Astérisque

MALKA SCHAPS

Déformations non singulières de courbes gauches

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 121-128

http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__121_0

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉFORMATIONS DE COURBES GAUCHES

DEFORMATIONS NON SINGULIÈRES DE COURBES GAUCHES

Malika SCHAPS

L'exposé suivant étudie les déformations d'un schéma affine plongé de codimension 2 qui a localement des résolutions de longueur 2. Les cas les plus intéressants sont les courbes dans l'espace de dimension 3 et les schémas de dimension 0 dans le plan. On démontre d'abord qu'un tel schéma X a une résolution globale de longueur 2. D'après un théorème de Burch, les fonctions définissant l'idéal de X sont les mineurs maximaux d'une matrice dont les colonnes engendrent toutes les relations entre ces fonctions. Toutes les déformations plates de X sont obtenues simplement en déformant cette matrice. Ce fait permet la construction explicite de l'espace versel des déformations de X , au sens de Schlessinger. Finalement, si la dimension de X est strictement inférieure à 4, on peut construire des déformations non singulières de X .

Soit k un corps, $P = k[z]$ un anneau de polynômes $J \subset P$ un idéal et $B = P/J$ alors $X = \text{Spec } B$ est un schéma algébrique affine.

DEFINITION . - On dit que X est déterminantiel s'il existe des entiers n, m, i tels que J soit engendré par les mineurs d'ordre i d'une matrice de type (n, m) et si

$$\text{hauteur de } J = (m-i+1)(n-i+1)$$

Remarque . - Cette hauteur est la plus grande possible pour un tel idéal.

D'après un résultat de Hochster et Eagen (A.J.M. 1972) un schéma déterminantiel est de Cohen-Macaulay, c'est-à-dire que en chaque point sa dimension homologique est égale à sa codimension. J'en donne une réciproque dans un cas particulier et cela me permet de construire les déformations du schéma.

THEOREME 1 . - Soit $P = k[z]$ un anneau de polynômes en les indéterminées $z_1, \dots, z_q$ avec $q \geq 2$. Soient $B = P/J$ un anneau de Cohen-Macaulay de dimension pure $q-2$ et $X = \text{Spec } B$. Il existe alors un entier n , $n \geq 2$ et des matrices colonnes $r_1, \dots, r_{n-1} \in P^n$ tels que J soit engendré par les

SCHAPS

$$f_i = \det(e_i, r_1, \dots, r_{n-1}) \quad i = 1, \dots, n$$

où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de P^n . Autrement dit, X est déterminantiel. De plus, si les singularités de X sont isolées et si k est un corps algébriquement clos, l'espace versel de déformations de X est de la forme

$$\text{Spec} (k[[T_1, \dots, T_N]] \underset{J}{\underset{\sim}{/}})$$

où $\mathcal{Y}$ est engendré par

$$\tilde{f}_i = \det(e_i, r_1 + h_1(T, z), \dots, r_{n-1} + h_{n-1}(T, z)) \quad i = 1, \dots, n$$

où $h_i(T) \in (T)P^n$ est une forme linéaire en les variables $T_1, \dots, T_N$. L'espace des paramètres $\text{Spec}(k[[T_1, \dots, T_N]])$ est lisse.

Remarque . - L'expression de f_i montre que f_i est le $i^{\text{ème}}$ mineur de la matrice $(r_1, \dots, r_{n-1})$.

Avant la démonstration, voici un exemple célèbre :

Exemple . - Les équations $x = t^3$, $y = t^4$, $z = t^5$ définissent une courbe paramétrée dans k^3 . L'idéal J de cette courbe est engendré par les trois fonctions

$$\begin{aligned} f_1 &= y^2 - xz \\ f_2 &= x^3 - yz \\ f_3 &= z^2 - x^2y \end{aligned}$$

Ces trois fonctions ne sont pas indépendantes mais le module de leurs relations est engendré par les deux relations indépendantes

$$r_1 = \begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix} \quad r_2 = \begin{bmatrix} x^2 \\ z \\ y \end{bmatrix}$$

Remarquons que le vecteur $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$ est le produit vectoriel de r_1

et r_2 .

DÉFORMATIONS DE COURBES GAUCHES

L'espace versel des déformations est donné par les mineurs de la matrice

$$\begin{bmatrix} z & x^2 + (x T_1 + T_2) \\ y & z + (x T_3 + T_4) \\ x & y + (T_5) \end{bmatrix} .$$

L'espace des paramètres est $\text{Spec}(k[[T_1, \dots, T_5]])$.

Dans le plan (T_1, T_3) , chaque fibre a une singularité de multiplicité 3 à l'origine et n'est pas localement une intersection complète. Les fibres sont paramétrées par :

$$\begin{aligned} x &= t^3 - t T_3 - T_1 \\ y &= t(t^3 - t T_3 - T_1) \\ z &= (t - T_3)(t^3 - t T_3 - T_1) \end{aligned} .$$

Les valeurs du paramètre au point triple sont les racines de l'équation $t^3 - t T_3 - T_1 = 0$.

Dans l'espace (T_2, T_4, T_5) les fibres sont en général non singulières. Le Professeur Morin conjecture que ces trois paramètres correspondent aux trois paramètres de l'espace versel des déformations de trois axes dans k^3 (en effet, la fibre générique au-dessus du plan (T_1, T_3) est analytiquement isomorphe à trois droites autour de la singularité).

Démonstration du Théorème 1 . On choisit un système de générateurs $f_1, \dots, f_n$ de J . On en déduit la suite exacte :

$$P^n \xrightarrow{\alpha} P \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

où α est donné par le produit scalaire avec le vecteur $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$.

Après localisation par un idéal maximal quelconque M , il vient :

$$0 \longrightarrow \ker(\alpha)_M \xrightarrow{\beta} P_M^n \longrightarrow P_M \longrightarrow B_M \longrightarrow 0 .$$

SCHAPS

Puisque B est de Cohen-Macaulay, la dimension homologique de B_M est égale à la codimension de B_M , c'est-à-dire 2, donc $\ker(\alpha)_M$ est un module projectif et, comme P_M est local, il est libre.

En passant au corps des fractions K de P , on voit que :

$$\text{rang}(\ker(\alpha)_M) = n-1.$$

Donc $\ker(\alpha)$ est localement libre de rang $n-1$. D'après un résultat de K-théorie algébrique, un faisceau localement libre sur un anneau de polynômes est stablement libre i.e. il existe un entier $N \geq 0$ et un isomorphisme

$$\theta : \ker(\alpha) \oplus P^N \longrightarrow P^{n-1+N}.$$

On adjoint au système de générateurs

$\{f_1, \dots, f_n\}$ de J , N fois le terme 0 et on déduit une nouvelle suite exacte:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(\alpha) \oplus P^N & \xrightarrow{\beta \oplus \text{Id}} & P^{n+N} & \xrightarrow{\alpha \oplus 0} & P & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \theta & & & & & & & & \\ & & P^{n-1+N} & & & & & & & & \end{array}$$

La dimension homologique globale de B est donc égale à 2. En remplaçant $n+N$, on a une résolution

$$0 \longrightarrow P^{n-1} \xrightarrow{\beta} P^n \xrightarrow{\alpha} P \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

D'après le théorème de Burch (Kaplanski : Commutative Algebra), il existe une base $r_1, \dots, r_{n-1}$ du module libre $\ker(\alpha)$ telle que

$$f_i = \det(e_i, r_1, \dots, r_{n-1})$$

Brièvement, soit $r_1^+, \dots, r_{n-1}^+$ une base quelconque de $\ker(\alpha)$; on pose

$$f' = (f'_1, \dots, f'_n) \text{ avec}$$

$$f'_i = \det(e_i, r_1^+, \dots, r_{n-1}^+).$$

Comme f' et f sont orthogonaux aux r^+ dans K^n avec $f' \neq 0$ et $f \neq 0$, il existe $c \in K$, $c \neq 0$ tel que $f' = c.f$. On remarque alors que $c \in P$ parce-

DÉFORMATIONS DE COURBES GAUCHES

que hauteur $J > 1$, et que $c \in k$ sinon soit h un facteur irréductible non trivial de c , $r_1^+, \dots, r_{n-1}^+$ seraient dépendantes dans $(P_{/(h)P})^n$ d'où une contradiction). Donc X est déterminantiel.

Pour construire l'espace versel des déformations, il faut construire l'espace tangent $\mathcal{J}$ des classes d'isomorphismes de déformations de X au-dessus de $\text{Spec}(k[\varepsilon])$ $\varepsilon^2 = 0$.

LEMME 1 . - $\mathcal{J} \xrightarrow{\sim} M/M'$, où $M \subset B^n$ est engendré par les éléments

$$g_{ij} = (g_{ij}^1, \dots, g_{ij}^n)$$

avec $g_{ij}^\ell = \det(e_\ell, r_1, \dots, r_{j-1}, e_i, r_{j+1}, \dots, r_{n-1})$

et M' est engendré par les éléments

$$\frac{\partial f}{\partial z_\ell} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_\ell}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial z_\ell} \right) \quad \ell = 1, \dots, q \quad .$$

Autrement dit $\mathcal{J}$ est donné par les classes, par rapport à des changements de coordonnées $z_1, \dots, z_q$, des déformations du type $(f_1 + \varepsilon g^1, \dots, f_n + \varepsilon g^n)$ où

$$g^\ell = \sum a_{ij} g_{ij}^\ell, \quad a_{ij} \in k \quad .$$

Ceux sont les mineurs de la matrice $[r_{ij} + \varepsilon a_{ij}]$.

On note que $g \cdot r_j = \sum_i a_{ij} f_i \in J$.

Idée de la démonstration du Lemme . On prend des éléments $x^1, \dots, x^N$ de B^n dont les images forment une base de l'espace vectoriel M/M' , et on prend une base duale $T_1, \dots, T_N$. D'après la méthode de Schlessinger pour construire l'espace versel, on forme les équations :

$$f_i^2 = f_i + x_i^1 T_1 + \dots + x_i^N T_N \quad \frac{k[[T]]}{(T^2)} [z]$$

et puisque les g_{ij} forment une base de M , on peut écrire

$$f_i^2 = f_i + \sum_{\ell, j} h_{\ell, j}(T, z) g_{ij}^\ell$$

avec $h_{\ell j}$ linéaire en $T_1, \dots, T^N$. Posons

$$h_j = \begin{bmatrix} h_{1j} \\ \vdots \\ h_{nj} \end{bmatrix} \quad .$$

SCHAPS

On essaye de trouver un relèvement plat de ces fonctions au-dessus du sous espace le plus grand possible de $S = k[[T_1, \dots, T_N]]$, dans notre cas, c'est S lui-même et le relèvement est donné par :

$$\tilde{f}_i = \det(e_i, r_1 + h_1(T, z), \dots, r_{n-1} + h_{n-1}(T, z))$$

Remarque . On a $\deg_T(\tilde{f}_i) \leq n-1$, c'est-à-dire que $\tilde{f}_i$ est un polynôme et non une série quelconque.

On peut utiliser le théorème 1 pour démontrer qu'une courbe dans k^3 a des déformations non singulières. On appelle famille de déformations de X un schéma algébrique plat au-dessus d'un espace de paramètres et dont X est une fibre. Dans ce qui suit, l'espace de paramètres est toujours un ensemble ouvert affine de Zariski dans un espace affine.

THEOREME 2 . - Soit $X = \text{Spec}(B)$ un schéma de Cohen-Macaulay de dimension pure $q-2$, $X \subset k^q$, $q < 6$. Alors il existe une famille $\bar{X}$ de déformations de X dont la fibre générique est non singulière. C'est-à-dire X a des déformations non singulières.

COROLLAIRE 1 . - Une courbe algébrique dans k^3 a des déformations non singulières.

COROLLAIRE 2 . - Un schéma de dimension 0 dans k^2 a des déformations non singulières.

Idée de démonstration. - D'après le théorème 1, soit $B = P/J$, J est engendré par les mineurs d'une matrice $R = [r_{ij}] = [r_1, \dots, r_{n-1}]$. Nous prenons comme espace de paramètres $k[U, V]$ où

$$U = (U_{ij}) \quad , \quad V = (V_{ij}^1, \dots, V_{ij}^q) \quad .$$

Ces paramètres vont nous permettre de changer les termes constants et les termes linéaires des coefficients de la matrice R de la manière suivante :

$$\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}] \quad , \quad \tilde{r}_{ij} = r_{ij} + U_{ij} + \sum_{\ell=1}^q V_{ij}^\ell \cdot z_\ell \quad .$$

DÉFORMATIONS DE COURBES GAUCHES

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{ij} &= \det(e_1, \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_{n-1}) \\ \tilde{J} &= (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n) \subset k[U, V, z] \\ \tilde{X} &= \text{Spec}(k[U, V, z] / \tilde{J}) \quad . \end{aligned}$$

LEMME . - $\tilde{X}$ est plat dans un voisinage ouvert affine de 0 dans S . Au-dessus de ce voisinage presque toutes les fibres sont des intersections complètes.

On montre d'abord que la codimension du sous schéma de $\text{Spec}(k[U, V, z])$ où $\text{rang } \tilde{R} < n-2$ est supérieure ou égale à la hauteur de l'idéal déterminantiel des mineurs de rang $n-2$ soit $(n+1 - (n-2))(n - (n-2)) = 6$. On utilise alors l'hypothèse $q < 6$ pour pouvoir se placer dans un ouvert affine de S au-dessus duquel $\text{rang } \tilde{R} \geq n-2$. On suppose alors que le mineur $b = \det(e_1, e_2, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_{n-1})$ ne s'annule pas et on montre que les fibres sont des intersections complètes. (L'idéal qui définit une fibre est engendré par $\tilde{f}_1/b$ et $\tilde{f}_2/b$) .

Le critère jacobien permet alors de conclure que presque toutes les fibres sont non singulières.

Remarque . - La restriction $q < 6$ est la plus fine possible : il existe un contre exemple bien connu dans le cas $q = 6$. C'est le cône sur le plongement de Segre de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ dans $\mathbb{P}^5$. L'idéal de ce cône dans l'anneau $k[x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2]$ est engendré par les mineurs maximaux de la matrice :

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}$$

La singularité à l'origine est rigide, c'est-à-dire n'admet que des déformations triviales, puisque toute déformation de la matrice correspond à des déformations des coordonnées donc à un changement de coordonnées.

SCHAPS

REFERENCES

- . M. HOCHSTER et J. EAGON - Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci - Amer. J. of Maths. Oct. 1971
- . H. BASS - Algebraic K-theory - W.A. Benjamin, Inc. New York 1968
- . I. KAPLANSKY - Commutative Rings - Allyn and Bacon, Inc. Boston 1970
- . M. SCHLESSINGER - Infinitesimal deformations of singularities - Dissertation, Harvard 1964 .