ANDRÉ GALLIGO

Sur le théorème de préparation de Weierstrass pour un idéal de $kx_1, \ldots, x_n$

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 165-169

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__165_0>

SUR LE THEOREME DE PREPARATION DE WEIERSTRASS POUR UN IDEAL DE $k\{x_1,\dots,x_n\}$

André GALLIGO

H. Hironaka et H. Grauert dans [1] et [2] ont énoncé chacun un théorème de division par un idéal de $k\{x_1,\dots, x_n\}$, $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le but de cet exposé est de synthétiser ces deux résultats dont des démonstrations ont aussi été données dans [3] et [4] .

k désignera les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, x l'ensemble des variables $(x_1,\dots, x_n)$ et $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $k\{x\}$.

§ 1 . Théorème de préparation de Weierstrass classique

Théorème 0 : Soit $f \in k\{x\}$ une série telle que $f(0,\dots,0, x_n) \neq 0$, notons alors $a x_n^m$ le terme de plus bas degré de cette série en x_n , on peut effectuer la division d'une série quelconque $g \in k\{x\}$ par f , plus précisément il existe un couple unique (q, r) tel que $q \in k\{x\}$

$$r \in k\{x_1,\dots, x_{n-1}\} [x_n] \quad \text{avec} \quad \deg(r) < m \quad \text{et} \quad g = qf + r .$$

Idée de la démonstration

On munit les ensembles $k(\rho)$, $\rho = (\rho_1,\dots, \rho_n)$ des séries convergentes dans le polydisque de polyrayon ρ de structures d'espaces de Banach. Puis on perturbe l'isomorphisme " division par $a x_n^m$ " :

$$\begin{array}{ccc} k(\rho) \times (k(\rho_1,\dots, \rho_{n-1}))^m & \longrightarrow & k(\rho) \\ (q, r) & \overset{\sim}{\longmapsto} & a x_n^m q + r \end{array}$$

en l'homomorphisme $(q, r) \longmapsto a x_n^m q + r + (f - a x_n^m) q = g$ qui reste un isomorphisme si on a pris la précaution de choisir le polydisque de polyrayon ρ assez "effilé" en ρ_n pour que $||f - a x_n^m||$ soit suffisamment petit.

Remarque 0 .

Après presque tout changement linéaire des coordonnées, le m du théorème est égal à l'ordre de f : $\nu(f) = \sup \{i / f \in \mathfrak{m}^i\}$.

§ 2 . Méthode d'Hironaka

Pour généraliser le théorème 0 il nous faut d'abord généraliser le m du théorème 0 .

Définition 1.

A toute série $f = \sum f_\mu x^\mu$ de $k\{x\}$ on associe son diagramme de Newton $N_f = \{\mu \in \mathbb{N}^n \ / \ f_\mu \neq 0\} \subset \mathbb{N}^n \subset \mathbb{R}^n$. Pour toute forme linéaire Δ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\Delta = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ avec $\alpha_i > 0$ $i = 1,\ldots,n-1$ et $\alpha_n \geq 0$, on note $\nu_\Delta(f) = \min \{\Delta(\mu) \ / \ \mu \in N_f\}$, on appelle exposant privilégié dans la direction Δ de f et on note $\exp_\Delta(f)$ le premier élément, pour l'ordre lexicographique de $\{\mu \in N_f \ / \ \Delta(\mu) = \nu_\Delta(f)\}$.

On a alors :
$$\exp_\Delta(f.g) = \exp_\Delta(f) + \exp_\Delta(g)$$
$$\exp_\Delta(f+g) \geq \min(\exp_\Delta(f) \ , \ \exp_\Delta(g)) \ .$$

Définition 2.

A tout idéal I de $k\{x\}$ on associe le sous-ensemble $E_\Delta(I) = \{\exp_\Delta(f)/f \in I\}$. Cet ensemble vérifie : $\mu \in E_\Delta(I) \Longrightarrow \mu + \mathbb{N}^n \subset E_\Delta(I)$ et on montre facilement qu'il existe un ensemble fini minimal que l'on nomme la frontière $F_\Delta(I)$ de $E_\Delta(I)$, $F_\Delta(I) = \{\mu_1,\ldots,\mu_r\}$ tel que $E_\Delta(I) = \bigcup_{i=1}^{r} (\mu_i + \mathbb{N}^n)$.

On considère alors la partition suivante de $\mathbb{N}^n$:

$$D_1 = \mu_1 + \mathbb{N}^n,\ldots,D_i = (\mu_i + \mathbb{N}^n) - (D_1 \cup\ldots\cup D_{i-1}),\ldots, D_{r+1} = \mathbb{N}^n - E_\Delta(I).$$

Théorème 1.

Soient Δ une forme linéaire positive de $\mathbb{R}^n$, I un idéal de $k\{x\}$, $F_\Delta(I) = \{\mu_1,\ldots,\mu_r\}$ la frontière de $E_\Delta(I)$. Toute famille $(f_1,\ldots,f_r)$ d'éléments de I telle que $\exp_\Delta(f_i) = \mu_i$, est un système de générateurs de l'idéal I . De plus, pour toute série $g \in k\{x\}$ il existe des séries de $k\{x\}$ $q_1,\ldots,q_r \ , q_{r+1}$ uniques qui s'écrivent .

$$q_i = \sum_{\mu + \mu_i \in D_i} q_{i,\mu} \, x^\mu \quad i = 1,\ldots,r$$

et

$$q_{r+1} = \sum_{\mu \in D_{r+1}} q_{r+1,\mu} \, x^\mu \text{ telles que } g = \sum_{i=1}^{r} q_i \, f_i + q_{r+1}.$$

La démonstration, voir [1] et [3] , généralise de façon naturelle la démonstration du théorème 0 . On dit que q_{r+1} est le reste de la division de g par I.

Remarques.

1. En divisant x^{μ_i} par I on obtient l'unique série h_i de $k\{x\}$ telle que h_i s'écrit $h_i = \sum_{\mu \in D_{r+1}} h_{i,\mu} x^\mu$ et $x^{\mu_i} + h_i \in I$.

   On en déduit un système de générateur "plus beau que les autres" de l'idéal I .

2. Si Δ est la forme linéaire homogène $i_1 + \ldots + i_n$ de $\mathbb{R}^n$ on omet de la noter en indice et on a $E(I + \mathfrak{M}^\ell) = E(I) \cup E(\mathfrak{M}^\ell)$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$.

   Cette égalité n'est pas vraie pour les autres formes linéaires.

3. Si $D_{r+1} = \mathbb{N}^n - E_\Delta(I)$ est fini, les monomes x^μ , $\mu \in \mathbb{N}^n - E_\Delta(I)$ forment une base de l'espace vectoriel $k\{x\} /_I$.

4. On déduit des remarques 2 et 3 que la connaissance de $E(I)$ implique celle de la fonction d'Hilbert Samuel de $k\{x\} /_I$:

$$HS(\ell) = \dim_k k\{x\} /_{(I+\mathfrak{M}^{\ell+1})} = \operatorname{card} (\mathbb{N}^n - (E(I) \cup E(\mathfrak{M}^{\ell+1}))) \ .$$

5. Notons $in(I)$ l'idéal initial de $I = \{in(f) \ / \ f \in I\}$ où $in(f)$ désigne la composante homogène de plus bas degré de la série f . On a trivialement $E(I) = E(in(I))$.

§ 3. Ce que nous apprend de plus la méthode de Grauert.

On étudie le comportement de $E(I)$ par changement linéaire des coordonnées. Pour cela pour tout $M \in GL(n,k)$ on note f^M la série telle que $f^M(x) = f(Mx)$, $I^M = \{f^M / \ f \in I\}$ et $E(I^M) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$. On a :

Théorème 2.

Pour tout idéal I de $k\{x\}$ il existe un ouvert de Zariski non vide U de $GL(n,k)$ tel que pour $M \in U$, $E(I^M)$ soit constante, notons $\mathcal{E}(I)$ sa valeur. De plus $\mathcal{E}(I)$ a une configuration particulière que l'on précise : si $\mathcal{F}(I) = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$ désigne la frontière de $\mathcal{E}(I)$ et $D_i = \{\mu_i + \mathbb{N}^n\} - (D_1 \cup \ldots \cup D_{i-1})$ la partition définie plus haut, alors $D_i = \mu_i + (\mathbb{N}^{d(i)} \times 0)$, où $d(i)$ est défini en écrivant $\mu_i = (0, \ldots, 0, \mu_i^{d(i)}, \ldots, \mu_i^n)$ avec $\mu_i^{d(i)} \neq 0$. Et $\mu_1 = (0, \ldots, 0, \nu(I))$, donc $d(1) = n$.

Idée de la démonstration. On obtient la configuration de $\mathcal{E}(I)$ en définissant par récurrence des multiexposants $\mu_i \in \mathbb{N}^n$, des séries $f_i \in I$, des ouverts de Zariski $U_i \subset GL(n,k)$ tels que

$$\mu_i = \inf(\{\exp(f^M) \;/\; f \in I \;,\; M \in U_{i-1} \subset GL(n,k)\} - \bigcup_{j=1}^{i-1} (\mu_j + \mathbb{N}^{d(j)} \times 0))$$

et $\exp(f_i^M) = \mu_i$ pour tout $M \in U_i$. Puis en considérant des changements de coordonnées particulières on montre que nécessairement pour tout $k = d(i) + 1,\dots,n$ le multiexposant $(0,\dots,0\ \mu_i^{d(i)} - 1\ ,\ \mu_i^{d(i)+1},\dots,\ \mu_i^k +1,\dots,\mu_i^n)$ $\in \bigcup_{j=1}^{i-1} \mu_j + \mathbb{N}^{d(j)} \times 0$, ce qui entraîne que les μ_i forment la frontière $\mathcal{F}(I)$ de $\mathcal{E}(I)$. Voir [5] .

Corollaire .

En appliquant le théorème 1 après changement générique linéaire des coordonnées on obtient un "joli" théorème de division ; la condition sur les quotients devient: q_i ne dépend que des $d(i)$ premières coordonnées !! .

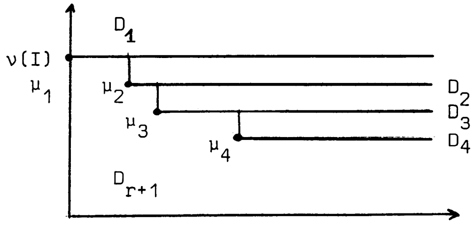
Remarque 6.

Dans le cas $n = 2$ $\mathcal{E}(I)$ est un "escalier avec des marches de hauteur 1" , c'est-à-dire que :

$\mu_1 = (0,\nu(I))$, $\mu_i = (\alpha_i\ ,\ \nu(I) - i+1)$

pour $i = 2,\dots,r$

et que α_i est strictement croissant avec i .



Remarque 7. Pour tout n on pourrait décrire explicitement, comme dans la remarque 6 , la configuration de $\mathcal{E}(I)$ et retrouver la description que donne Grauert dans [2] et [4] . On peut retenir que $\mathcal{E}(I)$ donne "à vue d'oeil" deux entiers d et δ dont nous donnons la signification au § 4 :

$$d = \sup\{i / \mathbb{N}^i \times 0 \cap \mathcal{E}(I) = \emptyset\} \text{ et } \delta = \sup\{\, i / \exists\, \mathcal{E} \text{ tq } \mathcal{E}(I) = \mathbb{N}^i \times \mathcal{E}\}.$$

§ 4. Quelques remarques sur l'invariant $\mathcal{E}(I)$ associé à un idéal I de $k\{x\}$.

1. Nous avons vu au §2 que $\mathcal{E}(I)$ détermine la fonction de Hilbert Samuel de $k\{x\}/_I$: $HS(\ell) = \dim_k k\{x\} /_{(I+\mathfrak{m}^{\ell+1})} = \mathrm{card}(\{\mu \in \mathbb{N}^n / |\mu| \leq \ell\} - \mathcal{E}(I))$.
On voit aisément que pour ℓ assez grand $HS(\ell)$ est un polynôme de degré d , ce qui montre que d est la dimension de $k\{x\}/_I$. La description explicite de $\mathcal{E}(I)$ donnerait également la multiplicité de $k\{x\}/_I$.

2. Si $n = 2$ la connaissance de la fonction d'Hilbert Samuel détermine $\mathfrak{E}(I)$. En effet la croissance de $HS(\ell)$ détermine le nombre de points de $\mathfrak{E}(I)$ contenus dans les hyperplans $x_1 + \dots + x_n = \ell$ et sont les premiers pour l'ordre lexicographique. Cela n'est plus vrai pour $n > 2$ par exemple les idéaux $I = (z^2, zy, zx, y^3) + \mathfrak{m}^4$ et $I_2 = (z^2, zy, y^2) + \mathfrak{m}^4$ ont des $\mathfrak{E}(I)$ et $\mathfrak{E}(I_2)$ différents bien qu'ils aient même fonction d'Hilbert Samuel.

3. La suite $(x_1, \dots, x_\delta)$ des classes des δ premières coordonnées dans $k\{x\} /_I$ est une suite régulière, donc $\delta \leq \text{prof}\ (k\{x\} /_I)$. L'égalité en général est fausse par exemple pour l'idéal $I = (z^2, zy, zx$ et $y^3, y^4)$, $\delta = 0$, $d = 1$ et la classe de x est non diviseur de zéro dans $k\{x\} /_I$ donc $\text{prof}\ (k\{x\} /_I) = d = 1$.

4. Si X est un espace analytique dans $\mathbb{C}^N$ on associe à tout point x de X un sous-ensemble $\mathfrak{E}(X,x)$ de $\mathbb{N}^n$. Si $\mathcal{O}_{X,x} = \mathbb{C}\{x\} /\mathfrak{J}$ on pose $\mathfrak{E}(X,x) = \mathfrak{E}(\mathfrak{J}_x)$ qui est indépendant de la présentation de $\mathcal{O}_{X,x}$. On obtient ainsi une partition de X en sous-ensembles de points ayant même $\mathfrak{E}(X,x)$. Comme $\mathfrak{E}(\mathfrak{J}_x) = \mathfrak{E}(\text{in}\ \mathfrak{J}_x)$, $\mathfrak{E}(X,x)$ ne dépend que du cône tangent en x à l'espace X.

De plus, cette partition est strictement plus fine que la partition d'Hilbert Samuel (Exemple : si X estdéfini dans $\mathbb{C}^n$ par $(z^2, zy, zx + ty^2, y^3)$ la "strate" de Samuel de 0 est l'axe des t alors que la "strate" par les $\mathfrak{E}(X,x)$ ne contient que 0.

B I B L I O G R A P H I E

[1] Hironaka, Lejeune, Teissier : Résolution des singularités des espaces analytiques complexes.

[2] H. Grauert : Über die deformation isolierter singularitäten analytischer Mengen. Invent. Math. Vol 15, fasc 3. 1972.

[3] J. Briançon : Weierstrass préparé à la Hironaka. "Singularités à Cargèse".

[4] A. Galligo et Ch. Houzel : Déformations semi-universelles de germes d'espaces analytiques (d'après Verdier et Grauert). "Singularités à Cargèse".

[5] A. Galligo : Thèse de 3ème cycle, Université de Nice.