MARTIN ZERNER

Sur les perturbations analytiques

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 363-370
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__363_0>

SUR LES PERTURBATIONS ANALYTIQUES

par

Martin ZERNER

Université de Nice

-=-=-=-=-=-=-=-=-

Les opérateurs différentiels dont il va être question sont (malheureusement) à coefficients constants sur $\mathbb{R}^\ell$.

DEFINITION 1.- Nous appellerons perturbation analytique la donnée d'un voisinage connexe Δ de 0 dans $\mathbb{C}$ et d'une application qui à tout $Z \in \Delta$ fasse correspondre un polynôme P_Z dont les coefficients soient des fonctions analytiques sur Δ et que se vérifie la condition :

(A) Il existe un voisinage ouvert Ω de l'origine dans $\mathbb{R}^\ell$ et une fonction $Z \mapsto E_Z$ holomorphe sur Δ à valeurs dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et telle que :

$$\forall Z \in \Delta \qquad P_Z(\partial/\partial x)E_Z = \delta \ .$$

On connaît les deux résultats suivants. Si les coefficients de P_Z sont analytiques en Z et les opérateurs différentiels $P_Z(\partial/\partial x)$ sont également forts au sens de HORMANDER [1] alors $Z \to P_Z$ définit une perturbation analytique (ZERNER [1]). D'autre part, si on renforce la condition (A) en exigeant que Ω soit $\mathbb{R}^\ell$ tout entier, la condition d'égale force des $P_Z(\partial/\partial x)$ devient nécessaire (TREVES [1]).

L'objet de cette communication est de donner une condition nécessaire en gardant son caractère local à la condition (A).

Dans la suite ξ sera une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^\ell$ et a un vecteur n'appartenant pas au sous-espace :

$$N_\xi = \{y \ ; \ \langle y,\xi\rangle = 0\} \ .$$

DEFINITION 2.- Une distribution T est semi-régulière par rapport à ξ sur un ouvert ω, si elle vérifie au voisinage de chaque point de ω la condition suivante dont on sait (SCHWARTZ [1]) qu'elle est indépendante du choix du vecteur a :

pour tout Φ appartenant à $\mathcal{D}(N_\xi)$, la distribution : $\int_{N_\xi} T(at+y)\ \Phi(y)\ dy$ est une fonction indéfiniment différentiable de t.

(Ici et dans la suite j'utilise la notation intégrale, abusive mais commode, pour les distributions et les noyaux-distributions.)

DEFINITION 3.- L'opérateur différentiel P est hypoelliptique en ξ si toute distribution T est semi-régulière par rapport à ξ sur tout ouvert où PT est semi-régulière par rapport à ξ.

Le résultat suivant est un cas particulier, d'ailleurs très facile, de GARDING et MALGRANGE [1] (cf. TREVES [2] ch. 8).

PROPOSITION 1.- Pour que l'opérateur différentiel $P(\partial/\partial x)$ soit hypoelliptique en ξ il faut et il suffit que dans le polynôme en τ $P(\tau\xi+\eta)$, le coefficient du terme de plus haut degré soit indépendant de η .

Une application de la méthode classique de la parametrix donne :

PROPOSITION 2.- S'il existe un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbb{R}^{\ell}$ et une distribution E sur Ω semi-régulière par rapport à ξ en dehors de 0 telle que :

$$P(\partial/\partial x)E = \delta ,$$

alors P est hypoelliptique en ξ .

(Il est clair que réciproquement, si P est hypoelliptique en ξ toute solution élémentaire est semi-régulière en dehors de l'origine.)

La proposition suivante va utiliser le concept d'ensemble polaire de la théorie du potentiel. Pour nos besoins, il suffit largement de savoir que dans $\mathbb{C}$ un sous-ensemble de longueur non nulle dans un arc rectifiable est non polaire (a fortiori un ensemble de mesure non nulle est non polaire).

PROPOSITION 3.- Soit $(\Delta,\ Z \mapsto P_Z)$ une perturbation analytique. Supposons que pour tout Z appartenant à un ensemble non polaire, P_Z soit hypoelliptique en ξ . Alors P_Z est hypoelliptique en ξ pour tout $Z \in \Delta$.

Démonstration. Nous allons montrer que E_Z est semi-régulière par rapport à ξ en dehors de 0 (proposition 2). Soit $\Phi \in \mathcal{D}(N_\xi)$ de support assez petit. Posons :

$$F(Z) = \int_{N_\xi} E_Z(at+y)\ \Phi(y)\ dy .$$

Pour chaque Z , c'est une distribution sur un ouvert U de $\mathbb{R}$ et F est une fonction analytique sur Δ à valeurs dans $\mathcal{D}'(U)$. Soit A un ensemble non-polaire tel que pour $Z \in A$, P_Z soit hypoelliptique en ξ . Pour $Z \in A$, $F(Z)$ est indéfiniment différentiable sur U si le support de Φ ne contient pas l'origine, sur U privé de 0 s'il la contient. On peut alors appliquer la proposition 3 p. 180 de ZERNER [2]: $F(Z)$ est indéfiniment différentiable sur U si le support de Φ ne contient pas l'origine, sur U privé de 0 s'il la contient, et ce pour tout $Z \in \Delta$.

THEOREME.-

Dans une perturbation analytique, les caractéristiques réelles de P_Z ne dépendent pas de Z , non plus que son ordre.

Démonstration. ξ ne peut être caractéristique que pour tout $Z \in \Delta$ ou pour des points isolés seulement. La proposition 3 s'applique donc et le théorème résultera du :

LEMME 1.

Sous les hypothèses de la proposition 3 on a :

$$P_Z(\tau\xi+\eta) = a(Z)\tau^{m'} + \sum_{n=0}^{m'-1} a_n \tau^n$$

où $a(Z)$ ne s'annule pas et ne dépend pas de η et m' ne dépend pas de Z .

Démonstration. Vu les propositions 1 et 3, il ne reste plus qu'à démontrer que m' ne dépend pas de Z . En raison de l'analycité des coefficients de P_Z , la seule variation possible est que m' s'abaisse en des points isolés, soit Z_o l'un d'eux, soient m_o la valeur que prend m' en Z_o et $m_1 \geqslant m_o$ la valeur que prend m' au voisinage de Z_o .

Choisissons des voisinages ouverts de 0, U dans $\mathbb{R}$ et V dans N_ξ .

Posons :

$$\omega = \{ta+y \ ; \ t \in U, \ y \in V\}$$

et supposons U et V choisis de telle façon que

$$\bar{\omega} + \bar{\omega} \subset \Omega .$$

Nous avons besoin maintenant de définir un certain nombre d'espaces fonctionnels.

B^p désignera l'espace des distributions tempérées S sur R telles que le produit par $(1+t^2)^{p/2}$ de la transformée de Fourier $\hat{S}$ de S soit une fonction continue bornée.

B_U^p désignera l'espace des restrictions à U de distributions appartenant à B^p et B_c^p l'espace des distributions appartenant à B^p dont le support est un compact de U.

$\mathcal{D}'(B_U^p)$ désigne l'espace des distributions sur ω qui, en tant que noyaux, appliquent $\mathcal{D}(V)$ dans B_U^p et $\mathcal{E}'(B_c^p)$ la partie de cet espace constituée de distributions à support compact dans ω.

Nous utiliserons trois remarques concernant le rapport entre ces espaces et un opérateur différentiel $P(\partial/\partial x)$ où P vérifie :

$$P(\tau\xi+\eta) = a\tau^{m'} + \sum_{n=0}^{m'-1} a_n \tau^n$$

avec a indépendant de η.

Premièrement un raisonnement désormais classique (SCHWARTZ [2] p. 130) montre que si $Pu \in \mathcal{D}'(B_U^p)$, alors $u \in \mathcal{D}'(B_U^{p+m'})$.

Deuxièmement, et en conséquence, si $E \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifie $PE = \delta$, alors la convolution par E applique $\mathcal{E}'(B_c^p)$ dans $\mathcal{D}'(B_U^{p+m'})$.

Troisièmement, soient p et q deux nombres. Supposons que toute $u \in \mathcal{E}'(\omega)$

telle que $Pu \in \mathcal{E}'(B_c^p)$ appartienne à $\mathcal{E}'(B_c^{p+q})$. On a alors $q \leqslant m'$.

Revenons à notre perturbation analytique. D'après la deuxième remarque ci-dessus, pour Z assez voisin de Z_o mais distinct de lui, $E_Z *$ applique $\mathcal{E}'(B_c^p)$ dans $\mathcal{D}'(B_U^{p+m_1})$. Raisonnons par l'absurde en supposant $m_o < m_1$. Soient $\Phi \in \mathcal{E}'(B_c^p)$ et $\psi \in \mathcal{D}(V)$. On a pour Z voisin de Z_o et distinct de lui :

$$\int_{N_\xi} \psi(y)\, E_Z * \Phi(at+y)\, dy \in B_U^{p+m_1} .$$

Soit encore $m_2 \in]m_o, m_1[$; d'après la proposition 2 p. 179 de ZERNER [2]

$$\int_{N_\xi} \psi(y)\, E_{Z_o} * \Phi(at+y)\, dy \in B_U^{p+m_2} .$$

Donc, E_{Z_o} applique $\mathcal{E}'(B_c^p)$ dans $\mathcal{D}'(B_c^{p+m_2})$ et la troisième des remarques ci-dessus nous amène à une contradiction.

<u>Corollaire</u> 1. Dans une perturbation analytique, soit Q_Z la partie principale de P_Z. Supposons que Q_o soit à coefficients réels et que chacun de ses facteurs irréductibles soit elliptique ou possède un zéro réel où sa différentielle soit réelle non nulle. Alors Q_Z est le produit d'un polynôme fixe par un polynôme elliptique.

<u>Corollaire</u> 2. (Notations du corollaire 1) Si Q_o est hyperbolique, Q_Z est fixe à un facteur près non nul et ne dépendant que de Z.

Ces deux corollaires s'obtiennent à partir des deux lemmes suivants.

<u>LEMME 2</u>.

Si P_Z est un polynôme à coefficients analytiques en Z et si ses racines réelles sont les mêmes pour tout Z, l'ordre de multiplicité de chacune de ces racines est indépendant de Z.

<u>Démonstration</u>. Il suffit de la faire pour les polynômes à une indéterminée puisque toutes les dérivées d'une fonction de plusieurs variables peuvent se cal-

culer comme combinaisons linéaires de dérivées "pures" par rapport à des vecteurs.

On peut aussi supposer que la racine étudiée est zéro, qu'elle est d'ordre μ sauf au point $Z=0$ où elle devient d'ordre $\mu+\nu$. Le polynôme P_Z/ξ^{μ} n'a alors pas de racine réelle dans un certain voisinage de 0 pour Z assez petit mais non nul. S'il a une racine nulle pour $Z=0$, cela contredit le théorème de Puiseux.

LEMME 3.

Soient

$$P = x_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(x_2,\dots, x_\ell)\, x_1^k$$

$$Q = x_1^n + \sum_{k=0}^{n-1} B_k(x_2,\dots, x_\ell)\, x_1^k$$

deux polynômes irréductibles à coefficients complexes et à ℓ indéterminées. Supposons qu'il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}^{\ell-1}$ et une fonction f analytique sur U telle que :

$$P[f(x_2,\dots, x_\ell),x_2,\dots, x_\ell] = Q[f(x_2,\dots, x_\ell)x_2,\dots, x_\ell] = 0 .$$

Alors $P = Q$.

C'est un cas particulier d'un résultat bien connu des spécialistes de géométrie algébrique.

Remarque sur le corollaire 1. Si les caractéristiques réelles de P_o sont simples, tous les P_Z ont la même force au sens de HORMANDER [1].

Remarque sur le corollaire 2. Si P_o est hyperbolique, il en est de même des parties principales des Q_Z mais nous n'obtenons pas l'hyperbolicité des P_Z qui équivaut (CHAILLOU [1], SVENSSON [1]), encore à ce que tous les P_Z soient d'égale force.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHAILLOU.- Sur les ensembles bornés A de distributions polynômes inversibles dans $\mathcal{D}'(\Gamma)$ et d'inverse A^{-1} borné et sur les hypersurfaces Γ-hyperboliques. Thèse Paris 1969 et livre à paraître.

[1] GARDING et MALGRANGE.- Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques et partiellement elliptiques. Math. Scand. 9,5 (1961).

[1] HORMANDER.- On the theory of general partial differential operators. Acta Math. 94,161 (1955).

[1] SCHWARTZ.- Distributions semi-régulières et changements de coordonnées. J. Math. pures et appl. 9ème série t. 36 (1957) p. 109-127.

[2] SCHWARTZ.- Théorie des distributions (Paris, Hermann 1957) tome 1.

[1] SVENSSON.- Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part. Ark. Mat. 8 (1969), 145-162.

[1] TREVES.- Un théorème sur les équations aux dérivées partielles à coefficients constants dépendant de paramètres. Bull. Soc. Math. France 90 (1962) p. 473-486.

[2] TREVES.- Linear partial differential equations with constant coefficients. Existence, approximation and regularity of solutions. (Gordon and Breach, 1966).

[1] ZERNER.- Solution élémentaire locale d'équations aux dérivées partielles dépendant d'un paramètre. CRAS 248 (1959) p. 3679-3681.

[2] ZERNER.- Théorie de Hartogs et singularités des distributions. Bull. Soc. Math. France 90 (1962) p. 165-184.