

$$\tilde{A}_K = A^*_{R,\bar{A}} .$$

La démonstration de ce théorème est simple : pour 1), il suffit de montrer que $A^*_{R,\bar{A}}$ est saturé par rapport à K dans le sens de Zariski ; soient donc $\xi \in A^*_{R,\bar{A}}$ et $\eta \in \bar{A}$, et supposons que $\eta \underset{K}{\succ} \xi$: la proposition 3.4 et la transitivité de la dépendance intégrale impliquent immédiatement que $\eta \in A^*_{R,\bar{A}}$.

Pour 2), remarquons que l'on a l'égalité $R[y]^*_{R,\bar{A}} = \widetilde{R[y]}_K$ puisque $x \in R[y]^*_{R,\bar{A}}$ implique que $x \underset{K}{\succ} y$, d'après la proposition 3.4 (l'idéal $I_{R,A,\bar{A}}$ est principal, engendré par $y \otimes 1 - 1 \otimes y$).

D'autre part, on a :

$$A^*_{R,\bar{A}} \subset (\tilde{A}_K)^*_{R,\bar{A}} = (\widetilde{R[y]_K})^*_{R,\bar{A}} \qquad \text{(par hypothèse)}$$

$$\subset (R[y]^*_{R,\bar{A}})_{R,\bar{A}} \qquad \text{(d'après la démonstration de 1))}$$

$= R[y]^*_{R,\bar{A}}$. La remarque précédente montre donc que $A^*_{R,\bar{A}} \subset \widetilde{R[y]}_K = \tilde{A}_K$ ce qui achève la démonstration.

Corollaire 3.6

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau local d'une variété algébroïde V de dimension r (les hypothèses sont celles du § 2) ; soit k un corps de coefficients de $\mathcal{O}$ et $(x_1,\ldots,x_r)$ un système de paramètres de $\mathcal{O}$. Alors on a l'égalité :

$$\widetilde{\mathcal{O}_{k,(x_1,\ldots,x_r)}} = \mathcal{O}^*_{k[(x_1,\ldots,x_r)],\bar{\mathcal{O}}}$$

dans les deux cas suivants :

a) V est une hypersurface, et $(x_1,\ldots,x_r)$ peut être prolongé en une base (i.e. un système minimal de générateurs) $x_1,\ldots,x_r, x_{r+1}$ de $\underline{m}$.

b) $r = 1$ (V est alors une courbe algébroïde) et k est de caractéristique O.

Démonstration

Dans le cas a), $\mathcal{O}$ est une extension monogène de $R = k[[x_1,\ldots,x_r]]$ ($\mathcal{O} = R[x_{r+1}]$) et l'hypothèse du théorème 3.5 est évidemment vérifiée.

Dans le cas b), Zariski a montré qu'il existait toujours un K-saturateur pour une courbe algébroïde (cf. G.T.S. II, proposition 1.3, p. 878)

§ 4.- SATURATION ET EQUISINGULARITE

Définition 4.1

Soient S et T deux anneaux commutatifs, $f : S \to T$ un morphisme. On dit que f est radiciel (ou que T est une S-algèbre radicielle) si, pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de S, il y a au plus un idéal premier $\mathfrak{G} \subset T$, tel que $f^{-1}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{P}$, et si, de plus, pour tout idéal premier $\mathfrak{G} \subset T$, le corps des fractions de $T/\mathfrak{G}$ est une extension purement inséparable du corps des fractions de $S/\mathfrak{P}$ (avec $\mathfrak{P} = f^{-1}(\mathfrak{G})$).

Exemple : Si on suppose que T est entier sur S, alors f est radiciel si, et seulement si, f induit un homéomorphisme (universel) spec T $\to$ spec S.

Soient V et V' deux variétés analytiques, O un point de V, O' un point de V', $\mathcal{O}$ l'anneau local de V en O et $\mathcal{O}'$ celui de V' en O'.

Proposition 4.2

Supposons que $\mathcal{O}$ soit contenu dans $\mathcal{O}'$ et que $\mathcal{O}'$ soit fini sur $\mathcal{O}$.

Alors si $\mathcal{O}'$ est radiciel sur $\mathcal{O}$, l'application continue $f : V' \to V$ (définie localement par l'inclusion $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$) est un homéomorphisme local.

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de V, en utilisant l'existence du conducteur de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}'$: cf. S.E.S III, prop. 5.1.

Remarque

Soit T une S-algèbre ; pour que T soit radicielle sur S, il faut et il suffit que pour $t \in T$, l'élément $t \otimes_S 1 - 1 \otimes_S t$ soit nilpotent (i.e. appartienne à tout idéal premier minimal) dans l'anneau $T \otimes_S T$.

Cela signifie que le "morphisme diagonal", correspondant au morphisme d'anneaux : $T \otimes_S T \to T$, est surjectif, ce qui entraîne facilement que T est radiciel sur S (le lecteur intéressé pourra se reporter à E.G.A.I).

<u>Théorème 4.3</u>

Soient $R \subset A \subset A'$ trois anneaux, et supposons A' entier sur A. Alors la saturation de Pham-Teissier $A^* = A^*_{R,A'}$ de A dans A' par rapport à R est un anneau radiciel sur A.

Il suffit, d'après la remarque précédente, de montrer que si $x^* \in A^*$, l'élément $x^* \otimes_A 1 - 1 \otimes_A x^*$ est nilpotent dans l'anneau $A^* \otimes_A A^*$. La définition de A^* entraîne immédiatement que $x^* \otimes_A 1 - 1 \otimes_A x^*$ est nilpotent dans l'anneau $A' \otimes_A A'$, car l'élément $x^* \otimes_R 1 - 1 \otimes_R x^*$ est, par définition, entier sur le noyau I de l'application :

$$f : A' \otimes_R A' \to A' \otimes_A A', \text{ d'où une relation :}$$

$$(x^* \otimes_R 1 - 1 \otimes_R x^*)^n - \Sigma a_\nu (x^* \otimes_R 1 - 1 \otimes_R x^*)^{n-\nu} = 0$$

avec $a_\nu \in I^\nu$, d'où :

$$f((x^* \otimes_R 1 - 1 \otimes_R x^*)^n) = (x^* \otimes_A 1 - 1 \otimes_A x^*)^n = 0$$

Soit maintenant $\mathfrak{P}^*$ un idéal premier minimal de $A^* \otimes_A A^*$: il faut montrer que $x^* \otimes_A 1 - 1 \otimes_A x^* \in \mathfrak{P}^*$; il suffit pour cela de montrer qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{P}'$ dans $A' \otimes_A A'$ au dessus de $\mathfrak{P}^*$ (puisque, $x^* \otimes_A 1 - 1 \otimes_A x^*$ étant nilpotent dans cet anneau, il appartient à tous les idéaux premiers).

L'idéal $\mathfrak{P}^*$ est le noyau d'un morphisme $\varphi : A^* \otimes_A A^* \to K$ où K est un corps que l'on peut supposer algébriquement clos ; φ définit deux applications : $A^* \to K$ qui coïncident sur A et qui s'étendent en deux applications de A' dans K, puisque A' est supposé entier sur A. On obtient donc un morphisme $\varphi' : A' \otimes_A A' \to K$, et le noyau $\mathfrak{P}'$ de φ' est un idéal premier de $A' \otimes_A A'$ au dessus de $\mathfrak{P}^*$. c.q.f.d.

Corollaire 4.4

Supposons R intégralement clos dans son corps des fractions K, et A entier sur R ; alors la saturation $\tilde{A}_K$ est radicielle sur A.

En effet, le théorème 3.5 montre que $\tilde{A}_K \subset A^*_{R,\bar{A}}$, ce qui implique immédiatement le corollaire.

Remarque

L'utilisation de la saturation de Pham-Teissier simplifie beaucoup la démonstration de ce corollaire (cf. S.E.S. III, théorème 4.1, pour la démonstration originale).

Théorème 4.5

Soit V une variété analytique complexe, soit $\mathcal{O}$ l'anneau local de V en un point O et soit $\tilde{V}$ la saturation de V en O par rapport à un système de paramètres $(\underline{x})$ ($\tilde{V}$ est défini localement en O par l'anneau $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathbb{C},\{\underline{x}\}}$).

Alors l'application canonique $f : \tilde{V} \to V$ est un homéomorphisme local.

Cela résulte du corollaire 4.4 et de la proposition 4.2.

Ce théorème implique en particulier que si V et V' sont des variétés analytiques complexes, telles que $\tilde{V}_{(x)}$ et $\tilde{V}'_{(x')}$ soient analytiquement isomorphes, alors elles sont localement homéomorphes.

Dans le cas des hypersurfaces, on a un résultat beaucoup plus fort :

Théorème 4.6

Soient V et V' deux hypersurfaces complexes, O (resp O') un point de V (resp V'), $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ les anneaux locaux de V et V' en O et O' ;

Soit $\{x_1,\ldots,x_n\}$ (resp $\{x'_1,\ldots,x'_n\}$) un système de paramètres de $\mathcal{O}$ (resp de $\mathcal{O}'$) qui se prolonge en une base $\{x_1,\ldots,x_{n+1}\}$ de $\underline{m}$ (resp en une base $\{x'_1,\ldots,x'_{n+1}\}$ de $\underline{m}'$).

Supposons qu'il existe un $\mathbb{C}$-isomorphisme $f : \tilde{\mathcal{O}}_{\mathbb{C},\{x\}} \to \tilde{\mathcal{O}}'_{\mathbb{C},\{x'\}}$, tel que $f(x_i) = x'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; alors l'homéomorphisme local ; $V \to V'$ peut être étendu en un homéomorphisme local des espaces ambiants : $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$.

La démonstration de ce théorème, assez longue, se trouve dans S.E.S. III (théorème 6.1).

Examinons maintenant le cas des courbes (sur un corps de caractéristique 0).

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau local d'une courbe algébroïde en un point O, k un corps de coefficients et x un paramètre : nous avons vu que l'anneau $\tilde{\mathcal{O}}_{k,x}$ était indépendant du choix de k, et du choix de x si x était choisi transverse (théorème 2.3). Notons cet anneau $\tilde{\mathcal{O}}$; il est facile de voir que $\tilde{\mathcal{O}}$ est la plus petite des saturations de $\mathcal{O}$ (pour tous les paramètres de $\mathcal{O}$) (cf. **note** (2) à la fin du texte) .

Inversement, si l'on suppose $\mathcal{O}$ intègre, la limite supérieure de toutes ces saturations est l'anneau $k + \bar{\underline{m}}^s$, $\bar{\underline{m}}$ étant l'idéal maximal de la clôture intégrale $\bar{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{O}$ et s un entier que nous allons définir. $\bar{\mathcal{O}}$ est alors un anneau de valuation discrète, isomorphe à $\bar{k}[[t]]$, $\bar{k}$ étant la clôture algébrique de k dans $\bar{\mathcal{O}}$. Notons s la multiplicité réduite de $\mathcal{O}$: $s = \inf [v(\xi) \mid \xi \in \underline{m}]$; alors l'anneau $k + \bar{\underline{m}}^s$ peut se caractériser ainsi : c'est le plus gros anneau compris entre $\mathcal{O}$ et $\bar{\mathcal{O}}$ ayant s pour multiplicité réduite et k pour corps résiduel ; cf. G.T.S. I, prop. 7.6, p. 630.

<u>Théorème 4.7</u>

Supposons que k (toujours de caractéristique zéro) soit algébriquement clos. Soient C et C' deux courbes algébroïdes planes sur le corps k. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que C et C' aient des singularités équivalentes (dans le sens algébro-géométrique comme dans S.E.S. I) est que les saturations $\tilde{\mathcal{O}}$ et $\tilde{\mathcal{O}}'$ soient analytiquement isomorphes.

Ceci est montré dans S.E.S. III (th. 2.1) dans le cas irréductible et dans G.T.S. II dans le cas général.

On peut se poser une question analogue dans le cas des hypersurfaces : soient V et V' deux hypersurfaces algébroïdes complexes ayant des normalisations analytiquement isomorphes (ce qui est bien réalisé pour deux courbes planes ayant le même nombre de composantes irréductibles).

Soient $\tilde{V}$ et $\tilde{V}'$ les saturations de V et V' (pour des choix génériques des paramètres ; cf. le § 2 et le § 5 plus loin) : est-ce que l'équivalence topologique de V et V' implique que $\tilde{V}$ et $\tilde{V}'$ sont isomorphes ? (Nous avons vu que la réciproque était vraie : th. 4.6).

Envisageons maintenant "l'équisaturation" d'une famille d'hypersurfaces ; nous définirons une famille $V^{(t)}$ d'hypersurfaces algébroïdes à l'aide d'une équation $f \in k[[\underline{X},\underline{t}]]$ où $\underline{X} = (X_1,\ldots,X_{r+1})$, $\underline{t} = (t_1,\ldots,t_s)$, satisfaisant aux conditions suivantes :

1) k est algébriquement clos, de caractéristique 0.

2) f est sans facteurs multiples dans $k[[\underline{X},\underline{t}]]$.

3) $f(0,\underline{t}) = 0$

4) $f(0,X_{r+1},\underline{t}) = X_{r+1}^n$.

Posons $k^* = k((t_1,\ldots,t_s))$ (corps de séries formelles à s indéterminées sur k) ; on peut considérer $V^{(t)}$ comme une hypersurface de dimension r définie sur k^*, dont nous noterons :

$$\mathcal{O}^*_{(t)} = k^*[[x_1,\ldots,x_r,x_{r+1}]] \text{ l'anneau local.}$$

Nous noterons d'autre part V_o l'hypersurface définie sur k définie par l'équation :

$$f_o(\underline{X}) = f(X_1,\ldots,X_{r+1},0) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_o = k[[\xi_1,\ldots,\xi_{r+1}]]$$

son anneau local ; on peut aussi considérer V_o comme une hypersurface définie sur k^*, son anneau local étant alors $\mathcal{O}_o^* = k^*[[\xi_1,\ldots,\xi_{r+1}]]$.

Remarquons que sans hypothèse supplémentaire, l'anneau $\mathcal{O}_o^*$ n'est pas nécessairement réduit.

<u>Définition 4.8</u>

On dit que $V^{(t)}$ est une famille équisaturée d'hypersurfaces (ou que $V^{(t)}$ est une déformation équisaturée de V_o) si :

1) V_o est réduite (i.e. l'équation $f_o(\underline{X})$ n'a pas de facteur multiple).

2) Il existe un k^*-isomorphisme φ d'anneaux saturés :

$$\widetilde{(\mathcal{O}_t^*)}_{k^*((x_1,\dots,x_r))} \xrightarrow{\sim} \widetilde{(\mathcal{O}_o^*)}_{k^*((\xi_1,\dots,\xi_r))}$$

tel que $\varphi(x_i) = \xi_i \quad (i = 1,\dots,r)$.

Si l'on considère f comme l'équation d'une hypersurface V de dimension r+s définie sur k, et si l'on note W l'espace linéaire défini par les équations : $X_1 = \dots = X_{r+1} = 0$ (qui est par hypothèse contenu dans V), on dira que V est équisaturée à l'origine, le long de W, par rapport aux paramètres $(x_1,\dots,x_r)$ de la fibre générique $V^{(t)}$, lorsque les deux conditions de la définition 4.8 sont satisfaites.

Remarque

Il n'y a aucune hypothèse de transversalité sur les paramètres $(x_1,\dots,x_r)$ dans la définition 4.8 ; en particulier, la direction $X_1 = X_r = \dots = X_{r+1} = t_1 = \dots = t_s$ peut être tangente à V à l'origine.

Voici maintenant un critère d'équisaturation (cf. S.E.S. III, th. 7.4) :

Théorème 4.9

Conservons les notations précédentes ; soit D le discriminant (par rapport à la variable X_{r+1}) de l'équation $f(X_1,\dots,X_{r+1},t)$. V est équisaturée à l'origine le long de W par rapport aux paramètres $(x_1,\dots,x_r)$, si et seulement si

$$D = D_o\,(X_1,\dots,X_r)\ \varepsilon\ (X_1,\dots,X_r,\ t_1,\dots,t_s)$$

où ε est une unité (i.e. $\varepsilon(0) \neq 0$).

Le fait que D soit le produit d'une unité avec une équation ne dépendant que des variables $X_1,\dots,X_r$ s'interprète géométriquement en disant que l'hypersurface "discriminant" (d'équation D = 0) est analytiquement triviale le long de l'espace W_o d'équations $X_1 = \dots = X_r = 0$.

On voit que pour une famille de courbes planes ($r = 1$) la notion d'équisaturation est équivalente à la notion d'équisingularité habituelle (cf. S.E.S I).

Voici maintenant un théorème qui prouve que la notion d'équisaturation fournit une bonne notion d'équisingularité dans le cas général :

Théorème 4.10

Supposons V équisaturée à l'origine le long de W par rapport aux paramètres $(x_1,\dots,x_r)$ de la fibre générique. Soient $\mathcal{O}$ l'anneau local de V (sur k) et $\mathcal{O}_o$ l'anneau local de V_o (sur k). Alors les propriétés suivantes sont réalisées :

1) La clôture intégrale $\bar{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{O}$ est canoniquement isomorphe à $\bar{\mathcal{O}}_o[[t_1,\dots,t_s]]$ (i.e. la normalisation $\bar{V}$ de V est analytiquement triviale le long de l'image réciproque de W dans $\bar{V}$).

2) $\tilde{\mathcal{O}}_{k((x_1,\dots,x_r,t_1,\dots t_s))} \xrightarrow{\sim} (\tilde{\mathcal{O}}_o)_{k((x_1,\dots x_r))}[[t_1,\dots,t_s]]$

3) Si l'on se place dans le cas analytique complexe, V est topologiquement triviale le long de W.

La propriété 1) est une conséquence immédiate de 2) et la propriété 3) résulte facilement du théorème 4.6, énoncé plus haut (S.E.S. III, § 7). La propriété 2) est plus difficile : c'est un théorème du type de celui de Seidenberg dans son article publié à l'I.H.E.S. (volume en l'honneur de O. Zariski).

§ 5.- SATURATION "ABSOLUE" D'UNE HYPERSURFACE (cf. S.E.S. III, § 8)

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, V une hypersurface algébroïde équidimensionnelle définie sur k, d'anneau local $\mathcal{O}$. Soit $(x_1,\dots,x_r)$ un système de paramètres de $\mathcal{O}$ qui puisse se prolonger en une base (i.e. un système minimal de générateurs) $(x_1,\dots,x_r,x_{r+1})$ de $\underline{m}$: nous allons définir une notion de transversalité pour $(x_1,\dots,x_r)$.

Posons $R = k[[x_1,\dots,x_r]]$: c'est un sous-anneau de $\mathcal{O}$ isomorphe à un anneau de séries formelles en r indéterminées ; on a $\mathcal{O} = R[x_{r+1}]$, ce qui implique que $\mathcal{O}$ est fini (et donc entier) sur R.

Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de hauteur 1 dans $\mathcal{O}$; $\mathfrak{P}$ est l'idéal d'une sous-variété irréductible, de codimension 1, W de V.

Comme $\mathcal{O}$ est entier sur R et que R est intégralement clos, $\mathfrak{P} \cap R$ est un idéal premier de R qui est aussi de hauteur 1. Il est donc principal engendré par un élément $\xi_{\mathfrak{P}}$.

Soit $h_{\mathfrak{P}}$ l'homomorphisme canonique :

$\mathcal{O} \to \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$; $h_{\mathfrak{P}}$ restreint à R est injectif, car l'équidimensionnalité de $\mathcal{O}$ implique que $\mathcal{O}$ est un R-module sans torsion : on peut donc identifier R à un sous-anneau de $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, et $K = k((x_1,\ldots,x_r))$ à un sous-corps de l'anneau total de fractions de $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$; $\xi_{\mathfrak{P}}$ est alors un paramètre de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ (qui est de dimension 1) car $\xi_{\mathfrak{P}}$ est régulier dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$.

<u>Définition 5.1</u>

On dit que le système de paramètres $(x_1,\ldots,x_r)$ est transverse à $\mathfrak{P}$ (ou à W) si $\xi_{\mathfrak{P}}$ est un paramètre transverse de $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$.

Si le lieu singulier de V est de codimension plus grande que 1, V est normale (il suffit d'appliquer le "critère de Serre" à $\mathcal{O}$) et donc saturée.

Supposons donc que le lieu singulier V_{sing} de V soit de codimension 1, et soient $W_1,\ldots,W_q$ les composantes inrréductibles de dimension r-1 de V_{sing} ; les W_i correspondent à des idéaux premiers $\mathfrak{P}_i$ de hauteur 1 de l'anneau $\mathcal{O}$. On a alors :

<u>Théorème 5.2</u>

La saturation $\widetilde{\mathcal{O}}_{k((x_1,\ldots,x_r))}$ est indépendante du choix des paramètres $(x_1,\ldots,x_r)$ pourvu qu'ils fassent partie d'une base $(x_1,\ldots,x_r,x_{r+1})$ de $\underline{m}$ et qu'ils soient transverses à chacune des variétés $W_1,\ldots,W_q$ (au sens de la définition 5.1).

La démonstration complète de ce théorème se trouve dans G.T.S. III cf. aussi S.E.S III, théorème 8.2.

Remarques

1) Le théorème 5.2. implique que pour "presque tous" les systèmes de paramètres de la forme $x'_i = \sum_{j=1}^{r+1} a_{i_j} x_j$ $(i = 1,\ldots,r$, $a_{i_j} \in k)$, la saturation $\widetilde{\mathcal{O}_{k((x'_1,\ldots,x'_r)}}$ est la même, "presque tous" signifiant qu'il suffit que les a_{i_j} appartiennent à un ouvert de Zariski de l'espace des coefficients.

2) Le théorème 5.2 n'est pas vrai en général pour un système de paramètres transverse au sens habituel.

Indiquons brièvement sur quoi repose la démonstration de ce théorème : soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de hauteur 1, et soient $\hat{R}_{\mathfrak{P}}$ et $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{P}}$ les complétés des anneaux $R_{\mathfrak{P}}$ et $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$. Soit $\hat{K}_{\mathfrak{P}}$ le corps des fractions de $\hat{R}_{\mathfrak{P}}$;

Lemme 5.3

On a l'égalité :

$$\tilde{\mathcal{O}}_K = F \cap \Big(\bigcap_{\mathfrak{P} \in S} \widetilde{(\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{P}})}_{\tilde{K}} \Big)$$

(avec $K = k((x_1,\ldots,x_r))$).

Ce lemme permet de se ramener au cas de la dimension 1 ; il faut alors étudier sous quelles conditions les opérations de saturation et de complétion commutent.

Soit donc $\mathcal{O}$ un anneau noetherien semi-local de dimension 1, équidimensionnel, équicaractéristique et de caractéristique 0.

Supposons que $\mathcal{O}$ contienne un sous-anneau R régulier de dimension 1 et que :

1) $\mathcal{O}$ soit un R-module fini,

2) $\mathcal{O}$ soit sans torsion sur R,

3) R soit pseudo-géométrique (au sens de Nagata)

3) signifie que pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de R, la clôture intégrale de $R/\mathfrak{P}$

dans une extension finie de son corps des fractions est finie sur $R/\mathfrak{p}$ (cf. Nagata, Local Rings, p. 131).

Soient $\hat{R}$ le complété de R, et $\hat{K}$ le corps des fractions de $\hat{R}$; on a alors :

Lemme 5.4

Sous les hypothèses précédentes, il y a un isomorphisme canonique :

$$\widehat{(\widetilde{\mathcal{O}}_K)} \xrightarrow{\sim} \widetilde{(\widehat{\mathcal{O}})}_{\hat{K}}$$

On déduit de là que si $\widehat{\mathcal{O}}$ est saturé par rapport à $\hat{K}$, $\mathcal{O}$ est saturé par rapport à K.

***

NOTES .

Note 1 (p. 24) - (cf. S.E.S. III, théorème 8.2, énoncé sans démonstration pour le cas où k est supposé algébriquement clos et de caractéristique 0 ; la démonstration complète, dans le cas plus général, où k est supposé seulement d'être de caractéristique 0 , est donnée dans G.T.S. III, Corollaire 3.5)

Note 2 (p. 33) - (cf. G.T.S. I, th. 7.2, p. 624, dans le cas où $\mathcal{O}$ est intégre ; dans le cas général cf. G.T.S. II, th. 4.5, p 905 . Pour un théorème plus fort cf G.T.S. I, cor. 7.4 et G.T.S. III, Appendice A, Lemme A9) .