PIERRE CREPEL

Fonctions spéciales pour des contractions de $\mathbb{L}^1$

Astérisque, tome 4 (1973), p. 91-125

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__4__91_0>

FONCTIONS SPECIALES

POUR DES CONTRACTIONS DE $\mathbb{L}^1$

par

Pierre CREPEL

I. NOTATIONS - RAPPELS -

Soit P un opérateur sous - markovien sur $L^1(X,\Sigma,m)$, c'est à dire une contraction positive de L^1. On notera, $f\,P$ l'image de f ; l'opérateur adjoint sur L^∞ sera aussi désigné par P, l'image de h étant $P\,h$.

$$< f\,,\, P\,h > \;=\; < f\,P\,,\, h >$$

Nous utiliserons les notations du livre de Foguel $[F_1]$, à ceci près que nous appellerons I_h l'opérateur de multiplication par h. En particulier, toutes les inégalités ont lieu dans L^1 ou L^∞ (c'est à dire m.p.s), sauf bien sûr s'il s'agit de nombres réels.

Potentiel tabou

Posons, comme Neveu $[N_2]$, pour $0 \leq h \leq 1$:

$$U_h = \sum_{n\geq 0} (P\, I_{1-h})^n\, P = \sum_{n\geq 0} P\,(I_{1-h}\, P)^n \quad \text{et} \quad U_A = U_{1_A} \qquad (0)$$

En particulier

$$U_0 = \sum_{n\geq 1} P^n \;, \quad U_1 = P \;, \quad U_A = \sum_{n\geq 0} (P\, I_{A^c})^n\, P$$

d'où :

$$U_A\, 1_A = P\, i_A$$

$$i_A = 1_A + 1_{A^c}\, U_A\, 1_A$$ (où i_A est la plus petite fonction sous invariante valant 1 sur A)

Les opérateurs positifs ainsi définis vérifient, pour $0 \leq h \leq k \leq 1$

$$U_h = \sum_{n\geq 0} (U_k\, I_{k-h})^n\, U_k = \sum_{n\geq 0} U_k\,(I_{k-h}\, U_k)^n \qquad (1)$$

et les équations résolvantes : $U_h = U_k + U_k I_{k-h} U_h = U_k + U_h I_{k-h} U_k$

De plus, si $f \geq 0$ est sous invariante ($P f \leq f$), on a :

$$U_h I_h f \leq U_k I_k f \leq f \qquad (2)$$

En particulier, $U_h I_h$ est sous - markovien.

Interprétation probabiliste

Soit $P(x,A)$ une probabilité de transition sur (X,Σ).

Pour toute fonction mesurable ≥ 0 h et pour toute mesure ≥ 0 μ, définissons $T h$ et μT par

$$(T h)(x) = \int P(x,dy)\, h(y);\ (T 1_A(x) = P(x,A))$$

$$(\mu T)(A) = \int P(x,A)\, \mu(dx)$$

On étend ces définitions à f et μ non nécessairement positives chaque fois que cela a un sens, grâce à $f = f^+ - f^-$ et $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

On sait qu'on peut associer à $P(x,A)$ une chaîne de Markov (X_n) sur (X,Σ) vérifiant :

$$(T I_{A_1} T I_{A_2} \ldots T I_{A_n}) 1 (x) = \Pr (X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n / X_o = x)$$

$$\forall x,\ A_1, \ldots, A_n$$

Supposons qu'il existe une mesure m σ - finie telle que $m T << m$.

On définit une contraction P sur $L^1(X,\Sigma,m)$ par la méthode suivante :

Soit $f \in L^1(X,\Sigma,m)$. Notons $d\mu = f \cdot dm$.

On posera : $f\,P = \frac{d\,(\mu T)}{d\,m}$, et on vérifie que f P est bien définie dans L^1 (c'est très facile). En d'autres termes, l'opérateur T passe aux densités :

$$\begin{array}{ccc} f & \longrightarrow & f\,P \\ \vdots & & \\ \mu & \longrightarrow & \mu\,T \end{array}$$

En outre, $T\,h = P\,h$ m.p.p.

Les probabilités de transition apparaissent ainsi comme des cas particuliers des contractions positives de L^1 (En fait, Doob a démontré que ce cas particulier était à peu près le cas général). Les méthodes employées par la suite sont purement analytiques et ne nécessitent aucune connaissance probabiliste ; toutefois, afin de guider l'intuition donnons brièvement l'interprétation probabiliste de $U_h = \sum_{n\geq 0} (T\,I_{1-h})^n\,T$ dans le cas d'une chaîne de Markov induite par une probabilité de transition :

$$U_B 1_A\,(x) = \sum_{n\geq 0} (T\,I_{B^c})^n\,T\,I_A\,1\,(x) = \sum_{n\geq 0} \Pr\,(X_1 \notin B,\dots,X_n \notin B,\; X_{n+1} \in A / X_o = x)$$

(ce qui apparaît comme l'espérance, partant de x, du nombre de visites à A avant le premier retour en B)

$$U_A 1_A\,(x) = \sum_{n\geq 0} \Pr\,(X_1 \notin A,\dots,X_n \notin A,\; X_{n+1} \in A / X_o = x)$$

(ce qui apparaît comme la probabilité d'atteindre A, en partant de x, puisque les ensembles ($X_1 \notin A$, ..., $X_n \notin A$, $X_{n+1} \in A$) sont disjoints et ont précisément pour réunion l'ensemble :

$$(\exists\, m \geq 1 \;\text{ t.q. }\; X_m \in A)\;)$$

$$U_h\,f\,(x) = E_x\,\left(\sum_{n\geq 0} [1 - h\,(X_1)]\,\dots\,[1 - h(X_n)]\,f\,(X_{n+1})\right)$$

Dans la suite, H désignera l'ensemble

$$\left\{ h \in L^{\infty} \quad \begin{array}{l} 0 \leq h \leq 1 \\ h \not\equiv 0 \end{array} \right\}$$

Opérateurs conservatifs et ergodiques.

Le lemme suivant est constamment utilisé dans de nombreux papiers, mais n'a, croyons - nous, jamais été écrit systématiquement :

Lemme 1 :

Pour tout opérateur markovien P , les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\forall f$ t.q. $\begin{array}{c} f \geq 0 \\ m(f) > 0 \end{array}$: $U_o f = \sum_{n \geq 1} P^n f = +\infty$

(b) P est conservatif et ergodique

(c) $f \geq 0$, $P f \leq f \longrightarrow f$ constante

(d) $\forall A$ t.q. $m(A) > 0$: $U_A 1_A = P i_A = 1$

(e) $\forall h \in H$: $U_h(h) = 1$

Démonstration :

Il suffit de se rappeler que, si on note $A^* = \{ P i_A > 0 \} = \{ \Sigma P^n 1_A > 0 \}$ le plus petit ensemble sous - invariant contenant A, on a :

$$P \text{ ergodique} \Longleftrightarrow [A^* = \phi \text{ ou } X, \forall A] \Longleftrightarrow \left[\left. \begin{array}{l} \forall f \geq 0 \\ m(f) > 0 \end{array} \right\} \Sigma P^n f > 0 \right]$$

et

$$P \text{ conservatif} \Longleftrightarrow [P i_A = i_A \quad \forall A] \Longleftrightarrow \left[\forall f \geq 0 \quad \Sigma P^n f = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \infty \end{array} \right. \right]$$

cf $[F_1]$ et $[F_3]$

Alors les implications

$$\begin{tikzcd} (a) \arrow[r, Leftrightarrow] & (b) \arrow[r, Leftrightarrow] & (c) \\ & (d) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & \\ & (e) \arrow[u, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

sont évidentes et , pour terminer

(d)$\Longrightarrow$(e) se démontre simplement à partir de l'équation résolvante (cf. [N_2] prop. IV.3) : $U_k(k)$ est une fonction croissante de k, inférieure ou égale à 1, d'après (2) ; pour toute h non négligeable, il existe a > 0 tel que $A = \{h \geq a\}$ soit non négligeable; il suffit donc, comme $h \geq a\, 1_A$, de démontrer que $U_{a 1_A}(a\, 1_A) = 1$ sous l'hypothèse (d).

Or $U_{a 1_A}(a\, 1_A) = \sum_{n\geq 0} (U_A I_{(1-a)1_A})^n U_A(a\, 1_A) = a \sum_{n\geq 0} (1-a)^n (U_A I_A)^n 1 = a \sum_{n\geq 0} (1-a)^n = 1$

Lemme 2 : (cf. [M_2])

> Soit $g \in H$. Posons $S_g = \{g > 0\}$
>
> Soit Q l'opérateur markovien sur S_g : $I_{S_g} U_g I_g$.
>
> L'opérateur ${}^QU_h = \sum_{n\geq 0} (Q\, I_{1-h})^n Q$ défini sur Q comme dans (0) vérifie ${}^QU_h = I_{S_g} U_{hg} I_g$. En particulier Q est conservatif et ergodique si P l'est.

Démonstration :

$${}^QU_h = \sum_{n\geq 0} (I_{S_g} U_g I_g I_{1-h})^n I_{S_g} U_g I_g = I_{S_g} \sum_{n\geq 0} (I_{g-gh} U_g)^n I_g = I_{S_g} U_{hg} I_g$$

(d'après l'équation (1), pour cette dernière égalité)

Par suite, ${}^QU_o = I_{S_g} U_o I_g$, donc si f ($\in L_+^\infty(S_g)$) est non négligeable :

${}^QU_o f = I_{S_g} U_o (gf)$ (= + ∞ si P est conservatif et ergodique).

Q est donc alors également conservatif et ergodique.

II. FONCTIONS SPECIALES. -

Dans toute la suite P désigne un opérateur conservatif et ergodique.

Soit $g \geq 0$. On sait que $U_o g = +\infty$; on est donc amené, pour pouvoir manier des potentiels, à introduire une notion qui permette de travailler sur des quantités finies :

Définition

On dira que $g \geq 0$ est spéciale si :

$\forall\, h \in H \qquad U_h g \in L^\infty$

(On dira que A est spécial si 1_A est spéciale)

Interprétation probabiliste

On sait que $U_B\, 1_A$ est l'espérance du nombre de visites à A avant de revenir à B. Dire que l'ensemble A est spécial (i.e. 1_A spéciale), c'est dire que cette espérance est bornée indépendamment du point de départ, c'est à dire que, en un certain sens, A est petit.

Remarques

1) Il est facile de voir que les fonctions spéciales forment un cône S stable par P :

L'équation résolvante $U_h\, I_{1-h}\, P + P = U_h$ donne, en ajoutant $U_h\, I_h\, P$ des deux côtés : $U_h\, P + P = U_h + U_h\, I_h\, P$, d'où

$$U_h\, P \leq U_h + U_h\, I_h\, P \tag{3}$$

et par suite : $\forall f \geq 0 \quad U_h P f \leq U_h f + ||f||$

et, par récurrence : $U_h P^n f \leq U_h f + n ||f||$ (4)

Il en résulte en particulier que le cône S des fonctions spéciales est stable par P.

2) S'il existe une fonction spéciale $f \neq 0$, il existe une fonction spéciale $f_o > 0$ (en effet,

si $f_o = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} P^n f$

$$U_h f_o = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} U_h P^n f \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} U_h f + \sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^n} ||f|| \quad \text{, d'après (4)}$$

$$= 2 U_h f + \left(\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^n}\right) ||f|| \in L^\infty .$$

3) Notations

Posons $R_h = \sum_{n \geq 0} (I_{1-h} P)^n$, on a alors évidemment :

$U_h = P R_h$

$R_h = I + I_{1-h} U_h$

Proposition 1.-

Les définitions suivantes sont équivalentes $(0 \leq g \leq 1)$

a) $U_h g \in L^\infty$ $\quad \forall h \in H$ (g est spéciale)

b) $U_h g \in L^\infty$ $\quad \forall h \in H, h \leq g$

c) $R_h g \in L^\infty$ $\quad \forall h \in H, h \leq g$ (g est bornée au sens de Brunel [B_1])

d) $R_h g$ bornée sur S_g $\forall\, h \in H,\ h \leq g$
(g est bornée au sens d'Orey [B_1])

e) $U_h g$ bornée sur S_g $\forall\, h \in H,\ h \leq g$

f) $1_{(S_g)}$ est spéciale pour $Q = I_{S_g} U_g I_g$

Démonstration.-

$a \Longrightarrow f \Longrightarrow e \Longrightarrow d \Longrightarrow c \Longrightarrow b \Longrightarrow a$

. $a \Longrightarrow f \Longrightarrow e$ est une évidence car, d'après la formule ${}^{Q}U_{h'} = I_{S_g} U_{h'g} I_g$, on a
${}^{Q}U_{h'}\, 1 = 1_{S_g} U_{h'g}\,(g)$ $\qquad 0 \leq h' \leq 1_{S_g}$

. $e \Longrightarrow d$: résulte de $R_h = I + I_{1-h} U_h$

. $d \Longrightarrow c$: est une simple application du principe du maximum au potentiel du noyau $S = I_{1-h} P$

. $c \Longrightarrow b$: par $U_h = P\, R_h$

. $b \Longrightarrow a$: soit $h \in H$, quelconque :

- Si $h \wedge g \not\equiv 0$, on a $U_h g \leq U_{h \wedge g}\, g \in L^{\infty}$ d'après b).
- Si $h \wedge g \equiv 0$, comme P est ergodique (i.e.$\Sigma\, P^n h > 0$) il existe n tel que $P^n h \wedge g \not\equiv 0$.

Alors $U_h g \leq U_{\frac{1}{2} h}\, g = U_{\frac{1}{2}(h+P^n h)}\, g + U_{\frac{1}{2} h}\, I_{\frac{1}{2} P^n h}\, U_{\frac{1}{2}(h+P^n h)}\, g$

Comme $[\frac{1}{2}(h + P^n h)] \wedge g \not\equiv 0$, on a :

$$U_h g \leq \|U_{\frac{1}{2}(h + P^n h)}\, g\| + \|U_{\frac{1}{2}(h + P^n h)}\, g\| . U_{\frac{1}{2} h}\, (\tfrac{1}{2} P^n h) \in L^{\infty}$$

car $U_{\varphi}(P^n \varphi) \leq U_{\varphi}(\varphi) + n\ \|\varphi\|$ $\qquad \forall\, \varphi$. ■

Cas où l'espace entier X est spécial.-

Proposition 2.-

Soit Q un opérateur conservatif et ergodique, les conditions suivantes sont équivalentes :

α) 1 est spéciale pour Q.

β) $\sum_{n=0}^{N} (Q\, I_{1-h})^n\, Q\, h \uparrow 1$ uniformément $\forall\, h \in H$

γ) $\sum_{n=1}^{N} Q^n\, h \uparrow \infty$ uniformément $\forall\, h \in H$

δ) $\forall\, \theta < 1 \quad U_\theta h \geq b\,(h) > 0$ $\forall\, h \in H$

Démonstration.-

$\alpha \Longrightarrow \beta \Longrightarrow \gamma \Longrightarrow \delta \Longrightarrow \alpha$

$\alpha \Longrightarrow \beta$: $\sum_{N+1}^{\infty} (Q\, I_{1-h})^n\, Q\, h = (Q\, I_{1-h})^{N+1}\, U_h\,(h) = (Q\, I_{1-h})^{N+1}\, 1$

or $\sum_{n\geq 0} (Q\, I_{1-h})^n\, Q\, 1 \leq a$ par hypothèse ; d'où, comme

la suite $(Q\, I_{1-h})^{N+1}\, Q\, 1$ est décroissante :

$(Q\, I_{1-h})^{N+1}\, 1 = (Q\, I_{1-h})^{N+1}\, Q\, 1 \leq \frac{a}{N+2}$,

ce qui entraîne la convergence uniforme de la série du β).

$\beta \Longrightarrow \gamma$: Pour N assez grand, $\sum_{n=1}^{N} Q^n h \; (\geq \sum_{n=0}^{N} (Q\, I_{1-h})^n\, Q\, h)$

est supérieur à une constante $c\,(h) > 0$. Donc :

$\sum_{n=1}^{pN} Q^n\, h \geq p\, c\,(h) \uparrow \infty$

$\gamma \longrightarrow \delta$: est évident :

Si $\sum_{n=1}^{N} Q^n\, h \geq c\,(h)$, alors $U_\theta\, h \geq (1-\theta)^N c(h) = b(h) > 0.$

$\delta \Longrightarrow \alpha$: l'hypothèse δ s'écrit $1 \leq \frac{1}{b(h)}\, U_\theta h$, d'où :

$U_h 1 \leq \frac{1}{b(h)}\, U_h\, U_\theta\, h \leq \frac{1}{b(h)} \left[c + \sum_{n\geq 0} (n+1)\,(1-\theta)^n\right]$,

grâce à la formule (4). ∎

Remarque :

On pourrait ajouter à ces conditions la suivante :

1 est spéciale pour Q si pour toute contraction dérivée de Q : $R = \sum_{n \geq 0} \alpha_n Q^n$ ayant un nombre infini de coefficients > 0, on a

$R h \geq d(h) > 0$. (la démonstration est évidente).

III. MESURES INVARIANTES (positives absolument continues par rapport à m).

Rappels :

Soit P un opérateur conservatif et ergodique.

1) Il existe au plus (à un facteur multiplicatif près) une mesure (σ-) finie invariante $<<$ m [F_1 , chap. VI]

2) Toute mesure $\neq 0$ invariante $<<$ m est nécessairement $\sim$ m

(car son support est un invariant , donc soit $\emptyset$, soit X puisque P est ergodique) (proof : exercise)

3) Condition d'existence d'une mesure finie invariante

[Notons $\mathfrak{D}(P)$ l'ensemble des contractions dérivées de P (c'est à dire l'ensemble des opérateurs $\sum_{i \geq 0} \alpha_i P^i$ avec $\sum \alpha_i = 1$ $\alpha_i \geq 0$)]

Les conditions a) b) c) sont alors équivalentes :

a) Il existe une mesure finie invariante ($\sim$m)

b) Il n'existe pas de $f \geq 0$ t.q. $\left.\begin{array}{l}\\ \text{ni de suite } n_i \uparrow \infty\end{array}\right\}$ $\sum_{i \geq 0} P^{n_i} f \in L^\infty$

c) Toutes les contractions dérivées de P sont conservatives.

(Il est évident que si λ est invariante $\sim$ m, on a

$$< \lambda, \sum_{i\geq 0} P^{n_i} f > = \sum_{i \geq 0} < \lambda , P^{n_i} f > = \infty . < \lambda, f >$$

donc que $\sum_{i\geq 0} P^{n_i} f$ n'appartient pas à L^∞ ; il est d'autre part évident que si λ $(\sim m)$ est P - invariante, elle est aussi R - invariante $\forall R \in \mathfrak{D}(P)$, donc que R est conservatif. (Il est en effet facile de voir que si λ est finie, R - invariante $\sim$ m, alors R est conservatif ; sinon, il existerait f tq. $\sum_{n \geq 0} R^n f \in L^\infty$, donc $< \lambda, \Sigma R^n f > < \infty$ ce qui est impossible).

Les réciproques sont beaucoup plus longues à démontrer et se trouvent par exemple dans [N_1] , [F_1] , [B_2] , [B_3] , [F_4] .

4) Il existe des opérateurs conservatifs et ergodiques qui ne possèdent aucune mesure (σ-) finie invariante.

5) Le lemme suivant est constamment utilisé dans de nombreux papiers ; il est valable pour tout opérateur P.

$0 \leq g \leq 1$

$m(g) > 0$

a) Si λ_o est une mesure ≥ 0 finie (portée par S_g) invariante par $Q = I_{S_g} U_g I_g$, alors $\lambda = \lambda_o U_g$ est σ - finie invariante par P et telle que $\lambda_o = g . \lambda$ (elle est unique à un facteur multiplicatif près)

b) Si λ est une mesure ≥ 0 σ - finie invariante par P, et si $0 < \lambda(g) < \infty$, alors $\frac{g.\lambda}{\lambda(g)}$ est la seule probabilité invariante par Q.

Conséquences pour les processus admettant des fonctions spéciales.

Soit Q un opérateur consergo (= conservatif et ergodique) tel que 1 soit spéciale ; il admet une mesure finie invariante (unique $\sim$ m)

Démonstration :

$\forall\ h \in H$, on a, pour N assez grand : $\sum_{n=1}^{N} Q^n h \geq c\,(h) > 0$

Donc, pour toute suite $n_i \uparrow \infty$:

$$\sum_{n=1}^{N} Q^n \Big(\sum_{i \geq 0} Q^{n_i} h\Big) = \sum_{i \geq 0} Q^{n_i} \Big(\sum_{n=1}^{N} Q^n h\Big)$$

Par suite $\sum_{i \geq 0} Q^{n_i} h$ ne peut être un élément de L^∞ ;
il en résulte que Q admet une mesure finie invariante d'après le 3ème rappel.

Soit P un opérateur consergo admettant une fonction spéciale $\not\equiv 0$; alors P admet une mesure σ - finie invariante (unique $\sim$ m)

Démonstration :

$Q = I_{S_g}\, U_g\, I_g$ admet 1 pour fonction spéciale , donc admet une mesure finie invariante et il suffit d'appliquer le lemme de construction d'une mesure σ - finie P - invariante à partir d'une mesure finie Q - invariante.

Remarques :

1) Si 1 est spéciale pour Q, on a $R\,h \geq d\,(h) > 0$, donc $\sum_{n>0} R^n h = +\infty$, pour toute $R \in \mathfrak{D}(Q)$ ayant un nombre infini de coefficients > 0. Une telle R est donc conservative. D'autre part, si Q est conservatif, toute contraction dérivée n'ayant qu'un nombre fini de coefficients > 0 est toujours conservative

(cf. F_4). On retrouve bien que Q admet une mesure finie invariante par la condition c) du 3e rappel.

2) L'existence d'une mesure invariante pour les opérateurs qui admettent des fonctions spéciales non nulles va être redémontrée au passage au paragraphe suivant.

Tableau récapitulatif

On peut résumer ce début d'étude dans le tableau suivant :

$$\left[\begin{array}{c}P \text{ consergo}\\ 1 \text{ spéciale}\end{array}\right]$$
$$\Updownarrow$$
$$\left[\sum_{n=0}^{N} (P\, I_{1-h})^n\, P h \uparrow 1 \text{ uniformément}\right]$$
$$\Updownarrow$$
$$\left[\sum_{0}^{N} P^n h \uparrow \infty \text{ uniformément}\right]$$
$$\Updownarrow$$
$$\left[\begin{array}{l}\forall R \in \mathfrak{D}(P) \text{ à un nombre infini de coefficients } > 0\\ R h \geq d(h) > 0\end{array}\right]$$

$\Rightarrow$

P consergo

$$\Updownarrow$$
$$U_h(h) = 1 \quad \left(\text{i.e: } \sum_{n=0}^{N} (P I_{1-h})^n P h \uparrow 1\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$U_A(1_A) = P\, i_A = i_A = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum_{n \geq 0} P^n h = +\infty$$
$$\Updownarrow$$
$$\left[P h \leq h \Rightarrow h = c^{te}\right]$$

(il n'existe pas nécessairement de mesure invariante)

$\Rightarrow$

$\exists\ \mu \sim m$ finie invariante

$$\Updownarrow$$
$$\sum_{i \geq 0} P^{n_i} h \in L^\infty \quad \text{impossible}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall R \in \mathfrak{D}(P) \quad R \text{ conservatif}$$

$\Rightarrow$

P conservatif

$$\Updownarrow$$
$$\left[U_A(1_A) = P i_A = i_A = 1_{A^*}\right]$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum P^n h = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\left[P h \leq h \Longrightarrow P h = h\right]$$

$\Rightarrow$

P ergodique

$$\Updownarrow$$
$$U_h(h) > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\left[U_A(1_A) = P\, i_A > 0\right]$$
$$\Updownarrow$$
$$A^* = \emptyset \text{ ou } X$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum P^n h > 0$$

IV. THEOREME LIMITE QUOTIENT

(RP) Soit P conservatif et ergodique.

Soient $\begin{cases} f \text{ et } g \text{ deux fonctions spéciales } (m(g) > 0) \\ \mu \text{ et } \nu \text{ deux probabilités } << m \end{cases}$

Alors P admet une mesure σ - finie invariante unique

et $\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{N} \mu\, P^n(f)}{\sum\limits_{n=1}^{N} \nu\, P^n(g)} \longrightarrow \dfrac{\lambda(f)}{\lambda(g)}$.

[En particulier, si P n'a pas de mesure σ - finie invariante, il n'y a pas de fonction spéciale non nulle]

Avant de passer à la démonstration de ce résultat, nous avons besoin de quelques préliminaires , dont seul le premier sera démontré ici (les autres n'étant d'ailleurs pas particuliers à la théorie ergodique.)

Lemmes techniques.

Un cas particulier des équations résolvantes donne :

$U_o = U_h\, I_h\, U_o = U_o\, I_h\, U_h + U_h$

Nous aurons besoin d'une version tronquée de ce résultat, à savoir :

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{N} P^n \leq U_h\, I_h \sum\limits_{n=1}^{N} P^n + U_h & (5) \\ \sum\limits_{n=1}^{N} P^n \leq \sum\limits_{n=1}^{N} P^n\, I_h\, U_h + U_h & (6) \end{cases}$$

Ces deux inégalités duales se démontrent de la même manière par récurrence. Pour (5), par exemple :

* $N = 1$: L'équation résolvante (pour $k = 1$) donne : $U_h = P + U_h I_{1-h} P$, d'où en ajoutant $U_h I_h P$ aux deux membres

$$U_h I_h P + U_h = P + U_h P \geq P$$

* Supposons (5) vraie pour N ; en la multipliant à droite par P et en ajoutant P, on obtient :

$$P + \sum_{n=2}^{N+1} P^n \leq U_h I_h \sum_{n=2}^{N+1} P^n + U_h (I_h + I_{1-h}) P + P$$

ce qui donne le résultat pour $N + 1$, car

$$U_h I_{1-h} P + P = U_h . \blacksquare$$

≠ Charges

On appelle <u>charge</u> τ toute mesure ≥ 0 <u>simplement additive</u> finie sur (X,Σ) et absolument continue par rapport à m. L'espace des différences de deux charges s'identifie au dual $(L^\infty)'$ de L^∞, dual qui contient L^1.

On trouve dans $[F_1]$, p. 34 ou $[N_1]$, p. 461, le résultat suivant qui nous sera utile.

Toute charge τ peut se décomposer de manière unique en $\tau = \tau_1 + \tau_2$ où

$$\begin{cases} \tau_1 \text{ est une mesure \underline{complètement additive} (finie)} \\ \tau_2 \text{ est une " charge pure ", c'est à dire telle} \\ \quad \text{que } \left. \begin{array}{r} \mu \text{ mesure } \sigma \text{ - additive} \\ \mu \leq \tau \end{array} \right| \ \mu = 0 \end{cases}$$

En outre, il existe $0 \leq h \leq 1$ telle que $m(h) > 0$ et $< \tau_2 , h > = 0$. Enfin, si Q est un opérateur sous markovien quelconque et si τ est invariante par Q ($\tau Q = \tau$), alors τ_1 et τ_2 sont aussi invariantes.

≠ Limites de Banach.

Une limite de Banach L est par définition une forme linéaire positive sur l'espace ℓ^∞ des suites réelles bornées $(u_n)_{n \geq 0}$, normalisée et invariante par translation, c'est à dire telle que $L[(1)] = 1$

$$L[(u_{n+1})] = L[(u_n)] \quad \forall (u_n) \in \ell^\infty.$$

De telles formes existent, et :

- Si (u_n) et $(v_n) \in \ell^\infty$ et si (v_n) converge, alors pour toute limite de Banach L : $L(u_n + v_n) = L(u_n) + \lim_n v_n$
- Une suite $(u_n) \in \ell^\infty$ est convergente si toutes les limites de Banach prennent la même valeur pour toute suite extraite. La valeur commune est la limite.

(voir [N_1] , p. 463)

Démonstration proprement dite du théorème RP

On peut se limiter à f et $g \geq 0$. Procédons en deux temps pour la démonstration.

* RP 1 : $\rho_N = \dfrac{\sum_{n=1}^{N} \mu P^n (f)}{\sum_{n=1}^{N} \nu P^n (f)} \longrightarrow 1$

a) Posons $f_N = \sum_{n=1}^{N} P^n f$. P étant conservatif et ergodique, on a $\nu (f_N) \uparrow \infty$. Prenons N fixé $\geq N_0$ de manière que $\nu (f_N) > 0$, et montrons que $\limsup_N \left\| \dfrac{f_N}{\nu(f_N)} \right\| < \infty$.

L'ensemble $B = \{f_N \leq \nu(f_N)\}$ est non m - négligeable puisque ν est une proba $<<$ m, par suite $U_B f$ est borné. En outre, l'inégalité (5) toujours vraie

$$\sum_{n=1}^{N} P^n \leq U_B I_B \sum_{n=1}^{N} P^n + U_B \quad \text{donne :}$$

$$f_N \leq U_B I_B f_N + U_B f \leq \nu(f_N) U_B I_B 1 + U_B f \leq \nu(f_N) + ||U_B f|| ,$$

d'où $\dfrac{f_N}{\nu(f_N)} \leq 1 + \dfrac{||U_B f||}{\nu(f_N)} \longrightarrow 1.$

b) Soit N_j une suite croissante quelconque d'entiers. D'après ce qui précède (ρN_j) appartient donc à ℓ^∞ (pour $N \geq N_o$). Il suffit de démontrer que pour toute limite de Banach L, on a : $L(\rho_{N_j}) = 1$. Posons $\tau(\mu) = L(\rho_{N_j})$. De l'égalité évidente :

$$\frac{\sum_{n=1}^{N_j} (\mu P) P^n (f)}{\sum_{n=1}^{N_j} \nu P^n (f)} = \rho_{N_j} + \frac{\mu P^{N_j+1} (f) - \mu P(f)}{\sum_{n=1}^{N_j} \nu P^n (f)} ,$$

on déduit (puisque $\sum_{n=1}^{N_j} \nu P^n (f) \uparrow \infty$ et que les limites de Banach passent à travers les limites) que : $\tau(\mu P) = \tau(\mu)$. Comme τ est visiblement une forme linéaire ≥ 0 bornée sur L^1, il existe $g \in L_+^\infty$ t.q. $<\mu , P g> = <\mu , g> = \tau(\mu)$ $\forall \mu$ proba $<<$ m ;

mais la fonction g invariante est une constante a (P étant conservatif et ergodique) qui vaut nécessairement 1 du fait que :

$$1 = \tau(\nu) = <\nu , g> = a \ \nu(X) = a \ \blacksquare$$

* RP2 P a une mesure σ - finie invariante λ et $\dfrac{\sum_{n=1}^{N} \nu P^n (f)}{\sum_{n=1}^{N} \nu P^n (g)} \to \dfrac{\lambda(f)}{\lambda(g)}$

- Remarquons d'abord qu'on peut supposer $f \leq g$ (sinon on applique le résultat obtenu aux couples $(f , f + g)$ et $(g , f + g)$).

- Supposons donc $f = g h$ avec $0 \leq h \leq 1$.

Posons $\sigma_{N_j}(h) = \dfrac{\sum_{n=1}^{N_j} \nu P^n I_g(h)}{\sum_{n=1}^{N_j} \nu P^n (g)}$ pour une suite $N_j \nearrow \infty$ quelconque d'entiers

Soit L une limite de Banach. Notons $\lambda_o (h) = L (\sigma_{N_j}(h))$.

- λ_o est une forme linéaire ≥ 0 sur L^∞ telle que $\lambda_o (1) = 1$. Ensuite l'inégalité (4) multipliée à droite par I_g donne :

$$\sum_{n=1}^{N_j} P^n I_g h \leq \sum_{n=1}^{N_j} P^n I_g U_g I_g h + U_g I_g h$$

d'où

$$\sigma_{N_j}(h) \leq \sigma_{N_j}(U_h I_g h) + \frac{U_g I_g h}{\sum_{n=1}^{N_j} \nu P^n (g)} .$$

En appliquant L à cette inégalité, on obtient : $\lambda_o (h) \leq \lambda_o (U_g I_g h)$ (comme précédemment). Or $U_g (g) = 1$, donc : $\lambda_o (1) = \lambda_o (U_g I_g 1)$.

λ_o apparaît donc comme une charge (portée par S_g) invariante par $(I_{S_g}) U_g I_g = Q$.

- Si $\lambda_o = \lambda_1 + \lambda_2$ est la décomposition de cette charge, montrons que $\lambda_2 = 0$: en effet, soit h_o $(\leq 1_{S_g})$ vérifiant $\lambda_2(h_o) = 0$ et $m(h_o) > 0$ (une telle h_o existe d'après ce qu'on a vu sur les charges). Si on avait $\lambda_2(1) = a > 0$, on aurait :

$$a = \lambda_2(1) = \lambda_2(Q1) = \lambda_2(QI_{1-h_o}Q1) = \dots =$$
$$= \lambda_2((QI_{1-h_o})^n Q\,1) \dots$$

car $\lambda_2 Q = \lambda_2$ et $\lambda_2(h_o) = 0$. En faisant la somme on obtiendrait :

$$(N+1)\,a \leq \lambda_2\Big(\sum_{n=0}^{N} (QI_{1-h_o})^n Q1\Big) \leq \lambda_2\left[{}^{Q}U_{h_o} 1\right]$$

ce qui est contradictoire avec le fait que 1 est spéciale pour Q (i.e. que $U_{h_o} 1 \in L_+^\infty$)

- Il reste à conclure : λ_o est une probabilité invariante par $U_g I_g$.

D'après le lemme 2, il existe une mesure σ - finie λ invariante par $U_g I_g$ (unique) telle que $\lambda_o = \frac{g \cdot \lambda}{\lambda(g)}$, d'où $\lambda_o(h) = \frac{\lambda(gh)}{\lambda(g)}$.

Par suite, pour toute limite de Banach L, on a $L(\sigma_{N_j}(h)) = \lambda_o(h) = \frac{\lambda(gh)}{\lambda(g)}$, ce qui démontre RP2. ∎

* <u>RP</u> En appliquant RP 1 et RP 2 à l'égalité suivante, on obtient le théorème :

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} \nu P^n(f)}{\sum_{n=1}^{N} \nu P^n(g)} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \nu P^n(f)}{\sum_{n=1}^{N} \nu P^n(f)} \quad \frac{\sum_{n=1}^{N} \nu P^n(f)}{\sum_{n=1}^{N} \nu P^n(g)} \quad ∎$$

≠ Remarques.

1. On dira que f est spéciale au sens de Métivier si, pour toute h L_+^∞ t.q. m (h) > 0, on a, pour un α et un N (dépendant de h) :

$$\sum_{n=0}^{N} P^n (h) \geq \alpha \ m (h) \cdot f.$$

En appliquant P à droite à l'inégalité (3), on voit immédiatement par récurrence que $U_h P^n \leq U_h + n U_h I_h P^n$. Il en résulte que si f est spéciale au sens de Métivier, f est spéciale tout court (car : $U_h f \leq \frac{1}{\alpha \ m(h)} \sum_{n=0}^{N} U_h P^n h \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\alpha \ m(h)} [U_h(h)+n] = \frac{(n+1)\ (n+2)}{2 \ m\alpha(h)}$). La réciproque est présumée fausse par Métivier (cf. [E_1]).

Dans [L] , Michael Lin démontre le théorème limite quotient avec une hypothèse de spécialité au sens de Métivier. La démonstration que nous avons utilisée est une adaptation de celle de Lin. D'autres résultats analogues s'étendent facilement au cas des fonctions spéciales.

2. Pour des probabilités de transition définies partout sur une tribu séparable et récurrentes au sens de Harris avec la définition de Neveu [N_2] Métivier démontre pour toutes probabilités μ et ν (sans supposer d'absolue continuité) que pour f et g spéciales

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} \mu P^n(f)}{\sum_{n=1}^{N} \nu P^n(g)} \longrightarrow \frac{\lambda(f)}{\lambda(g)} .$$

(où λ est la mesure σ - finie de la chaîne). cf. [M_2]

3. On va démontrer que :

$$(7) \qquad \begin{array}{l} |f| \text{ spéciale} \\ \lambda(f) = 0 \end{array} \Longrightarrow \forall N : \left|\sum_{n=1}^{N} P^n f\right| \leq C \text{ pour une constante}$$

C (indépendante de N)

Ce résultat établi, on pourrait démontrer R P plus simplement à partir de R P 1, comme suit :

En posant $h = f - \frac{\lambda(f)}{\lambda(g)}\, g$, on remarque, comme Métivier [M_2] , que h est spéciale et vérifie $\lambda(h) = 0$, donc que

$$\sum_{n=1}^{N} \mu P^n(f) - \frac{\lambda(f)}{\lambda(g)} \sum_{n=1}^{N} \mu P^n(g) = \sum_{n=1}^{N} P^n(h) \text{ est bornée.}$$

Le résultat final s'ensuit en divisant par $\sum_{n=1}^{N} \nu P^n(g)$ (qui tend vers l'infini).

L'objet des paragraphes suivants est, entre autres, d'établir le résultat (7) que nous venons d'admettre.

V. EQUATION DE POISSON.-

P consergo

A Le cône S_o des fonctions spéciales (≤ 1) est égal à l'ensemble S' des $g \in H$ (ou 0) tels que $I - Q$ soit surjectif de L^1_o (gdm) sur L^1_o (gdm)
(où $Q = I_{S_g} U_g I_g$ et où $L^1_o(\text{gdm}) = \{f \in L^1(S_g, \text{gdm}) ; \int f g dm = 0\}$

B Soit $g\ (\neq 0) \in S_o$; on sait qu'il existe une mesure P - invariante unique λ (telle que $\lambda_o = \frac{1}{\lambda(g)} \lambda I_g$ soit la proba Q - invariante)

1) Equation de Poisson

Soit k t.q. $|k| \in S$, $\lambda(k) = 0$. Alors l'équation $k = (1-P)\ \Psi$ a une solution (unique à une constante près)

2) Théorème qui n'est pas de Métivier

$$\left.\begin{array}{l} |f| \in S \\ \lambda(f) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\| \sum_{n=0}^{N} P^n f \right\|_\infty \leq M$$

(indépendant de N)

et même

$g \in S$

$$\left.\begin{array}{ll} \forall f : |f| \leq g & \text{i.e. } f = gh \quad |h| \leq 1 \\ \lambda(f) = 0 & \lambda_o(h) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\| \sum_{n=0}^{N} P^n f \right\|_\infty \leq C \, \|h\|_\infty$$

où C ne dépend que de g.

Démonstration du théorème.-

La démonstration est longue et se fera en plusieurs étapes ; il s'agit d'une adaptation de l'article de A. Brunel [B_1] ; elle est surtout donnée ici " for completeness ".

Nous allons d'abord démontrer B en remplaçant S par S' puis, dans un second temps, nous montrerons que $S_o = S'$.

(Nous noterons L^1 et L^1_o pour L^1 (gdm) et L^1_o (gdm)).

B) Comme nous n'avons pas encore établi l'égalité S = S', il nous faut démontrer d'abord que :

$$\boxed{* \quad g\ (\not\equiv 0) \in S' \Longrightarrow \exists\ \lambda_o \text{ proba t.q. } \lambda_o Q = \lambda_o}$$

Démonstration :

Supposons qu'il n'y ait pas de mesure finie invariante $\not\equiv 0$, I - Q serait alors (par définition) injective de L^1 dans L^1_o, et, a fortiori, de L^1_o dans L^1_o.

$$\begin{tikzcd} L^1_o \arrow[rr, Leftrightarrow, "I-Q"] & & L^1_o \\ & L^1 \arrow[ur, Rightarrow, "I-Q"'] & \end{tikzcd}$$

I - Q serait donc une bijection de L^1_o sur L^1_o ou de L^1 sur L^1_o . Par suite, l'identité serait une bijection de L^1 sur L^1_o ce qui est absurde.∎

$*$ Etude du dual de L^1_o (S_g,gdm)

Soit $H_o = \{ h \in L^\infty(S_g) : \lambda_o\ (h) = 0 \}$

Montrons que $(L^1_o)'$ s'identifie à H_o.

Démonstration :

On a évidemment $(L^1)' = L^\infty\ (S_g,\text{gdm}) = L^\infty\ (S_g,\text{dm})$;

d'autre part, $L^1 = L_o^1 \oplus \mathbb{R} f_o$: (F) (où $f_o = \frac{d\lambda_o}{dm} > 0$ sur S_g)

+ Soit $z \in (L_o^1)'$, il existe par (F) un h unique $\in H_o$ t.q.

$z(f) = \int f\, h\, (gdm)$.

(En effet, z est prolongeable en une forme linéaire $\hat{z}$ sur L^1 (c'est à dire un élément r de L^∞) $\hat{z}(f) = \int f\, r\, (gdm)$ et r peut être remplacé par r + a où a est une constante quelconque. Le résultat en découle facilement).

On vient donc d'identifier $(L_o^1)'$ à H_o algébriquement. En fait, l'identification est complète car :

+ Soit $|||z|||$ la norme de z dans $(L_o^1)'$.(On vérifie aisément que c'est $\inf_{y \in \mathbb{R}} ||h + y||_\infty$) ; on a :

$$|||z||| \leq ||h||_\infty \leq 2\, |||z|||$$

d'après le raisonnement suivant :

⊛ $|||z||| = \inf_{y \in \mathbb{R}} ||h + y|| \leq ||h||_\infty$

⊛ $\forall\, y \in \mathbb{R} \qquad |y| = |\lambda_o(h+y)| \leq ||h + y||_\infty$

(car λ_o est une proba t.q. $\lambda_o(h) = 0$)

d'où $||h||_\infty \leq ||h + y||_\infty + |y| \leq 2||h + y|| \leq 2|||z|||$

H_o et $(L_o^1)'$ s'identifient donc topologiquement.∎

* $\boxed{\text{Equation de Poisson.}}$

<u>Existence d'une solution</u>

Soit $h \in H_o$. Comme I - Q est bijectif de L_o^1 sur L_o^1 , il en est de même de son adjoint(de H_o sur H_o). Par suite, il existe $\phi \in H_o$ t.q. $(I_{(S_g)} - Q)\,\phi = h$.

Grâce à l'égalité $I_g\ (I - Q) = (1 - P) \sum_{n\geq 0} (I_{1-g}\ P)^n\ I_g$ on a :

$$gh = I_g\ (I-Q)\ \Phi = (1-P) \underbrace{\sum_{n\geq 0} (I_{1-g}P)^n\ I_g\ \Phi}_{\Psi}$$

On a donc résolu l'équation $gh = (1 - P)\ \Psi$

pour $\begin{cases} g \in S' \\ h \in H_o \ (\text{i.e. } \lambda_o\ (h) = 0, \text{ i.e. } \lambda\ (gh) = 0) \end{cases}$

c'est à dire en d'autres termes $k = (1 - P)\ \Psi$ avec $|k| \in S'$

$\lambda\ (k) = 0$

Unicité à une constante près.

Soient Ψ_1 et Ψ_2 deux solutions $k = (1 - P)\ \Psi_1$

$k = (1 - P)\ \Psi_2$

On a $(1 - P)\ (\Psi_1 - \Psi_2) = 0$ donc $\Psi_1 - \Psi_2$ est harmonique bornée, $|\Psi_1 - \Psi_2|$ est sous harmonique bornée ≥ 0 donc constante car P est conservatif et ergodique. ∎

$\boxed{\text{Théorème de Métivier pour les fonctions de S'.-}}$

C'est une conséquence immédiate de l'équation de Poisson:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Soit } g \in S' \\ |h| \leq 1 \\ \lambda_o\ (h) = 0 \\ f = gh \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{On sait qu'il existe} \\ \Psi = \sum_{n\geq 0} (I_{1-g}P)^n\ I_g\ \Phi \\ \text{où } \Phi = (I_{S_g} - Q)\ h \\ \text{t.q.} \quad f = gh = (I - P)\ \Psi \end{array}$$

d'où $\left\| \sum_{n=0}^{N} P^n f \right\|_\infty = \|\Psi - P^{N+1}\Psi\|_\infty \leq 2\ \|\Psi\|_\infty \leq 2\ \|\Phi\|_\infty \leq$

$\leq 2\ \|I_{S_g} - Q\|^{-1}\ \|h\|_\infty = C\ \|h\|_\infty$ ∎

Passons maintenant à la démonstration de la partie A du théorème Commençons par le plus facile.

$\boxed{S' \subset S}$

Soit $g \in S'$, on veut démontrer que $U_k g \in L^\infty$ $\begin{cases} \forall k \leq g,\ k \in H \\ \text{ie: } k = gh, h \in H \end{cases}$

$h - \lambda_o(h)\, g \in H_o$ et $g \in S'$

donc $\exists\ \Psi$ t.q. $h - \lambda_o(h)\, g = (I - P)\,\Psi$

grâce à la résolution de l'équation de Poisson.

Par suite, $\lambda_o(h)\, U_h g = U_h\,(h - (1-P)\Psi)$

$= U_h(h) - U_h(I - I_{1-h}P)\Psi - U_h I_h P\Psi$

$= 1 - P\,\Psi - U_h\, I_h\, P\,\Psi \in L^\infty$

ce qui démontre bien que $g \in S$. ∎

$\boxed{S \subset S'}$

Pour cette seule partie, la démonstration nécessite encore plusieurs étapes

a) Première partie

Introduction

" g spéciale pour P " équivaut à " 1 spéciale pour Q " (les notations qui suivent (S, U_h, ...) seront relatives à l'opérateur Q), c'est à dire

$$(8)\quad \forall\, \theta \in\,]0,1[\qquad \left.\begin{array}{l} 0 \leq h \leq 1 \\ \lambda_o(h) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow U_\theta\, h \geq b\,(h) > 0$$

(b (h) constante dépendant de h)

Le but de cette première partie est d'obtenir le raffinement suivant de cette propriété :

$$(9)\quad \begin{pmatrix} \forall\, \alpha \\ 0 < \alpha < 1 \end{pmatrix} \quad \forall\, \theta \in\,]0,1[\qquad \left.\begin{array}{l} 0 \leq h \leq 1 \\ \lambda_o\,(h) \geq \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow U_\theta\, h \geq b > 0$$

(b constante dépendant de α et non de h)

Notations

Soit $S^\alpha = \left\{ \varphi\ (\le 1) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \le h \le \varphi \\ \lambda_0(h) \ge \alpha\, \lambda_0(\varphi) \end{array} \right| \Longrightarrow U_\Theta h \ \text{minoré par une constante indépendante de } h \Big\}$

(On notera $A \in S^\alpha$ pour $1_A \in S^\alpha$)

Tout le problème, pour obtenir (9), est de démontrer que $1 \in S^\alpha$.

Remarques

1) S^α , a priori, dépend de Θ ; en fait, il n'en est rien, car : supposons que $U_\Theta h$ soit minoré par une constante indépendante de h (pourvu que h appartienne à une certaine famille $\mathcal{H}'$), il en est a fortiori de même pour $U_{\Theta''} h$ ($\Theta'' \le \Theta$), mais aussi pour $U_{\Theta'} h$ ($\Theta' \ge \Theta$) , car $b_\Theta \le U_\Theta h = \sum_{n=0}^{N} (1-\Theta)^n P^{n+1} h + (1-\Theta)^{N+1} U_\Theta P^{N+1} h$ entraîne $\sum_{n=0}^{N} (1-\Theta)^n P^{n+1} h \ge b_\Theta - (1-\Theta)^{N+1} U_\Theta 1 = a_\Theta$ cette quantité étant > 0 pour N assez grand, donc

$$U_{\Theta'} h \ge \sum_{n=0}^{N} (1-\Theta')^n P^{n+1} h \ge \left(\frac{1-\Theta'}{1-\Theta}\right)^N \sum_{n=0}^{N} (1-\Theta)^n P^{n+1} h \ge a \left(\frac{1-\Theta'}{1-\Theta}\right)^N > 0$$

indépendant de h.

2) Dans la définition de S^α , on peut remplacer "$U_\Theta h$ minoré... " par " $U_\Theta h$ minoré ... sur un ensemble non négligeable B fixé " . En effet $U_\Theta h \ge b\, 1_B \Longrightarrow$

$$(\Theta-\Theta^2)^{-1}\, U_{\Theta^2} h \underset{\text{d'après (1)}}{\ge} U^2_\Theta h \ge b\, U_\Theta 1_B \ge c > 0.$$

(B étant fixé, c est bien indépendante de h)

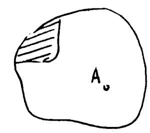
3) Si $A_1, \ldots, A_n \in S^\alpha$, il en est de même de $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ (la démonstration est évidente, puisque tout $h \le 1_{A_1 \cup \ldots \cup A_n}$ peut s'écrire $h = h_1 + \ldots + h_n$ avec $h_i \le 1_{A_i}$ $\forall\, i$)

Démonstration de $1 \in S^\alpha$ (ou $S_g \in S^\alpha$)

Première réduction :

Pour démontrer que $1 \in S^\alpha$ $(\forall\alpha)$, il suffit de démontrer que chaque S^α contient des ens. de λ . proba arbitrairement voisine de 1.

En effet, si $\begin{cases} A_o \in S^{\alpha/2} \\ \lambda_o\ (A_o^c) \leq \frac{\alpha}{2} \end{cases}$



on a :

$$\lambda_o\ (E) \geq \alpha \Longrightarrow \lambda_o\ (E.A_o) \geq \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\alpha}{2}\ \lambda_o\ (A_o)$$

et comme $A_o \in S^{\alpha/2}$, on a $U_\Theta 1_E \geq U_\Theta 1_{E.A_o} \geq b > 0.$

Deuxième réduction :

Pour savoir que chaque S^α contient des ens. de proba arbitrairement voisines de 1, il suffit [d'après un théorème général de théorie de la mesure] , puisque S^α est stable par union disjointe - finie, de vérifier que toute partie $\neq \emptyset$ de X contient un ens. $\neq \emptyset$ de S^α , c'est à dire grâce à la remarque 2, de démontrer la proposition suivante :

Proposition.-

Soit $\emptyset \neq X' \subset X$, alors $\exists \begin{cases} A \subset X' \\ B \neq \emptyset \quad \text{t.q.} \\ b > 0 \end{cases} \quad \forall E \subset A \quad \lambda_o(E) \geq \alpha\, \lambda_o(A) \; \Big| : U_\Theta 1_E \geq b\, 1_B$

Démonstration (par l'absurde)

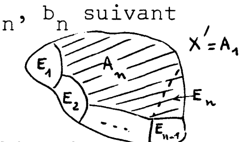
La négation de cette proposition s'écrit :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\ A \subset X' \\ B \neq \emptyset \\ b > 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \exists\ E \subset A \\ \lambda_o(E) \geq \alpha\lambda_o(A) \end{array} \quad : U_\theta 1_E < b \text{ sur une partie non négl. de } B.$$

Appliquons cette hypothèse n fois :

$$\text{Soient} \begin{cases} A_1 = X' & \exists\ E_1 \subset A_1 \quad : U_\theta 1_{E_1} < b_1 \text{ sur } \underset{\neq\emptyset}{B_2} \subset B_1 \\ B_1 = X & \lambda_o(E_1) \geq \alpha\lambda_o(A_1) \\ b_1 = \varepsilon \text{ arbitraire} & \end{cases}$$

On laisse alors de côté E_1 et on regarde ce qui se passe dans $A_1 - E_1$: on construit alors des suites A_n, B_n, E_n, b_n suivant le schéma :



$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} - E_{n-1} & \exists\ E_n \subset A_n \\ B_n \text{ fixé par récurrence} & \lambda_o(E_n) \geq \alpha\lambda_o(A_n) \ : \ U_\theta 1_{E_n} < b_n \\ b_n = \dfrac{\varepsilon}{2^{n-1}} & \text{sur } B_{n+1} \subset B_n \neq \emptyset \end{cases}$$

Il est clair par construction que $A_n = X' - E_1 \dots - E_{n-1}$, que $\lambda_o(A_n) \leq (1-\alpha)\,\lambda_o(A_{n-1})$ donc $\lambda_o(A_n) \downarrow 0$.

Si l'on pose $E = E_1 + \dots + E_{n-1}$ ($= X' - A_n$), on obtient:

$$U_\theta 1_E \leq b_1 + \dots + b_n = \varepsilon\left(1 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 2\,\varepsilon \quad \text{sur } B_{n+1}$$

$$\underline{\forall\ n}$$

En d'autres termes, on aurait le résultat déraisonnable suivant : $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ E \subset X'$ de mesure arbitraire voisine de $\lambda_o(X')$ t. q. $U_\theta 1_E \not\geq 2\,\varepsilon$ (la contradiction provient du fait qu'on aurait :

$$\forall\ j \geq 1 \ \exists\ E_j \subset X' \quad \lambda_o(E_j) > \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)\lambda_o(X') \quad \text{et } U_\theta 1_{E_j} \not\geq \frac{2}{j}$$

d'où si $E = \bigcap_j E_j$ $\lambda_o(E) > 0$ et $U_\theta 1_E$ non minoré par une constante ce qui est impossible puisque $1 \in S$) ■

Nous avons donc démontré la condition (9) cherchée (c'est à dire $1 \in S^{\alpha}$). Il reste maintenant à établir le résultat final c'est à dire la surjectivité de $I - Q$ sur L^1_o (en d'autres termes, on aura montré que $1 \in S \Longrightarrow 1 \in S^{\alpha} \Longrightarrow 1 \in S'$).

b) Deuxième partie

(10) $\boxed{\text{Soit } \mathcal{J} \text{ l'image par } I - Q \text{ de } L^1_o \text{. Montrons que } \mathcal{J} = L^1_o}$

- $\mathcal{J}$ est dense dans L^1_o (Sinon $\exists\, f \in (L^1_o)' = H_o$ t.q. $(1 - Q)\, f = 0$, i.e. $Q\, f = f$, donc $Q\, |f| \geq |f|$, d'où $f = c^{te}$ (puisque Q est consergo) et cette constante est nécessairement nulle, puisque $f \in H_o$)
- $\mathcal{J}$ est fermée, ou, ce qui est équivalent, grâce au théorème de Banach

  Si f_n $(\in L^1_o)$ vérifie $||f_n\,(1 - Q)||_{L^1} \longrightarrow 0$, alors $||f_n||_{L^1} \longrightarrow 0$.

Démonstration :

Quitte à remplacer f_n par son opposé, on peut toujours supposer que $(E_n = (f_nQ \geq 0)$ vérifie $\lambda_o\,(E_n) \geq \frac{1}{2}$, d'où $U_{E_n} 1 \leq \mathcal{C}$ par suite

$$f_n\,(1 - Q) = f_n\,(I - Q\, I_{E_n^c} - Q\, I_{E_n}) \quad \text{d'où}$$

$$f_n\,(1 - Q)\, U_{E_n} = f_n\,(1 - Q\, I_{E_n^c})\, U_{E_n} - f_n\, Q\, I_{E_n}\, U_{E_n}$$

$$= f_n \qquad\qquad - (f_nQ)^+\, U_{E_n}$$

d'où

$$\int f_n\,(1 - Q)\, U_{E_n}\,(gdm) = 0 - \int (f_nQ)^+\, U_{E_n}\, gdm$$

d'où

$$\int (f_n Q)^+ \, gdm = \int (f_n Q)^+ \, U_{E_n} 1_{E_n} \, gdm \leq \int (f_n Q)^+ \, U_{E_n} \, gdm$$

$$\leq \| f_n (1-Q) \|_{L^1} \; \| U_{E_n} 1 \| \leq \rho \, \| f_n \, (1-Q) \|_{L^1} \longrightarrow 0$$

d'où, comme $\int f_n \, Q \, gdm = 0$:

$$\| f_n \|_{L^1} = \| f_n Q \|_{L^1} = 2 \int (f_n Q)^+ \, gdm \longrightarrow 0$$

On a donc bien $g \in S'$ (pour P) ∎

BIBLIOGRAPHIE

[B_1] Antoine BRUNEL
" Chaînes abstraites de Markov vérifiant une condition de Orey "
Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte
Gebiete : 19, p. : 323-329 (1971)

[B_2] Antoine BRUNEL
" Thèse " - Paris - 1966

[B_3] Antoine BRUNEL
" New conditions for existence of invariant measures in ergodic theory "
Lecture Notes 160 - 1970

[F_1] Shaul R. FOGUEL
" The ergodic theory of Markov processes "
(Van Nostrand) (1969)

[F_2] Shaul R. FOGUEL
" Ratio limit theorems for Markov processes "
Israel Journal of Mathematics : 7, p. 384-392 (1969)

[F_3] Shaul R. FOGUEL
" Remarks on conservative operators "
Israel Journal of Mathematics : 6, vol. 4 (1968)

[F_4] Shaul R. FOGUEL
A paraître

[H_1] Shlomo HOROWITZ
" On σ - finite invariant measures for Markov processes "
Israel Journal of Mathematics : 6, p. 338-345 (1968)

[H_2] Shlomo HOROWITZ
" Markov processes on a locally compact space "
Israel Journal of Mathematics : 8, p. 311-324 (1970)

[J] Naresh C. JAIN
" Some limit theorems for a general Markov process "
Zeitschrift für etc ...
6, p. 206-223 (1966)

[L] Michael LIN
" Mixed ratio limit theorems for Markov processes "
Israel Journal of Mathematics : 8, p. 357-366 (1970)

[M_1] Michel METIVIER
" Existence of an invariant measure and an Ornstein ' s ergodic theorem "
Annals of Mathematical Statistics : 40, p. 79-96 (1969)

[M_2] Michel METIVIER
" Théorèmes limite quotient pour chaînes de Markov récurrentes au sens de Harris "
Ann. Inst. H. Poincaré - VIII - n° 2, 1972, p. 93-105

[N_1] Jacques NEVEU
" Existence of bounded invariant measures in ergodic theory "
Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. II. P. 461-472 (1965)

[N_2] Jacques NEVEU
" Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris "
Ann. Inst. Fourier. Tome XXII - Fasc. 2 - 1972

[O] Steven OREY
" Limit theorems for Markov chain transition probability functions "
Lecture Notes - University of Minnesota (1968)

P. CREPEL
E.R.A. n° 250 du C.N.R.S.
Université de RENNES
B.P. 25 A
35031 RENNES CEDEX