Astérisque

MALKA SCHAPS

Déformations non singulières de courbes gauches

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 121-128
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__121_0>

DEFORMATIONS NON SINGULIERES DE COURBES GAUCHES

Malka SCHAPS

L'exposé suivant étudie les déformations d'un schéma affine plongé de codimension 2 qui a localement des résolutions de longueur 2 . Les cas les plus intéressants sont les courbes dans l'espace de dimension 3 et les schémas de dimension 0 dans le plan. On démontre d'abord qu'un tel schéma X a une résolution globale de longueur 2 . D'après un théorème de Burch, les fonctions définissant l'idéal de X sont les mineurs maximaux d'une matrice dont les colonnes engendrent toutes les relations entre ces fonctions. Toutes les déformations plates de X sont obtenues simplement en déformant cette matrice. Ce fait permet la construction explicite de l'espace versel des déformations de X , au sens de Schlessinger. Finalement, si la dimension de X est strictement **inférieure** à 4 , on peut construire des déformations non singulières de X .

Soit k un corps, $P = k[z]$ un anneau de polynômes $J \subset P$ un idéal et $B = P/_J$ alors $X = \operatorname{Spec} B$ est un schéma algébrique affine.

DEFINITION . - On dit que X est déterminantiel s'il existe des entiers n,m,i tels que J soit engendré par les mineurs d'ordre i d'une matrice de type (n,m) et si

$$\text{hauteur de } J = (m-i+1)\,(n-i+1)$$

Remarque . - Cette hauteur est la plus grande possible pour un tel idéal.

D'après un résultat de Hochster et Eagen (A.J.M. 1972) un schéma déterminantiel est de Cohen-Macaulay, c'est-à-dire que en chaque point sa dimension homologique est égale à sa codimension. J'en donne une réciproque dans un cas particulier et cela me permet de construire les déformations du schéma.

THEOREME 1 . - Soit $P = k[z]$ un anneau de polynômes en les indéterminées $z_1,\dots, z_q$ avec $q \geq 2$. Soient $B = P/_J$ un anneau de Cohen-Macaulay de dimension pure $q-2$ et $X = \operatorname{Spec} B$. Il existe alors un entier n , $n \geq 2$ et des matrices colonnes $r_1,\dots, r_{n-1} \in P^n$ tels que J soit engendré par les

$$f_i = \det(e_i, r_1, \dots, r_{n-1}) \qquad i = 1, \dots, n$$

où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de P^n. Autrement dit, X est déterminantiel. De plus, si les singularités de X sont isolées et si k est un corps algébriquement clos, l'espace versel de déformations de X est de la forme

$$\mathrm{Spec}\,(k[[T_1, \dots, T_N]]\ [[z]] / \tilde{J})$$

où $\mathfrak{J}$ est engendré par

$$\tilde{f}_i = \det(e_i, r_1 + h_1(T,z), \dots, r_{n-1} + h_{n-1}(T,z)) \qquad i = 1, \dots, n$$

où $h_i(T) \in (T)P^n$ est une forme linéaire en les variables $T_1, \dots, T_N$. L'espace des paramètres $\mathrm{Spec}(k[[T_1, \dots, T_N]])$ est lisse.

Remarque. - L'expression de f_i montre que f_i est le $i^{\text{ème}}$ mineur de la matrice $(r_1, \dots, r_{n-1})$.

Avant la démonstration, voici un exemple célèbre :

Exemple. - Les équations $x = t^3$, $y = t^4$, $z = t^5$ définissent une courbe paramétrée dans k^3. L'idéal J de cette courbe est engendré par les trois fonctions

$$f_1 = y^2 - xz$$
$$f_2 = x^3 - yz$$
$$f_3 = z^2 - x^2y$$

Ces trois fonctions ne sont pas indépendantes mais le module de leurs relations est engendré par les deux relations indépendantes

$$r_1 = \begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix} \qquad\qquad r_2 = \begin{bmatrix} x^2 \\ z \\ y \end{bmatrix}$$

Remarquons que le vecteur $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$ est le produit vectoriel de r_1 et r_2.

L'espace versel des déformations est donné par les mineurs de la matrice

$$\begin{bmatrix} z & x^2 + (x\,T_1 + T_2) \\ y & z + (x\,T_3 + T_4) \\ x & y + (T_5) \end{bmatrix} .$$

L'espace des paramètres est $\mathrm{Spec}(k[[T_1,\ldots,T_5]])$.

Dans le plan (T_1,T_3) , chaque fibre a une singularité de multiplicité 3 à l'origine et n'est pas localement une intersection complète. Les fibres sont paramétrées par :

$$\begin{aligned} x &= t^3 - t\,T_3 - T_1 \\ y &= t(t^3 - t\,T_3 - T_1) \\ z &= (t - T_3)(t_3 - t\,T_3 - T_1) \end{aligned} .$$

Les valeurs du paramètre au point triple sont les racines de l'équation $t^3 - t\,T_3 - T_1 = 0$.

Dans l'espace (T_2,T_4,T_5) les fibres sont en général non singulières. Le Professeur Morin conjecture que ces trois paramètres correspondent aux trois paramètres de l'espace versel des déformations de trois axes dans k^3 (en effet, la fibre générique au-dessus du plan (T_1,T_3) est analytiquement isomorphe à trois droites autour de la singularité).

<u>Démonstration du Théorème 1</u> . On choisit un système de générateurs $f_1,\ldots,f_n$ de J . On en déduit la suite exacte :

$$P^n \xrightarrow{\alpha} P \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

où α est donné par le produit scalaire avec le vecteur $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix}$.

Après localisation par un idéal maximal quelconque M , il vient :

$$0 \longrightarrow \ker(\alpha)_M \xrightarrow{\beta} P_M^n \longrightarrow P_M \longrightarrow B_M \longrightarrow 0 .$$

Puisque B est de Cohen-Macaulay, la dimension homologique de B_M est égale à la codimension de B_M , c'est-à-dire 2 , donc $\ker(\alpha)_M$ est un module projectif et, comme P_M est local, il est libre.

En passant au corps des fractions K de P , on voit que :

$$\mathrm{rang}(\ker(\alpha)_M) = n-1 \quad .$$

Donc $\ker(\alpha)$ est localement libre de rang $n-1$. D'après un résultat de K-théorie algébrique, un faisceau localement libre sur un anneau de polynômes est stablement libre i.e. il existe un entier $N \geq 0$ et un isomorphisme $\theta : \ker(\alpha) \oplus P^N \longrightarrow P^{n-1+N}$. On adjoint au système de générateurs $(f_1,\ldots,f_n)$ de J , N fois le terme 0 et on déduit une nouvelle suite exacte:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker(\alpha) \oplus P^N & \xrightarrow[\beta \oplus \mathbf{Id}]{} & P^{n+N} & \xrightarrow[\alpha \oplus 0]{} & P & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle\theta} & & & & & & \\
 & & P^{n-1+N} & & & & & &
\end{array}$$

La dimension homologique globale de B est donc égale à 2 . En remplaçant $n+N$, on a une résolution

$$0 \longrightarrow P^{n-1} \xrightarrow{\beta} P^n \xrightarrow{\alpha} P \longrightarrow B \longrightarrow 0 \quad .$$

D'après le théorème de Burch (Kaplanski : Commutative Algebra) , il existe une base $r_1,\ldots,r_{n-1}$ du module libre $\ker(\alpha)$ telle que

$$f_i = \det(e_i, r_1,\ldots,r_{n-1})$$

Brièvement, soit $r_1^+,\ldots,r_{n-1}^+$ une base quelconque de $\ker(\alpha)$; on pose $f' = (f'_1,\ldots,f'_n)$ avec

$$f'_i = \det(e_i, r_1^+,\ldots, r_{n-1}^+) \quad .$$

Comme f' et f sont orthogonaux aux r^+ dans K^n avec $f' \neq 0$ et $f \neq 0$, il existe $c \in K$, $c \neq 0$ tel que $f' = c.f$. On remarque alors que $c \in P$ parceque hauteur $J > 1$, et que $c \in k$ sinon soit h un facteur irréductible non trivial de c , $r_1^+, \dots, r_{n-1}^+$ seraient dépendantes dans $(P_{/(h)P})^n$ d'où une contradiction) . Donc X est déterminantiel.

Pour construire l'espace versel des déformations, il faut construire l'espace tangent $\mathcal{T}$ des classes d'isomorphismes de déformations de X au-dessus de $\mathrm{Spec}(k[\varepsilon])$ $\varepsilon^2 = 0$.

<u>LEMME 1</u> . - $\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} M_{/M'}$ où $M \subset B^n$ est engendré par les éléments

$$g_{ij} = (g_{ij}^1, \dots, g_{ij}^n)$$

avec $g_{ij}^\ell = \det(e_\ell, r_1, \dots, r_{j-1}, e_i, r_{j+1}, \dots, r_{n-1})$

et M' est engendré par les éléments

$$\frac{\partial f}{\partial z_\ell} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_\ell}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial z_\ell}\right) \qquad \ell = 1, \dots, q \qquad .$$

Autrement dit $\mathcal{T}$ est donné par les classes, par rapport à des changements de coordonnées $z_1, \dots, z_q$, des déformations du type $(f_1 + \varepsilon g^1, \dots, f_n + \varepsilon g^n)$ où

$g^\ell = \sum a_{ij}\, g_{ij}^\ell$, $a_{ij} \in k$.

Ceux sont les mineurs de la matrice $\left[r_{ij} + \varepsilon a_{ij}\right]$.

On note que $g.r_j = \sum_i a_{ij}\, f_i \in J$.

<u>Idée de la démonstration du Lemme</u> . On prend des éléments $x^1, \dots, x^N$ de B^n dont les images forment une base de l'espace vectoriel $M_{/M'}$, et on prend une base duale $T_1, \dots, T_N$. D'après la méthode de Schlessinger pour construire l'espace versel, on forme les équations :

$$f_i^2 = f_i + x_i^1 T_1 + \dots + x_i^N T_N \qquad k[[T]] \big/ _{(T^2)} [z]$$

et puisque les g_{ij} forment une base de M , on peut écrire

$$f_i^2 = f_i + \sum_{\ell, j} h_{\ell,j}(T,z)\, g_{ij}^\ell$$

avec $h_{\ell j}$ linéaire en $T_1, \dots, T^N$. Posons $h_j = \begin{bmatrix} h_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{nj} \end{bmatrix}$.

On essaye de trouver un relèvement plat de ces fonctions au-dessus du sous espace le plus grand possible de $S = k[[T_1,\dots,T_N]]$, dans notre cas, c'est S lui-même et le relèvement est donné par :

$$\tilde{f}_i = \det(e_i, r_1 + h_1(T,z), \dots, r_{n-1} + h_{n-1}(T,z))$$

Remarque . On a $\deg_T(\tilde{f}_i) \leq n-1$, c'est-à-dire que $\tilde{f}_i$ est un polynôme et non une série quelconque.

On peut utiliser le théorème 1 pour démontrer qu'une courbe dans k^3 a des déformations non singulières. On appelle famille de déformations de X un schéma algébrique plat au-dessus d'un espace de paramètres et dont X est une fibre. Dans ce qui suit, l'espace de paramètres est toujours un ensemble ouvert affine de Zariski dans un espace affine.

THEOREME 2 . - Soit $X = \mathrm{Spec}(B)$ un schéma de Cohen-Macaulay de dimension pure $q-2$, $X \subset k^q$, $q < 6$. Alors il existe une famille $\overline{X}$ de déformations de X dont la fibre générique est non singulière. C'est-à-dire X a des déformations non singulières.

COROLLAIRE 1 . - Une courbe algébrique dans k^3 a des déformations non singulières.

COROLLAIRE 2 . - Un schéma de dimension 0 dans k^2 a des déformations non singulières.

Idée de démonstration. - D'après le théorème 1, soit $B = P/_J$, J est engendré par les mineurs d'une matrice $R = [r_{ij}] = [r_1,\dots,r_{n-1}]$. Nous prenons comme espace de paramètres $k[U,V]$ où

$$U = (U_{ij}) \quad , \qquad V = (V^1_{ij},\dots,V^q_{ij}) \qquad .$$

Ces paramètres vont nous permettre de changer les termes constants et les termes linéaires des coefficients de la matrice R de la manière suivante :

$$\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}] \quad , \quad \tilde{r}_{ij} = r_{ij} + U_{ij} + \sum_{\ell=1}^{q} V^{\ell}_{ij}.z_{\ell} \qquad .$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{ij} &= \det(e_i, \tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_{n-1}) \\
\tilde{J} &= (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n) \subset k[U,V,z] \\
\tilde{X} &= \operatorname{Spec}(k[U,V,z]/\tilde{J}) \quad .
\end{aligned}$$

<u>LEMME</u> . - $\tilde{X}$ est plat dans un voisinage ouvert affine de 0 dans S . Au-dessus de ce voisinage presque toutes les fibres sont des intersections complètes.

On montre d'abord que la codimension du sous schéma de $\operatorname{Spec}(k[U,V,z])$ où rang $\tilde{R} < n-2$ est supérieure ou égale à la hauteur de l'idéal déterminantiel des mineurs de rang $n-2$ soit $(n+1-(n-2))(n-(n-2)) = 6$. On utilise alors l'hypothèse $q < 6$ pour pouvoir se placer dans un ouvert affine de S au-dessus duquel rang $\tilde{R} \geq n-2$. On suppose alors que le mineur $b = \det(e_1, e_2, \tilde{r}_2, \ldots, \tilde{r}_{n-1})$ ne s'annule pas et on montre que les fibres sont des intersections complètes. (L'idéal qui définit une fibre est engendré par $\tilde{f}_1/b$ et $\tilde{f}_2/b$) .

Le critère jacobien permet alors de conclure que presque toutes les fibres sont non singulières.

<u>Remarque</u> . - La restriction $q < 6$ est la plus fine possible : il existe un contre exemple bien connu dans le cas $q = 6$. C'est le cône sur le plongement de Segre de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ dans $\mathbb{P}^5$. L'idéal de ce cône dans l'anneau $k[x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2]$ est engendré par les mineurs maximaux de la matrice :

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}$$

La singularité à l'origine est rigide, c'est-à-dire n'admet que des déformations triviales, puisque toute déformation de la matrice correspond à des déformations des coordonnées donc à un changement de coordonnées.

REFERENCES

. M. HOCHSTER et J. EAGON - Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci - Amer. J. of Maths. Oct. 1971

. H. BASS - Algebraic K-theory - W.A. Benjamin, Inc. New York 1968

. I. KAPLANSKY - Commutative Rings - Allyn and Bacon, Inc. Boston 1970

. M. SCHLESSINGER - Infinitesimal deformations of singularities - Dissertation, Harvard 1964 .