KYOJI SAITO

Calcul algébrique de la monodromie

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 195-211
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__195_0>

CALCUL ALGEBRIQUE DE LA MONODROMIE

Kyoji SAITO

§ 0 . - INTRODUCTION

J. Milnor a montré dans [4] que l'on pouvait définir topologiquement une monodromie locale de Picard-Lefschetz pour une singularité isolée d'hypersurface. E. Brieskorn a calculé algébriquement cette monodromie dans [1] .

La méthode de E. Brieskorn consiste, un peu comme dans la théorie classique de la monodromie locale de Picard-Lefschetz, à construire un opérateur différentiel linéaire ordinaire singulier régulier tel que la monodromie de cet opérateur singulier coïncide avec la monodromie de Picard Lefschetz. Il montre ensuite que les valeurs propres de la monodromie sont des racines de l'unité.

Dans cet exposé, on étudie une situation plus générale qui nous permet de traiter le cas de déformations de singularités.

Soit $f : X \to S$ une famille plate de singularités isolées telle que X et S soient lisses et que les fibres soient de dimension n . On verra que les groupes d'hypercohomologie $\mathbb{R}^q f_*(\Omega^{\cdot}_{X/S})$ sont des $\mathcal{O}_S$-Modules cohérents, ce qui nous permettra de définir des connexions canoniques sur ces modules, appelées connexions de Gauss-Manin. La monodromie de la $n^{\text{ième}}$ connexion de Gauss-Manin :

$$\nabla \ : \ \mathbb{R}^n f_*(\Omega^{\cdot}_{X/S}) \longrightarrow \mathbb{R}^n f_*(\Omega^{\cdot}_{X/S}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \Omega^1_S(D)$$

coïncide avec la monodromie de Picard-Lefschetz.

Remarque . - Après avoir rédigé cet exposé, l'auteur a partiellement résolu les problèmes posés à la fin. (Tous les détails et les démonstrations seront donnés par ailleurs. H. Hamm a aussi obtenu, indépendamment, quelques résultats de ce genre).

1. Les connexions de Gauss-Manin que nous avons définies ont toujours des singularités régulières le long des discriminants(dans le sens de P. Deligne [2] page 89, Définition 4.2.) . On le montre en utilisant l'existence de déformations semi-universelles des familles données.

2. Les valeurs propres des monodromies qui correspondent à des classes de conjugaison de $\Pi_1(S-D,s_0)$ (qui peuvent être décrites analytiquement, mais nous ne donnons pas de définitions précises ici) sont des racines de l'unité.

L'auteur remercie A. GALLIGO qui l'a encouragé à rédiger cet exposé lors de son séjour à Nice en Septembre 1972 et qui a ensuite traduit le manuscrit de l'anglais en français.

§ 1 . - FAMILLES PLATES DE SINGULARITES ISOLEES

Soit $f = (f_1,\dots,f_k) : (\mathbb{C}^N,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^k,0)$ un germe d'application holomorphe plate à l'origine. Si r et δ sont de petits nombres réels positifs, nous noterons :

$$X(r,\delta) = \{ x \in \mathbb{C}^N \mid \|x\| < r \text{ et } \|f(x)\| < \delta \}$$

$$S(\delta) = \{ s \in \mathbb{C}^k \mid \|s\| < \delta \}$$

$$\mathcal{a} = \{ \frac{\partial(f_1,\dots,f_k)}{\partial(x_{i_1},\dots,x_{i_k})} \ ; \ 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N \}$$

l'idéal jacobien des mineurs d'ordre k

$$J = \mathcal{O}_S \cap f_* \mathcal{a} = \{ g \in \mathcal{O}_S \ ; \ g \circ f \in \mathcal{a} \}$$

L'ensemble des zéros de l'idéal jacobien $\mathcal{a}$ sera noté C et appelé l'ensemble critique de l'application f .
L'ensemble des zéros de l'idéal J sera noté D et appelé discriminant de l'application f .

Nous supposerons que $f^{-1}(0) \cap X(r,s)$ a une singularité isolée à l'origine. Cette hypothèse est équivalente à chacune des hypothèses suivantes :

a) l'homomorphisme $\mathcal{O}_{S,0} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,0} / \mathcal{a}_{,0}$ fait de $\mathcal{O}_{X,0} / \mathcal{a}_{,0}$ un $\mathcal{O}_{S,0}$ - module de type fini.

b) $f_{/C} : C \longrightarrow D$ est un morphisme fini.

<u>PROPOSITION 1</u> . - Avec les notations et l'hypothèse précédente, on a :

i) $\dim \mathcal{O}_{X,0/\mathcal{a},0} = \dim \mathcal{O}_{S,0/J,0} = k - 1$

ii) $\mathcal{O}_{X/\mathcal{a}}$ est un anneau de Cohen-Macaulay

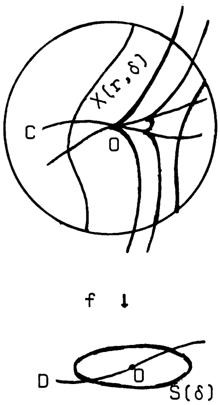
iii) J est un idéal principal.

La démonstration, que nous omettons, utilise le lemme 7 ci-dessous et son corollaire .

Posons $\quad S'(\delta) = S(\delta) - D$

$\quad X'(r,\delta) = X(r,\delta) - f^{-1}(D)$

pour tout $s \in S(\delta)$; $X_s(r,\delta) = f^{-1}(s) \cap X(r,\delta)$, si $s \in S'(\delta)$ la fibre $X_s(r,\delta)$ est lisse de dimension $n = N - k$.



THEOREME 2 . - (Milnor, Hamm) - Si r est suffisamment petit et δ suffisamment petit par rapport à r , $f : X'(r,\delta) \longrightarrow S'(\delta)$ est un fibré différentiable localement trivial dont la fibre a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères de dimension $N - k$. Le nombre de ces sphères est noté μ et est appelé nombre de Milnor de f .

Dans la suite r et δ vérifient les hypothèses précédentes.

DEFINITION 3 . - Choisissons un point de base $s \in S'$. Le groupe fondamental $\pi_1(S',s)$ opère sur les groupes d'homologie de la fibre et comme $H_n(X_s(r,\delta),\mathbb{Z}) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{\mu \text{ fois}}$, on obtient une représentation de ce groupe qui est appelée monodromie locale de Picard-Lefschetz :

$$\rho \ : \ \pi_1(S',s) \longrightarrow GL(\mu,\mathbb{Z}) \quad .$$

Jusqu'à présent, on ne connait de méthode pour calculer directement la monodromie à coefficients entiers que dans certains cas particuliers et il s'agit de méthodes transcendantes. Nous voulons développer ici une méthode algébrique pour calculer la monodromie à coefficients complexes.

§ 2. - CONNEXION DEFINIE DE FAÇON TRANSCENDANTE

Remarquons d'abord que l'on peut calculer le nombre μ de Milnor de la façon suivante :

grâce à la proposition 1, le discriminant D est de codimension 1 dans S, ce qui permet de trouver un segment de droite complexe dans S qui ne coupe D qu'à l'origine et transversalement. Cela signifie que pour un choix convenable des coordonnées linéaires dans $\mathbb{C}^k$, l'idéal

$$\left(f_1,\ldots, f_{k-1}, \frac{\partial(f_1,\ldots,f_k)}{\partial(x_{i_1},\ldots, x_{i_k})}, \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq N\right)$$

est un idéal de définition de $\mathcal{O}_{X,0}$. Et on peut voir que

$$f' = (f_1,\ldots, f_{k-1}) : (\mathbb{C}^N,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{k-1},0)$$

est un morphisme plat dont la fibre spéciale est à singularité isolée ; nous noterons $\mu' = \mu(f')$ son nombre de Milnor.

En s'inspirant d'une méthode topologique dûe à Lê Dung Trang, on montre que :

$$\mu(f) + \mu(f') = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,0} \Big/ \left(f_1,\ldots, f_{k-1}, \frac{\partial(f_1,\ldots, f_k)}{\partial(x_{i_1},\ldots, x_{i_k})}\right) .$$

En itérant ce procédé, on obtient le formule suivante (valable pour un système de coordonnées linéaires convenable sur $\mathbb{C}^k$)

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,0} \Big/ \left(f_1,\ldots, f_{i-1}, \frac{\partial(f_1,\ldots,f_i)}{\partial(x_{j_1},\ldots, x_{j_i})}\right) .$$

Avant de définir et de calculer la connexion de Gauss-Manin, nous allons, par une construction géométrique simple, introduire une connexion qui nous aidera à comprendre les constructions qui suivront.

Comme $f : X'(r,\delta) \longrightarrow S'(\delta)$ est un fibré localement trivial, le $n^{\text{ième}}$ foncteur dérivé

$$R^n f_*(\mathbb{C}_{X'}) \cong \bigcup_{s \in S'} H^n(X_s(r,\delta),\mathbb{C})$$

(où $\mathbb{C}_{X'}$ est le faisceau constant sur X') a une structure de faisceau localement constant de rang μ . (voir P. Deligne [2]) . Cette structure localement constante est déjà suffisante pour calculer la monodromie :

soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow S'$ un chemin avec $\gamma(0) = \gamma(1) = s$ alors $\gamma^{-1}(R^n f_*(\mathbb{C}_{X'}))$ définit un faisceau constant sur $[0,1]$ et on obtient un isomorphisme :

$$\rho(\gamma) : H^n(X_s,\mathbb{C}) \cong \gamma^{-1}(R^n f_*(\mathbb{C}_{X'}))_0 \longrightarrow H^n(X_s,\mathbb{C}) \cong \gamma^{-1}(R^n f_*(\mathbb{C}_{X'}))_1 .$$

On définit un $\mathcal{O}_{S'}$-module $\mathcal{H}' = R^n f_*(\mathbb{C}_{X'}) \underset{\mathbb{C}_{S'}}{\otimes} \mathcal{O}_{S'}$ et pour tout champ de vecteur ξ de S' un endomorphisme de $\mathcal{H}'$.

$$\nabla'_\xi : \mathcal{H}' \ni c \otimes g \longmapsto c \otimes \xi g \in \mathcal{H}'$$

où $c \in R^n f_*(\mathbb{C}_{X'})$, $g \in \mathcal{O}_{S'}$ et ξ agit comme une dérivation. Alors :

1) $\mathcal{H}'$ est un $\mathcal{O}_{S'}$-module localement libre de rang μ

2) i) ∇'_ξ est $\mathbb{C}$-linéaire et $\nabla'_{\xi_1+\xi_2} = \nabla'_{\xi_1} + \nabla'_{\xi_2}$

ii) $\nabla'_\xi(g\omega) = g\,\nabla'_\xi\,\omega + (\xi g)\,\omega$

iii) $\nabla'_{g\xi}(\omega) = g\,\nabla'_\xi\,\omega$

où $\omega \in \mathcal{H}'$, $g \in \mathcal{O}_{S'}$ et $\xi \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{S'})$.

Nous appellerons connexion transcendante la paire $(\mathcal{H}',\nabla')$ parcequ'elle a été définie topologiquement. Le faisceau localement constant $R^n f_*(\mathbb{C}_{X'})$ s'identifie au faisceau des sections horizontales pour la connexion $(\mathcal{H}',\nabla')$ c.a.d.

$$R^n f_*(\mathbb{C}_{X'}) = \{ \omega \in \mathcal{H}' \;/\; \nabla_\xi \omega = 0 \text{ pour tout } \xi \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{S'}) \} .$$

Donc la donnée de la connexion $(\mathcal{H}',\nabla')$ permet de calculer la monodromie :

$$\rho \;:\; \pi_1(S',s) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(H^n(X_s,\mathbb{C}))$$

Nous nous intéressons aux problèmes suivants :

1) Trouver une paire $(\mathcal{H},\nabla)$ formée d'un faisceau localement libre sur S et d'un opérateur éventuellement singulier (dans un sens que nous définirons) ∇ sur $\mathcal{H}$, qui prolonge $(\mathcal{H}',\nabla')$ c.à.d. $(\mathcal{H}',\nabla') = (\mathcal{H},\nabla)_{|S'}$.

2) Donner une description algébrique et explicite de $\mathcal{H}$ et ∇, qui nous permette de trouver un algorithme pour calculer la monodromie.

Nous résolvons dans cet article le problème 1) et, partiellement, le problème 2) .

§ 3 . - COHERENCE DES GROUPES DE COHOMOLOGIE RELATIVE DE DE-RHAM

Soit comme précédemment $f : X \longrightarrow S$ une application holomorphe entre des espaces lisses et soit Ω_X^p (resp. Ω_S^p) le faisceau des p-formes holomorphes sur X (resp sur S) . Le faisceau des p-formes relatives (à f) , $\Omega^p_{X/S}$ est par définition le $\mathcal{O}_X$-module :

$$\Omega^p_{X/S} = \Omega^p_X \Big/ \sum_{i=1}^{k} df_i \wedge \Omega^{p-1}_X$$

d'où la suite exacte canonique :

$$f^{-1}\,\Omega^1_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \Omega^{p-1}_X \longrightarrow \Omega^p_X \longrightarrow \Omega^p_{X/S} \longrightarrow 0$$

La différentiation extérieure $d : \Omega^p_X \longrightarrow \Omega^{p+1}_X$ induit canoniquement un $f^{-1}\,\mathcal{O}_S$ homomorphisme :

$$d_{X/S} \;:\; \Omega^p_{X/S} \longrightarrow \Omega^{p+1}_{X/S} .$$

En général, le complexe $(\Omega_{X/S}, d_{X/S})$ n'est pas exact, sauf aux points où l'application f n'est pas critique.

Notons $\mathcal{H}^p(X(r,\delta)/S(\delta))$ le $\mathcal{O}_S$-module $H^p(f_* \Omega^{\bullet}_{X(r,\delta)/S(\delta)})$.

Remarque . - On peut définir deux suites spectrales sur S avec

$$'E_2^{p,q} = R^q f_*(H^p(\Omega^{\bullet}_{X/S}))$$
$$''E_2^{p,q} = H^p(R^q f_*(\Omega^{\bullet}_{X/S}))$$

qui aboutissent aux mêmes groupes notés $\mathbb{R}^p f_*(\Omega^{\bullet}_{X/S})$ et appelés groupes d'hyper-cohomologie de $\Omega^{\bullet}_{X/S}$ par rapport au foncteur f_* .

Comme l'image inverse par l'application $X(r,\delta) \longrightarrow S(\delta)$ d'un ouvert de Stein de $S(\delta)$ est encore de Stein,

$$''E_2^{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q \neq 0 \\ H^p(f_* \Omega_{X(r,\delta)/S(\delta)}) & \text{si} \quad q = 0 \end{cases}$$

Et le module $\mathcal{H}^p(X(r,\delta)/S(\delta))$ coïncide avec l'hyper-cohomologie $\mathbb{R}^p f_*(\Omega^{\bullet}_{X/S})$; donc la suite spectrale $'E_2^{p,q} = R^q f_*(H^p(\Omega^{\bullet}_{X/S}))$ aboutit aux groupes $\mathcal{H}^p(X(r,\delta)/S(\delta))$.

LEMME 4 . - Pour des nombres réels assez petits $0 < r' \leq r$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que le morphisme de restriction

$$\mathcal{H}^p(X(r,\delta)/S(\delta)) \longrightarrow \mathcal{H}^p(X(r',\delta)/S(\delta))$$

soit un isomorphisme.

La démonstration utilise la suite exacte de Mayer-Vietoris et la remarque précédente.

Donc $\mathcal{H}^p(X(r,\delta)/S(\delta))$ définit un germe de faisceau sur S , indépendant de r et δ que nous noterons simplement $\mathcal{H}^p(X/S)$.

On a $\mathcal{H}^p(X/S)|_{S'} \cong R^p f_*(\mathbb{C}_{X'}) \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathcal{O}_{S'}$

et en particulier $\mathcal{H}^n(X/S)|_{S'} \cong \mathcal{H}'$.

THEOREME 5 . -

$$\mathcal{H}^{o}(X/S) = \mathcal{O}_S$$
$$\mathcal{H}^{p}(X/S) = 0 \quad \text{si} \quad 1 \leq p \leq N-k = n$$
$$\mathcal{H}^{n}(X/S) \simeq \mathcal{O}_S^{\mu}$$

$\mathcal{H}^{p}(X/S)$ est un module de torsion concentré en 0 si $p > n$.

La démonstration se fait en 3 étapes, et dans le résumé que nous en donnons ici, nous utilisons des résultats transcendants de Milnor-Hamm.

1ère ETAPE

PROPOSITION 6 . - Pour $p = 0, 1, 2, \ldots$; $\mathcal{H}^{p}(X/_S)$ est un $\mathcal{O}_S$-module cohérent.

Nous indiquons seulement les lemmes nécessaires à la démonstration qui comporte de longs calculs algébriques sur des multi complexes.

LEMME 7 . - Soient R un anneau local de Cohen-Macaulay, M un R-module de rang fini N engendré par $m_1,\ldots,m_N$; $\omega_1,\ldots, \omega_k$ des éléments de M . On note $\mathfrak{a}$ l'idéal engendré par les coefficients de $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k \in \Lambda^k M$ dans la base associée aux m_i . Alors pour tout élément $\omega \in \Lambda^p M$ avec $p <$ hauteur de $\mathfrak{a}$ $\omega \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k = 0$ ssi on peut trouver $\eta_1,\ldots, \eta_k \in \Lambda^{p-1} M$ tels que

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} \eta_i \wedge \omega_i \quad .$$

COROLLAIRE . -

- hauteur de $\mathfrak{a} \leq N - k + 1$
- si hauteur de $\mathfrak{a} = N - k + 1$ alors $\dim \mathrm{Hom}_R\, \mathfrak{a} = N - k + 1$ et $R/\mathfrak{a}$ est un anneau de Cohen-Macaulay .

LEMME 8 . - (Forster-Knorr) Soient m un entier donné, S un espace analytique lisse, 0 un point de S et $D(r) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < r\}$ un polydisque de rayon $r \in \mathbb{R}^+$.

Soit $(C^{\bullet}(r),d)$ un complexe de $\mathcal{O}_S$-modules borné à gauche tel que :

i) pour tout ouvert de Stein $\mathcal{U} \subset S$

$$C^p(r)(\mathcal{U}) \simeq \prod_{\text{produit fini}} \Gamma(D(r) \times \mathcal{U} \,;\, \mathcal{O}_{D(r) \times \mathcal{U}}) \quad \text{avec la topologie de}$$

Fréchet.

ii) $d : C^p(r) \longrightarrow C^{p+1}(r)$ est un $\mathcal{O}_S$-homomorphisme continu pour la topologie de Fréchet.

iii) il existe r_1 et r_2 tels que pour tout r , $r_1 \geq r \geq r' \geq r_2 > 0$ la restriction

$$C^{\bullet}(r) \longrightarrow C^{\bullet}(r')$$

induise un isomorphisme $H^{\bullet}(C^{\bullet}(r)) \xrightarrow{\sim} H^{\bullet}(C^{\bullet}(r'))$

alors il existe un petit voisinage de 0 , S_m dans S tel que, pour $p \geq m$, $H^p(C^{\bullet}(r))|_{S_m}$ soit un $\mathcal{O}_{S_m}$-module cohérent.

2ème ETAPE

DEFINITION 9 . - Soient R et T des anneaux commutatifs unitaires, $T \to R$ un homomorphisme d'anneau et M un R-module.

i) Une connexion ∇ sur M est un homomorphisme de groupes abéliens

$$\nabla : M \longrightarrow M \otimes_R \Omega^1_{R/T}$$

vérifiant $\nabla(gm) = g\,\nabla(m) + m \otimes dg$ pour $g \in R$, $m \in M$

ii) la donnée d'une connexion sur M est équivalente à la donnée d'un R-homomorphisme :

$$\begin{aligned} \nabla : \mathrm{Der}(R/T) &\longrightarrow \mathrm{End}_T(M) \\ D &\longmapsto \nabla_D \end{aligned}$$

vérifiant

$$\nabla_D(gm) = g\,\nabla_D m + (Dg)\,m$$

(iii) Une connexion est dite intégrable si pour tous $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}\,(R/_T)$ on a :

$$\nabla_{[D_1,D_2]} = \nabla_{D_1}\nabla_{D_2} - \nabla_{D_2}\nabla_{D_1}$$

(iv) Un élément $m \in M$ est dit horizontal si $\nabla_D(m) = 0$ pour tout $D \in \mathrm{Der}\,(R/_T)$.

<u>LEMME 10</u> . - Soit R un anneau local régulier sur un corps k isomorphe au corps résiduel de R et soit M un R-module. S'il existe une connexion sur M , alors M est un R-module libre.

Nous allons définir une connexion ∇ sur le $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{H}^p(X/_S)$ pour $p = 0, 1, 2, \ldots, n$

soit $\mathcal{U} \subset S$ un ouvert de Stein de S , alors

$$\mathcal{H}^p(X/_S)(\mathcal{U}) \cong H^p(\Omega^{\bullet}_{X/S}\ (f^{-1}(\mathcal{U}))$$

où $\Omega^p_{X/S}\ (f^{-1}(\mathcal{U})) = \Omega^p_X\ (f^{-1}(\mathcal{U}))\Big/ \sum_{i=1}^{k} \Omega^{p-1}_X\ (f^{-1}(\mathcal{U}))\wedge df_i$

et $\Omega^o_{X/S}\ (f^{-1}(\mathcal{U})) = \mathcal{O}_X\ (f^{-1}(\mathcal{U}))$

Pour tout élément $[\omega] \in \mathcal{H}^p(X/_S)(\mathcal{U})$ choisissons un représentant $\omega \in \Omega^p_X\ (f^{-1}(\mathcal{U}))$. Comme ω est fermée

$$d_X\,\omega = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \wedge df_i \quad \text{avec} \quad \xi_i \in \Omega^p_X\ (f^{-1}(\mathcal{U}))$$

soit $D = \sum_{i=1}^{k} g_i \dfrac{\partial}{\partial\omega_i} \in \mathrm{Der}\,(\mathcal{O}_{S/\mathbb{C}})$ où $(\omega_1,\ldots,\omega_k)$ est un système de coordonnées locales sur S .

Grâce au lemme 7 , la classe d'équivalence de $\sum_{i=1}^{k} g_i\,\xi_i$ dans $f_*(\Omega^p_{X/S})\Big/ d(f_*\,\Omega^{p-1}_{X/S})$ ne dépend que des classes d'équivalence de ω et ξ_i .

On note cette classe d'équivalence $\nabla^p_D\,[\omega]$ ($= \sum_{i=1}^{k} g_i\,[\xi_i]$) et il est clair que

$$\nabla^p_D\,(g[\omega]) \;=\; g\,\nabla^p_D\,([\omega]) + Dg.[\omega] \qquad .$$

DEFINITION 11 . - Le morphisme

$$\nabla^p \;:\; \mathrm{Der}\,(\mathcal{O}_S) \otimes \mathcal{H}^p(X/S) \longrightarrow f_*(\Omega^p_{X/S}) \Big/ d(f_*\,\Omega^{p-1}_{X/S})$$

est appelé connexion de Gauss-Manin pour la famille $f : X \to S$ $p = 0, 1, 2, \dots, n$

Si $0 \leq p \leq n-1$, on peut voir aisément à l'aide du lemme 7 que l'image du morphisme ∇^p est contenue dans $\mathcal{H}^p(X/S)$. Dans ce cas ∇^p est une connexion au sens de la définition 9 . Donc, grâce au lemme 10, les $\mathcal{H}^p(X/S)$ pour $0 \leq p \leq n-1$ sont des $\mathcal{O}_S$-modules libres. D'autre part, par des considérations transcendantes, on sait que les $\mathcal{H}^p(X/S)$ pour $1 \leq p \leq n-1$ sont des modules de torsion concentrés sur le discriminant D . Donc, pour $1 \leq p \leq n-1$, on a

$$\mathcal{H}^p(X/S) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla^p = 0 \quad ;$$
$$\mathcal{H}^0(X/S) = \mathcal{O}_S \quad \text{et} \quad \nabla^0_D(g) = Dg \quad \text{pour tout } D \text{ et } g \ .$$

3ème ETAPE

Elle consiste en la proposition 12 qui termine la démonstration du théorème 5 .

PROPOSITION 12 . - (Sébatiani-**Greuel**)

$\mathcal{H}^n(X/S)$ est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre.

§ 4 . - CONNEXION DE GAUSS-MANIN

Continuons le calcul de la connexion de Gauss-Manin dans le cas $p = n$. On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^n(f_*\,(\Omega^{\cdot}_{X/S})) \longrightarrow f_*(\Omega^n_{X/S}) \Big/ d(f_*(\Omega^{n-1}_{X/S})) \longrightarrow f_*(\Omega^{n+1}_{X/S})$$

Mais comme $\Omega^{n+1}_{X/S}$ est concentré sur l'ensemble critique C , le 3^{e} module est un module de torsion sur $\mathcal{O}_S$ concentré sur le discriminant D (d'équation $h = 0$) , il existe une entier ρ tel que

$$h^{\rho}.f_*(\Omega^n_{X/S}) \Big/ d(f_*(\Omega^{n-1}_{X/S})) \leq H^n(f_*(\Omega^{\cdot}_{X/S})) \qquad .$$

En particulier, l'image de ∇^n_D pour $D \in \mathrm{Der}(\mathcal{O}_{S/\mathbb{C}})$ multipliée par h^{ρ} est contenue dans $H^n(f_* \Omega^{\cdot}_{X/S}) \simeq \mathcal{H}^n(X/S)$, d'où le morphisme :

$$h^{\rho}\nabla^n \ : \ \mathcal{H}^n(X/S) \longrightarrow \mathcal{H}^n(X/S) \otimes_{\mathcal{O}_S} \Omega^1_S$$

En un point $s' \in S' = S-D$, il est facile de voir que

$$\nabla^n \ : \ \mathcal{H}^n(X/S)_{s'} \longrightarrow \mathcal{H}^n(X/S)_{s'} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s'}} \Omega^1_{S,s'}$$

est une connexion intégrable. En revanche, en un point $s \in D$ ∇^n n'est plus une connexion au sens de la définition 9 et

$$\nabla^n \ : \ \mathcal{H}^n(X/S)_s \longrightarrow \mathcal{H}^n(X/S)_s \otimes \mathcal{O}_{S,s} \ \Omega^1_{S,s}\ (D^{\rho})$$

où $\Omega^1_{S,s}\ (D^{\rho})$ est le faisceau des germes de 1-formes méromorphes sur S qui ont au plus un pôle d'ordre ρ sur D .

Prenons une base $\omega_1,\ldots,\omega_{\mu}$ de $\mathcal{H}^n(X/S)$ (au voisinage de l'origine) et posons :

$$\nabla^n_{\frac{\partial}{\partial w_{\ell}}}(\omega_i) = \sum_{j=1}^{\mu} A^j_{i,\ell}\ \omega_j \qquad \begin{array}{l} i = 1 \text{ à } \mu \\ \ell = 1 \text{ à } k \end{array}$$

où les $A^j_{i,\ell}$ sont des fonctions méromorphes sur S qui ont un pôle d'ordre ρ sur D , au plus.

Avec ces notations, d'après la définition 9 , un élément

$\omega = \sum_{i=1}^{\mu} a^i\ \omega_i \in \mathcal{H}^n(X/S)$ est horizontal ssi les coefficients $(a^i)_{i=1,\ldots,\mu}$

satisfont le système d'équations différentielles linéaires :

$$(*) \qquad \frac{\partial a^i}{\partial w_\ell} + \sum_{j=1}^{\mu} A^i_{j,\ell}\, a^j = 0 \qquad \text{pour} \qquad \begin{array}{l} i = 1,\dots,\mu \\ \ell = 1,\dots,k \end{array}$$

Remarque . On ne peut pas éliminer les pôles des coefficients $A^i_{j,\ell}$. Pour $k = 1$

i) $A^i_{j,\ell}$ n'a pas de pôles ssi $f : X \longrightarrow S$ n'a pas de fibre singulière

ii) $A^i_{j,\ell}$ a un pôle d'ordre 1 ssi f est quasi-homogène (pour un choix judicieux de coordonnées sur X)

Considérons le revêtement universel $\tilde{S}' \xrightarrow{\pi} S'$ et soient $s_o \in \tilde{S}'$ un point de base et $\gamma_o \in H_n(X_{\pi(s_o)},\mathbb{Z})$, alors comme $f : X' \longrightarrow S'$ est un fibré localement trivial et que $\tilde{S}'$ est simplement connexe, on peut définir l'application :

$$\gamma \;:\; s \in \tilde{S}' \longrightarrow \gamma(s) \in H_n(X_{\pi(s)},\mathbb{Z})$$

avec $\gamma(s_o) = \gamma_o$

qui consiste à translater γ_o dans $\bigcup_{s \in \tilde{S}'} H_n(X_{\pi(s)},\mathbb{Z})$. Pour tout élément $\omega \in \mathcal{H}^n(X/_S)$ on définit l'intégrale $\int_{\gamma(s)} \omega$ de ω le long de $\gamma(s)$ qui est une fonction holomorphe sur $\tilde{S}'$ (ou fonction multiforme sur S') .

PROPOSITION 10 . - Avec les notations précédentes, pour tout $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_S)$, on a l'égalité des fonctions multiformes :

$$D\left(\int_{\gamma(s)} \omega\right) = \int_{\gamma(s)} \nabla^n_D\, \omega \qquad .$$

On le voit en explicitant la représentation de ∇^n du § 3 . Soient maintenant $\omega_1,\dots,\omega_\mu$ une base de $\mathcal{H}^n(X/_S)$ et $\gamma_{0,1},\dots,\gamma_{0,\mu}$ une base du groupe d'homologie $H_n(X_{\pi(s_o)},\mathbb{Z})$; on peut définir, en translatant les applications :

$$\gamma_i \;:\; s \in \tilde{S}' \longrightarrow \gamma_i(s) \in H_n(X_{\pi(s)},\mathbb{Z}) \qquad \text{avec} \qquad \gamma_i(s_o) = \gamma_{0,i}$$

d'où la $(\mu \times \mu)$-matrice de fonctions multiformes sur S'

$$\Omega(s) = \left(\int_{\gamma_i(s)} \omega_j\right)_{\substack{i = 1 \text{ à } \mu \\ j = 1 \text{ à } \mu}} .$$

Grâce à la dualité de de Rham, $\det \Omega(s) \neq 0$ pour tout $s \in S'$. D'autre part, tout élément $g \in \Pi_1(S',s_0)$ définit une transformation $\tilde{g}$ du revêtement $\tilde{S}'$ et on a

$$(**) \qquad \Omega(\tilde{g}(s)) = \rho(g)^{-1}\,\Omega(s)$$

où $\rho(g)$ est la matrice de monodromie de g (voir § 1) .

Enfin, un élément $\omega = \sum_{i=1}^{\mu} a^i \omega_i$ est horizontal ssi

$$\int_{\gamma_i(s)} \omega = \sum_{j=1}^{\mu} a^j \int_{\gamma_i(s)} \omega_j \quad \text{est constant pour } i = 1,\dots,\mu$$

ce qui implique que la matrice $\Omega^{-1}(s)$ donne un système fondamental de solutions du système $(*)$

$$\frac{\partial a^i}{\partial w_\ell} + \sum_{j=1}^{\mu} A^i_{j,\ell}\, a^j = 0 \qquad \begin{array}{l} i = 1,\dots,\mu \\ \ell = 1,\dots,k \end{array} .$$

Or, comme la connexion de Gauss-Manin est intégrable sur S' , le système admet un système fondamental de solutions qui forment une matrice, qui ne diffère de $\Omega^{-1}(s)$ que par une matrice inversible, et grâce à $(**)$, la monodromie de ce système de solutions est conjuguée avec la monodromie :

$$\rho \; : \; \Pi_1(S',s_0) \longrightarrow H^n(X_{s_0},\mathbb{C}) .$$

Pour finir, il faudrait expliciter un algorithme qui permette de calculer la monodromie, mais je n'ai pas terminé les calculs. Ceci a déjà été fait par E. Brieskorn pour $k = 1$ (le cas d'une hypersurface) .

<u>Problème 1</u> . - Est-ce que le système d'équations différentielles linéaires $(*)$ est singulier régulier le long du discriminant D ?

Problème 2 . - Quels sont les éléments $g \in \Pi_1(S',s_o)$ dont la matrice de monodromie $\rho(g) \in GL(\mu,\mathbb{C})$ est quasi-unipotente ?

Le premier problème a été résolu positivement et le second a été résolu partiellement. Voir la remarque du § 0 .

B I B L I O G R A P H I E

[1] E. BRIESKORN - Die Monodromie der isolierten Singularitaten von Hyperflächen - Manuscripta Math 2 103-161 (1970)

[2] P. DELIGNE - Equations différentielles à points singuliers réguliers - Lecture Notes in Math N° 163 (1970)

[3] N. KATZ - The regularity theorem in Algebraic Geometry in Proceedings - C.I.M. Nice 1970

[4] J. MILNOR - Singular points of complex hypersurfaces - Annals of Math. Studies, n° 61